МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАБЕРЕЖНОЧЕЛНИНСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФГАОУ ВПО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ)
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КРАТКИЙ КУРС
ПО КИНЕМАТИКЕ ТОЧКИ

Учебное пособие

Набережные Челны
2014

Краткий курс по кинематике точки: Учебное пособие. / Составители Ф.Д. Байрамов, А.Р. Фардеев, Б.Ф. Байрамов. – Набережные Челны: Изд-во НЧИ КФУ, 2014 г. – 30 с.

В учебном пособии приводится краткое изложение курса кинематики точки. В частности, излагается метод единого доказательства теорем сложения скоростей и ускорений точки в сложном движении, отличающийся простотой и наглядностью; приводятся примеры.

Учебное пособие предназначено для студентов всех технических специальностей. Оно будет полезно и для начинающих преподавателей.

Рецензент: к.т.н., доцент Галимов Н.С.

Печатается в соответствии с решением заседания кафедры механики и конструирования Набережночелнинского института (филиала) Казанского (Приволжского) федерального университета (протокол № 11 от 17.04.2014 г.)

Введение

Теоретическая механика – наука о механическом движении материальных тел.

Механическое движение – происходящее с течением времени изменение взаимного положения тел в пространстве.

Кинематика – раздел механики, изучающий механическое движение только с геометрической точки зрения без учёта сил, вызывающих это движение.

1. Основные понятия кинематики

Система отсчёта. Движение любого тела можно изучать только относительно другого тела. Тело, относительно которого рассматривается движение интересующего нас тела, называется телом отсчёта. Совокупность тела отсчёта и жёстко связанной с ним какой-либо системы координат называется системой отсчёта.

Пространство. В теоретической механике пространство рассматривается как трёхмерное Евклидово пространство. Его свойства же зависят от движущейся материи и определяются аксиомами и теоремами геометрии Евклида.

Время. В теоретической механике время рассматривается как универсальное (абсолютное) время. Такое время во всех точках пространства и системах отчёта течёт одинаково и не зависит от их движения. Время – монотонно непрерывно изменяющаяся скалярная величина и в задачах кинематики принимается за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные рассматриваются как функции времени.

Принятые выше модели пространства и времени вполне применимы для изучения движений со скоростями, далёкими от скорости света.

Для решения задач кинематики изучаемое движение как-то должно быть задано (определено, описано).

Движение тела считается определённым, если задан способ, позволяющий найти положение тела в выбранной системе отсчёта в любой момент времени. Во многих случаях движение задаётся математическими уравнениями. Эти уравнения связывают параметры, определяющие положение тела, со временем.

Две основные задачи кинематики

1. Установление математических способов (уравнений) описания движения.
2. Определение кинематических характеристик движения (скорости, ускорения, траектории отдельных точек тела и т.д.), зная закон (уравнения) движения.

2. Кинематика точки

Рассмотрим решение основных задач кинематики для точки.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка, называется траекторией точки. Траектория может быть прямолинейной и криволинейной.

Имеются три способа задания движения точки:
1) координатный;
2) векторный;
3) естественный

способы.

1. Координатный способ. В любой системе координат положение точки определяется тремя координатами. На рис. 1 показаны декартовые координаты точки *x*, *y*, *z*.

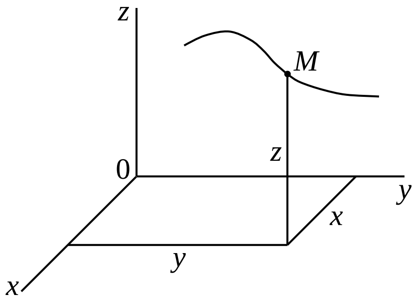

Рис. 1

Чтобы знать закон движения точки, координаты точки должны быть заданы как функции времени:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \qquad (1)$$

Уравнения (1) – уравнения (закон) движения точки в прямоугольных декартовых координатах.

Движение точки в одной плоскости описывается двумя уравнениями, прямолинейное движение – одним уравнением.

Одна из задач кинематики – определение траектории точки. Уравнения (1) одновременно являются параметрическими уравнениями траектории точки. Здесь роль параметра играет время *t*. Если из уравнений (1) исключить *t*, то найдём уравнения траектории точки, связывающие только координаты. Например, определяя t через x из первого уравнения (1) подставляя полученное выражение во второе и третье уравнения (1) получим уравнения траектории в виде:

$$y = f_1(x), \quad z = f_2(x).$$

При плоском движении уравнение траектории будет только одно.

<u>Пример.</u> Заданы следующие уравнения движения точки:

$$x = a\sin(\omega t), \quad y = b\cos(\omega t),$$

где $a,\, b,\, \omega - const > 0$.

Найти траекторию, положение при $t = 0$ и дальнейшее направление движения точки.

Решение.

$$\frac{x}{a} = \sin(\omega t) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \sin^2(\omega t);$$

$$\frac{y}{b} = \cos(\omega t) \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \cos^2(\omega t).$$

Складывая последние уравнения, найдём уравнение траектории (эллипс):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

При $t=0$ имеем $x_0=0$, $y_0=b$, следовательно, точка находится на оси $0y$. Как следует из уравнений движения, с ростом t координата x растёт, а y убывает. Направление движения точки показано на рис. 2.

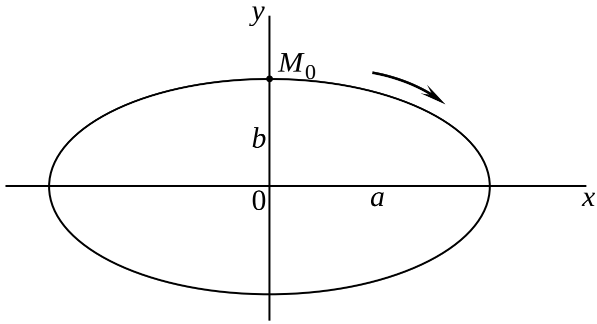

Рис. 2

2. Векторный способ. Положение точки в пространстве можно определить радиусом-вектором, проведённым из некоторой фиксированной точки (рис. 3).

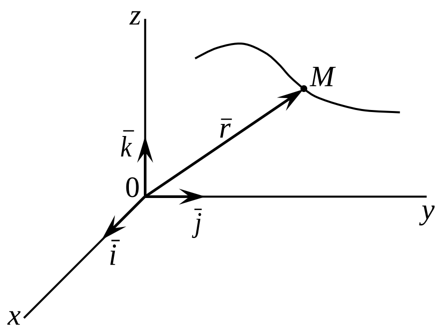

Рис. 3

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \qquad (2)$$

(2) – уравнение движения точки в векторной форме.

Векторный и координатный способы взаимосвязаны. Так как проекции вектора $\bar{r}$ на оси равны координатам точки *M*, т.е.

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z,$$

то уравнение (2) можно записать в виде

$$\bar{r} = x(t)\cdot\bar{i} + y(t)\cdot\bar{j} + z(t)\cdot\bar{k}, \qquad (3)$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – единичные векторы (орты) осей.

Если заданы уравнения (1), то подставляя координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в (3) найдём уравнение движения в векторной форме. Наоборот, если задано уравнение (3), то из него получим уравнения движения (1).

Пример. Задано векторное уравнение движения

$$\bar{r} = (1-3t)\cdot\bar{i} + 4t\cdot\bar{j}.$$

Определить траекторию точки.

Решение. Имеем

$$x = 1-3t, \quad y = 4t.$$

Определяя *t* из второго уравнения

$$t = \frac{y}{4}$$

и подставляя это в первое уравнение, найдём уравнение траектории

$$x = 1 - \frac{3}{4}y.$$

Так как $t \geq 0$, то $y \geq 0$, $x \leq 1$. $M_0(1{,}0)$. Следовательно, траекторией точки будет полупрямая, начинающаяся из точки

M_0 .

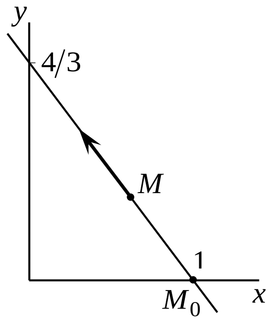

Рис. 4

3. <u>Естественный способ.</u> Этот способ применяется только при известной траектории точки.

Принимая траекторию за криволинейную координатную ось, на ней произвольно выбираем начало отсчёта 0 дуговой координаты. Дуговой координатой S называется дуга, отсчитываемая вдоль траектории от выбранного начала до движущейся точки M: $S = \pm\overset{\frown}{0M}$. Дуговая координата в одну сторону от 0 считается положительной, в другую – отрицательной.

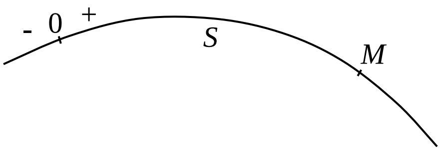

Рис. 5

Таким образом, при естественном способе задаются:

1) траектория;
2) начало и положительное направление отсчёта дуговой координаты;
3) уравнение, связывающее дуговую координату со временем

$$S = S(t). \qquad (4)$$

Уравнение (4) позволяет найти положение точки на траектории в любой момент времени и называется уравнением движения точки по заданной траектории.

Пример. Задано уравнение движения точки $S = R\cos\pi t$ *(см)* по окружности радиуса *R (см)* (рис. 6). Найти положение точки при $t = 5сек$.

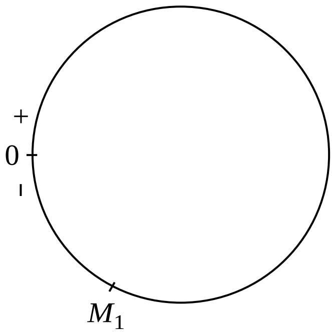

Рис. 6

Решение. Сначала на окружности произвольно выбираем начало и положительное направление отсчёта дуговой координаты (рис. 6). При $t = 5сек$ имеем $S_1 = R\cos 5\pi = -R$. Откладывая дугу $S_1 = -R$ по окружности, найдём положение M_1 точки при $t = 5сек$.

3. Скорость точки

Пусть движущаяся точка находится в момент времени *t* в положении *M*, определяемом радиусом-вектором $\bar{r}$, а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ приходит в положение M_1, определяемое вектором $\bar{r}_1$ (рис. 7).

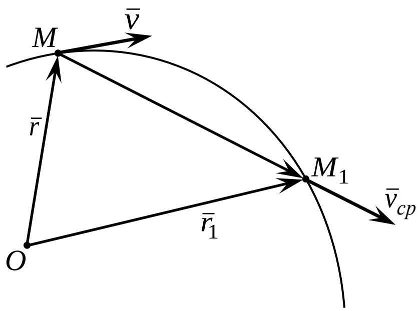

Рис. 7

Вектор $\overline{MM_1} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \Delta\bar{r}$ называется вектором перемещения точки за промежуток времени Δt.

Отношение вектора $\Delta\bar{r}$ к Δt называется средней скоростью точки:

$$\bar{v}_{cp} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}.$$

Вектор $\bar{v}_{cp}$ направлен так же, как и вектор $\overline{MM_1}$, вдоль хорды MM_1 в сторону движения точки (от деления на скаляр Δt направление вектора не изменяется).

Предел средней скорости при $\Delta t \to 0$ называется скоростью точки в данный момент времени t или просто скоростью точки:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}. \qquad (5)$$

Вектор скорости $\bar{v}$ как предел вектора $\overline{MM_1}$ направлен по касательной к траектории точки.

Таким образом, скорость точки – вектор, направленный по касательной к траектории в сторону движения точки. Скорость характеризует быстроту и направление движения.

При прямолинейном движении вектор скорости всё время направлен вдоль прямой, по которой движется точка, и может изменяться только по величине; при криволинейном движении изменяется и направление скорости. Основными единицами измерения скорости являются $м/сек$ или $км/час$.

4. Ускорение точки

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка находится в положении M и имеет скорость $\bar{v}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ приходит в положение M_1 и имеет скорость $\bar{v}_1$ (рис. 8).

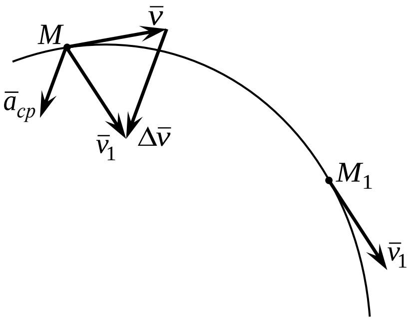

Рис. 8

Скорость $\bar{v}_1$ перенесём параллельно самой себе в точку M и построим вектор приращения скорости $\Delta\bar{v}$ за время Δt.

Отношение $\Delta\bar{v}$ к промежутку времени Δt определяет вектор среднего ускорения точки за этот промежуток времени:

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}, \quad \bar{a}_{cp} \,||\, \Delta\bar{v}.$$

Вектор $\bar{a}_{cp}$, как и $\Delta\bar{v}$, всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Предел среднего ускорения $\bar{a}_{cp}$ при $\Delta t \to 0$ называется ускорением точки в данный момент времени или просто ускорением точки:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \bar{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

или, с учётом равенства (5),

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}. \qquad (6)$$

Таким образом, ускорение точки – вектор, определяемый формулой (6). Ускорение характеризует изменение вектора скорости по направлению и по величине. Вектор ускорения всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Основная единица измерения ускорения – $м/сек^2$.

5. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения

Пусть движение точки задано в декартовых осях, т.е. уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \qquad (7)$$

Скорость точки при координатном способе определяется своими проекциями на оси координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \qquad (8)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Таким образом, проекция скорости на какую-либо ось равна первой производной от соответствующей координаты. По известным проекциям модуль и направление скорости (т.е. углы α, β, γ между вектором $\bar{v}$ и осями координат) найдём по формулам:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{|\bar{v}|}, \quad \cos\beta = \frac{v_y}{|\bar{v}|}, \quad \cos\gamma = \frac{v_z}{|\bar{v}|}.$$

Ускорение точки также определяется своими проекциями на оси координат:

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x}, \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y}, \\ a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z}, \end{aligned} \tag{9}$$

т.е. проекции ускорения на оси координат равны первым производным от соответствующих проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки. Модуль и направление ускорения определяются аналогично скорости из формул

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta_1 = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a},$$

где α_1, β_1, γ_1 – углы между вектором $\bar{a}$ и осями координат.

6. Определение скорости точки при естественном способе задания движения

Пусть точка M движется по известной траектории (рис. 9) согласно уравнению $S = S(t)$, где S – дуговая координата, 0 –

начало отсчёта, $(+)$ – положительное направление отсчёта *S*.

Так как траектория известна, то известно и направление вектора скорости. Вектор $\bar{v}$ направлен по касательной к траектории.

Введём орт касательной $\bar{\tau}$, направленный в сторону положительного отсчёта дуговой координаты. Тогда вектор скорости можно представить так:

$$\bar{v} = \mathbf{v} \cdot \bar{\tau}, \tag{10}$$

где $\mathbf{v}$ – алгебраическое значение скорости (алгебраическая скорость), отличающаяся от величины модуля скорости только знаком:

$$\mathbf{v} = \pm|\bar{v}|.$$

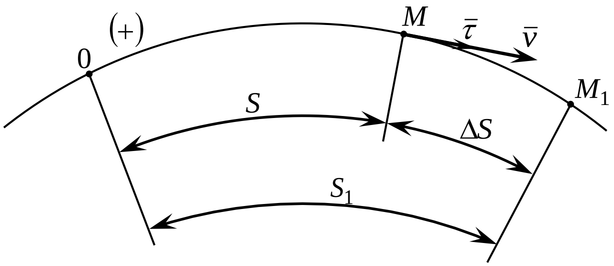

Рис. 9

Пусть в момент времени *t* дуговая координата точки *M* равна *S*. За промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ точка переходит в положение M_1, совершая вдоль дуги траектории перемещение $\Delta S = S_1 - S$ (рис. 9). Величина средней алгебраической скорости будет равна:

$$\mathbf{v}_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, найдём величину алгебраической скорости в момент времени *t*:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \qquad (11)$$

Таким образом, при естественном способе задания движения скорость точки определяется формулами (10), (11).

Если $\mathbf{v} > 0$, то вектор скорости $\bar{v}$ направлен в сторону роста дуговой координаты *S*, а если $\mathbf{v} < 0$, то в сторону убывания *S*. Следовательно, алгебраическая скорость определяет одновременно и модуль, и направление вектора скорости точки.

7. Естественные координатные оси траектории

Пусть точка движется по произвольной кривой (рис. 10). На кривой возьмём две точки *M*, M_1 и введём орты касательной $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}_1$. Вектор $\bar{\tau}_1$ перенесём параллельно самому себе в точку *M* и рассмотрим плоскость $M\tau\tau_1$.

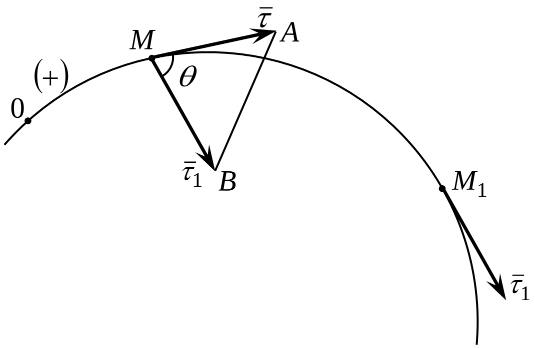

Рис. 10

В пределе, когда точка M_1 стремится к *M*, эта плоскость займёт определённое положение. Предельное положение плоскости $M\tau\tau_1$ при стремлении точки M_1 к точке *M* называется соприкасающейся плоскостью кривой в точке *M*. Соприкасающаяся плоскость теснее других плоскостей прилегает к кривой в данной точке. Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью этой кривой и является общей для всех её точек. Плоскость, проходящая через точку M перпендикулярно вектору $\bar{\tau}$, называется нормальной плоскостью кривой в точке M. Любая прямая, лежащая в нормальной плоскости и проходящая через точку M, называется нормалью к кривой в точке M. Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью, а перпендикулярная к соприкасающейся плоскости – бинормалью.

Таким образом, в каждой точке кривой можно построить три взаимно перпендикулярных прямых, состоящих из касательной (T), главной нормали (N) и бинормали (B) (рис. 11).

Эти прямые примем за координатные оси и введём их орты. Орт $\bar{\tau}$ был введён ранее. Орт главной нормали обозначается $\bar{n}$ и всегда направляется в сторону вогнутости траектории. Орт бинормали обозначают $\bar{b}$ и направляют так, чтобы векторы $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ образовали правую тройку.

Оси $M\tau nb$, имеющие начало в точке M и движущиеся вместе с нею, называются естественными осями траектории.

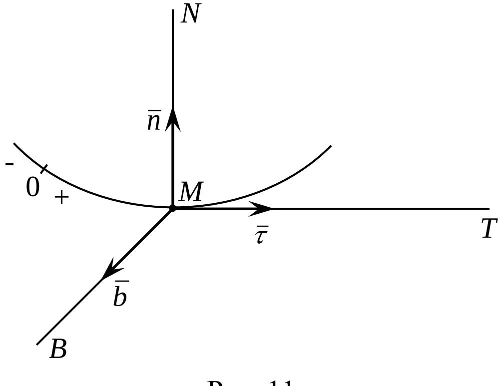

Рис. 11

Угол θ (угол между двумя касательными) (рис. 10) называется углом смежности. Предел отношения угла θ к длине дуги $\widetilde{MM_1} = |\Delta S|$ называется кривизной к кривой в точке M:

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\theta}{|\Delta S|}. \tag{12}$$

Величина, обратная кривизне, называется радиусом кривизны ρ в точке M:

$$\rho = \frac{1}{K}. \tag{13}$$

Например, для прямой линии: $K = 0$, $\rho = \infty$; для окружности: $K = \dfrac{1}{R}$, $\rho = R$.

8. Определение ускорения точки при естественном способе задания движения

При естественном способе задания движения ускорение точки определяется через проекции на естественные оси траектории.

Формула разложения вектора ускорения по естественным осям имеет вид:

$$\bar{a} = a_\tau \cdot \bar{\tau} + a_n \cdot \bar{n} + a_b \cdot \bar{b}, \tag{14}$$

где a_τ, a_n, a_b – проекции вектора $\bar{a}$ на касательную, главную нормаль, бинормаль. Нужно найти эти проекции.

Как видно из рис. 8, вектор среднего ускорения $\bar{a}_{cp}$ лежит в плоскости Mvv_1, которая одновременно является и плоскостью $M\tau\tau_1$ (рис. 10). Когда точка M_1 стремится к M, плоскость $M\tau\tau_1$ переходит в соприкасающуюся плоскость. Следовательно, вектор ускорения $\bar{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости, поэтому всегда $a_b = 0$.

В случае естественного способа скорость точки определяется формулой (10). Поэтому

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d\left(\mathbf{v}\cdot\bar{\tau}\right)}{dt}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\bar{\tau}+\mathbf{v}\cdot\frac{d\bar{\tau}}{dt}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\bar{\tau}+\mathbf{v}^2\cdot\frac{d\bar{\tau}}{dS}, \qquad (15)$$

так как

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt}=\frac{d\bar{\tau}}{dt}\cdot\frac{dS}{dS}=\mathbf{v}\cdot\frac{d\bar{\tau}}{dS}.$$

Найдём модуль и направление вектора $d\bar{\tau}/dS$.

По определению

$$\frac{d\bar{\tau}}{dS}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta S}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{dS}\right|=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\left|\Delta\bar{\tau}\right|}{\left|\Delta S\right|}.$$

Из ΔABM (рис. 12) имеем

$$\left|\Delta\bar{\tau}\right|=AB=2\cdot\left|\bar{\tau}\right|\cdot\sin\frac{\theta}{2}=2\cdot\sin\frac{\theta}{2}.$$

Следовательно, с учётом (12), (13)

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{dS}\right|=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{\theta}{2}}{\left|\Delta S\right|}\cdot\frac{v}{\theta}=\lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ \theta\to 0}}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\theta}{\left|\Delta S\right|}=1\cdot K=\frac{1}{\rho}.$$

Найдём направление вектора $\dfrac{d\bar{\tau}}{dS}$. Так как $\left|\bar{\tau}\right|=const$, то $\dfrac{d\bar{\tau}}{dS}\perp\bar{\tau}$, т.е. $\dfrac{d\bar{\tau}}{dS}$ – нормаль к кривой в точке *M*. Как видно из рис. 12, вектор $\dfrac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta S}$ лежит в плоскости $M\tau\tau_1$, которая при $\Delta S\to 0$ переходит в соприкасающуюся плоскость. Следовательно, вектор

$\frac{d\bar{\tau}}{dS}$ лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории. Таким образом, вектор $\frac{d\bar{\tau}}{dS}$ направлен по вектору $\bar{n}$.

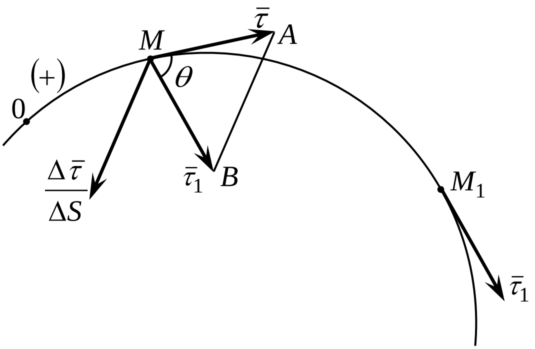

Рис. 12

С учётом модуля:

$$\frac{d\bar{\tau}}{dS} = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{n}.$$

и ускорение (15) запишется так:

$$\bar{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \bar{\tau} + \frac{\mathbf{v}^2}{\rho} \cdot \bar{n}. \qquad (16)$$

Сравнивая (16) с (14), найдём проекции ускорения на естественные оси:

$$a_\tau = \frac{d\mathbf{v}}{dt}; \quad a_n = \frac{\mathbf{v}^2}{\rho}; \quad a_b = 0.$$

a_τ называется касательным ускорением, а a_n – нормальным ускорением точки. Так как $a_b = 0$, то вектор ускорения всегда лежит в соприкасающейся плоскости.

Таким образом, при естественном способе задания движения ускорение точки определяется двумя составляющими (рис. 13)

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n,$$

где $\bar{a}_\tau = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \bar{\tau}$ – касательная составляющая ускорения; $\bar{a}_n = \dfrac{\mathbf{v}^2}{\rho} \cdot \bar{n}$ – нормальная составляющая ускорения.

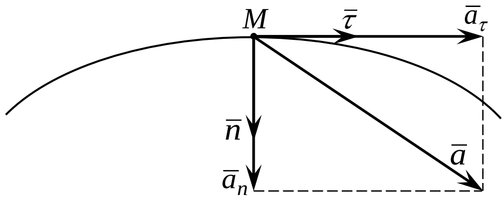

Рис. 13

Так как $\bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n$, то по модулю:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Нормальное ускорение a_n всегда положительно, поэтому составляющая $\bar{a}_n$ всегда направлена в сторону вогнутости траектории.

Касательное ускорение a_τ – алгебраическая величина, поэтому составляющая $\bar{a}_\tau$ может иметь любое направление относительно $\bar{\tau}$.

Выясним смысл знака a_τ. Пусть a_τ и $\mathbf{v}$ имеют одинаковые знаки, т.е. выполняется условие $a_\tau \cdot \mathbf{v} > 0$. Тогда

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}>0\rightarrow\frac{d\mathbf{v}^2}{dt}>0\rightarrow\mathbf{v}^2\uparrow\rightarrow|\mathbf{v}|\uparrow,$$

т.е. в этом случае модуль скорости возрастает. Такое движение называется ускоренным.

Таким же образом можно показать, что если $a_\tau\cdot\mathbf{v}<0$, то модуль скорости убывает. Такое движение называется замедленным.

Касательное ускорение a_τ равняется нулю, когда:

1) $\mathbf{v}=const$. Такое движение называется равномерным;
2) $\mathbf{v}$ принимает свои максимальные и минимальные значения.

Нормальное ускорение a_n равняется нулю, когда:

1) $\rho=\infty$, т.е. при прямолинейной траектории;
2) в точках перегиба траектории, где также $\rho=\infty$;
3) в моменты времени, когда $\mathbf{v}=0$.

9. Сложное движение точки

Сложным называется движение точки (тела), рассматриваемое одновременно в двух или нескольких системах координат, совершающих заданное движение относительно друг друга.

Для простоты изложения теории сложного движения точки, рассмотрим движение точки M по отношению к двум различным системам координат $0_1x_1y_1z_1$ и $0xyz$, имеющим взаимное относительное перемещение (рис. 14). Одну из этих систем $0_1x_1y_1z_1$ будем условно называть неподвижной (основной). Вторую $0xyz$, соответственно этому, будем называть подвижной. Выбор той или иной системы координат в качестве неподвижной или подвижной часто определяется условиями поставленной задачи. Неподвижная и подвижная системы координат обычно жёстко связываются с соответствующими телами.

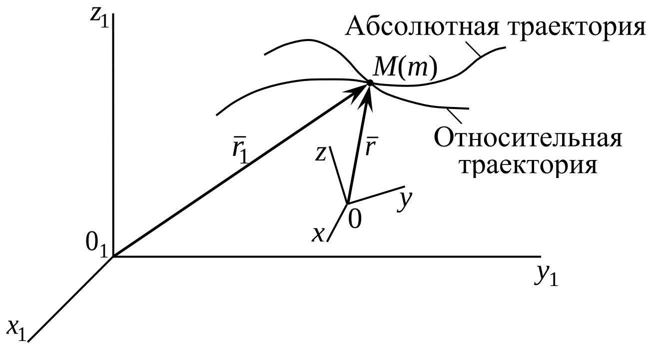

Рис. 14

Движение точки M в неподвижной системе координат $0_1x_1y_1z_1$ называют абсолютным, движение точки M в подвижной системе $0xyz$ называют относительным. Соответственно этому, траектория точки M по отношению к неподвижной системе координат называется абсолютной, а по отношению к подвижной системе – относительной.

Движение подвижной системы координат $0xyz$ по отношению к неподвижной системе координат $0_1x_1y_1z_1$ называется переносным.

Абсолютное движение определяется как результат сочетания относительного и переносного движений. Поэтому абсолютное движение называют также сложным, а относительное и переносное движения – его составляющими. Например, сложным является движение человека, идущего по эскалатору метро, относительно неподвижной стены туннеля. Движение человека относительно неподвижной системы координат, связанной со стеной туннеля (абсолютное движение), определяется через движение человека относительно подвижной системы координат, связанной с эскалатором (относительное движение) и движение эскалатора относительно неподвижной стены туннеля (переносное движение).

Кинематические элементы абсолютного движения точки M

обозначают индексом *«a»*, элементы относительного движения – индексом *«r»*; элементы переносного движения – индексом *«e»*.

Скорость $\bar{v}_r$ и ускорение $\bar{a}_r$ точки *M* (рис. 14) в её относительном движении называются относительной скоростью и относительным ускорением. Скорость $\bar{v}_a$ и ускорение $\bar{a}_a$ точки *M* в её абсолютном движении называются абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.

Переносной скоростью $\bar{v}_e$ и переносным ускорением $\bar{a}_e$ точки *M* в некоторый момент времени называются скорость и ускорение той точки *m* (рис. 14), неизменно связанной с подвижными осями среды, через которую в этот момент проходит движущаяся точка *M*. Ещё раз подчеркнём, что *m* – неподвижная точка подвижной системы координат $0xyz$. В том случае, когда подвижная система $0xyz$ неизменно связана с твёрдым телом, а относительное движение точки *M* происходит по поверхности (или внутри) этого тела, тогда переносным для точки *M* являются скорость и ускорение той точки *m* тела, с которой в данный момент совпадает точка *M*.

Для определения переносной скорости (переносного ускорения) при решении задач удобнее поступить следующим образом: мысленно остановить движущуюся точку *M* в относительном движении и вычислить её скорость (ускорение) только в переносном движении. Вычисление переносной скорости и переносного ускорения производится по формулам вычисления скоростей и ускорений точек твердого тела.

<u>Пример.</u> Прямолинейная трубка *AB* (рис. 15) вращается относительно неподвижной опоры по закону $\alpha = \alpha(t)$ вокруг оси $0z$, перпендикулярной плоскости чертежа.
В трубке находится шарик *M*, который двигается относительно трубки по некоторому закону $0M = f(t)$. Определить скорость и ускорение шарика относительно трубки, переносные скорость и ускорение шарика, уравнения его абсолютного движения.

Решение. Пусть $0x_1y_1z_1$ – неподвижная система координат, скреплённая с опорой. Движение шарика *M* по отношению к этой системе координат есть абсолютное движение. По условию задачи абсолютное движение складывается из двух составляющих: 1) из движения шарика по отношению к трубке; 2) из движения трубки относительно неподвижной системы координат. Следовательно, подвижную систему координат $0xyz$ в этой задаче следует связать (скрепить) с трубкой (рис. 15). Таким образом:

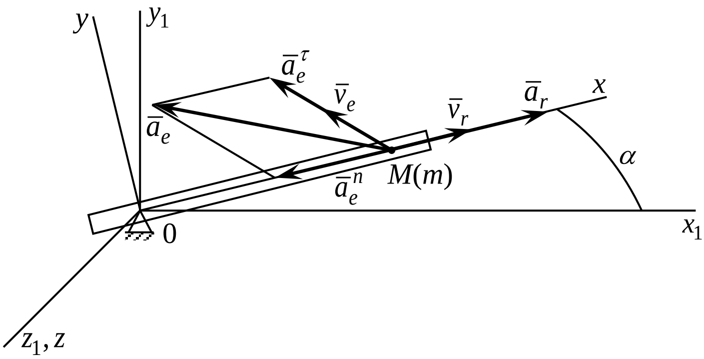

Рис. 15

1) относительное движение шарика; его уравнения $x = 0M = f(t)$; $y = 0$; $z = 0$; относительная траектория – прямая линия $0B$; относительная скорость $v_r = \dot{x} = f'(t)$; относительное ускорение $a_r = \dot{v}_r = f''(t)$; векторы $\bar{v}_r$ и $\bar{a}_r$ показаны на рис. 15 в предположении, что функции $f(t)$ и $f'(t)$ возрастают;

2) переносное движение; его уравнение – уравнение вращательного движения тела AB $\alpha = \alpha(t)$; переносная скорость шарика $\bar{v}_e = \bar{v}_m$, где m – та точка трубки, с которой в момент времени t совпадает шарик M (рис. 15), следовательно $|\bar{v}_e| = |\omega| \cdot |x| = |\dot{\alpha}| \cdot |f(t)|$; переносное ускорение шарика $\bar{a}_e = \bar{a}_m$, т.е. $\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau$, где $a_e^n = a_m^n = \omega^2 \cdot |x| = \dot{\alpha}^2 \cdot |f(t)|$;

$a_e^\tau = a_m^\tau = \varepsilon \cdot |x| = \ddot{\alpha} \cdot |f(t)|$; $\quad |\bar{a}_e| = |f(t)| \cdot \sqrt{(\dot{\alpha})^4 + (\ddot{\alpha})^2}$; направления векторов $\bar{v}_e$, $\bar{a}_e^\tau$ показаны на рис. 15 в предположении, что функции $\alpha(t)$ и $\dot{\alpha}(t)$ возрастают.

Уравнения абсолютного движения шарика $x_1 = x_1(t)$, $y_1 = y_1(t)$, $z_1 = z_1(t)$ легко определяются по чертежу:

$$x_1 = 0M \cdot \cos\alpha = f(t) \cdot \cos\alpha(t);$$

$$y_1 = 0M \cdot \sin\alpha = f(t) \cdot \sin\alpha(t);$$

$$z_1 = 0.$$

10. Теоремы сложения скоростей и ускорений точки в сложном движении

Рассмотрим сложное движение точки *M* при произвольном переносном движении (рис. 16).

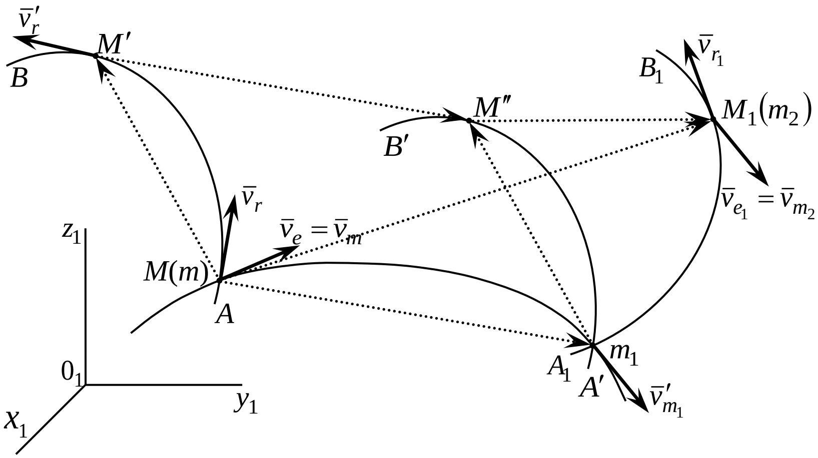

Рис. 16

Пусть в некоторый момент *t* точка *M* занимает положение, указанное на рис. 16. Её относительная траектория – кривая *AB*, неизменно связанная с подвижной системой координат (на рис. 16 не показана). Найдём абсолютное перемещение точки *M* за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$, считая последний малой величиной первого порядка малости. Пусть точка *M*, двигаясь вдоль кривой *AB* (относительное движение), совершает за промежуток времени Δt относительное перемещение, определяемое вектором $\overline{MM'}$. Одновременно сама кривая *AB*, перемещаясь за тот же промежуток времени вместе с подвижными осями (переносное движение), перейдёт в некоторое новое положение A_1B_1, где m_1 – конечное положение точки *m* кривой *AB*, с которой в момент *t* совпадает точка *M*. В результате этих двух перемещений точка *M* займёт положение M_1 относительно неподвижных осей $0_1x_1y_1z_1$, совершив за время Δt абсолютное перемещение $\overline{MM_1}$.

Переносное движение относительной траектории, в свою очередь, можно считать состоящим из поступательной части, определяемой движением точки *m* (полюса), и вращательной части вокруг этой точки с мгновенной угловой скоростью $\overline{\omega}_e$. Из рис. 16 видно, что, если бы кривая *AB* двигалась только поступательно вместе с точкой *m*, то она через промежуток Δt пришла бы в положение $A'B'$, а точка *M* – в положение M''. Появление вектора $\overline{M''M_1}$, следовательно, обусловлено вращательной частью переносного движения кривой *AB*.

Теперь запишем векторное равенство, вытекающее из рис. 16:

$$\overline{MM_1} = \overline{mm_1} + \overline{m_1M''} + \overline{M''M_1} = \overline{mm_1} + \overline{MM'} + \overline{M''M_1} \qquad (17)$$

Известно, что перемещение точки, разлагая в ряд по степеням малой величины, можно представить в виде:

$$\Delta\overline{r} = \overline{v}\cdot\Delta t + \overline{a}\cdot\frac{(\Delta t)^2}{2} + \ldots, \qquad (18)$$

где $\overline{v}$ и $\overline{a}$ – скорость и ускорение точки в соответствующем движении в момент t. Точками здесь и далее обозначены члены третьего и более высокого порядков малости.

На основании уравнения (18) запишем:

$$\overline{MM_1} = \bar{v}_a \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \bar{a}_a \cdot (\Delta t)^2 + \ldots, \qquad (19)$$

$$\overline{MM'} = \bar{v}_r \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \bar{a}_r \cdot (\Delta t)^2 + \ldots, \qquad (20)$$

$$\overline{mm_1} = \bar{v}_m \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \bar{a}_m \cdot (\Delta t)^2 + \ldots = \bar{v}_e \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \bar{a}_e \cdot (\Delta t)^2 + \ldots . \qquad (21)$$

Здесь $\bar{v}_a$, $\bar{v}_r$, $\bar{v}_e$ и $\bar{a}_a$, $\bar{a}_r$, $\bar{a}_e$ – абсолютные, относительные и переносные скорости и ускорения точки M.

Вектор $\overline{M''M_1}$ можно рассматривать как перемещение конца M'' радиус-вектора $\overline{m_1M''}$ при его вращении вместе с кривой $A'B'$ вокруг точки m_1. Скорость точки M'' в этом вращении определяется формулой:

$$\bar{v}_{M''} = \bar{\omega}_e \times \overline{m_1M''} = \bar{\omega}_e \times \overline{MM'}. \qquad (22)$$

Принимая теперь во внимание равенства (20), (22) вектор перемещения $\overline{M''M_1}$ согласно уравнению (18) представим в виде:

$$\overline{M''M_1} = \bar{v}_{M''} \cdot \Delta t + \ldots = \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r \cdot (\Delta t)^2 + \ldots, \qquad (23)$$

подставим равенства (19) – (21), (23) в равенство (17):

$$\bar{v}_a \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \bar{a}_a \cdot (\Delta t)^2 + \ldots = \bar{v}_r \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \bar{a}_r \cdot (\Delta t)^2 + \bar{v}_e \cdot \Delta t +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \bar{a}_e \cdot (\Delta t)^2 + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r \cdot (\Delta t)^2 + \ldots . \qquad (24)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малости (но произвольной!) величины Δt в левой и правой частях равенства (24), находим

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e, \tag{25}$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + 2 \cdot \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r. \tag{26}$$

Формула (25) выражает теорему сложения скоростей: абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей. А равенство (26) даёт связь между ускорениями точки. Ускорение, определяемое слагаемым $2 \cdot \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$, называется Кориолисовым ускорением точки. Вводя обозначение

$$\bar{a}_k = 2 \cdot \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r, \tag{27}$$

равенство (26) перепишем так:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k \tag{28}$$

Формула (28) выражает теорему сложения ускорений (теорему Кориолиса):

Абсолютное ускорение точки равно сумме переносного, относительного и Кориолисова ускорений.

Направление Кориолисова ускорения (27) определяется направлением векторного произведения векторов $\bar{\omega}_e$ и $\bar{v}_r$, модуль этого ускорения равен

$$a_k = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r \cdot \sin\left(\bar{\omega}_e \stackrel{\wedge}{,} \bar{v}_r \right).$$

Отсюда следует, что в следующих трёх случаях Кориолисово ускорение обращается в нуль:

а) при поступательном переносном движении, т.е. когда $\omega_e = 0$. При поступательном переносном движении относительной траектории вектор $\overline{M''M_1} = 0$, а, следовательно, Кориолисово ускорение не возникает;

б) в те моменты времени, когда $\bar{v}_r = 0,$ т.е. когда относительное движение точки *M* отсутствует;

в) если $\sin\left(\overline{\omega}_e \overset{\wedge}{,} \overline{v}_r\right) = 0$, т.е. при $\overline{\omega}_e \,||\, \overline{v}_r$.

11.Физический смысл ускорения Кориолиса

Напомним, прежде всего, что вообще ускорение есть величина, характеризующая изменение скорости по времени. Так, относительное ускорение $\overline{a}_r$ учитывает изменение относительной скорости $\overline{v}_r$, но только в относительном движении. Движение самой относительной траектории *АВ* (рис. 16) при определении $\overline{v}_r$ учитывать не надо.

Пусть при относительном перемещении точки из положения *М* в положение M' за время Δt вектор $\overline{v}_r$ стал равен $\overline{v}_r'$. Поступательное перемещение кривой *АВ* в положение $A'B'$ дополнительных изменений относительной скорости не вызывает. Однако, при повороте кривой $A'B'$ вокруг точки m_1 вектор $\overline{v}_r'$, направленный по касательной к кривой $A'B'$, также повернётся до положения $\overline{v}_{r_1}$. В результате относительная скорость получит за тот же промежуток Δt дополнительное приращение (относительно неподвижных осей) $\overline{v}_{r_1} - \overline{v}_r'$. Изменение направления относительной скорости, вызванное вращательной частью переносного движения, не зависит от относительного ускорения, а, следовательно, объясняется наличием у точки *М* некоторого дополнительного ускорения $\overline{a}_1$. Очевидно, что ускорение $\overline{a}_1$ можно найти как скорость конца вектора $\overline{v}_r$ при его вращении вместе с кривой *АВ* вокруг точки *m* с переносной угловой скоростью $\overline{\omega}_e$:

$$\overline{a}_1 = \overline{\omega}_e \times \overline{V}_r.$$

Аналогично, полное изменение переносной скорости точки *М* нельзя объяснить лишь существованием у точки переносного ускорения. Действительно, переносная скорость $\overline{v}_e$ и переносное ускорение $\bar{a}_e$ точки M в момент t определяется как скорость и ускорение точки m кривой AB, с которой она совпадает в данный момент времени: $\bar{v}_e = \bar{v}_m$ и $\bar{a}_e = \bar{a}_m$. Следовательно, переносное ускорение $\bar{a}_e$ учитывает только изменение скорости точки m кривой AB, т.е. изменение $\bar{v}_{m_1} - \bar{v}_m$, где $\bar{v}_{m_1}$ – скорость точки m в момент t_1. Однако, в момент t_1 точка M, вследствие относительного перемещения, совпадает уже с другой точкой m_2 кривой A_1B_1, поэтому имеет переносную скорость $\bar{v}_{e_1} = \bar{v}_{m_2}$, вообще говоря, отличную от скорости точки m_1. Изменение переносной скорости $\bar{v}_{e_1} - \bar{v}_{m_1}$ или $\bar{v}_{m_2} - \bar{v}_{m_1}$, возникшее за счёт относительного перемещения точки M, связано с существованием ещё одного дополнительного ускорения $\bar{a}_2$ точки M.

Согласно формуле распределения скоростей в свободном твердом теле:

$$\bar{v}_{m_2} = \bar{v}_{m_1} + \bar{\omega}_e \times \overline{m_1M_1}.$$

Учитывая, что $\overline{m_1M_1} = \overline{MM'} + \overline{M''M_1}$ и беря $\overline{MM'}$ и $\overline{M''M_1}$ из (20) и (23), получим

$$\bar{v}_{m_2} - \bar{v}_{m_1} = \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r \cdot \Delta t + \varepsilon,$$

где ε – величина второго и более высокого порядка малости.

Так как $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\varepsilon}{\Delta t} = 0$, то $\bar{a}_2 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\bar{v}_{m_2} - \bar{v}_{m_1}}{\Delta t} = \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$.

Из выражений для $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ видно, что их сумма как раз и будет Кориолисовым ускорением $\bar{a}_k$ точки M.

На основании вышеизложенного сделаем вывод: Кориолисово ускорение характеризует, во-первых, изменение относительной скорости точки за счёт переносного движения, во-вторых, изменение переносной скорости точки за счёт относительного движения.

Подписано в печать 21.04.14 г.
Формат 60×84/8 Бумага офсетная Печать ризографическая
Уч.-изд.л. 2 Усл.-печ.л. 2 Тираж 50 экз.
Заказ 29
Издательско-полиграфический центр
Филиала ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
в г. Набережные Челны

423810, г. Набережные Челны, Новый город, проспект Мира, 68/19
тел./факс (8552)39-65-99 e-mail: ic@ineka.ru