1. Непрерывные модели

Какие бывают числа

Вот на экране вы видите, что ширина полосы уменьшилась в корень из двух раз.

“Физики все еще шутят”

При изучении численных моделей мы не говорили подробно о том, что мы понимаем под числом. Требовалось только, чтобы к числам можно было применять обычные операции – арифметические и/или сравнения. Но этим свойствам удовлетворяют разные множества чисел. Они порождаются разными практическими и теоретическими задачами. Рассмотрим сначала арифметические операции. Начнем с самого простого числа – единицы. Если применять к ней операцию сложения, то получим все натуральные числа. Их множество обозначается через $\mathbb{N}$.

Если к сложению добавить вычитание, то появятся отрицательные числа и 0. Вместе с натуральными они образуют множество целых чисел (обозначается $\mathbb{Z}$). Отрицательные числа могут пригодиться, если приходится продолжать нумерацию не только вправо, но и влево.

Умножение никаких новых чисел не добавляет – произведение целых чисел снова целое. А вот деление порождает новые числа – дроби. Целые и дробные числа называются рациональными (от лат. ratio – отношение) и образуют множество $\mathbb{Q}$.

Исторически разные понятия числа возникали несколько в другом порядке, причем расширение понятия числа порождалось необходимостью, а именно, расширением круга задач, решаемых с помощью чисел. Самая первая задача, приведшая к понятию числа – это, конечно, задача счета. Она породила натуральные числа. По–видимому, также давно натуральные числа начали использоваться для нумерации объектов в некотором порядке. Мы знаем, что счет происходит в количественной (а именно, абсолютной) шкале, нумерация же порождает порядковую модель. Итак, самые первые известные человечеству числа дают решение сразу двух задач – количественной и порядковой.

Задачи, порождающие рациональные числа

Существуют ли задачи, в которых нам может не хватить натуральных чисел? Существуют, причем они также бывают и количественные, и порядковые.

1. Задача измерения. Измерение начинается там, где существует единица измерения или эталон. Эталон можно некоторым образом “прикладывать” к самому себе и сравнивать с объектом. При этом операция “прикладывания” должна обладать теми же свойствами, что и сложение чисел. Если в объекте уместилось целое (натуральное или 0) число эталонов, то это число и принимается за число-

вое значение объекта в данной модели. Если же эталон не уложился целое число раз, то его делят на части – половинки, трети, десятые и т.д. Доли эталона снова “прикладывают” к измеряемому объекту. Если удалось уложить в объект целое число измельченных долей, то его можно описать дробным (рациональным) числом. Например, два целых эталона, одна половинка и три одиннадцатых доли дают число $2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{11} = \frac{61}{22}$.

2. <u>Задача упорядочения</u>. Измерение с помощью эталона возможно только в количественных моделях. Но это не значит, что рациональные числа не нужны в более слабых шкалах. Рассмотрим какую–нибудь порядковую модель. Если она содержит лишь конечное число элементов, то для их представления достаточно натуральных чисел: можно просто пронумеровать элементы в том порядке, который мы хотим отобразить в модели. Например, для оценки знаний используются целочисленные отметки от 2 до 5.

Но что произойдет, если в модели появится новый элемент? Каким числом его описать? Если ученик ответил между 3 и 4, ему ставят 3 с плюсом или 4 с минусом. А можно воспользоваться рациональными числами, например, поставить отметку 3,5. При необходимости этот процесс можно продолжить: если следующий ученик ответит лучше этого, но хуже, чем на 4, ему можно поставить оценку 3,75 и т.п. ☺

Задачи, порождающие вещественные числа

Для многих целей нам вполне хватает рациональных чисел. Действительно, с ними можно делать все четыре арифметических действия, их можно сравнивать как на равенство/неравенство, так и с помощью отношения “больше” (или “меньше”). Однако существуют задачи, в которых и рациональных чисел может не хватить. Разберем причины этого на основе тех же двух задач.

1. <u>Задача измерения</u>. Возникает вопрос – всегда ли можно подобрать доли эталона так, чтобы измерить объект т о ч н о ? Оказывается, не всегда. Этот феномен открыли еще древние греки, когда они попытались измерить таким образом диагональ единичного квадрата. Было доказано, что отношение диагонали к стороне (по теореме Пифагора оно равно $\sqrt{2}$) не является рациональным числом. Это открытие произвело большое впечатление на тогдашних математиков. С тех пор было найдено много нерациональных чисел, но только в конце прошлого века была построена соответствующая математическая теория. Она изложена в учебниках по математическому анализу. Здесь же мы дадим интуитивное, наглядное представление о нерациональных числах.

> Определение 1.1. Все числа, получающиеся как результат процесса измерения, называются действительными или вещественными. Частным случаем действительных чисел являются, как было показано, рациональные числа. Остальные вещественные числа называются иррациональными. Множество вещественных чисел обозначается через $\mathbb{R}$.

2. <u>Задача упорядочения</u>. Мы уже говорили, что рациональные числа в порядковых моделях нужны тогда, когда приходится вставлять новые элементы

между уже описанными. При этом, сколько бы раз мы не добавляли новые элементы между старыми, для их описания всегда хватит рациональных чисел, так как между любыми двумя рациональными числами существует третье (например, их полусумма). Но такая картина сохранится, только если вставку элементов мы будем проводить конечное число раз. Если же элементов бесконечное число, то могут возникнуть сложности. Допустим, мы знаем, что некоторый элемент C находится между элементами A_n и B_n, где n пробегает все натуральные значения. Пусть элементам A_n, B_n уже поставлены в соответствие числа a_n, b_n, $a_n<b_n$. Тогда для элемента C надо подобрать такое число c, чтобы для всех n выполнялись соотношения $a_n<c<b_n$. Но всегда ли оно существует? Оказывается, не всегда. Можно сказать, что множество рациональных чисел "дырявое": в том месте, где мы ожидаем найти нужное нам число, никакого рационального числа нет. Например, рассмотрим все отрезки с рациональными длинами, которые короче диагонали единичного квадрата (их бесконечно много), а также все те, что длиннее ее. Какой отрезок больше любого из первой группы, но меньше любого из второй? Ясно, что это сама диагональ. Но ее длину, как уже было сказано, невозможно записать рациональным числом.

Математики говорят, что множество рациональных чисел неполное. Если же мы его пополним, т.е. вставим все недостающие значения, то получим множество вещественных чисел $\mathbb{R}$. Полное множество называется еще континуум (от латинского слова, означающего "непрерывный").

Итак, вещественные числа нужны для построения порядковых моделей с бесконечным числом элементов. ☺

До сих пор во всех задачах, как рациональных, так и вещественных, мы использовали только положительные числа и 0. Это соответствует истории развития понятия "число". Как ни странно, отрицательные числа возникли в математике довольно поздно, гораздо позже иррациональных. Еще в XIV веке Кардано, получая отрицательные корни уравнения, осторожно называл их "менее чистыми корнями". Однако отрицательные числа (как рациональные, так и вещественные) могут быть весьма полезными при построении математических моделей. Дело в том, что и порядковые, и количественные численные модели предполагают наличие некоторого порядка в расположении элементов объекта: "больше", "правее", "позже", "лучше", "красивее", "умнее" и т.п. Соответственно упорядочены и числовые значения элементов, например, по возрастанию. Но ведь может возникнуть необходимость продолжить ряд элементов (и, соответственно, их численных значений) и в противоположную сторону ("меньше", "левее", "раньше" , "хуже" , "уродливее" , "глупее"). Если элементы объекта меньше (раньше, хуже и т.п.) того, который помечен нулем, то им соответствуют отрицательные числа. Например, это высоты ниже уровня моря, отрицательные температуры и т.п. Отрицательные числа используются в исторических исследованиях для обозначения дат до нашей эры. Иногда также возникает желание поставить отрицательную оценку за ответ. Например, так происходит в некоторых интеллектуальных играх, в которых за неправильный ответ вычитают очки. ☺

Числовая прямая

Наглядно множество действительных чисел можно представить в виде так называемой вещественной прямой. Она получается в процессе измерения длины отрезка. Как уже было сказано, для измерения необходимо выбрать начало отсчета и эталон. Поэтому одну из точек прямой обозначают числом 0, а другую 1. Отрезок с концами в этих точках и будет эталоном. Если откладывать его и его доли от 0, мы пометим каждую точку на прямой некоторым числом. При этом отрезки, отложенные в том же направлении, что и 1, соответствуют положительным числам, а в противоположном – отрицательным.

А как можно представить отдельное вещественное число? Для этого нам понадобится понятие предельного перехода. Мы видели, что необходимость в новых числах возникает тогда, когда измерение нельзя закончить за конечное число шагов. Оно превращается в бесконечный процесс, результатом которого (предельным значением) и будет вещественное число. Для определенности можно считать, что на каждом шаге величина эталона делится на 10 частей. Тогда на первом шаге мы найдем измеряемую величину с точностью до целых, на втором – с точностью до десятых, потом до сотых, тысячных и т.д. Например, для иррационального числа $\sqrt{2}$ получим соотношения $1<\sqrt{2}<2$; $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$; $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$; $1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$ и т.д. Этот процесс никогда не закончится, поэтому $\sqrt{2}$ можно изобразить только в виде бесконечной десятичной дроби: $\sqrt{2}=1{,}41421356\ldots$ Ясно, что таким способом можно представить любую точку вещественной прямой. Этот способ дает нам другое определение вещественного числа: вещественным числом называется любая бесконечная десятичная дробь. Конечную десятичную дробь тоже можно считать бесконечной, если дополнить ее нулями.

Дискретные и непрерывные модели

Теперь кроме классификации моделей по допустимым преобразованиям, мы можем сгруппировать их по использующимся числам.

Определение 1.2. Модели, для которых достаточно натуральных или рациональных чисел, называются дискретными, а те, которые используют вещественные числа – непрерывными.

☝ Замечание 1. Конечно, это определение нельзя считать строгим. Понятие дискретности четко определяется в математической дисциплине, называемой топология. Интуитивное описание состоит в том, что дискретные модели состоят из изолированных элементов, а непрерывные – из сплошных множеств (отрезков, интервалов и т.п.). ☺

Предельный переход и непрерывность

При введении вещественных чисел мы воспользовались новой операцией, неизвестной в алгебре. Она применяется при переходе от конечного числа элементов к бесконечному. Само понятие бесконечности включает в себя представление об изменении, движении. Действительно, мы не можем перебрать бесконечное число значений, сделать бесконечное число операций, сложить бесконечное число слагаемых и т.п. Однако мы можем рассмотреть вместо бесконечного большое и все увеличивающееся количество действий. Бесконечность – это как бы результат такого увеличения. Переход от конечного числа значений к бесконечному называется предельным переходом. Различные типы предельных переходов изучаются в математическом анализе.

Предел функции

Самый простой предельный переход – это предел функции. Пусть аргументы и значения некоторой функции f являются вещественными числами. Выберем два значения аргумента: одно фиксированное, например, a, а другое переменное, например, x. Будем менять x, приближая его к a. Тогда и $f(x)$ будет меняться. Если окажется, что при этом и значение функции приближается к какому–нибудь числу b, то это число называется пределом функции f при x, стремящемся к a. Записывается это так: $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ или $b = \lim_a f$ (от слова limit – предел). Для того, чтобы это определение стало строгим, надо более четко описать понятие "приближения", "близких точек". Обычно это делается с помощью понятия окрестность: окрестность точки – это множество точек, близких к ней. Заменяя слово "приближается" на "находится в окрестности", получаем такое

Определение 1.3. Число b называется пределом функции f при x, стремящемся к a, если значение функции $f(x)$ попадает в любую заранее заданную окрестность числа b, как только x оказывается в подходящей окрестности числа a, но не совпадает с ним (говорят еще: находится в проколотой окрестности a).

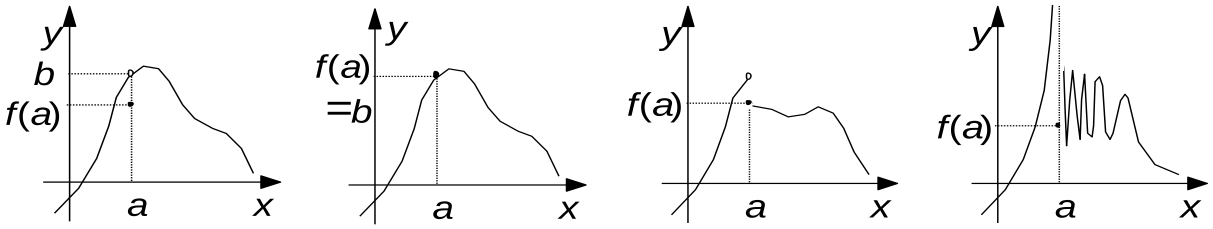
Осталось уточнить понятие "окрестность". Проще всего за окрестность взять интервал с центром в данной точке.

Определение 1.4. Окрестностью (или ε–окрестностью) точки x называется интервал вида $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, где ε – произвольное положительное число. Обозначается она $U(x)$ или $U_\varepsilon(x)$. Проколотую окрестность, т.е. окрестность с выкинутой точкой x, будем обозначать $\breve{U}(x)$ или $\breve{U}_\varepsilon(x)$. Имеем $\breve{U}_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x)\setminus\{x\}$.

При таком определении окрестности соотношение $x\in U_\varepsilon(a)$ означает, что x отстоит от a на расстояние, меньшее ε, т.е. $|x-a|<\varepsilon$. Тогда определение предела можно переформулировать так:

Определение 1.5. Число b называется пределом функции f при x, стремящемся к a, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $|f(x)-b|<\varepsilon$ для всех x, таких, что $|x-a|<\delta$, $x\neq a$.

При отыскании предела мы не учитываем значение функции в самой точке a, оно может быть любым.



а) б) в) г)

На приведенном рисунке предел существует в случаях а) и б), причем в первом случае значение функции в точке a не совпадает с предельным, а во втором – совпадает. На рисунках в) и г) предела у функции в точке a не существует.

Случай б) является самым распространенным, поэтому он имеет свое название.

Определение 1.6. Функция называется непрерывной в точке a, если ее предел в этой точке совпадает со значением функции в той же точке.

Все элементарные функции (т.е., функции, заданные формулами) непрерывны в каждой точке, где они определены.

Свойства предела. Расширенная прямая

Интересно выяснить, как соотносится новая операция (переход к пределу) с уже известными (арифметическими и сравнением). Оказывается, в большинстве случаев предел ведет себя достаточно ”хорошо”. Например, предел суммы двух функций равен сумме пределов, то же верно для разности, произведения и частного (кроме того случая, когда знаменатель стремится к нулю). Если же знаменатель стремится к нулю, а числитель – нет, говорят, что отношение стремится к бесконечности (является бесконечно большим).

Бесконечность – это не число, однако ее можно добавить к множеству вещественных чисел в качестве нового элемента ∞. После этого вещественная прямая превращается в так называемую расширенную прямую $\mathbb{R}^*$.

На самом деле существует два способа превратить прямую в расширенную. Один можно образно представить так: возьмем прямолинейный отрезок и будем растягивать его “до бесконечности”. В пределе его концы превратятся в два различных бесконечно удаленных элемента: $+\infty$ и $-\infty$. При этом $+\infty$ будет больше любого вещественного числа, а $-\infty$ соответственно меньше. Другой способ состоит в том, чтобы совместить обе бесконечности. Для этого “свернем” исходный отрезок в окружность, тогда его концы сольются в одну точку. Будем теперь увеличивать радиус этой окружности. При этом ее кривизна будет уменьшаться и в пределе станет равной 0. Тогда окружность станет прямой с соединенными концами, точка их соединения и называется ∞. Заметьте, что эта величина не имеет знака. Если для обычных чисел 5 и +5 это одно и то же, то для бесконечности значения ∞ и $+\infty$ различаются.

Раз мы добавили новый элемент к множеству чисел, надо научиться работать с ним, т.е. производить арифметические операции. В большинстве случаев они вводятся вполне естественно, например:

$\infty + x = \infty,\ x \in \mathbb{R}$	$+\infty + x = +\infty,\ x \in \mathbb{R}$	$-\infty + x = -\infty,\ x \in \mathbb{R}$
$\infty - x = \infty,\ x \in \mathbb{R}$	$+\infty - x = +\infty,\ x \in \mathbb{R}$	$-\infty - x = -\infty,\ x \in \mathbb{R}$
	$+\infty + (+\infty) = +\infty$	$-\infty + (-\infty) = -\infty$
$\infty \cdot x = \infty,\ x \neq 0$	$+\infty \cdot x = +\infty,\ x > 0$	$-\infty \cdot x = -\infty,\ x > 0$
	$+\infty \cdot x = -\infty,\ x < 0$	$-\infty \cdot x = +\infty,\ x < 0$
$\infty \cdot \infty = \infty$	$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$	$-\infty \cdot (+\infty) = -\infty$
$\infty / x = \infty,\ x \in \mathbb{R}$	$+\infty / x = +\infty,\ x>0$	$-\infty / 0 = \infty$
$x / \infty = 0,\ x \in \mathbb{R}$	$x / +\infty = 0,\ x \in \mathbb{R}$	$x / -\infty = 0,\ x \in \mathbb{R}$

Все эти равенства можно применять при вычислении пределов. Например, если одно из слагаемых стремится к $+\infty$, а другое к конечному числу x, то и сумма стремится к $+\infty$. Однако есть и особые случаи, когда предел суммы (произведения, частного) нельзя найти, зная только пределы слагаемых (сомножителей, делимого и делителя). Такие случаи называются н е о п р е д е л е н н о с т я м и. Выделяют 4 типа арифметических неопределенностей и 3 – показательно–степенных. К арифметическим относятся неопределенности $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$. Показательно–степенные неопределенности – это 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}. Конечно, эти записи не являются операциями над числами и ∞, они являются только у с л о в н ы м и о б о з н а ч е н и я м и. Например, выражение $\frac{0}{0}$ обозначает любое отношение функций, в котором и числитель и знаменатель стремятся к 0.

В случае неопределенности предел может быть равен как конечному числу, в том числе 0, так и ∞, а может и вовсе не существовать. Для нахождения предела (раскрытия неопределенности) нужно исследовать каждый случай отдельно. При этом либо преобразуют функцию к виду, не содержащему неопределенности, либо используют стандартные исследованные случаи, называемые замечательными пределами.

Примеры.

1. Найти предел $\lim_{1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$. Это неопределенность типа $\frac{0}{0}$, так как и числитель, и знаменатель принимают при $x = 1$ значение 0. Для раскрытия неопределенности разложим числитель и знаменатель на множители. Получим

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2},$$

т. е. выражение, не содержащее неопределенности. Действительно, подставляя в последнюю дробь значение $x = 1$ получаем число 3, которое и будет пределом данного отношения.

2. Найти $\lim_{\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$. Здесь неопределенность имеет вид $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть ее, поделим числитель и знаменатель на x^2. Получим выражение

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} = \frac{1+{}^1\!/_x-{}^2\!/_{x^2}}{1-{}^3\!/_x+{}^2\!/_{x^2}},$$

в котором и числитель, и знаменатель стремятся к 1. Значит, и вся дробь стремится к 1.

3. Найти $\lim_\infty(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$. Это неопределенность типа ∞–∞. Чтобы избавиться от нее, запишем выражение в виде дроби:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Здесь знаменатель стремится к ∞, поэтому вся дробь стремится к 0.

4. Первый замечательный предел имеет вид $\lim_0 \frac{\sin x}{x}$ и равен 1.

5. Второй замечательный предел используется для раскрытия неопределенностей типа 1^∞. Он имеет вид $\lim_\infty(1+{}^1\!/_n)^n$ или $\lim_0(1+x)^{{}^1\!/_x}$ и равен числу e = 2,71828…

6. В качестве следствия из второго замечательного предела можно вывести соотношение $\lim_0 \frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Производная и дифференциал

Понятие производной мы считаем известным из школьного курса математики. Оно является также одним из вариантов предельного перехода, а именно, типичным примером неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Действительно, производная определяется как предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к 0:

$$f'(x) = \lim\frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad \text{при } \Delta x\to 0.$$

Этот предел будет иметь конечное значение, только если и числитель (приращение функции) стремится к 0, что и выполняется для элементарных функций в большинстве точек.

Производная имеет смысл скорости изменения какого–либо показателя. Она используется, например, в моделях, описывающих динамические, изменяющиеся во времени процессы. В нашем курсе она будет иметь подсобное значение как инструмент для вычисления интеграла.

Новым по сравнению со школьным курсом является понятие дифференциала. Он определяется как главная линейная часть приращения. Дифференциал показывает, как изменялась бы величина, если бы скорость ее изменения была постоянной. Обозначается дифференциал функции $y=f(x)$ через dy или df. Вычисляется он по формуле $dy=f'(x)dx$, где $f'(x)$ – производная функции f, а dx – произвольное число, равное приращению Δx независимой переменной x.

Для простых функций дифференциал можно вычислить и без производной.

1) Численный эксперимент. Пусть $f(x)=x^2–x$. При x=2 эта функция имеет

значение 2^2–2=2. Как оно будет изменяться, если немного изменить x? Добавим к x=2 некоторое число dx и подсчитаем результат:

dx	1	–1	0,1	–0,1	0,01	–0,01	0,001	–0,001
x+dx	3	1	2,1	1,9	2,01	1,99	2,001	1,999
f(x+dx)	6	0	2,31	1,71	2,0301	1,9701	2,003001	1,997001
разница Δf= f(x+dx)–f(x)	4	-2	0,31	-0,29	0,0301	-0,0299	0,003001	-0,002999

Мы видим, что числа в последней строке примерно в 3 раза больше, чем в первой. И чем меньше dx, тем точнее это соотношение. Можно записать приближенное равенство Δf≈3dx. Выражение 3dx и есть дифференциал функции x^2–x в точке x=2. Можно проверить это и по общей формуле: $f'(x)$=2x–1, в точке x=2 получаем $f'(2)$=2·2–1=3, так что $dy=f'(x)dx$=3dx, как мы и ожидали.

2) Алгебраическое преобразование. Пусть f(x)=$\sqrt{x}$. Если заменить число x на x+dx, то новым значением функции будет f(x+dx)=$\sqrt{x+dx}$. Разница между новым и старым значениями есть Δf=$\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}$. Преобразуем это выражение так, чтобы dx оказался вне корня. Имеем

$$\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}=\frac{(x+dx)-x}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}=\frac{dx}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}\approx\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}$$

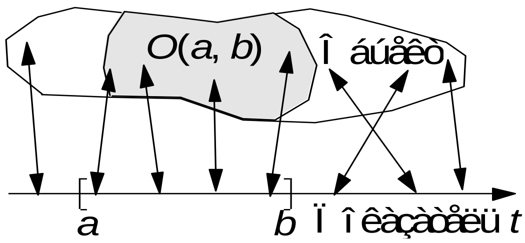
Приближенное равенство верно, если dx мало. Последнее выражение при каждом конкретном x имеет вид *число*·dx, так что оно и есть дифференциал. Кроме того, с помощью простых алгебраических преобразований мы нашли производную функции f(x)=$\sqrt{x}$, а именно, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Интеграл как обобщение суммы

Когда мы вводили различные усредненные характеристики для численных моделей (сноска?), мы давали определения только для дискретных (точнее, конечных) моделей. Попробуем теперь распространить их на непрерывный случай. Главная трудность здесь в том, что во всех трех определениях (моды, медианы и среднего) необходимо подсчитывать к о л и ч е с т в о элементов, что невозможно для непрерывной модели, где их бесконечное число. Значит, надо ввести для этого случая какую–то характеристику, подобную количеству. В математике такую величину называют мерой.

Мера, порожденная количественной шкалой

Как ввести в множестве–объекте меру? Это можно сделать по–разному. Например, если объект допускает количественную шкалу, то можно использовать единицу измерения, существующую в ней, как эталон количества (меры). Введем на объекте численный



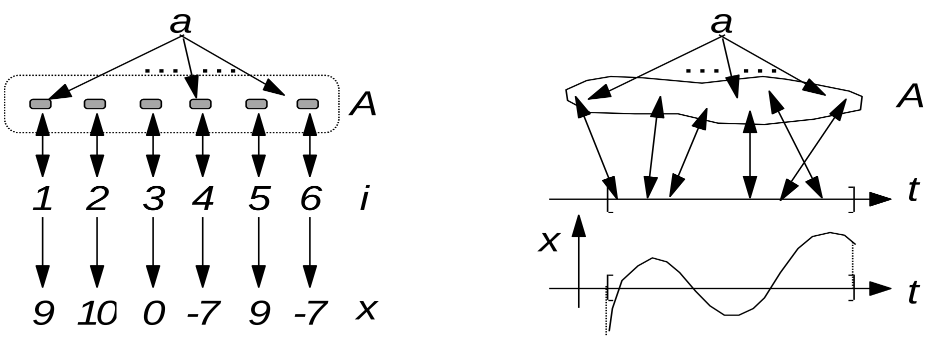
показатель t так, что для разных элементов объекта он принимает различные значения. Выделим в объекте все элементы, для которых t лежит в пределах от a

до b. Обозначим множество таких элементов через $O(a; b)$. Мерой этого множества можно считать длину отрезка $[a; b]$, т.е. $m(O(a; b))=b–a$. При допустимых преобразованиях (изменении эталона и сдвиге начала отсчета) эта величина изменится разве что пропорционально, т.е. все меры увеличатся или уменьшатся в одно и то же число раз. При этом равенство мер двух множеств сохранится.

Для примера рассмотрим в качестве объекта возраст человека. Его можно описать численно, например, в годах. Множество возрастов школьников в такой шкале имеет вид $O(6; 17)$. Его мера $m(O(6; 17))$ равна 17–6=11 годам.

Для наглядности проведем параллель между дискретным и непрерывным случаем:

Дискретная модель Непрерывная модель



Здесь через A обозначен объект, состоящий из элементов a, а через x – исследуемый параметр (численная модель). И в дискретном, и в непрерывном случае для описания x можно использовать функционал $x(a)$, заданный непосредственно на элементах объекта. Однако для нахождения количества (меры) множества элементов мы применили промежуточный параметр i (соответственно t). Численная модель $i(a)$ позволяет пересчитать элементы множества. Например, в множестве элементов с номерами i такими, что $2< i \le 5$, будет 5–2=3 элемента. Точно также вычисляется мера в непрерывном случае: все элементы со значениями t от 2 до 5 образуют множество с мерой 5–2=3.

Мы рассмотрели меру, порождаемую количественной шкалой. А можно ли подобным образом ввести меру с помощью порядковой шкалы? Нет, нельзя, так как мера сама по себе количественная характеристика. Например, пусть упорядоченный объект описывается некоторым непрерывным показателем t, принимающем неотрицательные значения. Введем с его помощью меру, как было показано выше. В частности, множества $O(0; 1)$, $O(1; 2)$, $O(2; 3)$ будут равновелики: у всех них мера равна 1. Можно сказать, что в них в некотором смысле одинаковое число элементов. Что изменится, если мы сделаем преобразование показателя по формуле $x=t^2$, допустимое в порядковой шкале? Для первого множества показатель x лежит в пределах от 0 до 1, для второго – от 1 до 4, а для третьего – от 4 до 9, так что в новой модели их меры равны 1, 3 и 5 соответственно. Как мы видим, равновеликие множества перешли в неравновеликие, так что понятие количества элементов (размера множества) на такую шкалу распространить нельзя.

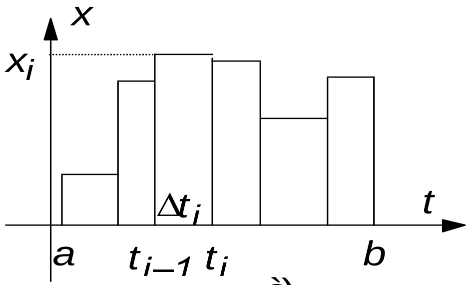
☝ Замечание 2. Несмотря на это, приведенный способ введения меры (через количественную шкалу) – не единственный. Далее мы разберем и другие способы описания меры, в частности, случаи многомерных моделей. Для них длина заменяется на площадь, объем и т.д. Еще один способ задания меры опирается на понятие плотности (см далее на стр. 17) ☺

Обобщение понятия суммы на непрерывный случай

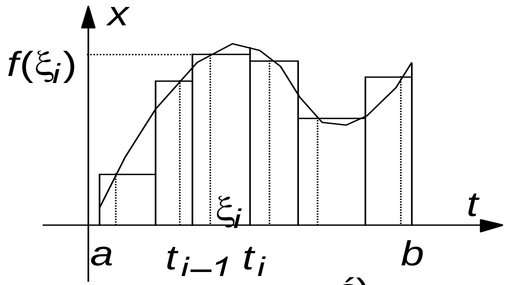
Попробуем теперь обобщить на непрерывный случай понятие суммы. Для этого запишем ее с использованием понятия количество элементов. Лучше всего показать это на примере. Пусть некоторая численная величина (показатель) задана для всех элементов множества–объекта. Например, в объекте 10 элементов, на которых показатель равен 5, 7, 7, 2, 3, 7, 5, 2, 5, 2, и нам необходимо просуммировать все эти значения. Можно, конечно, делать это последовательно, добавляя величины к сумме по очереди. Однако в данном случае численные значения повторяются, так что можно записать сумму так: $2\cdot 3+3\cdot 1+5\cdot 3+7\cdot 3$. Здесь в каждом произведении на первом месте стоит значение численной величины, а на втором – количество раз, когда величина принимала это значение. В общем виде: $S=\sum x_i n_i$, где x_i – все численные значения, которые принимает данная величина, а n_i – количество повторений для каждого значения. При этом сумма $\sum n_i$ равна общему числу элементов в объекте (в примере 3+1+3+3=10). В таком виде формула уже поддается обобщению, стоит только заменить частное понятие количества на общее понятие меры: $S=\sum x_i m_i$. Здесь x_i имеет тот же смысл, что и раньше, а m_i – мера того множества элементов объекта, на которых значение величины равно x_i. Заметим, что это определение подходит только для случая, когда число значений величины x конечно.

Проиллюстрируем это рассуждение для случая меры, порожденной количественным показателем t. В этом случае можно рассматривать сумму не только для величины $x(a)$, заданной непосредственно на элементах объекта, но и для числовой функции $x(t)$. Мы пока рассматриваем функции, принимающие только конечное число значений, причем для простоты будем считать, что каждое значение x_i принимается на некотором промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ (такая функция называется ступенчатой). Тогда искомая сумма принимает вид $S=\sum x_i \Delta t_i$, где через Δt_i обозначена длина i–го отрезка, $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$.(см. далее рис. а)).

В таком определении исходное множество может быть любым, в том числе и бесконечным, однако число значений у суммируемой величины обязательно должно быть конечным. Как преодолеть этот недостаток? Конечно, с помощью предельного перехода.



à)



á)

Пусть функция $x=f(t)$ задана на отрезке $[a;\ b]$. Построим для нее ступенчатую функцию, приближенно равную $f(t)$. Для этого надо выбрать ширину и высоту ступенек. Поэтому разобьем отрезок $[a;\ b]$ точками t_i на части, длина каждой части будет равна $\Delta t_i=t_i–t_{i–1}$ (см. рис. б)). Осталось подобрать высоту ступенек. Естественно в качестве высоты взять какое–нибудь значение функции на соответствующем отрезке, например, $f(\xi_i)$, где $\xi_i\in[t_i;\ t_{i+1}]$. Для полученной ступенчатой функции сумма значений принимает вид $\sum f(\xi_i)\Delta t_i$. Ее называют интегральной суммой функции f при разбиении $\{t_i\}$ и оснащении $\{\xi_i\}$.

Для того, чтобы построенная ступенчатая функция описывала исходную как можно точнее, необходимо уменьшать ширину ступенек. Введем обозначение $\delta=\max\ \Delta t_i$. Эту величину называют диаметром разбиения; чем она меньше, тем ступеньки уже. Теперь, чтобы вычислить сумму S для произвольной функции, устремим δ к 0.

Определение 1.7. Предел интегральных сумм $\sum f(\xi_i)\Delta t_i$ при $\delta\to 0$, если он существует, называется определенным интегралом от функции f по отрезку $[a;\ b]$ и обозначается $\int_a^b f$ или $\int_a^b f\,(t)dt$.

Вычисление определенного интеграла

Введенное нами понятие интеграла чисто теоретическое, для вычисления оно неудобно. Как вы знаете из школьной программы, для вычисления определенного интеграла применяется формула Ньютона–Лейбница, которая связывает его с первообразной. А именно, найдем какую–нибудь функцию F, производная которой совпадает с интегрируемой функцией f, $F'=f$. Такая функция называется первообразной от f. Тогда $\int_a^b f\,(x)dx=F(b)–F(a)=F(x)\Big|_a^b$. ☺

Несобственный интеграл

Иногда в приложениях приходится рассматривать интегралы по неограниченным областям, например, по лучу $[0;\ +\infty)$ или даже по всей прямой. В этом случае интегральную сумму построить нельзя, так как длины некоторых отрезков разбиения будут бесконечными. Аналогичные проблемы возникают, если функция не ограничена, т.к. в этом случае значение функции (первый сомножитель) будет уходить в бесконечность. В таких случаях интеграл называют несобственным. Ясно, что для его вычисления необходимо применить предельный переход, чтобы описать поведение на бесконечности. Например, пусть особенность (неограниченная область или функция) находится в правом конце области интегрирования, т.е. в точке b, причем для всех x, $a<x<b$ интеграл $\int_a^x f$ является собственным. Тогда по определению $\int_a^b f = \lim\limits_{x\to b-0} \int_a^x f$, если, конечно, этот предел существует. В этом случае говорят, что интеграл сходится. Для несобственных интегралов также выполняется формула Ньютона–Лейбница, только подстановку надо заменить пределом: если в точке b имеется особенность, то $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \lim_{b-0} F(x) - F(a)$.☺

Интеграл по мере. Плотность меры

Мера и ее свойства

В предыдущем разделе мы пришли к выводу, что для непрерывных моделей необходимо ввести понятие, аналогичное количеству элементов конечного множества, а именно, меру. Там же был приведен конкретный пример меры – длина отрезка. Однако этим примером все многообразие мер не исчерпывается. На самом деле это весьма обширный класс характеристик, обладающих определенными свойствами.

Определение 1.8. Пусть на подмножествах некоторого множества X определен функционал m, т.е. для некоторых (или всех) множеств $A\subset X$ задано численное значение $m(A)$. Этот функционал называется мерой, заданной на множестве X, если выполняются следующие свойства:

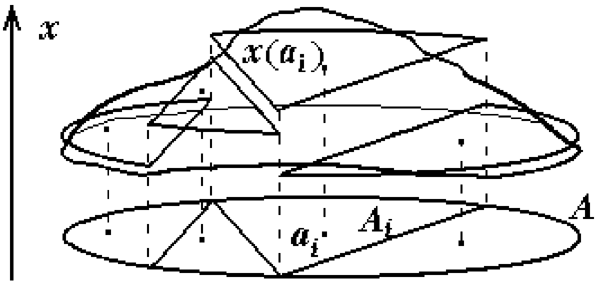
1. $m(A) \geq 0$ (неотрицательность);
2. $m(A\bigcup B) = m(A) + m(B)$, если $A\bigcap B = \varnothing$ (аддитивность).

Последнее свойство означает, что, если мы объединяем два множества, не содержащие общих элементов, то их меры суммируются. Примерами меры будут такие характеристики, как длина, площадь, объем, вес и т.п. Количество элементов (для конечного множества) также будет частным случаем меры.

Определение интеграла по мере

Пусть нам удалось некоторым образом определить меру для изучаемого объекта. Рассуждение, подобное тому, что было проведено в предыдущем разделе, позволяет обобщить на этот случай понятие интеграла. При этом можно считать, что исследуемый показатель задан на самом множестве–объекте. Схема та же: сначала заменяем произвольную функцию ступенчатой, находим для нее сумму и переходим к пределу по δ, стремящемуся к 0. Разберем это построение подробнее.

Пусть на множестве–объекте A задана некоторая численная величина $x=f(a)$, $a\in A$, принимающая, вообще говоря, бесконечное число значений. Кроме того, на нем задана некоторая мера m. Разобьем исходное множество на непересекающиеся части: $A=\bigcup A_i$, $A_i \bigcap A_j=\varnothing$ при $i \neq j$. Среди всех значений, которые величина x принимает на множестве A_i, выберем какое–нибудь одно: $x_i=f(a_i)$, $a_i\in A_i$. Рассмотрим вместо произвольной величины x ступенчатую функцию, которая принимает на всем подмножестве A_i одно значение x_i.



Мы получили новую величину с конечным числом значений, для которой уже умеем считать сумму: $S=\sum f(a_i)m(A_i)$. Эта сумма называется интегральной суммой функции f при разбиении $\{A_i\}$ и оснащении $\{a_i\}$.

Осталось перейти от ступенчатой функции, которая приближенно описывает x, к самой этой величине. Для этого будем уменьшать размеры A_i так, чтобы их меры стремились к 0: $\delta=max\ m(A_i)\to 0$. Число δ называется диаметром разбиения. Тогда ступенчатая функция будет описывать исходную все более точно.

Определение 1.9. Предел интегральных сумм $\sum f(a_\mathbf{i})\ m(A_\mathbf{i})$ при $\delta\to 0$, если он существует, называется интегралом по мере от функции f по множеству A и обозначается $\int_A f$ или $\int_A fdm$.

В частном случае, когда за множество A взят отрезок, а мерой является длина, интеграл по мере превращается в определенный интеграл.

Все интегралы по мере обладают некоторыми общими свойствами.

Свойства интеграла по мере

1. Аддитивность. Пусть показатель $x = f(a)$ задан на объединении множеств A и B, причем эти множества не пересекаются. Тогда

$$\int_{A\bigcup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

2. Линейность. Пусть на множестве A задано два показателя: $f(a)$ и $g(a)$. Тогда $\int_A (f+g)=\int_A f+\int_A g$, и $\int_A \lambda f=\lambda\int_A f$ для любого числа λ.

3. Интеграл от 1 по множеству A равен мере этого множества $m(A)$.

4. Монотонность. Если $f(a) \geq g(a)$ для всех $a\in A$, то и $\int_A f\geq\int_A g$.

5. Теорема о среднем. Если значения показателя $x=f(a)$ лежат между числами c и d, т.е. $c\leq f(a)\leq d$, то в том же промежутке существует число θ такое, что $\int_A f= \theta\cdot m(A)$. Число θ называют средним значением показателя f на множестве A.

Две меры на одном множестве

Мы уже говорили, что понятие меры – весьма широкое и абстрактное, оно имеет много конкретных реализаций. В частности, на одном и том же множестве–объекте можно ввести несколько (и даже бесконечное число) различных мер. Типичным примером может быть размер множества и его вес. Как они связаны между собой? Отношение веса к размеру (объему, площади, длине) называют плотностью. Если объект однороден, то плотность постоянна в каждой точке. Если же нет, то это отношение задает среднее значение плотности.

Рассмотрим подмножество A объекта, настолько малое, что изменением плотности на нем можно пренебречь. Плотность на таком подмножестве примерно равна $P(A)/m(A)$, где через P обозначен вес, а через m – размер множества. Причем чем меньше объект, тем точнее эта формула. В пределе, когда A стягивается в один–единственный элемент a, это отношение превращается в число, которое характеризует плотность в точке a. Это рассуждение можно применить к любым двум мерам, заданным на объекте.

> Определение 1.10. Пусть на множестве–объекте O заданы две меры m и μ. Рассмотрим для каждого его элемента a множество A, содержащее этот элемент. Тогда функция $p(a)$, равная пределу отношения $\mu(A)/m(A)$ при $A\to\{a\}$ называется плотностью меры $\boldsymbol{\mu}$ относительно меры m.

Если на объекте задана численная величина x, то ее можно проинтегрировать по обеим мерам. Как связаны эти интегралы между собой? Интеграл по мере μ от показателя x – это предел интегральных сумм вида $S=\Sigma x(\xi_i)\mu(A_i)$. Второй сомножитель примерно равен произведению $p(\xi_i)m(A_i)$. Тогда S принимает вид $\Sigma x(\xi_i)p(\xi_i)m(A_i)$, что является интегральной суммой функции $x(t)p(t)$ по мере m. Устремляя диаметр разбиения к 0, получаем соотношение $\int_O x d\mu=\int_O xpdm$. Конечно, переход к пределу должен быть строго обоснован, однако это входит в компетенцию математиков и здесь обсуждаться не будет.

Способы задания меры. Плотность распределения значений численной величины

Чтобы применить все введенные понятия на практике, необходимо задать на множестве–объекте конкретную меру. При этом надо следить, чтобы выполнялись свойства меры. Разберем несколько примеров мер.

Примеры мер

1. Мера на конечном множестве вполне определится, если мы будем знать меру каждого его элемента. Поэтому припишем элементу a_i в качестве меры неотрицательное число m_i, тогда мера любого множества таких элементов равна сумме значений m_i по всем элементам, входящим в множество. Число m_i называют в этом случае весом элемента a_i.

2. Ранее мы вводили меру с помощью промежуточной переменной x, которая позволяет изобразить произвольный объект как множество на числовой п р я м о й . Соответственно в качестве меры множества используется естественная мера на $\mathbb{R}$, т.е. длина.

3. В предыдущем примере числовую прямую можно заменить числовой плоскостью или пространством, тогда в качестве меры можно будет взять площадь или объем.

4. Вместо размера тела (длины отрезка, площади фигуры) мы, по аналогии с первым примером, можем рассматривать их вес, который, вообще говоря, не пропорционален длине (площади, объему). Вес связан с размером через плотность, которая, как известно, равна отношению веса к объему (в плоском случае – к площади, в линейном – к длине). ☺

Описание произвольной меры через количественную величину. Плотность распределения значений

Во всех приведенных примерах мы поступали одинаково: рассматривали множества элементов и приписывали им меру. Однако такой способ описания неудобен для математического исследования, так как включает в себя в том или ином виде сам о б ъ е к т , т.е. внематематическое понятие. Желательно найти такое о п и с а н и е меры, которое задавалось бы чисто математически.

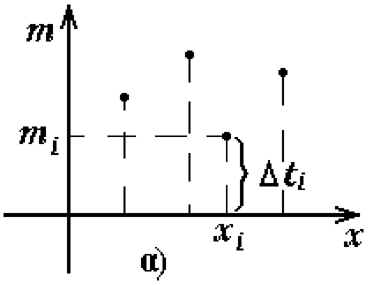
Образцом здесь может служить пример 1, который задает произвольную меру на конечном множестве. Зная вес каждого элемента, мы можем также подсчитать вес каждого з н а ч е н и я величины, т.е. вес всех тех элементов, на которых величина x принимает одно и то же значение. Например, пусть нам заданы следующие веса m_i элементов объекта и значения x_i величины x, заданной на нем:

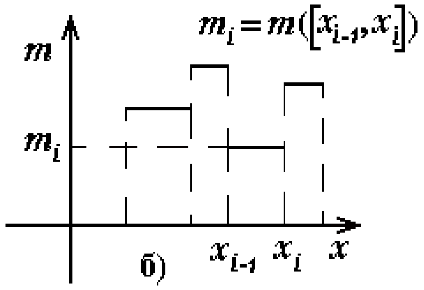
i	1	2	3	4	5	6	7
m_i	2	1	4	2	5	0	1
x_i	–3	0	2	1	0	–1	2

Тогда значению x=–3 соответствует вес 2, значению 0 – общий вес 1+5=6, значению 2 – вес 4+1=5 и т.д. Таким образом мы связываем вес (меру) непосредственно со значениями величины, минуя элементы объекта (помеченные номерами i):

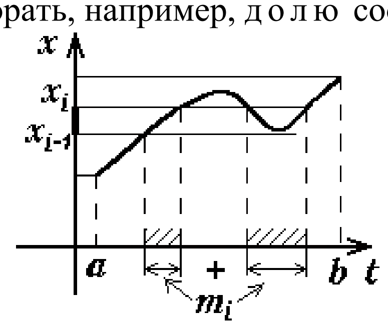
x	–3	–1	0	1	2
$m(x)$	2	0	6	2	5

Попробуем обобщить эту конструкцию на непрерывный случай. Для этого надо заменить функцию от конечного числа значений $m(x)$ на ее непрерывный аналог. Начнем со ступенчатой функции, которая принимает конечное число значений. Тогда каждому значению x_i можно приписать меру m_i. Например, можно выбрать m_i=Δt_i как на стр. 11 (см. рис. а) или найти меру (вес) любым другим способом. Если число значений бесконечно, то поступают так: разбивают их на конечное число групп, и для каждой находят суммарный вес всех элементов с такими значениями (см. рис. б). Полученный ступенчатый график называют ги-





стограммой. Например, пусть исследуемые в эксперименте возрасты пробегают значения от 17 до 35. Их можно разбить на группы: от 17 до 21 года, от 21 года до 25 лет, от 25 до 30 и от 30 до 35, причем возрасты каждой из этих групп могут встречаться с большей или меньшей частотой, так что в качестве m_i можно выбрать, например, д о л ю соответствующих возрастов в популяции.



☝ Замечание 3. При построении гистограммы мы как бы “переворачиваем” картинку: значения x теперь откладываются по горизонтали, а длины отрезков Δt_i – наоборот, по вертикали. И разбиение применяется к другому множеству: когда мы вводили понятие интеграла, мы рассматривали разбиение о б ъ е к т а, здесь же мы разбиваем м н о ж е с т в о з н а ч е н и й величины. На графике функции $x(t)$ такое разбиение надо делать п о в е р т и к а л и, т.е. горизонтальными прямыми. ☺

Гистограмма описывает веса сгруппированных значений, нам же надо описать меру для исходной, несгруппированной величины. Для этого естественно делать группы все мельче и мельче. К сожалению, в этом случае уменьшится не только ш и р и н а ступенек гистограммы, но и их в ы с о т а: чем меньше группа, тем меньше ее вес. В пределе, когда ступеньки станут бесконечно узкими (нулевой ширины), гистограмма сольется с осью x, так как вес о т д е л ь н о г о з н а ч е н и я в непрерывном случае, как правило, равен 0.

Поэтому, чтобы охарактеризовать веса отдельных групп, необходимо использовать другую характеристику, например, отношение веса группы к ее размеру (в данном случае длине $x_{i+1}–x_i$). Такое отношение можно назвать, как и в предыдущем разделе плотностью данной меры. Теперь, даже если размер и вес группы устремить к 0, плотность, вообще говоря, не будет равна нулю. Если группа значений стягивается в одну точку, то плотность можно считать функцией от точки (отдельного значения x). Как теперь, зная плотность меры, найти вес какой–нибудь группы значений? Плотность $p(x)$ представляет собой вес, приходящийся на “единицу размера” объекта (единицу длины, площади, объема и т.п.). Тогда вес малой частицы длиной Δx приблизительно равен $p(x)\Delta x$. Вес всей группы значений x приблизительно равен $\Sigma p(x)\Delta x$. Чтобы сделать это значение точным, будем уменьшать длины Δx, чтобы внутри каждой малой частицы плотность стала практически постоянной. В пределе сумма перейдет в интеграл $\int_X p(\mathrm{x})$, где через X обозначено множество значений величины x. Мы получили следующее

Определение 1.11. Пусть на множестве–объекте A задана численная величина x. Функция $p(x)$, принимающая неотрицательные значения, называется плотностью распределения значений величины x, если для любого множества чисел X интеграл $\int_X p(x)$ равен мере множества $O(X)$ тех элементов из A, на которых значения показателя x принадлежат X.

☝ Замечание 4. Обратите внимание, что плотность распределения задается не на исходном множестве–объекте, а на м н о ж е с т в е з н а ч е н и й показателя. При этом она является числовой функцией числового аргумента, так что объект в ней присутствует только опосредованно. По сути дела, плотность распределения можно считать частным случаем плотности одной меры (а именно, P) относительно другой (длины), причем обе эти меры заданы на множестве значений показателя x. ☺

Выражение интеграла по мере через плотность распределения

Итак, величина x, заданная на множестве–объекте позволяет описать м е р у m, з а д а н н у ю н а о б ъ е к т е, с помощью меры $P(X)=\int_X p(x)$, з а д а н н о й н а м н о ж е с т в е з н а ч е н и й этой величины. А именно, $m(O(X))=P(X)$. Правда, при этом мы можем найти меру не произвольного множества, а только такого, которое можно представить в виде $O(X)$. Можно сказать, что при таком задании меры элементы, имеющие одинаковое значение показателя x "слипаются" между собой, так что мы можем рассматривать только те подмножества объекта, в которые они входят все вместе.

Обе введенные меры порождают интегралы: мера P – определенный интеграл, m – интеграл общего вида. Как связаны между собой интегралы по объекту и по множеству значений x? На этот вопрос также можно ответить, используя понятие плотности. Мы уже вывели эту формулу (см. стр. 15). Разница состоит только в том, что теперь x является не только значением показателя, но и аргументом плотности, а также величиной, определяющей длину отрезка. Поэтому формула приобретает вид $\int_A x=\int_a^b x\,\mathrm{p(x)dx}$, где через $[a;\ \mathrm{b}]$ обозначено множество значений показателя x на объекте A.

☝ Замечание 5. Мы записали выражение интеграла по мере через плотность распределения в том случае, когда p задано для той же величины x, от которой берется интеграл. Однако в приложениях часто бывает, что на одном и том же объекте заданы несколько численных величин, а плотность распределения задана только для одной. Если интегрируемая величина – это y, а плотность задана для величины x, то интеграл по мере от y будет равен $\int_A y=\int_a^b y\,\mathrm{p(x)dx}$, где через $[a;\ b]$ обозначено множество значений показателя x на множестве A. ☺

Обобщенные характеристики для непрерывных моделей

В предыдущем разделе мы перенесли на бесконечный случай понятие суммы значений показателя, использовав для этого интеграл. Основываясь на этом, попытаемся перенести на непрерывные модели также понятия среднего, медианы и моды.

Среднее, медиана и мода в непрерывных моделях

Со средним арифметическим проблем не будет. По определению, оно равно отношению суммы значений и их общего количества. Заменяя сумму на интеграл, а количество на меру, получаем

Определение 1.12. Средним арифметическим для непрерывной величины x, принимающей значения на множестве A с мерой m, называется дробь $\dfrac{\int_A x}{m(A)}$. Для числовой функции $x=f(t)$ среднее арифметическое имеет вид $\dfrac{\int_a^b f}{b-a}$.

Именно это значение появляется в теореме о среднем (см. упражнение 4.6). Итак, мы обобщили понятие среднего арифметического не только на непрерывные количественные модели, но и на все модели с мерой (см. Замечание 2 на стр. 11).

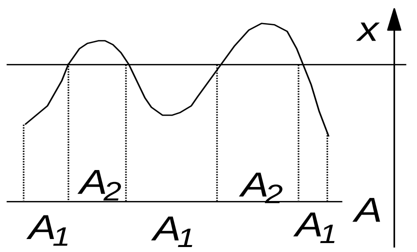
Используя это определение, можно перенести на такие модели и другие типы среднего. Например, среднее квадратичное – это корень из среднего квадрата величины. Для показателя x средний квадрат – это **Ошибка! Ошибка внедренного объекта.**, поэтому среднее квадратичное вычисляется как $\sqrt{\int_A x^2 \big/ m(A)}$.

Перейдем к понятию медианы. По определению это то число, которое стоит в середине ряда значений, если их упорядочить (по возрастанию или убыванию). Можно сформулировать это определение и через количество элементов: медиана конечного множества чисел – это такое число, что количество значений, меньших его, совпадает с количеством значений, больших его.

Для непрерывного случая количество элементов следует заменить на меру, поэтому для введения медианы нам нужны такие модели, в которых есть и порядок, и мера.

☝ Замечание 6. Вообще говоря, не требуется, чтобы эти понятия вводились одним и тем же показателем, как это проделано для количественных моделей на стр. 9. Однако, даже если не требовать этого, обойтись только порядковой шкалой не удастся, так как мера сама по себе понятие количественное. В этом проявляется отличие от дискретного случая, где медиана определена и для порядковых шкал. ☺

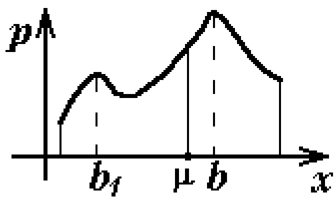
Итак, рассмотрим на множестве–объекте A некоторый численный показатель $x=f(a)$. Пусть его значения пробегают множество X, $X=f(A)$. Разобьем это множество значений на две части некоторой точкой μ, т.е. выделим те значения, которые больше μ и те, которые меньше. Соответственно на две части разобьется и множество объектов: $A=A_1 \cup A_2$, где $A_1=\{a\in A \mid f(a)\le\mu\}$ и $A_2=\{a\in A \mid f(a)\ge\mu\}$. Число μ будет медианой показателя f, если меры этих двух множеств совпадают: $m(A_1)=m(A_2)$.



Ясно, что это определение весьма неудобно для практической проверки. Например, на приведенном рисунке надо подобрать положение точки μ так, чтобы сумма длин отрезков, помеченных как A_1 была равна сумме длин отрезков A_2.

Выражение обобщенных характеристик через плотность меры

Мы применяем для вычисления медианы некоторое разбиение множества значений показателя x. Подобная конструкция возникала у нас, когда мы описывали меру на объекте при помощи плотности. Так что естественно ожидать, что при таком описании меры и определение и вычисление медианы станут более простыми и естественными.



Определение 1.13. Пусть на множестве–объекте A задана величина x с плотностью распределения значений $p(x)$. Число **μ** называется медианой этой величины, если $\int\limits_{x\le\mu} p(x) = \int\limits_{x\ge\mu} p(x)$.

Как известно, геометрически интеграл имеет смысл площади под кривой. Поэтому медиана – это такое значение μ, что вертикальная прямая x = μ делит площадь под кривой $p(x)$ пополам. Конечно, в таком виде определение стало более наглядным и более легко проверяемым.

Определение 1.14. В условиях определения **Ошибка! Закладка не определена.** число b называется модой величины x, если на нем функция $p(x)$ достигает максимума.

В отличие от дискретных величин, для непрерывных модой обычно считают не только глобальный, но и локальный максимум, как в точке b_1 на рисунке. Если мода у показателя x одна, то его распределение называют одномодальным (унимодальным), в противном случае – многомодальным.

Используя выведенную связь между интегралами, можно по–новому определить уже известное нам понятие среднего. Найдем его для случая, когда мера на множестве A вводится с помощью того же показателя, который мы усредняем, т.е. y = x. В знаменателе среднего арифметического стоит мера множества–объекта A, которому соответствует множество всех возможных значений показателя x. Без ограничения общности можно считать, что они пробегают всю числовую ось: если какие–то числа не являются значениями величины x, это значит, что они повторяются 0 раз, т.е. для таких чисел $p(x)$=0. С учетом этого соглашения получаем, что $m(A)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)$. В числителе стоит интеграл по мере от величины x, который по выведенной ранее формуле равен $\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)$. Мы доказали следующее утверждение.

Теорема. В условиях определения 3 среднее значение показателя x вычисляется по формуле (если оба интеграла существуют):

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)}.$$

Упражнения

1. Покажите, что операция “прикладывания” эталона порождает также следующие операции:

   а) умножение на натуральное число;

   б) деление на натуральное число;

   в) умножение на положительное дробное число;

   г) умножение на положительное вещественное число.

2. Покажите, что с вещественными числами можно производить все арифметические действия и сравнение.

3. Операции прикладывания отрезков соответствует сложение их длин. Можно ли считать, что умножение чисел, введенное в упражнении 1.1, соответствует умножению отрезков?

4. Почему эпиграф на стр. 1 – шутка?

5. Почему отрицательные значения показателя используются в порядковой шкале и шкале интервалов, но практически не используются в шкале отношений?

6. К какому типу относятся модели, состоящие из конечного числа элементов – дискретному или непрерывному?

7. Может ли количественная модель быть дискретной? Непрерывной? Приведите примеры.

8. Те же вопросы для порядковой модели.

9. Имеет ли практический смысл номинальная непрерывная модель?

10. Запишите определение предела в обозначениях, введенных в Определении **Ошибка! Закладка не определена.**.

11. Можно ли в Определении **Ошибка! Закладка не определена.** поменять местами слова “для любого ε>0” и “существует δ>0”? Для сравнения рассмотрите такой анекдот: Продавец: “У нас есть ботинки на любой размер”. Покупатель: “Вот такие мне и дайте”.

12. Найдите предел $\lim_0 \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

13. Пусть в некотором банке начисляют проценты исходя из 100% годовых. Каков будет доход к концу года, если проценты начисляются два раза в год? три раза в год? каждый квартал? непрерывно?

14. Приближаться к точке *a* можно с двух сторон: слева или справа. Дайте определение предела слева и справа. Предел функции слева обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f$ или $\lim_{a-0} f$ или $f(a–0)$. На каких рисунках (см. стр. 6) у функции существуют такие пределы в точке *a*? Может ли функция иметь пределы и слева и справа, но не иметь предела?

15. Те же вопросы для непрерывности слева и справа.

16. Вспомните из школьной программы таблицу и правила дифференцирования элементарных функций. Для каждого правила взятия производной запишите соответствующее правило для дифференциала (умножив его на dx).

17. Используя понятие одностороннего предела (упражнение 14) дайте определение производной слева и справа. Могут ли такие производные в одной точке быть разными?

18. Чему равен интеграл по отрезку $[a;\, b]$ от 1? от произвольной константы λ? От нуля? Найдите эти интегралы по определению, т.е. через интегральные суммы.

19. Что можно сказать об интеграле, если подынтегральная функция неотрицательна?

20. Чему равен интеграл от суммы двух функций, заданных на одном и том же отрезке $[a;\, \mathrm{b}]$?

21. Тот же вопрос для функции $\lambda f(x)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ – произвольная константа.

22. Вспомните из школьной программы таблицу и правила отыскания первообразной.

23. Известно, что производная произведения вычисляется по формуле $(uv)'=u'\cdot v+u\cdot v'$. Используя эту формулу и формулу Ньютона–Лейбница, выведите так называемое правило интегрирования по частям: $\int_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,dx$.

24. Покажите, что замена переменной $x=x(t)$ в определенном интеграле производится по формуле $\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(t))\,x'_t\,dt$, где $a=x(c)$, $b=x(d)$. Для доказательства используйте правило дифференцирования сложной функции.

25. Является ли интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ собственным? Если нет, где у него особенность? Сходится ли он?

26. Те же вопросы об интеграле $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$.

27. Используя о п р е д е л е н и е меры, покажите, что мера подмножества не превосходит меру множества: если $A \subset B$, то $m(A) \le m(B)$. Как бы вы назвали это свойство?

28. Какие веса надо приписать элементам конечного множества, чтобы соответствующая мера представляла собой количество элементов?

29. Запишите формально свойство 3 интеграла по мере.

30. Чему равен интеграл по множеству A от произвольной константы λ? От нуля?

31. Что можно сказать об интеграле, если подынтегральная функция неотрицательна? Используйте монотонность интеграла и упражнение 30.

32. Пользуясь остальными свойствами интеграла и результатами упражнений 30 и 31, докажите теорему о среднем.

33. Запишите формулировку теоремы о среднем для определенного интегра-

ла. Можно показать, что для непрерывной функции среднее значение θ в этом случае совпадает с каким–то промежуточным значением функции f, т.е. $\theta = f(c)$, $c \in [a; \mathrm{b}]$.

34. Как можно интерпретировать результаты упражнений 30 и 31 с точки зрения теоремы о среднем?

35. Пусть на множестве X с мерой m задан неотрицательный показатель p. Для подмножества $A \subset X$ введем величину $\mu(A)$ по формуле $\mu(A)=\int_A p$. Покажите, что этот функционал является мерой на множестве X, а функция p – плотностью этой меры по отношению к мере m.

36. Покажите, что плотность распределения значений величины x является производной от функции $F(x)=m(O(-\infty; x))$ (смысл обозначения см. стр. 9). В теории вероятностей эта функция называется функцией распределения величины x.

37. Покажите, что функция распределения – неубывающая.

38. Запишите функцию распределения с помощью интеграла по мере и интеграла по переменной x.

39. Сколько способов задания меры на множестве–объекте вы знаете?

40. Выразите через функцию распределения (упражнение 36) меру всего множества–объекта A.

41. Выразите через функцию распределения (упражнение 36) медиану величины x.

42. Запишите формулу для вычисления среднего арифметического величины y, если мера вводится с помощью показателя x.

43. В условиях предыдущего упражнения запишите определения для медианы и моды показателя y.

44. Найдите среднее арифметическое и среднее квадратичное для функции $y = x^3$ на отрезке [0; 1].

45. Пусть для квадратов со стороной a, где $1<a<2$ введен показатель $y = a^2$. Найдите среднее значение этого показателя, если в качестве меры взята а) длина стороны квадрата; б) его площадь. Почему ответы получаются разными?

46. Имеют ли смысл понятия медианы и моды в порядковых непрерывных моделях? Почему?

47. Что в выражении “средняя скорость” взято за усредняемую переменную y, а что – за переменную x, вводящую меру? Тот же вопрос для среднего положения маятника.