Математические заметки

Том 105 выпуск 5 май 2019

УДК 517.98

След и разности идемпотентов в C^*-алгебрах

А. М. Бикчентаев

Пусть φ – след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$, $\mathfrak{M}_\varphi$ – идеал определения следа φ и идемпотенты $P, Q \in \mathcal{A}$ с $QP = P$. Если $Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $P \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $0 \leqslant \varphi(P) \leqslant \varphi(Q)$. Если $Q - P \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(Q - P) \in \mathbb{R}^+$. Пусть трипотенты $A, B \in \mathcal{A}$. Если $AB = B$ и $A \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $B \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $0 \leqslant \varphi(B^2) \leqslant \varphi(A^2) < +\infty$.

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра фон Неймана. Тогда

$$\varphi(|PQ - QP|) \leqslant \min\{\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(|P - Q|)\}$$

для всех проекторов $P, Q \in \mathcal{A}$. Для положительного нормального функционала φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:

(i) φ является следом;

(ii) $\varphi(Q - P) \in \mathbb{R}^+$ для всех идемпотентов $P, Q \in \mathcal{A}$ с $QP = P$;

(iii) $\varphi(|PQ - QP|) \leqslant \min\{\varphi(P), \varphi(Q)\}$ для всех проекторов $P, Q \in \mathcal{A}$;

(iv) $\varphi(PQ + QP) \leqslant \varphi(PQP + QPQ)$ для всех проекторов $P, Q \in \mathcal{A}$.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, идемпотент, трипотент, проектор, ядерный оператор, коммутатор, алгебра фон Неймана, C^*-алгебра, след.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11710

1. Введение. Линейный ограниченный оператор A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется *трипотентом*, если $A = A^3$; *идемпотентом*, если $A = A^2$; *проектором*, если $A = A^2 = A^*$.

Пусть P, Q – идемпотенты в $\mathcal{H}$. Различные свойства (обратимость, фредгольмовость, ядерность, положительность и др.) разности $P - Q$ были исследованы в работах [1]–[7]. Каждый трипотент является разностью $P - Q$ некоторых идемпотентов P и Q с $PQ = QP = 0$ [8; предложение 1]. Поэтому трипотенты наследуют некоторые свойства идемпотентов [9]. Пусть φ – след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$, $\mathfrak{M}_\varphi$ – идеал определения следа φ и идемпотенты $P, Q \in \mathcal{A}$. Если $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$ [10; теорема 3]; это является C^*-аналогом известного утверждения [6]: если P, Q являются идемпотентами в $\mathcal{H}$ и $P - Q$ принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1$ ядерных операторов, то канонический след $\mathrm{tr}(P - Q) \in \mathbb{Z}$).

Перечислим полученные результаты. Пусть идемпотенты $P, Q \in \mathcal{A}$ с $QP = P$. Если $Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $P \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $0 \leqslant \varphi(P) \leqslant \varphi(Q)$. Если $Q - P \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(Q - P) \in \mathbb{R}^+$

Работа выполнена за счет субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).