Н. Н. Корнеева, Структура степеней конечно-автоматных преобразований префиксно разрешимых сверхслов, *Изв. вузов. Матем.*, 2016, номер 9, 90–95

Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, № 9, с. 90–95 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное М.М. Арслановым

Н.Н. КОРНЕЕВА

СТРУКТУРА СТЕПЕНЕЙ КОНЕЧНО-АВТОМАТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРЕФИКСНО РАЗРЕШИМЫХ СВЕРХСЛОВ

Аннотация. Показано, что структура степеней конечно-автоматных преобразований префиксно разрешимых сверхслов не является верхней полурешеткой.

Ключевые слова: конечно-автоматные преобразования, верхняя полурешетка, сверхслово, префиксная разрешимость.

УДК: 510.53

В работе изучаются степени неразрешимости бесконечных последовательностей символов конечного алфавита, индуцируемые сводимостью, определяемой при помощи конечных автоматов Мили. Впервые эти степени, называемые степенями конечно-автоматных преобразований, были введены в работе Г. Рейна [1], в которой также были получены первые структурные свойства частично упорядоченного множества этих степеней. В частности, было доказано, что структура степеней конечно-автоматных преобразований является верхней полурешеткой [1]. Позже В.Р. Байрашевой в [2] были рассмотрены две подструктуры указанной структуры: множество степеней конечно-автоматных преобразований, состоящих из обобщенно почти периодических последовательностей, и множество степеней конечно-автоматных преобразований, состоящих из последовательностей с разрешимой монадической теорией. Было показано, что обе эти подструктуры не являются верхними полурешетками [2]. Также В.Р. Байрашевой [3] было показано, что верхней полурешеткой не является и частично упорядоченное множество степеней конечно-автоматных преобразований бесконечных последовательностей, рассматриваемых над алфавитом, мощность которого ограничена некоторым натуральным числом. В данной работе рассматривается еще одна подструктура структуры степеней конечно-автоматных преобразований, состоящая из степеней, содержащих префиксно разрешимые последовательности. Понятие префиксной разрешимости последовательности было введено в работе М.Н. Вялого, А.А. Рубцова [4] и является ослаблением свойства последовательности иметь разрешимую монадическую теорию.

Поступила 25.12.2015

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 14-01-31200, 15-01-08252, 15-41-02507) и за счет финансовых средств субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету на выполнение государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 1.2045.2014).

Определение 1. Конечным автоматом Мили называется пятерка $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega)$, где S, Σ, Σ' — конечные множества состояний, входных и выходных символов соответственно; $\delta : S \times \Sigma \longrightarrow S$ — функция переходов; $\omega : S \times \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ — функция выходов. Конечный автомат Мили, в котором выделено начальное состояние s_0, называется инициальным.

В дальнейшем, если рассматривается несколько автоматов и необходимо указать функцию переходов или выходов, множество входных или выходных символов автомата S, будем записывать δ_S, ω_S, Σ_S, Σ'_S.

Пусть Σ — конечный алфавит и $x = (x(n))$ — бесконечная последовательность символов над алфавитом Σ, которая называется сверхсловом над алфавитом Σ. Через $x(n)$ будем обозначать n-ю букву сверхслова. Если $i \leq j$, то $x[i, j]$ будет обозначать отрезок сверхслова x вида $x(i)x(i + 1) \dots x(j)$. Слово $x[0, i]$ является префиксом x. Множество всех префиксов сверхслова x будем обозначать $\mathrm{Pref}(x)$. Образом сверхслова x под действием автомата $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega, s_0)$ является сверхслово $\omega_S(s_0, x)$ над алфавитом Σ' вида $\omega(t_0, x(0))\omega(t_1, x(1))\omega(t_2, x(2)) \dots$, где $t_0 = s_0$ и $t_{i+1} = \delta(t_i, x(i))$.

Определение 2. Пусть x, y — сверхслова над конечными алфавитами Σ и Σ' соответственно. Сверхслово y конечно-автоматно сводится к сверхслову x, если существует конечный инициальный автомат Мили $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega, s_0)$ такой, что $\omega(s_0, x) = Ay$, где блок A над алфавитом Σ' определяет некоторую конечную задержку.

Определение 3 ([1])**.** Пусть x, y — сверхслова над конечными алфавитами Σ и Σ' соответственно. Сверхслово y конечно-автоматно эквивалентно сверхслову x, если существуют конечные инициальные автоматы Мили $(S, \Sigma, \Sigma', \delta_S, \omega_S, s_0)$ и $(T, \Sigma', \Sigma, \delta_T, \omega_T, t_0)$ такие, что $\omega(s_0, x) = Ay$ и $\omega(t_0, y) = Bx$, где блоки $A \in (\Sigma')^*$ и $B \in \Sigma^*$ определяют некоторые конечные задержки.

Класс конечно-автоматной эквивалентности сверхслова x называется степенью конечно-автоматных преобразований сверхслова x и обозначается $[x]$. На множестве степеней конечно-автоматных преобразований естественным образом индуцируется отношение частичного порядка: $[y] \leq [x]$, если сверхслово y конечно-автоматно сводится к сверхслову x.

В данной работе будут рассмотрены сверхслова и их степени конечно-автоматных преобразований, для которых разрешима следующая алгоритмическая задача, называемая задачей префиксной реализуемости: *по описанию регулярного языка определить, существует ли префикс сверхслова, принадлежащий данному языку.* Такие сверхслова называются префиксно разрешимыми.

Определение 4 ([4])**.** Сверхслово x над алфавитом Σ называется префиксно разрешимым, если для любого регулярного языка L над алфавитом Σ разрешима задача $L \cap \mathrm{Pref}(x) \neq \varnothing$.

Регулярный язык можно задавать при помощи конечного детерминированного или конечного недетерминированного автомата, распознающего его, или при помощи регулярного выражения. Поскольку для нас нет разницы между различными способами задания регулярного языка, то в дальнейшем будем считать, что регулярный язык задается при помощи конечного детерминированного автомата, распознающего его. Таким образом, сверхслово x префиксно разрешимо, если существует алгоритм, который по любому конечному детерминированному автомату определяет, проходит ли он через допускающее состояние при чтении сверхслова x.

Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ — нумерация частично вычислимых функций и $S_0, S_1, S_2, \dots$ — нумерация конечных детерминированных автоматов.

Сверхслово x префиксно разрешимо, если

$$\exists n\forall k[[\varphi_n(S_k)=1\leftrightarrow\exists l[\delta_{S_k}(s_0^k,x[0,l])\in\mathcal{F}_{S_k}]]\wedge[\varphi_n(S_k)=0\leftrightarrow\forall l[\delta_{S_k}(s_0^k,x[0,l])\notin\mathcal{F}_{S_k}]]],$$

где $\varphi_n(S_k)$ — значение n-й частично вычислимой функции, вычисленное на аргументе, равном номеру конечного детерминированного автомата S_k.

Более сильным является свойство разрешимости по Бюхи сверхслова. Сверхслово называется разрешимым по Бюхи [4], если для него разрешима следующая алгоритмическая задача: *по описанию регулярного языка определить, бесконечно ли пересечение этого языка и множества префиксов сверхслова.* Причем свойство разрешимости по Бюхи сверхслова эквивалентно разрешимости монадической теории сверхслова [4]. Для разрешимых по Бюхи сверхслов ранее уже было доказано свойство замкнутости относительно конечно-автоматных преобразований [2], также было доказано, что множество степеней конечно-автоматных преобразований разрешимых по Бюхи сверхслов не является верхней полурешеткой [2].

Для префиксно разрешимых сверхслов аналогичные утверждения доказываются в данной работе.

Следствием более общего результата о замкнутости относительно асинхронно автоматных преобразований свойства префиксной разрешимости сверхслов, доказанного в [5], является

Теорема 1. *Пусть x — префиксно разрешимое сверхслово над конечным алфавитом Σ, $(T,\Sigma,\Sigma',\delta,\omega,t_0)$ — конечный инициальный автомат Мили. Тогда $y=\omega(t_0,x)$ — префиксно разрешимое сверхслово над алфавитом Σ'.*

Схема доказательства. Необходимо доказать, что для произвольного конечного детерминированного автомата $(S,\Sigma',\delta_S,s_0,\mathcal{F}_S)$ можно определить, проходит он при чтении сверхслова y через допускающее состояние или нет.

Построим автомат $(\widetilde{S},\Sigma,\delta_{\widetilde{S}},\widetilde{s}_0,\mathcal{F}_{\widetilde{S}})$, где $\widetilde{S}=T\times S$, начальное состояние $\widetilde{s}_0=(t_0,s_0)$. Функция перехода определяется следующим образом: $\delta_{\widetilde{S}}((t,s),a)=(\delta_T(t,a),\delta_S(s,\omega_T(t,a)))$. Множество допускающих состояний $\mathcal{F}_{\widetilde{S}}=\{(t,s)|s\in\mathcal{F}_S\}$.

Автомат $\widetilde{S}$ проходит через допускающее состояние при подаче на его вход сверхслова x, если и только если S проходит через допускающее состояние при чтении сверхслова y. Поскольку для сверхслова x задача префиксной реализуемости разрешима, то для сверхслова y указанная задача также разрешима.

Из теоремы 1 следует, что степень конечно-автоматных преобразований, содержащая префиксно разрешимое сверхслово, состоит лишь из префиксно разрешимых сверхслов. Далее докажем, что множество степеней конечно-автоматных преобразований префиксно разрешимых сверхслов не является верхней полурешеткой. Сначала построим сверхслово, не являющееся префиксно разрешимым.

Теорема 2. *Существует сверхслово, которое не является префиксно разрешимым.*

Схема доказательства. Пусть $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ — нумерация частично вычислимых функций, $S_0,S_1,S_2,\ldots$ — нумерация конечных детерминированных автоматов над алфавитом $\Sigma=\{0,1\}$. Сверхслово x над алфавитом $\Sigma=\{0,1\}$ не префиксно разрешимо, если

$$\forall n\exists k[[\varphi_n(S_k)\notin\{0,1\}]\vee[[\varphi_n(S_k)=1]\wedge\forall l[\delta_{S_k}(s_0^k,x[0,l])\notin\mathcal{F}_{S_k}]]\vee[[\varphi_n(S_k)=0]\wedge$$
$$\wedge\,\exists l[\delta_{S_k}(s_0^k,x[0,l])\in\mathcal{F}_{S_k}]]].$$

Сверхслово x, не являющееся префиксно разрешимым, строим методом начальных сегментов из блоков a_i длины $(i+2)$, начинающихся на единицу и заканчивающихся на нуль и не содержащих внутри себя блоков указанного вида меньшей длины. Например, пусть $a_i = 11^i0$.

Рассмотрим автоматы $S^{(i)}$, которые распознают языки, содержащие само слово a_i и слова, оканчивающиеся на $0a_i$.

Шаг 0. Определим I_0 как пустой блок (длины нуль).

Шаг $(n+1)$. Сделаем по $(n+1)$ шагов в вычислении функций $\varphi_0(S^{(0)}), \varphi_1(S^{(1)}), ..., \varphi_n(S^{(n)})$. Пусть i — наименьшее натуральное число такое, что $\varphi_i(S^{(i)})$ определено. Если такого числа не существует, то полагаем $I_{n+1} = I_n$. Если такое число существует, то поступаем следующим образом:

1) если $\varphi_i(S^{(i)}) \notin \{0,1\}$, то полагаем $I_{n+1} = I_n$;

2) если $\varphi_i(S^{(i)}) = 0$, то полагаем $I_{n+1} = I_n a_i$;

3) если $\varphi_i(S^{(i)}) = 1$, то полагаем $I_{n+1} = I_n$.

Удаляем функцию φ_i и блок a_i из дальнейшего рассмотрения и переходим к шагу $(n+2)$.

Сверхслово x, являющееся пределом последовательности блоков I_i при $i \to \infty$, не является префиксно разрешимым, поскольку n-я частично вычислимая функция φ_n ошибается при проверке, проходит ли автомат $S^{(n)}$ при чтении x через допускающее состояние.

Сверхслово, не являющееся префиксно разрешимым, можно строить также и из блоков $b_i = 10^i0$. Построение будет аналогично приведенному в теореме 2, с заменой автоматов $S^{(i)}$ на автоматы, распознающие языки, содержащие слово b_i и слова, оканчивающиеся на $0b_i$.

Из блоков a_i и b_i можно построить также и префиксно разрешимое сверхслово x.

Предложение. *Существует префиксно разрешимое сверхслово, построенное из блоков* a_i (*или* b_i).

Схема доказательства. Пусть $S_0, S_1, S_2, \ldots$ — нумерация конечных детерминированных автоматов над алфавитом $\Sigma = \{0,1\}$ такая, что автомат с номером n имеет не более $(n+1)$ состояний.

Префиксно разрешимое сверхслово x над алфавитом $\Sigma = \{0,1\}$ строится из блоков $a_i = 11^i0$ методом начальных сегментов. (Для блоков $b_i = 10^i0$ построение аналогично.)

Шаг 0. Определим I_0 как пустой блок.

Шаг $(n+1)$. Рассмотрим автомат $S_n = (S, \{0,1\}, \delta, s_0, \mathcal{F})$ с номером n в нашей нумерации конечных детерминированных автоматов. Подадим на его вход слово I_n. Если при чтении этого слова автомат проходит через допускающее состояние, то полагаем $I_{n+1} = I_n$. В противном случае, рассмотрим последовательность множеств:

$$Q_0 = \{\overline{s} \mid \overline{s} = \delta(s_0, I_n)\},\ Q_1 = \{\delta(\overline{s}, a_i) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\overline{s}\},$$
$$Q_2 = \{\delta(s, a_i) \mid s \in Q_1,\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{\overline{s}\}, \ldots, Q_{k+1} = \{\delta(s, a_i) | s \in Q_k, i \in \mathbb{N}\} \cup \{\overline{s}\}, \ldots\ .$$

По построению, очевидно, что $Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \cdots \subseteq Q_k \subseteq Q_{k+1} \subseteq \cdots$. Следовательно, существует наименьшее натуральное число $l(\leq n)$ такое, что $Q_l = Q_{l+1} = Q_{l+2} = \cdots$.

Если $Q_l \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$, то существует слово b, состоящее из слов a_i $(i \leq n)$, такое, что при чтении этого слова из состояния $\overline{s}$ автомат пройдет через допускающее состояние. Причем слово b можно взять длины не более $(n+1)(n+2)$. Положим $I_{n+1} = I_n b$.

Если $Q_l \cap \mathcal{F} = \varnothing$, то какое бы слово, состоящее из блоков a_i, ни добавили к I_n, при чтении этого слова из состояния $\overline{s}$ автомат не пройдет ни через одно из допускающих состояний. Можно положить $I_{n+1} = I_n$.

Сверхслово x, которое является пределом последовательности блоков I_i при $i \to \infty$, является префиксно разрешимым.

Далее, наряду со сверхсловами $x = (x(n))$ и $y = (y(n))$ будем рассматривать сверхслово $(x, y) = (x(n), y(n))$.

Теорема 3. *Существуют префиксно разрешимые сверхслова x и y такие, что сверхслово (x, y) не является префиксно разрешимым.*

Схема доказательства. Сверхслова x и y над алфавитом $\Sigma = \{0, 1\}$ строятся из блоков $a_i = 11^i0$ и $b_i = 10^i0$ соответственно, сверхслово (x, y) над алфавитом $\Sigma \times \Sigma = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ — из блоков, начинающихся на $(1, 1)$, заканчивающихся на $(0, 0)$ и не содержащих внутри себя блоков указанного вида меньшей длины.

Пусть $S_0, S_1, S_2, \dots$ — нумерация конечных детерминированных автоматов над алфавитом Σ, причем автомат с номером n имеет не более $(n + 1)$ состояний, и $T_0, T_1, T_2, \dots$ — нумерация конечных детерминированных автоматов над алфавитом $\Sigma \times \Sigma$.

Определим автоматы $T^{(i)}$, которые распознают языки, содержащие слово $c_i{=}(1, 1)(1, 0)^i(0, 0)$ и слова, оканчивающиеся на $(0, 0)c_i$.

Шаг 0. Определим I_0 как пустой блок.

Шаг $(n{+}1)$. Повторим конструкцию, аналогичную конструкции теоремы 2, с автоматами $T^{(i)}$ и блоками c_i. В результате построим блок $I'_{n+1} = (X'_{n+1}, Y'_{n+1})$.

Для автомата S_n и блока X'_{n+1} повторим конструкцию из предыдущего предложения. Получим слово $X''_{n+1} = X'_{n+1}U'0$. Положим $I''_{n+1} = (X''_{n+1}, Y''_{n+1})$, где $Y''_{n+1} = Y'_{n+1}V'0$ и V' получено из слова U' заменой нулей на единицы и единиц на нули.

Для автомата S_n и блока Y''_{n+1} повторим конструкцию, аналогичную конструкции из предыдущего предложения, но только с блоками b_i. Получим слово $Y'''_{n+1} = Y''_{n+1}V'0$. Положим $I_{n+1} = (X'''_{n+1}, Y'''_{n+1})$, где $X'''_{n+1} = X''_{n+1}U'0$, и U' получено из слова V' заменой нулей на единицы и единиц на нули.

Перейдем к шагу $n + 2$.

Определим сверхслово (x, y) как предел последовательности блоков I_i при $i \to \infty$, $x = \mathrm{pr}_1(x, y)$ и $y = \mathrm{pr}_2(x, y)$. Согласно теореме 2 (x, y) не префиксно разрешимо, согласно предыдущему предложению, x и y префиксно разрешимы.

Известно, что структура степеней конечно-автоматных преобразований является верхней полурешеткой, причем наименьшей верхней гранью степеней $[x]$ и $[y]$ является степень конечно-автоматных преобразований сверхслова (x, y) [1]. Этот результат и результат предыдущей теоремы позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Множество степеней конечно-автоматных преобразований префиксно разрешимых сверхслов не является верхней полурешеткой.*

Литература

[1] Рейна Г. *Степени автоматных преобразований*, Кибернетический сб., № 14, 95–106 (1977).

[2] Байрашева В.Р. *Степени автоматных преобразований почти периодических сверхслов и сверхслов с разрешимой монадической теорией*, ВИНИТИ, № 3103-В89 (Казань, 1989).

[3] Байрашева В.Р. *Структурные свойства автоматных преобразований*, Изв. вузов. Матем., № 7, 34–39 (1988).

[4] Вялый М.Н., Рубцов А.А. *Алгоритмическая разрешимость задач о поведении автоматов на сверхсловах*, Дискретн. анализ и исследов. операций **19** (2), 3–18 (2012).

[5] Корнеева Н.Н. *Автоматные преобразования префиксно разрешимых и разрешимых по Бюхи сверхслов*, Изв. вузов. Матем., № 7, 55–65 (2016).

Н.Н. Корнеева

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Natalia.Korneeva@kpfu.ru

N.N. Korneeva

The structure of degrees of finite automaton transformations of prefix decidable superwords

Abstract. We show that the structure of degrees of finite automaton transformations of prefix decidable superwords does not form the upper semilattice.

Keywords: finite automaton transformation, upper semilattice, superword, prefix decidability.

N.N. Korneeva

Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Natalia.Korneeva@kpfu.ru