Ю. Р. Агачев, С. М. Ахметов, И. Н. Тихонов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

Нижнекамский химико-технологический институт,

jagachev@ksu.ru, tin.ksu@yandex.ru

О НЕРАВЕНСТВАХ, СВЯЗЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЮ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫЕ В СПЕЦИАЛЬНЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Пусть r — произвольно зафиксированное натуральное число, $\rho = \rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ — вес Чебышева второго рода, $q = q(t) = [\rho(t)]^{4r-3}$. Отметим, что функция $q(t)$ является частным случаем хорошо известного веса Якоби. Обозначим через $L_{2,q} \equiv L_{2,q}(-1,1)$ пространство функций, квадратично суммируемых на интервале $(-1,1)$ с весом $q(t)$. В этом пространстве норму определим обычным образом

$$\|f\|_{2,q} \equiv \|f\|_{L_{2,q}} = \left\{ \int\limits_{-1}^{+1} q(t)|f(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \quad f \in L_{2,q}.$$

Функции из пространства $L_{2,q}$ квадратично суммируемы на любом отрезке, целиком вложенном в интервал $(-1,1)$, и при $r \geqslant 1$ имеют, вообще говоря, особенности на концах промежутка $[-1,1]$ порядка ниже $r - 1/4$. Это означает, что функции из $L_{2,q}$ в общем случае не принадлежат пространству $L_2(-1,1)$. Кроме того, при $r \geqslant 2$ обратная функция $1/q(t)$ уже весовой не будет. Это отличает проводимые нами исследования от исследований других авторов (в большинстве работ берется вес Чебышева первого или второго рода).

В пространстве $L_{2,q}$ модуль непрерывности введем несколько отличным от традиционного интегрального модуля:

$$\omega(y;\delta)_{2,q} \equiv \sup_{0<\eta\leqslant\delta} \left\{ \int\limits_{-1}^{1-\eta} (1+t)^{2r-3/2}(1-t-\eta)^{2r-3/2} \times \right.$$
$$\left. \times\, |y(t+\eta)-y(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \quad y\in L_{2,q}, \quad 0<\delta\leqslant 2.$$

Отметим, что все основные свойства модуля непрерывности здесь выполняются.

Имеют место следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $i\in\mathbb{N}$, $q_i(t)=[\rho(t)]^{4i-3}=(1-t^2)^{2i-3/2}$, *существует* $f^{(i)}\in L_{2,q_i}(-1,1)$. *Тогда для* $j,\,l\in\mathbb{N}$ *справедливы неравенства:*

$$\|(1-t^2)^j f(t)\|_C \leqslant \sqrt{\pi\frac{(4j-3)!!}{(4j)!!}}\big[2j\,\|f\|_{2,1/\rho}+\sqrt{4j-1}\,\|f'\|_{2,\rho}\big];$$

$$\|(1-t^2)^{i-1/2} f(t)\|_C \leqslant \sqrt{\pi\frac{(4i-5)!!}{(4i-2)!!}}\times$$
$$\times\big[(2i-1)\,\|f\|_{2,1/\rho}+\sqrt{4i-3}\,\|f'\|_{2,\rho}\big], \quad (-1)!!\equiv 1;$$

$$\|(1-t^2)^j f^{(l)}(t)\|_C \leqslant \sqrt{\pi\frac{(4(j-l)-1)!!}{(4(j-l)+2)!!}}\times$$
$$\times\big[2j\,\|f^{(l)}\|_{2,q_l}+\sqrt{4(j-l)+2}\,\|f^{(l+1)}\|_{2,q_{l+1}}\big], \quad l\leqslant j,\ l<i.$$

Теорема 2. *Пусть* $i \in \mathbb{N}$, $q_i(t) = [\rho(t)]^{4i-3} = (1-t^2)^{2i-3/2}$, *существуют производные* $f^{(i)}, g^{(i)} \in L_{2,q_i}(-1,1)$. *Тогда имеют место неравенства:*

$$\|fg\|_{2,q_i} \leqslant \sqrt{\pi\frac{(4i-5)!!}{(4i-2)!!}}\big[(2i-1)\,\|f\|_{2,1/\rho}+ \\ + \sqrt{4i-2}\,\|f'\|_{2,\rho}\big]\,\|g\|_{2,1/\rho}, \quad (-1)!! \equiv 1;$$

$$\|fg^{(j)}\|_{2,q_i} \leqslant \sqrt{\pi\frac{(4(i-j)-5)!!}{(4(i-j)-2)!!}}\big[2(i-j)\,\|f\|_{2,1/\rho}+ \\ + \sqrt{4(i-j)-2}\,\|f'\|_{2,\rho}\big]\,\|g^{(j)}\|_{2,q_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1;$$

$$\|f^{(l)}g^{(j)}\|_{2,q_i} \leqslant \sqrt{\pi\frac{(4(i-j-l)-1)!!}{(4(i-j-l)+2)!!}}\big[2(i-j)\,\|f^{(l)}\|_{2,q_l}+ \\ + \sqrt{4(i-j-l)+2}\,\|f^{(l+1)}\|_{2,q_{l+1}}\big]\,\|g^{(j)}\|_{2,q_j},\ l,j \geqslant 1,\ l+j \leqslant i.$$

Теорема 3. *Пусть* $i, j, l \in \mathbb{N}$, $q_i(t) = (1-t^2)^{2i-3/2}$, $0 < \delta \leqslant 2$. *Тогда имеют место неравенства:*

$$\omega(x;\delta)_{2,q_i} \leqslant \delta\,\|x'\|_{2,q_i}, \quad x' \in L_{2,q_i}(-1,1);$$

$$\omega(zx;\delta)_{2,q_i} \leqslant \omega(z;\delta)_{2,q_j}\|x\|_C + \|z\|_{2,q_j}\omega(x;\delta)_C, \\ z \in L_{2,q_j}(-1,1), \quad x \in C[-1,1];$$

$$\omega(zx;\delta)_{2,q_i} \leqslant \sqrt{\delta}\|z'\|_{2,q_i}\|x\|_{2,1/\rho}+ \\ + \big[(2i-3/2)\sqrt{7}\|z\|_{2,q_{i-1}} + \sqrt{2}\,\|z'\|_{2,q_i}\big]\omega(x;\delta)_{2,1/\rho}, \\ z' \in L_{2,q_i}(-1,1), \quad x \in L_{2,1/\rho}(-1,1);$$

$$\omega(zx;\delta)_{2,q_i} \leqslant$$
$$\leqslant \omega(z,\delta)_{2,q_j}\sqrt{\pi\frac{(4l-3)!!}{(4l)!!}}\big[2l\,\|x\|_{2,q_l}+\sqrt{4l-1}\,\|x'\|_{2,q_{l+1}}\big]+$$
$$+\,\omega(x,\delta)_{2,q_l}\sqrt{\pi\frac{(4j-3)!!}{(4j)!!}}\big[2j\,\|z\|_{2,q_j}+\sqrt{4j-1}\,\|z'\|_{2,q_{j+1}}\big],$$
$$z'\in L_{2,q_j}(-1,1),\quad x'\in L_{2,q_l}(-1,1),\quad l+j<i.$$

Приведенные теоремы 1 – 3 служат основой при доказательстве корректности по Адамару краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений в случае, когда порядок внутреннего дифференциального оператора выше порядка соответствующего внешнего дифференциального оператора. Кроме того, они позволяют проводить теоретико-функциональное обоснование прямых методов решения указанных задач (см., например, [1], [2]), а также оптимизацию по порядку точности (см. [3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (госконтракт 02.740.11.0193).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Агачев Ю. Р. *Сходимость общего полиномиального проекционного метода решения некорректных интегродифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Матем. – 2007. – № 8. – С. 3-14.

2. Агачев Ю. Р., Леонов А. И. *Полиномиальные приближения решений интегродифференциальных уравнений в пространствах Соболева* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2004. – Т. 25. – С. 10-11.

3. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.