Дорогие студенты, вы зашли в так называемую “Виртуальную аудиторию,” в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, как это делается оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply'ем.

Пока, в ближайшее время, студентам открыт доступ в университет, так что вы можете приходить ко мне (ауд. 1205) в часы ваших занятий по расписанию (во вторник 11h.50m.-13h.30m. и в пятницу 15h.40m.-17h.30m.) для консультаций по решению домашних задач.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 43

Числовые ряды: вычисление частичных сумм и сходимость

Тема сегодняшнего занятия связана с изучением проблемы сходимости специальной числовой последовательности вида

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n = 1, 2, ...,$$

где $\{a_k,\ k = 1, 2, ...\}$ также числовая последовательность.

Предел последовательности S_n при $n \to \infty$ записывается в виде

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

и называется *числовым рядом*, в то время как S_n *называется частичной суммой.*

Если предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ существует (конечен), говорят, что ряд S *сходится*, в противном случае говорят, что ряд S *расходится.* Понятно, что сходимость ряда эквивалентна сходимости к нулю *остатка ряда*

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Методы суммирования рядов. Вычисление предела $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ называется суммированием ряда S. За исключением ряда специальных способов суммирования ряда, вычисление S осуществляется посредством суммирования частичной сумм S_n с последующим вычисление ее предела. Укажем на два наиболее распространенный метод суммирования S_n.

1^0. *Сведение к геометрическому ряду*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1,$$

с частичной суммой

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{1}$$

Пример 1. Вычислить сумму ряда (или суммировать ряд)

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} nq^n.$$

Решение. Найдем разность между S_n и $S_n q$:

$$S_n - S_n q = (q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n) - (q^2 + 2q^3 + \cdots + nq^n) =$$

$$= q + q^2 + \cdots + q^{-} nq^{n+1} = qS_{n-1} - nq^{n+1}.$$

В силу формулы (1) с заменой n на $n-1$ имеем:

$$S_n - S_n q = qS_{n-1} - nq^{n+1} = q\frac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1}.$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q},$$

откуда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

2^0. *Метод сведения к рядам с общим членом вида* $a_n = b_{n+1} - b_n$.

Действительно, если общий член имеет такой вид, то

$$S_n = b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \cdots + b_n - b_{n-1} + b_{n+1} - b_n = b_{n+1} - b_1.$$

Если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b$, то

$$S = b - b_1.$$

Пример 2. Вычислить сумму ряда (или суммировать ряд)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Решение. Все архипросто:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right).$$

Следовательно, $b_{n+1} = n + 1^{-1} \to 0$, $b_1 = 1$, так что $S + 1$.

Следующий признак является необходимым (но не достаточным!!!) для сходимости: *если ряд сходится, то его общий член $a_n \to 0$, когда $n \to \infty$.* По существу, по этому признаку можно доказать только *расходимость* ряда: если a_n в пределе при $\to \infty$ не равен нулю или вообще не существует,то ряд расходится. Если же $a_n \to 0$, то о сходимости или расходимости ряда судить не возможно. Например, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha, \ \alpha \neq m\pi,$$

расходятся. Действительно, у первого ряда общий член

$$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+3}$$

при $n \to \infty$ предела не имеет. Не имеет предела и общий член $a_n = \sin n\alpha$ третьего ряда (помните, $\sin n$ никуда не стремится!). Наконец, общий член второго ряда $a_n = (1+1/n)^n \to \mathrm{e} \neq 0$, и поэтому этот ряд также расходится.

С другой стороны, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

имеет общий член $a_n = 1/\sqrt{n}$, который стремится к нулю при $n \to \infty$, но этот ряд расходится. Действительно, частичная сумма

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

так что $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, то есть ряд (2) расходится.

Задание 43

Решение следующих задач, взятых из задачника Кудрявцев, Кутасов и др., высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу.

$$13.1(2).\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}},$$

$$13.4(4).\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2+12n-35},$$

$$13.5(5).\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}},$$

$$13.6(1).\quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

$$13.6(5).\quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{3}{2^n}.$$

Доказать расходимость ряда.

$$13.12(1).\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)},$$

$$13.12(4).\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n+3}\arcsin\frac{1}{n^2+2},$$

$$13.12(5).\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}.$$