Известия вузов. Математика
2017, №6, с. 44–51
http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Д.Б. КАЦ

ПОКАЗАТЕЛИ МАРЦИНКЕВИЧА И ЗАДАЧА О СКАЧКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ

Аннотация. Введенные ранее автором показатели Марцинкевича используются в данной работе для решения краевой задачи о скачке на неспрямляемом контуре для одного частного случая уравнения Бельтрами.

Ключевые слова: показатель Марцинкевича, фрактал, краевая задача, задача Римана, неспрямляемая кривая, уравнение Бельтрами.

УДК: 517.53 : 517.544

Введение

Уравнение Бельтрами
$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi, \quad |\mu(z)| < 1,$$
является одним из наиболее естественных и важных обобщений уравнений Коши–Римана (например, [1]). Здесь, как обычно,
$$\overline{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \partial := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$
Теория этих уравнений имеет многочисленные приложения в механике и физике [2], [3].

В 1985 г. А.Б. Тунгатаров [4] (см. также [5]) нашел в явном виде правый обратный оператор для дифференциального оператора Бельтрами $\overline{\partial} - \mu\partial$ (аналог известного оператора T из [1]) для случая
$$\mu(z) = \beta\frac{z}{\overline{z}}, \quad 0 \leq \beta < 1.$$
Решения соответствующего уравнения Бельтрами получили название β-аналитических функций.

Уже в XXI веке Рикардо Абреу-Блайя, Хуан Бори-Рейес, Диксан Пенья-Пенья и Жан-Мария Вилье [6]–[8] исследовали разрешимость аналогов краевой задачи Римана и ряд связанных с ней вопросов для таких функций.

Краевая задача Римана хорошо известна для аналитических (т. е. 0-аналитических) функций: пусть Γ — ориентированная кривая на комплексной плоскости, на которой заданы функции $G(t)$ и $g(t)$. Требуется найти все голоморфные в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\phi(z)$, имеющие на Γ непрерывные предельные значения $\phi^+(t)$ и $\phi^-(t)$ слева и справа соответственно, исчезающие в бесконечно удаленной точке и удовлетворяющие краевому условию
$$\phi^+(t) = G(t)\phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma.$$
Классические результаты в этой области (например, [9]–[11]) относятся к случаю, когда контур, на котором ставится задача, является кусочно-гладким. На неспрямляемых контурах

Поступили первый вариант 19.12.2015, окончательный вариант 14.02.2016.

задача Римана для аналитических функций была решена Б.А. Кацем (пионерские работы [12], [13] и недавний обзор [14]). Вышеупомянутая группа авторов использовала предложенные им методы для решения задачи Римана и задачи о скачке для β-аналитических функций на неспрямляемых кривых. Ими получены следующие условия разрешимости этих задач.

Пусть Γ — множество на комплексной плоскости, $0 < \nu \le 1$. Класс $H_\nu(\Gamma)$ состоит из заданных на Γ функций $f(t)$, удовлетворяющих условию Гёльдера

$$h_\nu(f;\Gamma) := \sup\left\{\frac{|f(t)-f(t')|}{|t-t'|^\nu} : t,t' \in \Gamma, t \ne t'\right\} < \infty.$$

Если множество Γ компактно, то его размерность Минковского, называемая также верхней метрической размерностью, размерностью Колмогорова и др. [15]–[17], определяется равенством

$$\operatorname{dm}\Gamma := \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\log N(\Gamma;\varepsilon)}{-\log\varepsilon},$$

где $N(\Gamma;\varepsilon)$ означает наименьшее число кругов радиуса ε, образующих покрытие Γ. Такая размерность плоского континуума всегда лежит в промежутке $[1;2]$; если Γ — спрямляемая кривая, то $\operatorname{dm}\Gamma = 1$, а для неспрямляемой кривой размерность Минковского может превосходить единицу.

В работе [7] доказано, что задача о скачке (частный случай задачи Римана с $G \equiv 1$) для β-аналитических функций на неспрямляемом контуре Γ разрешима, если $g \in H_\nu(\Gamma)$, причем

$$\nu > \frac{1}{2}\operatorname{dm}\Gamma. \tag{1}$$

Далее, в работе [8] разрешимость задачи Римана для β-аналитических функций на неспрямляемом контуре Γ установлена в предположении, что контур является d-суммируемым, а коэффициенты задачи G и g удовлетворяют условию Гёльдера с показателем

$$\nu > d/2. \tag{2}$$

Понятие d-суммируемости ввели Дж. Харрисон и А. Нортон [18]. Контур Γ называется d-суммируемым, если сходится интеграл

$$\int_0 N(\Gamma;x)x^{d-1}dx.$$

Как показано в [18], d-суммируемость Γ влечет неравенство $\operatorname{dm}\Gamma \le d$, а при $\operatorname{dm}\Gamma < d$ множество Γ является d-суммируемым.

Недавно автор (например, [19], [20]) ввел новую метрическую характеристику неспрямляемых кривых — показатель Марцинкевича. В данной работе показано, что эта характеристика позволяет ослабить условия (1) и (2). В следующем разделе приводится формулировка основных результатов и некоторые вспомогательные сведения, а в последнем разделе основные результаты доказываются.

1. Основные результаты

Начнем с определения показателей Марцинкевича.

Пусть Γ — простая замкнутая кривая на комплексной плоскости, разбивающая ее на области D^+ и D^-, $0 \in D^+$, $\infty \in D^-$. При $r > 0$, $t \in \Gamma$, $p > 0$ обозначим $B(t;r) := \{z : |z-t| < r\}$, $B^\pm(t;r) := B(t;r) \cap D^\pm$,

$$I_p^\pm(t;r) = \iint\limits_{B^\pm(t;r)} \frac{dx\,dy}{\operatorname{dist}^p(x+iy,\Gamma)}.$$

Внутренний и внешний показатели Марцинкевича кривой Γ в ее точке t определяются равенствами

$$\mathfrak{m}^{\pm}(\Gamma;t) := \sup\{p : \lim_{r\to 0} I_p^{\pm}(t;r) < \infty\}.$$

Далее величину

$$\mathfrak{m}^{*}(\Gamma;t) := \max\{\mathfrak{m}^{+}(\Gamma;t), \mathfrak{m}^{-}(\Gamma;t)\}$$

будем называть показателем Марцинкевича кривой Γ в точке t. Здесь интегралы $I_p^{\pm}(t;r)$ возрастают как функции радиуса, так что условие $\lim\limits_{r\to 0} I_p^{\pm}(t;r) < \infty$ равносильно условию $\exists\, r > 0 : I_p^{\pm}(t;r) < \infty$.

Из результатов [19], [20] следует, что все эти величины заключены на отрезке $[2-\operatorname{dm}\Gamma; 1]$, в частности, показатели Марцинкевича спрямляемой кривой равны единице. Всюду ниже предполагается, что кривая Γ имеет нулевую плоскую меру. Тогда $\operatorname{dm}\Gamma < 2$, и $\mathfrak{m}^{\pm}(\Gamma;t) > 0$ в любой точке кривой.

Показатели Марцинкевича характеризуют локальные свойства контура. Чтобы полнее использовать это обстоятельство, введем локальную версию условия Гёльдера. Пусть на Γ задана действительная функция $v(t)$ такая, что $0 < \nu \le v(t) \le 1$, $t \in \Gamma$. Будем относить определенную на Γ функцию $f(t)$ к классу $H_v^{\mathrm{loc}}(\Gamma)$, если для любой точки $t \in \Gamma$ можно указать радиус $r = r(t) > 0$ такой, что сужение f на множество $\Gamma \cap B(t;r)$ удовлетворяет на нем условию Гёльдера с показателем $v(t)$.

Основные результаты данной статьи относятся к задаче о скачке для β-аналитических функций, т. е. к задаче отыскания исчезающей в бесконечности и непрерывно дифференцируемой в $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ функции $\phi(z)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\overline{\partial}\phi(z) = \beta\frac{z}{\overline{z}}\partial\phi(z), \quad z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma,$$

и имеет в точках $t \in \Gamma$ непрерывные предельные значения $\phi^{\pm}(t)$ из областей $D^{\pm}$, связанные краевым условием

$$\phi^{+}(t) - \phi^{-}(t) = f(t), \quad t \in \Gamma,$$

где f — заданная функция. Кроме того, будем требовать, чтобы решение этой задачи обращалось в нуль в бесконечности. Как уже отмечалось, это частный случай задачи Римана с $G \equiv 1$.

Теорема 1. *Если $f \in H_v^{\mathrm{loc}}(\Gamma)$ и*

$$v(t) > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}(\Gamma;t), \quad t \in \Gamma, \tag{3}$$

то задача о скачке для β-аналитических функций разрешима.

Отсюда сразу получается

Следствие 1. Если $f \in H_\nu(\Gamma)$ и

$$\nu > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}(\Gamma;t), \quad t \in \Gamma, \tag{4}$$

то задача о скачке для β-аналитических функций разрешима.

Покажем, что эти критерии разрешимости менее ограничительны, чем условия (1) и (2).

В теореме единственности понадобится размерность Хаусдорфа. Напомним ее определение. Пусть E — ограниченное множество на плоскости. Его λ-мерный r-контент Хаусдорфа определяется равенством

$$\mathcal{H}_r^{\lambda}(E) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} r_k^{\lambda} : E \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, r_k),\ x_k \in E,\ 0 < r_k \le r\right\},$$

λ-мерная мера Хаусдорфа множества E есть
$$\mathcal{H}^\lambda(E) := \lim_{r\downarrow 0} \mathcal{H}^\lambda_r(E),$$
а размерность Хаусдорфа множества E равна
$$\mathrm{dm}_H(E) := \inf\{\lambda \geq 0 : \mathcal{H}^\lambda(E) = 0\}.$$

Теорема 2. *Если $f \in H^{\mathrm{loc}}_v(\Gamma)$, а функции $v(t)$ и $\alpha : \Gamma \to (0,1)$ удовлетворяют условиям* (3) *и*
$$\mathrm{dm}_H\,\Gamma - 1 < \alpha(t) < \min\left\{v(t), \frac{\mathfrak{m}(\Gamma;t) - 2(1-v(t))}{\mathfrak{m}(\Gamma;t)}\,\frac{1+\beta}{1-\beta}\right\}, \quad t \in \Gamma, \tag{5}$$
то задача о скачке для β-аналитических функций имеет единственное решение в классе функций, исчезающих в бесконечно удаленной точке и удовлетворяющих следующему условию: у каждой точки $t \in \Gamma$ есть окрестность N такая, что ϕ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\eta(t)$ в $N \cap D^+$ и $N \cap D^-$.

Следствие 2. Если $f \in H_\nu(\Gamma)$ и число $\alpha \in (0,1)$ удовлетворяют условиям (4) и
$$\mathrm{dm}_H\,\Gamma - 1 < \alpha < \min\left\{\nu, \frac{\mathfrak{m}(\Gamma;t) - 2(1-\nu)}{\mathfrak{m}(\Gamma;t)}\,\frac{1+\beta}{1-\beta}\right\}, \quad t \in \Gamma, \tag{6}$$
то задача о скачке для β-аналитических функций имеет единственное решение в классе функций, удовлетворяющих условию $\phi^\pm \in H_\alpha(D^\pm)$.

2. Доказательства

Сначала исследуем задачу о скачке для дифференцируемых функций, т. е. задачу об отыскании непрерывно дифференцируемой в $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ функции $\psi(z)$, имеющей в каждой точке $t \in \Gamma$ непрерывные предельные значения с обеих сторон $\psi^\pm(t)$, связанные соотношением
$$\psi^+(t) - \psi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{7}$$
и исчезающей в бесконечности. Ясно, что решение такой задачи не может быть единственным. В частности, умножая любое ее решение на подходящую гладкую функцию-срезку (т. е. функцию с компактным носителем, обращающуюся в единицу в окрестности Γ), получим решение с компактным носителем. Найдем такое решение этой задачи, для которого частные производные как можно медленнее растут при приближении к Γ.

Лемма. *Если $f \in H^{\mathrm{loc}}_v(\Gamma)$, а показатель $p \geq 1$ удовлетворяет условию*
$$p < \frac{\mathfrak{m}(\Gamma;t)}{1-v(t)}, \quad t \in \Gamma, \tag{8}$$
то задача (7) *имеет решение, частные производные которого интегрируемы в степени p в любой конечной части плоскости.*

Доказательство. Фиксируем величину $0 < m(t) < \mathfrak{m}(\Gamma;t)$. Из определений показателей Марцинкевича и класса $H^{\mathrm{loc}}_v(\Gamma)$ следует, что для каждой точки $t \in \Gamma$ существует такой радиус $r = r(t) > 0$, что одновременно выполняются хотя бы одно из двух условий $I^+_{m(t)}(t; r(t)) < \infty$, $I^-_{m(t)}(t; r(t)) < \infty$ и условие $f|_{\Gamma\cap B(t;kr(t))} \in H_{v(t)}(\Gamma \cap B(t; kr(t)))$, где $k > 1$ — постоянная. Круги $B(t, r(t))$ образуют покрытие Γ, и из него можно выбрать конечное подпокрытие. Обозначим его круги через $B_j = B(t_j, r(t_j))$, круги $B'_j = B(t_j, kr(t_j))$, $j = 1, 2, \ldots, n$, также покрывают Γ. Построим разбиение единицы, соответствующее последнему покрытию. Это разбиение состоит из функций $s_j \in C^\infty_0$ таких, что $\operatorname{supp} s_j \subset \overline{B'_j}$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} s_j(t) = 1$ при $t \in \Gamma$.

Теперь на объединении множества $\Gamma_j := \Gamma \cap \overline{B'_j}$ и окружности C_j, ограничивающей круг B'_j, определим функцию f_j, равную $s_j f$ на Γ_j и нулю на C_j. По построению $f_j \in H_v(t_j)(C_j \cup \Gamma_j)$, и можно применить к этой функции оператор продолжения Уитни (например, [21]). В силу известных свойств этого оператора получим определенную во всей комплексной плоскости функцию $f_j^w(z)$, обладающую следующими свойствами:

— она совпадает с f_j на $C_j \cup \Gamma_j$;

— она удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $v(t_j)$ во всей комплексной плоскости;

— она имеет непрерывные частные производные в $\mathbb{C} \setminus \Gamma_j$, причем

$$|\nabla f_j^w(z)| \le \frac{c}{\mathrm{dist}^{1-v(t_j)}(z, \Gamma)},$$

где c — положительная постоянная.

Кроме того, $f_j^w(z)$ вне B'_j есть тождественный нуль, т. е. это продолжение совпадает с $s_j f$ не только на Γ_j, но и на всем контуре Γ, и $\sum\limits_{j=1}^{n} f_j^w(t) = f(t)$ при $t \in \Gamma$.

Пусть в точке t_j выполняется условие $I^+_{m(t_j)}(t_j; r(t_j)) < \infty$. Положим $\psi_j(z) := f_j^w(z)\chi^+(z)$, где $\chi^+(z)$ есть характеристическая функция области D^+. Очевидно,

$$\psi_j^+(t) - \psi_j^-(t) = f(t)s_j(t), \quad t \in \Gamma,$$

и $\nabla\psi_j$ интегрируема в степени $p = \frac{m(t_j)}{1-v(t_j)}$ в любой конечной части плоскости. Если $I^-_{m(t_j)}(t; r(t)) < \infty$, то полагаем $\psi_j(z) := f_j^w(z)(\chi^+(z) - 1)$, и эта функция обладает теми же свойствами.

Сумма функций ψ_j, $\psi := \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j$ удовлетворяет условию (7). Поскольку величину $m(t)$ можно выбрать сколь угодно близкой к $\mathfrak{m}(\Gamma; t)$, то лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1. А.Б. Тунгатаров [4], [5] ввел и исследовал интегральный оператор

$$T^\beta : \varphi \mapsto T^\beta\varphi := -\frac{1}{(1-\beta)\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z\left|\frac{z}{\zeta}\right|^\theta},$$

где $\theta = \frac{2\beta}{1-\beta}$, $\zeta = \xi + i\eta$. В предположении, что функция φ непрерывна в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, ее носитель компактен, а сама эта функция интегрируема в $\mathbb{C}$ в некоторой степени $q > 2$, он обладает следующими свойствами:

— функция $T^\beta\varphi$ непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}$, исчезает в бесконечно удаленной точке и удовлетворяет условию

$$|T^\beta\varphi(z) - T^\beta\varphi(\zeta)| \le c\big|z|z|^\theta - \zeta|\zeta|^\theta\big|^{\frac{2}{p}-1}, \tag{9}$$

где $\frac{1+\beta}{q} + \frac{1-\beta}{p} < 1$, а c — не зависящая от z и ζ положительная постоянная;

— оператор T^β — правый обратный к дифференциальному оператору $\overline{\partial}^\beta := \overline{\partial} - \beta\frac{z}{\overline{z}}\partial$, т. е. $\overline{\partial}^\beta T^\beta\varphi = \varphi$; при $\varphi \in L^1$ это равенство понимается в смысле С.Л. Соболева, но в точках непрерывности φ оно верно и для обычных производных.

Рассмотрим функцию

$$\phi_0(z) := \psi(z) - T^\beta\overline{\partial}^\beta\psi(z),$$

где ψ — построенное при доказательстве леммы решение задачи о скачке для дифференцируемых функций. Таким образом, ϕ_0 будет решением задачи о скачке для β-аналитических функций, если частные производные первого порядка интегрируемы в некоторой степени больше двух. Согласно (8) это так при условии (3). □

Условие (3) может быть менее ограничительным, чем (1) и (2). Для этого достаточно построить замкнутую кривую Γ, для которой

$$\mathfrak{m}(\Gamma;t) > 2 - \operatorname{dm}\Gamma$$

хотя бы в одной точке $t \in \Gamma$. Воспользуемся примером, приведенным в статье [22].

Пример. Пусть Γ — граница области, полученной из квадрата $Q = \{x, y : 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 0\}$ путем присоединения к нему счетного множества попарно не пересекающихся прямоугольников, примыкающих к его верхней стороне. Разделим эту сторону $\{0 \le x \le 1, y = 0\}$ на участки $I_n = [2^{-n}; 2^{-n+1}]$, где n меняется от единицы до $+\infty$. Каждый из этих участков разобьем на $2^{[n\beta]}$ равных частей, где $[n\beta]$ — целая часть $n\beta$, и обозначим точки деления участка I_n через x_{nj}, j — номер в порядке убывания. Положим $p_{nj} = \{x, y : x_{nj} - C_n \le x \le x_{nj},\ 0 \le y \le 2^{-n}\}$, где $C_n = \frac{1}{2}a_n^\alpha$, a_n — расстояние между точками деления на отрезке I_n, т. е. $2^{-n-[n\beta]}$; здесь $\alpha \ge 1$ и $\beta \ge 1$ — фиксированные числа. Присоединим к квадрату Q все прямоугольники p_{nj} и обозначим через Γ границу полученной области. Непосредственные вычисления [22] показывают, что $\operatorname{dm}\Gamma = \frac{2\beta}{\beta+1}$, $\mathfrak{m}^+(\Gamma;t) = \mathfrak{m}^-(\Gamma;t) = 1$ при $t \ne 0$, $\mathfrak{m}^-(\Gamma;0) = \frac{2}{\beta+1}$ и $\mathfrak{m}^+(\Gamma;0) = 1 - \frac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha}$. При $\alpha, \beta > 1$ имеем

$$\mathfrak{m}(\Gamma;0) = 1 - \frac{\beta - 1}{(\beta+1)\alpha} > 2 - \operatorname{dm}\Gamma.$$

Доказательство теоремы 2. Доказательство единственности решения задачи о скачке для исчезающих в бесконечности аналитических функций на спрямляемой кривой опирается на два фундаментальных результата — теорему Пенлеве и теорему Лиувилля. Теорема Пенлеве (например, [23]) гласит, что всякая функция, непрерывная в области D и аналитическая в $D \setminus \Gamma$, где Γ — лежащая в D спрямляемая кривая, является аналитической в D. Отсюда следует, что разность двух решений задачи о скачке на спрямляемой кривой аналитична во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля такая функция постоянна, а поскольку оба решения исчезают в бесконечности, то эта разность есть тождественный нуль.

Если кривая Γ неспрямляема, то теорему Пенлеве в этом рассуждении можно заменить теоремой Е.П. Долженко [24]. Согласно этой теореме всякая функция, удовлетворяющая в области D условию Гёльдера с показателем $\alpha > \operatorname{dm}_H \Gamma - 1$ и аналитическая в $D \setminus \Gamma$, является аналитической в D. Поэтому решение задачи о скачке является единственным в классе исчезающих в бесконечности аналитических функций, удовлетворяющих вблизи Γ условию Гёльдера с таким показателем [12], [14].

В работе [6] теоремы Лиувилля и Е.П. Долженко перенесены на β-аналитические функции. Там доказано, что всякая β-аналитическая и ограниченная во всей комплексной плоскости функция постоянна (обобщение теоремы Лиувилля), а всякая функция, удовлетворяющая в области D условию Гёльдера с показателем $\alpha > \operatorname{dm}_H \Gamma - 1$ и β-аналитическая в $D \setminus \Gamma$, является β-аналитической в D (обобщение теоремы Е.П. Долженко).

Положим

$$\phi_j(z) := \psi_j(z) - T^\beta \overline{\partial}^\beta \psi_j(z), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где функции ψ_j построены при доказательстве леммы. Первое слагаемое в правой части этого равенства удовлетворяет в D^+ и D^- условию Гёльдера с показателем $v(t_j)$, а второе — условию (9) в $\mathbb{C}$. Пусть Δ есть конечная область, содержащая Γ внутри себя. Входящая в условие (9) функция $z|z|^\theta$ имеет в Δ ограниченные частные производные первого порядка, т. е. при $z, \zeta \in \Delta$ имеем $\left|z|z|^\theta - \zeta|\zeta|^\theta\right| \le c|z - \zeta|$, $c = c(\Delta)$. Значит, второе слагаемое удовлетворяет в Δ условию Гёльдера с показателем $2/p-1$. По условию (5)

$$\alpha(t_j) < \frac{\mathfrak{m}(\Gamma; t_j) - 2(1-\nu(t_j))}{\mathfrak{m}(\Gamma; t_j)} \frac{1+\beta}{1-\beta},$$

и поэтому существует $q > 2$ такое, что

$$\alpha(t_j)\frac{1-\beta}{1+\beta} < 1 - \frac{2}{q} < \frac{\mathfrak{m}(\Gamma; t_j) - 2(1-\nu(t_j))}{\mathfrak{m}(\Gamma; t_j)}.$$

Значит, можно выбрать число $p \in (1, 2)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha(t_j) < \frac{2}{p} - 1 < \left(1 - \frac{2}{q}\right)\frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Согласно лемме частные производные ψ_j интегрируемы в степени q, и в силу свойства (9) образ этой функции $T^\beta\psi_j$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $2/p - 1 > \alpha(t_j)$. Легко видеть, что в любом замкнутом множестве, не пересекающем носителя ψ_j, образ удовлетворяет этому условию с показателем, сколь угодно близким к единице. Следовательно, граничные значения решения $\phi_0 = \sum\limits_{j=1}^{n} \phi_j$ принадлежат классу $H_\alpha^{\mathrm{loc}}(\Gamma)$ для любого $\alpha(t)$, удовлетворяющего правому неравенству условия (5).

Пусть ϕ — разность двух решений, удовлетворяющих условиям теоремы. Зафиксируем точку $t \in \Gamma$; у нее есть окрестность N в $\mathbb{C}$ такая, что разность ϕ в N удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha(t) > \mathrm{dm}_H\,\Gamma - 1$. Поскольку в $N \setminus \Gamma$ она β-аналитична, то она является β-аналитической в N, а в силу произвольности точки t — и во всей плоскости. Очевидно, $\phi(\infty) = 0$, и согласно аналогу теоремы Лиувилля $\phi \equiv 0$. $\square$

Следствие 2 получается из этой теоремы при постоянных v и α.

Отметим, что условие (6) содержит в себе дополнительное ограничение на ν и Γ, поскольку его правая часть должна быть больше левой. Однако во многих случаях это дополнительное условие выполняется. Скажем, в приведенном выше примере $\mathrm{dm}_H\,\Gamma = 1$, и левая часть (6) обращается в нуль. Аналогичное замечание относится к условию (5).

Некоторые из приведенных в статье результатов можно уточнить, использовав пространства Лебега с переменным показателем (например, [25] [26]).

Литература

[1] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции* (Наука, М., 1988).

[2] Монахов В.Н. *Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений* (Наука, Новосибирск, 1977).

[3] Положий Г.Н. *Теория и применение p-аналитических и (p,q)-аналитических функций. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного* (Наук. думка, Киев, 1973).

[4] Тунгатаров А.Б. *Свойства одного интегрального оператора в классах суммируемых функций*, Изв. АН Казахск. ССР. Сер. физ.-матем. **132** (5), 58–62 (1985).

[5] Тунгатаров А.Б. *О приложении некоторых интегральных операторов в теории обобщенных аналитических функций*, Изв. АН Казахск. ССР. Сер. физ.-матем. **134** (1), 51–54 (1987).

[6] Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., and Pena-Pena D. *On the jump problem for β-analytic functions*, Complex Variables and elliptic equat. **51** (8–11), 763–775 (2006).

[7] Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., and Vilaire J.-M. *A jump problem for β-analytic functions in domains with fractal boundaries*, Revista Matem. Complutense **23**, 105–111 (2010).

[8] Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., and Vilaire J.-M. *The Riemann boundary value problem for β-analytic functions over D-summable closed curves*, International J. of Pure and Appl. Math. **75** (4), 441–453 (2012).

[9] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Наука, М., 1977).

[10] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, М., 1962).

[11] Lu Jian-Ke. *Boundary value problems for analytic functions* (Singapore, World Scientific, 1993).

[12] Кац Б.А. *Задача Римана на замкнутой жордановой кривой*, Изв. вузов. Матем., № 3, 68–80 (1984).

[13] Кац Б.А. *Задача Римана на разомкнутой жордановой кривой*, Изв. вузов. Матем., № 12, 30–38 (1984).
[14] Kats B.A. *The Riemann boundary value problem on non-rectifiable curves and related questions*, Complex Variables and Elliptic Equat.: An Int. J. **59** (8), 1053–1069 (2014) DOI: 10.1080/17476933.2013.809574.
[15] Falconer K.J. *Fractal geometry* (Wiley and Sons, Chichester, 2014).
[16] Tricot C. *Curves and fractal dimension.* (Springer-Verlag, New York, 1995).
[17] Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. *ε-энтропия и емкость множеств в функциональных пространствах*, УМН **14**, 3–86 (1959).
[18] Harrison J., Norton A. *The Gauss–Green theorem for fractal boundaries*, Duke Math. J. **67** (3), 575–588 (1992).
[19] Кац Д.Б. *Показатели Марцинкевича и их приложения в краевых задачах*, Изв. вузов. Матем., № 3, 68–71 (2014).
[20] Кац Д.Б. *Локальные показатели Марцинкевича и их приложение*, Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **156** (4), 31–38 (2014).
[21] Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций* (Мир, М., 1973).
[22] Кац Д.Б. *Новые метрические характеристики неспрямляемых кривых и их приложения*, Сиб. матем. журн. **57** (2), 364–372 (2016).
[23] Маркушевич А.И. *Избранные главы теории аналитических функций* (Наука, М., 1976).
[24] Долженко Е.П. *О “стирании” особенностей аналитических функций*, УМН **18** (4), 135–142 (1963).
[25] Samko N.G., Samko S.G., Vakulov B.G. *Weighted Sobolev theorem in Lebesgue spaces with variable exponent: corrigendum*, Armenian J. Math. **3** (2), 92–97 (2010).
[26] Karlovich A.Yu., Spitkovsky I.M. *The Cauchy singular integral operator with weighted variable Lebesgue spaces*, Operator Theory: Advances and Appl. **236**, 275–291 (2013).

Д.Б. Кац

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

`e-mail:` katzdavid89@gmail.com

D.B. Katz

Marcinkiewicz exponents and a boundary-value jump problem for Beltrami equation

Abstract. The Marcinkiewicz exponents that were introduced by author before are applied here to solving boundary value jump problem on non-rectifiable curve for one special case of the Beltrami equation.

Keywords: Marcinkiewicz exponent, fractal, boundary-value problem, Riemann problem, non-rectifiable curve, Beltrami equation.

D.B. Katz

*Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

`e-mail:` katzdavid89@gmail.com