

Механика

УДК 539.371; 531

doi: 10.18698/0536-1044-2023-8-3-15

Определение напряженно-деформированного состояния костей по данным компьютерной томографии*

О.В. Герасимов, Р.Р. Рахматулин, Т.В. Балтина, О.А. Саченков

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Determination of the bones stress-strain state by the computer tomography data

O.V. Gerasimov, R.R. Rakhmatulin, T.V. Baltina, O.A. Sachenkov

Kazan (Volga Region) Federal University

Численное моделирование элементов негетогенной среды — одно из актуальных направлений в области механики сплошных сред. Наибольшее развитие получили подходы, основанные на совместном применении методов неразрушающего контроля и численного моделирования. Предложена методика численного моделирования элементов пористой структуры на основе данных их компьютерной томографии. Расчеты проведены методом конечных элементов с использованием восьмиузлового изопараметрического конечного элемента сплошной среды с линейной аппроксимацией геометрических параметров и поля перемещений. Интегрирование матрицы жесткости каждого конечного элемента выполнено на основе применения весовой функции, значения которой соответствовали проницаемости материала в текущем микроэлементе объема. Описана методика статического расчета элементов пористой структуры на основе пространственного распределения материала. Моделирование проведено на примере образцов костных органов карликовых свиней. Испытания соответствовали трехточечному изгибу. Расчетные сетки построены методом фильтрации по пороговому значению, устанавливающему долю содержания упругого материала в объеме. С помощью численных расчетов определены поле перемещений и напряженно-деформированное состояние костных органов. Достоверность полученных данных установлена на основе распределения ошибки энергии по напряжениям. Валидация результатов выполнена по данным натурального эксперимента. Относительная погрешность составила 3...10 %, следовательно, моделирование с достаточной степенью достоверности описывает механическое разрушение образца. Предложенная методика показала эффективность решения задачи описания поведения элементов негетогенных сред, находящихся под действием внешних нагрузок как в силу высокой производительности на этапе построения численной модели, так и ввиду исключения необходимости в точном восстановлении расчетной области образца.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке, выделяемой Казанскому федеральному университету по государственному заданию в сфере научной деятельности, проект № FZSM-2023-0009.

Ключевые слова: негомогенная среда, методы неразрушающего контроля, численное моделирование, компьютерная томография, пористые структуры

Numerical simulation of the inhomogeneous medium elements appears to be one of the current trends in the continuum mechanics. Approaches based on combined application of the non-destructive testing and numerical simulation methods were significantly developed. The paper proposes a technique for numerical simulation of the porous structure elements based on their computer tomography. Calculations were carried out by the finite element method using the eight-node isoparametric finite element of the continuous medium with linear approximation of the geometric parameters and the displacement field. Stiffness matrix of each finite element was integrated by using the weight function; its values corresponded to the material permeability in the current microelement volume. A static calculation technique for the porous structure elements is described based on the material spatial distribution. Simulation was carried out on the example of samples of the pygmy pigs bone organs. The tests corresponded to a three-point bend. Computational grids were constructed by filtering at the threshold value that set fraction of the elastic material content in the volume. Numerical calculations made it possible to determine the displacement field and the stress-strain state. Data reliability was established on the basis of the energy distribution error over the voltages. Results were validated according to the full-scale experiment data. The relative error was of 3...10%; therefore, simulation described the sample mechanical destruction with sufficient degree of reliability. The proposed technique demonstrated its efficiency in solving the problem of describing behavior of the inhomogeneous media elements exposed to the external loads both due to high performance at the numerical model construction stage, and due to excluding the need to accurately restore the sample computational domain.

Keywords: inhomogeneous medium, non-destructive testing methods, numerical simulation, computer tomography, porous structures

Применение методов численного моделирования образцов негомогенной структуры относится к наиболее перспективным направлениям. Развитие современных методов получения изображений расчетной области расширило использование численных методик для материалов с анизотропными свойствами [1–3].

Использование данных цифрового прототипа позволяет восстанавливать параметры материала на основе пространственного распределения его плотности. Подходы, основанные на применении данных сканирования, оказываются востребованными не только при изучении многосвязных негомогенных материалов в механике композитов [4–7], но и в области биомедицины [8], так как позволяют проводить множественные расчеты образцов, исключая необходимость их разрушения.

В последнем случае актуальность исследований обусловлена задачами клинической практики, поскольку изучение поведения объектов уникальной структуры в условиях действия внешних усилий способно оказать влияние на качество проводимого лечения [9–12]. Результаты оценки напряженно-деформированного состояния костных органов используют для

рассмотрения задач перестройки структуры, возникающих в большей степени при проектировании дизайна пациентоориентированных имплантатов [13].

Наиболее распространенным подходом к описанию механических параметров элемента негомогенной среды выступает метод гомогенизации. Существует много работ, посвященных разработке подходов к восстановлению осей ортотропии по данным о пространственном распределении механических свойств.

К ним относится и метод средней длины пересечений, предполагающий построение тензора структуры, устанавливающего усредненное направление распределения ортотропных свойств [14–16]. Формулировка существующих физических соотношений в терминах тензора упругости и структуры позволяет проводить вычисления с учетом неоднородного распределения материала в объеме. Недостаток метода заключается в необходимости определения значений возникающих физических констант, что предполагает проведение натурных экспериментов.

Задача восстановления расчетной области на основе соответствующих объемов аппрок-

симации также требует дальнейшего изучения. Метод представительных объемных элементов [17–22] требует проведения численных экспериментов на элементе заданного объема. Необходимость моделирования каждого микрообъема среды, соответствующего минимальной единице данных сканирования, определяет наиболее существенный недостаток метода: решение полученной таким образом системы уравнений требует значительных вычислений.

Численное моделирование методом конечных элементов предполагает установление взаимосвязи между сеткой и данными компьютерной томографии. Один из таких методов позволяет определять коэффициенты ослабления в узлах сетки согласно заданному закону [23]. Другой метод дает возможность учитывать анизотропные свойства среды на основе цифрового двойника ее исходного элемента [24]. Этот метод основан на утверждении, что распределение материала оказывает больший вклад в анизотропию, чем изменение его механических свойств [25].

Рассмотрим метод, базирующийся на прямом учете параметров материала при построении численной модели. Предполагаем, что на уровне микрообъема материал является сплошным и изотропным, а анизотропия возникает в силу его неравномерного распределения в пространстве. Анизотропные свойства материала будем учитывать на основе взвешенного интегрирования локальной матрицы жесткости по данным компьютерной томографии.

К преимуществам предлагаемого метода относятся эффективность вычислений и слабая зависимость результатов относительно способа сегментации исходных геометрических параметров образца.

Цель работы — реализация метода статического расчета элементов пористой структуры по данным компьютерной томографии на основе метода конечных элементов.

Задачами исследования являлись построение трехмерного восьмиузлового изопараметрического конечного элемента (КЭ) сплошной среды с линейной аппроксимацией поля перемещений на основе взвешенного интегрирования локальной матрицы жесткости по данным о проницаемости среды, реализация алгоритма восстановления расчетной области на основе относительного содержания упругого материала

ла в объеме каждого КЭ сетки и валидация предлагаемого метода путем сопоставления результатов численного моделирования с данными физического испытания.

Материалы и методы. Проведение компьютерной томографии исследуемого объекта предполагает восстановление значений трехмерного массива данных, каждое из которых определяет проницаемость среды в микрообъеме (вокселе) и может интерпретироваться как усредненное значение единицы Хаунсфилда. Сетка, построенная на основе таких значений, представима в виде трехмерного изображения. Будем полагать, что линейные размеры каждого вокселя в декартовой системе координат соответствуют Δx , Δy и Δz .

Для описания механического поведения системы будем использовать метод конечных элементов. Моделирование негетерогенной среды проведем на основе трехмерного восьмиузлового изопараметрического КЭ с линейной аппроксимацией поля перемещений, которую можно реализовать с помощью функций формы N_n в локальной системе координат (ξ_n, η_n, ζ_n) следующим образом:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^R \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} N_n(\{\theta\}). \quad (1)$$

Здесь u , v и w — компоненты вектора перемещений $\{\delta\}$ в глобальной системе координат (x, y, z) ; n — номер узла; $N_n(\{\theta\})$ — функции формы,

$$N_n(\{\theta\}) = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_n)(1 + \eta\eta_n)(1 + \zeta\zeta_n), \quad (2)$$

где $\{\theta\}$ — вектор пространственных координат (ξ, η, ζ) .

Запишем уравнение (1) в матричной форме:

$$\{\delta\} = [N]\{\delta^E\},$$

где $[N]$ — матрица функций формы; $\{\delta^E\}$ — вектор узловых перемещений.

Введем в рассмотрение векторы деформаций $\{\varepsilon\}$ и напряжений $\{\sigma\}$ согласно нотации Фойгта:

$$\{\varepsilon\} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}); \quad (3)$$

$$\{\sigma\} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}). \quad (4)$$

С использованием уравнений связи деформаций и перемещений [26] формула (3) приобретает вид

$$\{\varepsilon\} = [B(\{\theta\})]\{\delta\}, \quad (5)$$

где $[B(\{\theta\})]$ — матрица дифференцирования.

В соответствии с законом Гука выражение (4) представим как

$$\{\sigma\} = [D(\{r\})]\{\varepsilon\}, \quad (6)$$

где $[D]$ — матрица упругости; $\{r\}$ — вектор пространственных координат (x, y, z) , в которых определена матрица $[D]$.

Для негомогенных сред матрица упругости имеет вид

$$[D(\{r\})] = [D^{mat}] \omega(\{r\}),$$

где $[D^{mat}]$ — матрица упругости для твердого материала; $\omega(\{r\})$ — скалярная функция, определяющая негомогенность среды данным цифрового прототипа.

Скалярную функцию $\omega(\{r\})$ можно вычислить согласно единицам шкалы рентгеновской плотности Хаунсфилда. Выражение (6) приобретает следующий вид:

$$\{\sigma\} = [D] \omega(\{r(\{\theta\})\}) [B(\{\theta\})]\{\delta\}.$$

Согласно известным соотношениям метода конечных элементов [26], матрица упругости КЭ определяется как

$$[K^E] = \int_{-1}^1 [B(\{\theta\})]^T [D][B(\{\theta\})] |J(\{\theta\})| \omega(\{r(\{\theta\})\}) d\theta,$$

где $|J(\{\theta\})|$ — определитель Якоби преобразования координат.

Используя вычисленные узловые перемещения, матрицы дифференцирования и упругости, находим векторы деформаций и напряжений согласно соотношениям (5) и (6). Применяя функции формы (2), для каждого КЭ проводим аппроксимацию функции напряжений в виде

$$\sigma^E(\{\theta\}) = \int_{V^E} (\{N\}^T \{\sigma_0^E\} - \sigma^i) dV \rightarrow \min,$$

где V^E — объем КЭ; $\{\sigma_0^E\}$ — вектор коэффициентов аппроксимации; σ^i — узловые напряжения.

Усредненное напряженное состояние определяется выражением

$$\bar{\sigma}^E = \frac{1}{V^E} \int_{V^E} \{N\}^T \{\sigma_0^E\} dV.$$

Ошибку вычислений можно оценить, определив нормированную ошибку энергии по напряжениям. В этом случае необходимо провести расчет ошибки узловых напряжений для каждого КЭ сетки по выражению

$$\{\Delta\sigma_n^E\} = \{\sigma_n^a\} - \{\sigma_n^E\},$$

где $\{\sigma_n^a\}$ — усредненный вектор напряжений в узле n ; $\{\sigma_n^E\}$ — вектор напряжений в узле n .

Для каждого КЭ ошибку энергии по напряжениям можно вычислить как [27, 28]

$$\bar{E}^E = \frac{1}{2} \int_{V^E} \{\Delta\bar{\sigma}\}^T [D]^{-1} \omega(\{r\})^{-1} \{\Delta\bar{\sigma}\} dV,$$

где $\{\Delta\bar{\sigma}\}$ — вектор ошибки узловых напряжений, усредненный по объему КЭ.

Энергия деформации КЭ определяется выражением

$$\bar{U}^E = \frac{1}{2} \int_{V^E} \{\bar{\sigma}\}^T \{\bar{\varepsilon}\} dV,$$

где $\{\bar{\varepsilon}\}$ — вектор деформаций, определяющий усредненное деформированное состояние.

Выполняя нормировку по энергии деформации значений ошибки энергии по напряжениям, получаем

$$\tilde{E}^E = \sqrt{\frac{\bar{E}^E}{\bar{U}^E + \bar{E}^E}} \cdot 100 \text{ \%}.$$

Расширенное описание метода и оценка сходимости численного алгоритма в зависимости от плотности данных компьютерной томографии приведены в работах [29–33].

Рассмотрим алгоритм восстановления расчетной области. Каждый элемент массива данных компьютерной томографии можно интерпретировать как оптическую плотность материала в текущем микроэлементе объема. В некоторых работах [34] исследована взаимосвязь проницаемости среды с механическими параметрами материала:

$$\rho = a_\rho + b_\rho \text{HU};$$

$$E = a_E \rho^{b_E};$$

$$[\sigma] = a_\sigma \rho^{b_\sigma},$$

где ρ — усредненная плотность материала в текущем вокселе; a_ρ , b_ρ , a_E , b_E , a_σ , b_σ — коэффициенты, получаемые экспериментальным путем; HU — единица плотности Хаунсфилда; E — модуль Юнга; $[\sigma]$ — предел прочности.

Рассмотрены образцы костных органов. В качестве объекта исследования выступали неомогенные пористые материалы с нерегулярной структурой. Построение расчетной сетки предполагало сегментацию исходного изображения образца. Объему КЭ ставили в соответствие определенную область костного органа: каждый подобъем содержал материалы различного происхождения, принадлежащие как кортикальной пластине, так и губчатому веществу костного органа.

Предложенный метод построения конечно-элементной сетки позволял учитывать анизотропию материала на уровне моделирования отдельного КЭ. Результаты компьютерной томографии в виде трехмерных моделей различных участков кости приведены на рис. 1, где на левой стороне показана область с высоким показателем пористости, соответствующая губчатой кости, на правой — участок, определяемый кортикальной пластиной.

Применение сегментации исходной области оказывается трудоемким процессом при рассмотрении задач моделирования образцов с нерегулярными геометрическими параметрами и сложной внутренней структурой (например, костей животных или человека).

Основываясь на разработанной методике построения КЭ, предложено использовать регулярную сетку для целого изображения в качестве исходной сегментации образца. Применяя бинаризацию массива данных, сетку подвергают фильтрации по пороговому значению. В этом случае происходит удаление КЭ с низким содержанием упругого материала. Полученную сетку называют расчетной: к ней прикладывают кинематические и статические граничные условия.

Следующий этап — взвешенное интегрирование каждой локальной матрицы жесткости с последующей сборкой глобальной матрицы жесткости. После численных расчетов получают узловые перемещения, на основе которых вычисляют локально усредненные тензоры напряжений и деформаций. Для полученных

тензоров определяют главные компоненты и напряжения по Мизесу.

Результаты вычислений сопоставляют с геометрическими параметрами образца путем наложения результатов на внешнюю границу объекта, представленного данными компьютерной томографии. Такую сетку называют постпроцессорной. Таким образом, результаты, полученные с использованием расчетной сетки, подвергают интерполяции на постпроцессорную сетку.

Экспериментальные исследования выполняли на шести вьетнамских свиньях-самцах весом 15...20 кг. Протокол экспериментов, включавший в себя анестезию, хирургическое вмешательство, послеоперационный уход, тестирование и эвтаназию, был одобрен Комитетом по уходу за животными Казанского государственного медицинского университета (протокол № 5 от 20 мая 2020 г.). Все экспериментальные процедуры проводили в соответствии со стандартами, чтобы свести к минимуму страдания животных и размер экспериментальных групп.

Сканирование образцов осуществляли с применением микро-/нанофокусной системы рентгеновского контроля для компьютерной томографии и 2D-инспекции Phoenix V|tome|X S240 в лаборатории рентгеновской компьютерной томографии Института геологии и нефтегазовых технологий Казанского (Приволжского) федерального университета. Для первичной обработки данных и создания объемной (воксельной) модели образца на базе рентгеновских снимков (проекций) использовали программное обеспечение `Datos|x reconstruction`.

Моделирование проводили на основе снимка предплечевой кости минипига. Объем данных компьютерной томографии составлял 800...900 Мб, физический размер вокселя — 0,2×0,2×0,2 мм, разрешение изображения — 752×752×752 вокселей. Исходный снимок погружали в регулярную конечно-элементную сетку. Расчетную сетку строили путем удаления

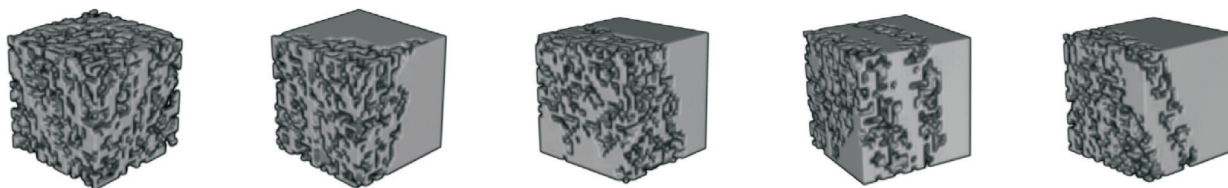


Рис. 1. Трехмерные модели различных участков кости (пористость уменьшается слева направо с увеличением доли содержания материала)

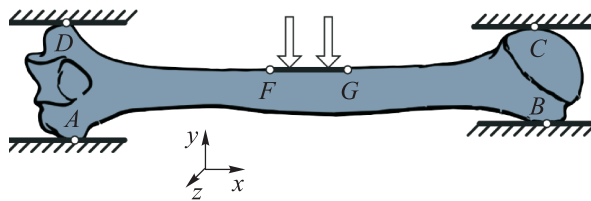


Рис. 2. Схема нагружения костного органа в условиях действия трехточечного изгиба

подобъемов, в которых содержание костной ткани составляло менее 5 %.

Исходные данные проходили процедуру бинаризации с выделением двух фаз материала: единице соответствовала упругая костная ткань, нулю — вещество в порах. Модуль Юнга в вокселях, соответствующих костному материалу, составлял 1,75 ГПа [35], коэффициент Пуассона — 0,3.

Моделирование нагружения костного органа выполняли в условиях действия трехточечного изгиба [36]: верхние и нижние поверхности дистального и проксимального участков фиксировались в перемещениях вдоль трех координатных осей (рис. 2, зоны контакта A, B, C и D), перемещения в направлении оси Oy прикладывались на верхней области диафиза кости (зона контакта F–G). Время вычислений составило 15 мин.

Результаты исследования. Использовали расчетные сетки, которые имели 20, 40 и 80 КЭ на стороне области (рис. 3). Далее приведены результаты моделирования для сетки, имеющей 80 КЭ (см. рис. 3, з).

Нормированную ошибку энергии вычисляли для каждого КЭ сетки. Особое внимание уделяли значениям, соответствующим максимальным напряжениям по Мизесу. Распределение нормированной ошибки энергии и напряжений по Мизесу показано на рис. 4.

Необходимость корректной интерпретации полученного распределения напряжений по Мизесу требует следующего понимания процедуры усреднения по объему КЭ на основе данных компьютерной томографии. Область рассматривали как подобьем цифрового прототипа с неизвестным пространственным распределением напряжений, но с определенной средней величиной.

Таким образом, ложно высокие и низкие значения напряжений по Мизесу могут возникать в силу неравномерного распределения материала в объеме, что объясняет требование проверки значений нормированной ошибки энергии для каждого КЭ.

Анализ результатов моделирования показал, что наибольшие значения нормированной

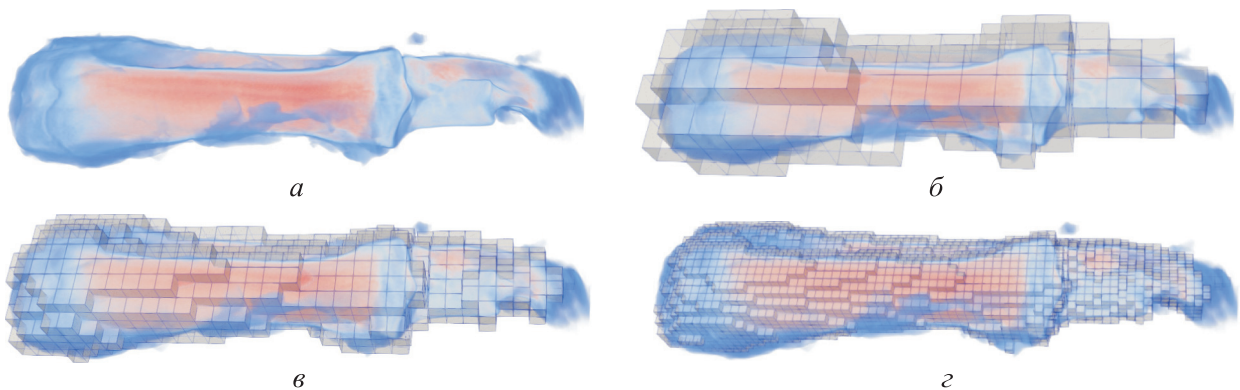


Рис. 3. Визуализация расчетных сеток различной степени дискретизации: а — изображение объекта; б, в и г — сетка, которая имеет 20, 40 и 80 КЭ на стороне области соответственно

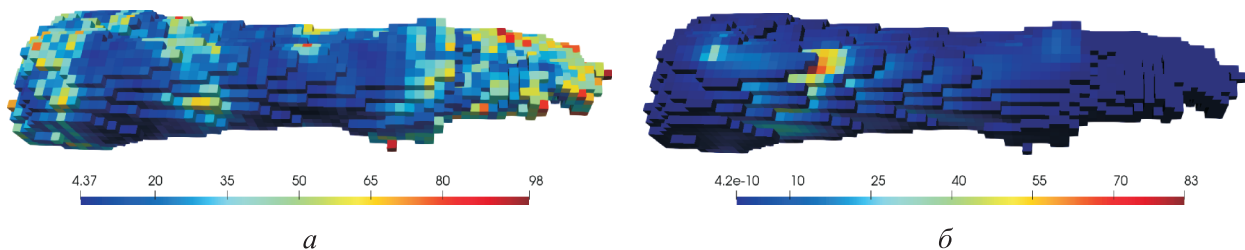


Рис. 4. Результаты постпроцессорного анализа: а — нормированная ошибка энергии, %; б — напряжения по Мизесу, МПа

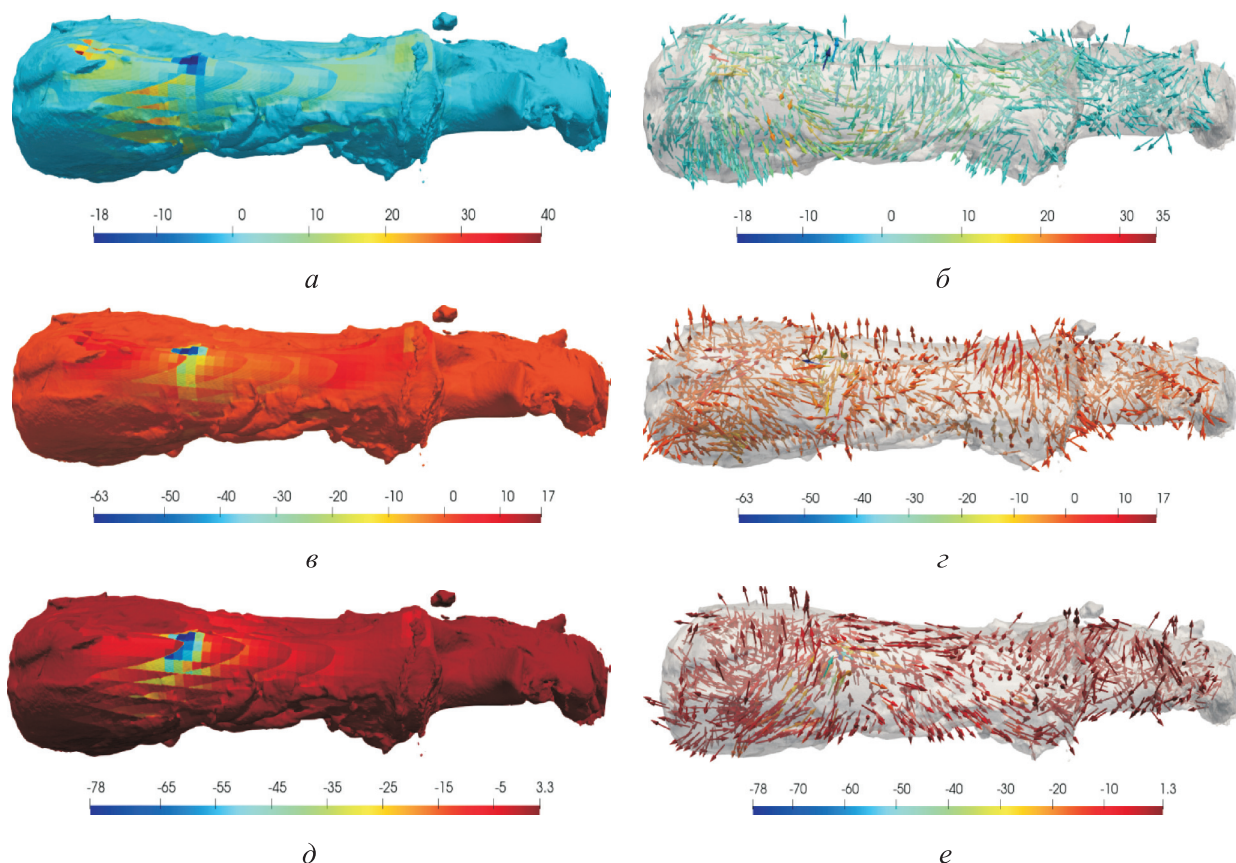


Рис. 5. Результаты постпроцессорного анализа:
а, в и д — распределение соответственно первой, второй и третьей главной компоненты тензора напряжений, МПа, в костном органе; *б, г, е* — главные направления соответствующих компонент

ошибки энергии возникают в КЭ на границе, что можно объяснить уменьшением жесткости, обеспечиваемой компонентами соответствующей локальной матрицы. В интересующих областях значения нормированной ошибки не превышали 50 %. Максимальные значения достигались на участках приложения кинематических граничных условий. В остальных областях нормированная ошибка не превышала 20 %.

Рассмотрим решение, полученное при приложении перемещения 1 мм. Минимальная ошибка энергии (20 %) и максимальные значения напряжений по Мизесу (83 МПа) соответствовали области, находящейся вблизи приложения нагрузки (см. рис. 2, зона контакта *F-G*).

Более подробный анализ предполагал расчет главных напряжений и направлений, результаты которого приведены на рис. 5. Для оценки эквивалентной силы реакции, возникающей в области приложения индентора, использовали вторую компоненту тензора напряжений (рис. 5, *в, г*).

Результат интегрирования вектора напряжений по поверхности кинематического на-

гружения, умноженный на соответствующую площадь приложения индентора, можно рассматривать в качестве реакции на эквивалентную силу. Важно отметить, что в области максимальных напряжений по Мизесу первая компонента главных напряжений достигает максимального значения (40 МПа), а третья — минимального (-78 МПа), что объясняет причину образования трещины в натурном экспе-

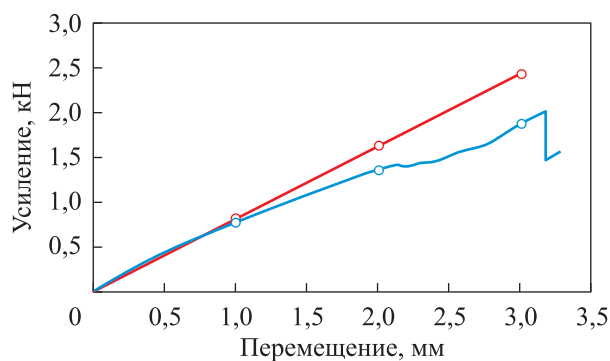


Рис. 6. Диаграмма разрушения костного органа в условиях действия трехточечного изгиба:
 — данные эксперимента;
 — результаты моделирования

рименте в силу превышения предела прочности для костной ткани [37, 38].

Валидацию результатов проводили на основе сопоставления значений эквивалентной силы с данными физического испытания. Диаграмма разрушения образца показана на рис. 6. Отмеченные значения эквивалентной нагрузки (оранжевые точки) и прикладываемой силы в натурном эксперименте (синие точки) соответствуют одинаковым перемещениям.

Относительная ошибка результатов в линейном диапазоне не превышала 10 %. Отклонение данных можно объяснить неточностью приложения граничных условий.

Обсуждение полученных результатов. Анализ результатов показал, что применение функции бинаризации к данным компьютерной томографии пористых образцов позволяет получить достоверные данные. Перемещения в узлах КЭ обусловлены не только механическими свойствами, но и пространственным распределением материала.

Предложенный метод позволяет неявно учитывать структурные особенности материала на основе взвешенного интегрирования локальной матрицы жесткости. Он требует меньше вычислений, чем другие методы.

Моделирование образцов негомогенной структуры, как правило, предполагает применение исходных изображений, соответствующих данным компьютерной томографии большего размера. Предложенный алгоритм позволяет проводить вычисления на основе выделения части массива, соответствующей области интегрирования матрицы жесткости отдельного КЭ.

Для качественной оценки полученного решения предложено использовать значения нормированной ошибки энергии. Постпроцессорный анализ можно автоматизировать при использовании нормированной ошибки и инвариантов напряжений, например, напряжений по Мизесу.

Выводы

1. Введен конечно-элементный метод, основанный на применении данных компьютерной томографии расчетных образцов.

2. Предложена методика построения трехмерного изопараметрического КЭ сплошной среды с линейной аппроксимацией поля перемещений, основанная на прямом учете анизотропных свойств материала путем взвешенного интегрирования локальной матрицы жесткости по обработанным данным исходного изображения.

3. Описан общий алгоритм построения конечно-элементной модели. Представление полученных результатов проведено на основе введения двух типов сеток: расчетной и постпроцессорной. Оценка достоверности полученных результатов выполнена с использованием значений нормированной ошибки энергии.

4. Проведено численное моделирование предплечевой кости минипига предложенным методом. Валидация результатов основывалась на данных, полученных проведением натурного испытания. Анализ представленных показателей демонстрирует эффективность применения метода при моделировании пористых образцов костной структуры.

Литература

- [1] Харин Н.В., Воробьев О.В., Бережной Д.В. и др. Методика построения репрезентативной модели по данным компьютерной томографии. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2018, № 3, с. 92–102, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.10>
- [2] Schwen L.O., Wolfram U., Wilke H.-J. et al. Determining effective elasticity parameters of microstructured materials. *15th Workshop on the Finite Element Method in Biomedical Engineering*, 2008, pp. 41–62.
- [3] Kayumov R.A. Structure of nonlinear elastic relationships for the highly anisotropic layer of a nonthin shell. *Mech. Compos. Mater.*, 1999, vol. 35, no. 5, pp. 409–418, doi: <https://doi.org/10.1007/BF02329327>
- [4] Kasiviswanathan V., Arockiarajan A. Analytical, numerical and experimental studies on effective properties of layered (2–2) multiferroic composites. *Sens. Actuator A Phys.*, 2015, vol. 236, pp. 380–393, doi: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2015.11.010>
- [5] Mohammadi Shah M., Komeili M., Phillion A.B. et al. Toward better understanding of the effect of fiber distribution on effective elastic properties of unidirectional composite yarns.

- Comput. Struct.*, 2016, vol. 163, pp. 29–40, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.10.002>
- [6] Vilchevskaya E., Sevostianov I. Effective elastic properties of a particulate composite with transversely-isotropic matrix. *Int. J. Eng. Sci.*, 2015, vol. 94, pp. 139–149, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.05.006>
- [7] Vahterova Y.A., Min Y.N. Effect of shape of armoring fibers on strength of composite materials. *TURCOMAT*, 2021, vol. 12, no. 2, pp. 2703–2708, doi: <https://doi.org/10.17762/turcomat.v12i2.2295>
- [8] Vanlenthe G., Hagenmuller H., Bohner M. et al. Nondestructive micro-computed tomography for biological imaging and quantification of scaffold–bone interaction in vivo. *Biomaterials*, 2007, vol. 28, no. 15, pp. 2479–2490, doi: <https://doi.org/10.1016/j.biomaterials.2007.01.017>
- [9] Viceconti M., Qasim M., Bhattacharya P. et al. Are CT-based finite element model predictions of femoral bone strengthening clinically useful? *Curr. Osteoporos. Rep.*, 2018, vol. 16, no. 3, pp. 216–223, doi: <https://doi.org/10.1007/s11914-018-0438-8>
- [10] Semenova E., Gerasimov O., Koroleva E. et al. Automatic processing and analysis of the quality healing of derma injury. In: *Biomechanics in medicine and biology*. Springer, 2018, pp. 107–113, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-97286-2_10
- [11] Silva-Henao J., Synek A., Pahr D.H. et al. Selection of animal bone surrogate samples for orthopaedic screw testing based on human radius CT-derived bone morphology. *Med. Eng. Phys.*, 2022, vol. 103, art. 103786, doi: <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2022.103786>
- [12] Донник А.М., Коссович Л.Ю., Оленко Е.С. Поведение сегмента грудного отдела позвоночника при оскольчатом переломе позвонка до и после хирургического лечения. Биомеханический эксперимент. *Российский журнал биомеханики*, 2022, т. 26, № 1, с. 25–39.
- [13] Маслов Л.Б., Дмитриук А.Ю., Жмайло М.А. и др. Исследование прочности эндопротеза тазобедренного сустава из полимерного материала. *Российский журнал биомеханики*, 2022, № 4, с. 19–33.
- [14] Moreno R., Borga M., Smedby Ö. Techniques for computing fabric tensors: a review. In: *Visualization and processing of tensors and higher order descriptors for multi-valued data*. Springer, 2014, pp. 271–292, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-54301-2_12
- [15] Moreno R., Smedby Ö., Borga M. On the efficiency of the mean intercept length tensor. *SSBA Symp.*, 2011. URL: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:533443/fulltext01.pdf> (дата обращения: 15.05.2023).
- [16] Smit T.H., Schneider E., Odgaard A. Star length distribution: a volume-based concept for the characterization of structural anisotropy. *J. Microsc.*, 1998, vol. 191, no. 3, pp. 249–257, doi: <https://doi.org/10.1046/j.1365-2818.1998.00394.x>
- [17] Carniel T.A., Klahr B., Fancello E.A. On multiscale boundary conditions in the computational homogenization of an RVE of tendon fascicles. *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, 2019, vol. 91, pp. 131–138, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2018.12.003>
- [18] Marcián P., Lošák P., Kaiser J. et al. Estimation of orthotropic mechanical properties of human alveolar bone. *ICEM*, 2016, pp. 399–402.
- [19] Gueguen Y., Ravalec M.L., Ricard L. Upscaling: effective medium theory, numerical methods and the fractal dream. *Pure Appl. Geophys.*, 2006, vol. 163, no. 5–6, pp. 1175–1192, doi: <https://doi.org/10.1007/s00024-006-0053-y>
- [20] Hollister S.J., Kikuchi N. A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites. *Comput. Mech.*, 1992, vol. 10, no. 2, pp. 73–95, doi: <https://doi.org/10.1007/BF00369853>
- [21] Marcián P., Florian Z., Horáčková L. et al. Microstructural finite-element analysis of influence of bone density and histomorphometric parameters on mechanical behavior of mandibular cancellous bone structure. *Solid State Phenom.*, 2016, vol. 258, pp. 362–365, doi: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.258.362>
- [22] Kayumov R.A., Muhamedova I.Z., Tazyukov B.F. et al. Parameter determination of hereditary models of deformation of composite materials based on identification method. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2018, vol. 973, no. 1, art. 012006. doi: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012006>

- [23] Саченков О.А., Герасимов О.В., Королева Е.В. и др. Построение неоднородной конечно-элементной модели по данным компьютерной томографии. *Российский журнал биомеханики*, 2018, т. 22, № 3, с. 332–344, doi: <https://doi.org/10.15593/RJBiomeh/2018.3.05>
- [24] Gerasimov O.V., Kharin N.V., Fedyanin A.O. et al. Bone stress-strain state evaluation using CT based FEM. *Front. Mech. Eng.*, 2021, vol. 7, art. 688474, doi: <https://doi.org/10.3389/fmech.2021.688474>
- [25] Maquer G., Musy S.N., Wandel J. et al. Bone volume fraction and fabric anisotropy are better determinants of trabecular bone stiffness than other morphological variables. *J. Bone Miner. Res.*, 2015, vol. 30, no. 6, pp. 1000–1008, doi: <https://doi.org/10.1002/jbmr.2437>
- [26] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1987, vol. 24, no. 2, pp. 337–357, doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620240206>
- [27] Grassi L., Schileo E., Taddei F. et al. Accuracy of finite element predictions in sideways load configurations for the proximal human femur. *J. Biomech.*, 2012, vol. 45, no. 2, pp. 394–399, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2011.10.019>
- [28] Giovannelli L., Ródenas J.J., Navarro-Jiménez J.M. et al. Direct medical image-based Finite Element modelling for patient-specific simulation of future implants. *Finite Elem. Anal. Des.*, 2017, vol. 136, pp. 37–57, doi: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2017.07.010>
- [29] Герасимов О.В., Бережной Д.В., Большаков П.В. и др. Построение механической модели элементов гетерогенной среды на основе численно-цифрового алгоритма обработки данных компьютерной томографии. *Российский журнал биомеханики*, 2019, vol. 23, pp. 87–97.
- [30] Gerasimov O., Kharin N., Statsenko E. et al. Patient-specific bone organ modeling using CT based FEM. In: *Mesh methods for boundary-value problems and applications*. Springer, 2022, pp. 125–139, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-87809-2_10
- [31] Воробьев О.В., Семенова Е.В., Мухин Д.А. и др. Конечно-элементная оценка деформированного состояния по данным компьютерной томографии. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2021, № 2, с. 44–54, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.05>
- [32] Gerasimov O., Sharafutdinova K., Rakhmatullin R. et al. Application of a digital prototype for CT-based bone strength analysis. *ITNT*, 2022, doi: <https://doi.org/10.1109/ITNT55410.2022.9848693>
- [33] Gerasimov O., Kharin N., Yaikova V. et al. Direct image-based micro finite element modeling of bone tissue. *MATEC Web Conf.*, 2020, vol. 329, art. 03072, doi: <https://doi.org/10.1051/mateconf/202032903072>
- [34] Rho J.Y., Hobatho M.C., Ashman R.B. Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone. *Med. Eng. Phys.*, 1995, vol. 17, no. 5, pp. 347–355, doi: [https://doi.org/10.1016/1350-4533\(95\)97314-f](https://doi.org/10.1016/1350-4533(95)97314-f)
- [35] Kieser D.C., Kanade S., Waddell N.J. et al. The deer femur — a morphological and biomechanical animal model of the human femur. *Biomed. Mater. Eng.*, 2014, vol. 24, no. 4, pp. 1693–1703, doi: <https://doi.org/10.3233/BME-140981>
- [36] Шакирзянов Ф.Р., Каюмов Р.А., Паймушин В.Н. и др. О причинах потери несущей способности композитного тест-образца при трехточечном изгибе. *Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки*, 2022, № 2–3, с. 221–343, doi: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.221-243>
- [37] Crenshaw T.D., Peo Jr.E.R., Lewis A.J. et al. Bone strength as a trait for assessing mineralization in swine: a critical review of techniques involved. *J. Ani Sci.*, 1981, vol. 53, no. 3, pp. 827–835, doi: <https://doi.org/10.2527/JAS1981.533827X>
- [38] Imai K. Computed tomography-based finite element analysis to assess fracture risk and osteoporosis treatment. *World. J. Exp. Med.*, 2015, vol. 5, no. 3, pp. 182–187, doi: <https://doi.org/10.5493/wjem.v5.i3.182>

References

- [1] Kharin N.V., Vorobyev O.V., Berezhnoy D.V. et al. Construction of a representative model based on computed tomography. *Vestnik PNIPIU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2018, no. 3, pp. 92–102, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.10> (in Russ.).

- [2] Schwen L.O., Wolfram U., Wilke H.-J. et al. Determining effective elasticity parameters of microstructured materials. *15th Workshop on the Finite Element Method in Biomedical Engineering*, 2008, pp. 41–62.
- [3] Kayumov R.A. Structure of nonlinear elastic relationships for the highly anisotropic layer of a nonthin shell. *Mech. Compos. Mater.*, 1999, vol. 35, no. 5, pp. 409–418, doi: <https://doi.org/10.1007/BF02329327>
- [4] Kasiviswanathan V., Arockiarajan A. Analytical, numerical and experimental studies on effective properties of layered (2–2) multiferroic composites. *Sens. Actuator A Phys.*, 2015, vol. 236, pp. 380–393, doi: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2015.11.010>
- [5] Mohammadi Shah M., Komeili M., Phillion A.B. et al. Toward better understanding of the effect of fiber distribution on effective elastic properties of unidirectional composite yarns. *Comput. Struct.*, 2016, vol. 163, pp. 29–40, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.10.002>
- [6] Vilchevskaya E., Sevostianov I. Effective elastic properties of a particulate composite with transversely-isotropic matrix. *Int. J. Eng. Sci.*, 2015, vol. 94, pp. 139–149, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.05.006>
- [7] Vahterova Y.A., Min Y.N. Effect of shape of armoring fibers on strength of composite materials. *TURCOMAT*, 2021, vol. 12, no. 2, pp. 2703–2708, doi: <https://doi.org/10.17762/turcomat.v12i2.2295>
- [8] Vanlenthe G., Hagenmuller H., Bohner M. et al. Nondestructive micro-computed tomography for biological imaging and quantification of scaffold–bone interaction in vivo. *Biomaterials*, 2007, vol. 28, no. 15, pp. 2479–2490, doi: <https://doi.org/10.1016/j.biomaterials.2007.01.017>
- [9] Viceconti M., Qasim M., Bhattacharya P. et al. Are CT-based finite element model predictions of femoral bone strengthening clinically useful? *Curr. Osteoporos. Rep.*, 2018, vol. 16, no. 3, pp. 216–223, doi: <https://doi.org/10.1007/s11914-018-0438-8>
- [10] Semenova E., Gerasimov O., Koroleva E. et al. Automatic processing and analysis of the quality healing of derma injury. In: *Biomechanics in medicine and biology*. Springer, 2018, pp. 107–113, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-97286-2_10
- [11] Silva-Henao J., Synek A., Pahr D.H. et al. Selection of animal bone surrogate samples for orthopaedic screw testing based on human radius CT-derived bone morphology. *Med. Eng. Phys.*, 2022, vol. 103, art. 103786, doi: <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2022.103786>
- [12] Donnik A.M., Kossovich L.Yu., Olenko E.S. Behavior of the segment of the thoracic spine in comparated vertebral fracture before and after surgical treatment. Biomechanical experiment. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 25–39. (In Russ.).
- [13] Maslov L.B., Dmitryuk A.Yu., Zhmaylo M.A. et al. Study of the strength of a hip endoprosthesis made of polymeric material. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics], 2022, no. 4, pp. 19–33. (In Russ.).
- [14] Moreno R., Borga M., Smedby Ö. Techniques for computing fabric tensors: a review. In: *Visualization and processing of tensors and higher order descriptors for multi-valued data*. Springer, 2014, pp. 271–292, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-54301-2_12
- [15] Moreno R., Smedby Ö., Borga M. On the efficiency of the mean intercept length tensor. *SSBA Symp.*, 2011. URL: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:533443/fulltext01.pdf> (accessed: 15.05.2023).
- [16] Smit T.H., Schneider E., Odgaard A. Star length distribution: a volume-based concept for the characterization of structural anisotropy. *J. Microsc.*, 1998, vol. 191, no. 3, pp. 249–257, doi: <https://doi.org/10.1046/j.1365-2818.1998.00394.x>
- [17] Carniel T.A., Klahr B., Fancello E.A. On multiscale boundary conditions in the computational homogenization of an RVE of tendon fascicles. *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, 2019, vol. 91, pp. 131–138, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2018.12.003>
- [18] Marcián P., Lošák P., Kaiser J. et al. Estimation of orthotropic mechanical properties of human alveolar bone. *ICEM*, 2016, pp. 399–402.
- [19] Gueguen Y., Ravalec M.L., Ricard L. Upscaling: effective medium theory, numerical methods and the fractal dream. *Pure Appl. Geophys.*, 2006, vol. 163, no. 5-6, pp. 1175–1192, doi: <https://doi.org/10.1007/s00024-006-0053-y>

- [20] Hollister S.J., Kikuchi N. A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites. *Comput. Mech.*, 1992, vol. 10, no. 2, pp. 73–95, doi: <https://doi.org/10.1007/BF00369853>
- [21] Marcián P., Florian Z., Horáčková L. et al. Microstructural finite-element analysis of influence of bone density and histomorphometric parameters on mechanical behavior of mandibular cancellous bone structure. *Solid State Phenom.*, 2016, vol. 258, pp. 362–365, doi: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.258.362>
- [22] Kayumov R.A., Muhamedova I.Z., Tazyukov B.F. et al. Parameter determination of hereditary models of deformation of composite materials based on identification method. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2018, vol. 973, no. 1, art. 012006. doi: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012006>
- [23] Sachenkov O.A., Gerasimov O.V., Koroleva E.V. et al. Building the inhomogeneous finite element model by the data of computed tomography. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 332–344, doi: <https://doi.org/10.15593/RJBiomeh/2018.3.05> (in Russ.).
- [24] Gerasimov O.V., Kharin N.V., Fedyanin A.O. et al. Bone stress-strain state evaluation using CT based FEM. *Front. Mech. Eng.*, 2021, vol. 7, art. 688474, doi: <https://doi.org/10.3389/fmech.2021.688474>
- [25] Maquer G., Musy S.N., Wandel J. et al. Bone volume fraction and fabric anisotropy are better determinants of trabecular bone stiffness than other morphological variables. *J. Bone Miner. Res.*, 2015, vol. 30, no. 6, pp. 1000–1008, doi: <https://doi.org/10.1002/jbmr.2437>
- [26] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1987, vol. 24, no. 2, pp. 337–357, doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620240206>
- [27] Grassi L., Schileo E., Taddei F. et al. Accuracy of finite element predictions in sideways load configurations for the proximal human femur. *J. Biomech.*, 2012, vol. 45, no. 2, pp. 394–399, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2011.10.019>
- [28] Giovannelli L., Ródenas J.J., Navarro-Jiménez J.M. et al. Direct medical image-based Finite Element modelling for patient-specific simulation of future implants. *Finite Elem. Anal. Des.*, 2017, vol. 136, pp. 37–57, doi: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2017.07.010>
- [29] Gerasimov O.V., Berezhnoy D.V., Bolshakov P.V. et al. Mechanical model of a heterogeneous continuum based on numerical-digital algorithm processing computer tomography data. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics], 2019, vol. 23, pp. 87–97. (In Russ.).
- [30] Gerasimov O., Kharin N., Statsenko E. et al. Patient-specific bone organ modeling using CT based FEM. In: *Mesh methods for boundary-value problems and applications*. Springer, 2022, pp. 125–139, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-87809-2_10
- [31] Vorobyev O.V., Semenova E.V., Mukhin D.A. et al. The image-based finite element evaluation of the deformed state. *Vestnik PNIPU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2021, no. 2, pp. 44–54, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.05> (in Russ.).
- [32] Gerasimov O., Sharafutdinova K., Rakhmatullin R. et al. Application of a digital prototype for CT-based bone strength analysis. *ITNT*, 2022, doi: <https://doi.org/10.1109/ITNT55410.2022.9848693>
- [33] Gerasimov O., Kharin N., Yaikova V. et al. Direct image-based micro finite element modeling of bone tissue. *MATEC Web Conf.*, 2020, vol. 329, art. 03072, doi: <https://doi.org/10.1051/matecconf/202032903072>
- [34] Rho J.Y., Hobatho M.C., Ashman R.B. Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone. *Med. Eng. Phys.*, 1995, vol. 17, no. 5, pp. 347–355, doi: [https://doi.org/10.1016/1350-4533\(95\)97314-f](https://doi.org/10.1016/1350-4533(95)97314-f)
- [35] Kieser D.C., Kanade S., Waddell N.J. et al. The deer femur — a morphological and biomechanical animal model of the human femur. *Biomed. Mater. Eng.*, 2014, vol. 24, no. 4, pp. 1693–1703, doi: <https://doi.org/10.3233/BME-140981>
- [36] Shakirzyanov F.R., Kayumov R.A., Paymushin V.N. et al. About the causes of the bearing capacity loss of a composite beam under three-point bending. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2022, no. 2–3, pp. 221–343, doi: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.221-243> (in Russ.).

- [37] Crenshaw T.D., Peo Jr.E.R., Lewis A.J. et al. Bone strength as a trait for assessing mineralization in swine: a critical review of techniques involved. *J. Ani Sci.*, 1981, vol. 53, no. 3, pp. 827–835, doi: <https://doi.org/10.2527/JAS1981.533827X>
- [38] Imai K. Computed tomography-based finite element analysis to assess fracture risk and osteoporosis treatment. *World. J. Exp. Med.*, 2015, vol. 5, no. 3, pp. 182–187, doi: <https://doi.org/10.5493/wjem.v5.i3.182>

Статья поступила в редакцию 21.06.2023

Информация об авторах

ГЕРАСИМОВ Олег Владимирович — научный сотрудник кафедры теоретической механики. Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (420008, Казань, Российская Федерация, ул. Кремлевская, 18, e-mail: valeriy.karasikov@gmail.com).

РАХМАТУЛИН Рамиль Русланович — лаборант-исследователь кафедры теоретической механики. Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (420008, Казань, Российская Федерация, ул. Кремлевская, д. 18, e-mail: rakhmatulin852@gmail.com).

БАЛТИНА Татьяна Валерьевна — кандидат биологических наук, доцент кафедры физиологии человека и животных. Институт фундаментальной медицины и биологии Казанского (Приволжского) федерального университета (420012, Казань, Российская Федерация, ул. Карла Маркса, д. 76, к. 2, e-mail: tvbaltina@kpfu.ru).

САЧЕНКОВ Оскар Александрович — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой компьютерной математики и информатики. Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (420008, Казань, Российская Федерация, ул. Кремлевская, д. 18, e-mail: 4works@bk.ru).

Information about the authors

GERASIMOV Oleg Vladimirovich — Researcher, Department of Theoretical Mechanics. N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University (420008, Kazan, Russian Federation, Kremlin St., Bldg. 18, e-mail: valeriy.karasikov@gmail.com).

RAKHMATULIN Ramil Ruslanovich — Assistant Researcher, Department of Theoretical Mechanics. N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University (420008, Kazan, Russian Federation, Kremlin St., Bldg. 18, e-mail: rakhmatulin852@gmail.com).

BALTINA Tatiana Valeryevna — Candidate of Science (Biology), Associate Professor, Department of Human and Animal Physiology. Institute of Fundamental Medicine and Biology, Kazan (Volga Region) Federal University (420012, Kazan, Russian Federation, K. Marx St., Bldg. 76, Block 2, e-mail: tvbaltina@kpfu.ru).

SACHENKOV Oskar Alexandrovich — Candidate of Science (Phys.-Math.), Head of the Department of Computer Mathematics and Informatics. N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University (420008, Kazan, Russian Federation, Kremlin St., Bldg. 18, e-mail: 4works@bk.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Герасимов О.В., Рахматулин Р.Р., Балтина Т.В., Саченков О.А. Определение напряженно-деформированного состояния костей по данным компьютерной томографии. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 8, с. 3–15, doi: [10.18698/0536-1044-2023-8-3-15](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2023-8-3-15)

Please cite this article in English as:

Gerasimov O.V., Rakhmatulin R.R., Baltina T.V., Sachenkov O.A. Determination of the bones stress-strain state by the computer tomography data. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2023, no. 8, pp. 3–15, doi: [10.18698/0536-1044-2023-8-3-15](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2023-8-3-15)