

**ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО**

ТОМ 52

ЛОБАЧЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2015

**Материалы Четырнадцатой молодежной
школы-конференции
(Казань, 22 – 27 октября 2015 г.)**

**Казанское математическое общество
2015**



Российский фонд фундаментальных исследований

Издание осуществлено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-31-10441\15)

УДК 51+533
ББК 22.1 – 22.1
Т78

Печатается по рекомендации Редакционно-издательского
совета Казанского математического общества

Научные редакторы – ст. преп. А. А. Агафонов, проф. И. Б. Бадриев, доц.
Д. В. Бережной, проф. В. И. Жегалов, доц. Н. А. Корешков, проф. С. Р. Насыров,
доц. Е. Н. Сосов, проф. Л. Р. Шакирова
Составитель – Р. К. Губайдуллина

Т78 Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 52/ Казанское математическое общество. «Лобачевские чтения – 2015» // *Материалы Четырнадцатой молодежной научной школы-конференции.* – Казань: Издательство Казанского математического общества, 2015. – Т. 52. – 180 с.

Сборник содержит материалы Четырнадцатой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2015», организованной на базе Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета. Школа-конференция проведена в Казани с 22 по 27 октября 2015 года при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях математики, механики и их приложений.

УДК 51+533
ББК 22.1 – 22.1

© Казанское математическое общество, 2015
© Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015

А. И. Абдрахманова, Л. У. Султанов

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
A061093@mail.ru*

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БОЛЬШИХ
ДЕФОРМАЦИЙ ТЕЛ С УЧЕТОМ
НЕСЖИМАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА**

Работа посвящена разработке методики исследования конечных упругих деформаций слабосжимаемых материалов. Кинематика описывается левым тензором Коши–Грина. Вводится удельная потенциальная энергия деформации, которая зависит от левого тензора Коши–Грина. Напряженное состояние описывается тензором истинных напряжений Коши–Эйлера, который определяется в текущем состоянии. Далее приводится описание процедуры получения линеаризованных определяющих соотношений. Алгоритм исследования основан на методе последовательных нагружений. В качестве базового уравнения принимается вариационное уравнение мощностей в актуальном состоянии. После линеаризации получена разрешающая система линейных алгебраических уравнений, где неизвестным является приращение перемещений в текущем времени. Для учета несжимаемости применяется метод штрафов. В качестве примера рассматривается задача растяжения прямоугольной пластины с круговым вырезом, для которой выбрано соответствующее выражение потенциала упругих деформаций. Таким образом, в работе построена методика численного исследования трехмерных тел, для которых физические соотношения задаются с помощью упругого потенциала. Получены линеаризованные определяющие соотношения и разрешающее уравнение. Численная реализация основана на методе конеч-

ных элементов на базе восьмиузлового полилинейного элемента.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-31-20602, № 15-01-08733).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Голованов А. И., Коноплев Ю. Г., Султанов Л. У. *Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. I. Кинематика и вариационные уравнения* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150. – № 1. – С. 29–37.
2. Голованов А. И., Коноплев Ю. Г., Султанов Л. У. *Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. II. Физические соотношения* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150. – № 3. – С. 122–132.
3. Голованов А. И., Коноплев Ю. Г., Султанов Л. У. *Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. III. Постановки задачи и алгоритмы решения* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2009 – Т. 151. – № 3. – С. 108–120.
4. Голованов А. И., Коноплев Ю. Г., Султанов Л. У. *Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. IV. Конечноеэлементная реализация. Примеры решения задач* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152. – № 4. – С. 115–126.
5. Bonet J., Wood R. D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. – USA, 1997. – 283 p.
6. Голованов А. И., Султанов Л. У. *Теоретические основы вычислительной нелинейной механики деформируемых сред*. – Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 2008. – 165 с.
7. Голованов А. И., Султанов Л. У. *Математические модели*

вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. -
Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 465 с.

А. Н. Абызов, Ч. Х. Н. Нян

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
aabyzov@ksu.ru, tranhoaingocnhan@gmail.com*

МОДУЛИ, В КОТОРЫХ СУММЫ ДВУХ ПРЯМЫХ СЛАГАЕМЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ПРЯМЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Пусть M — правый R -модуль и \mathcal{A} — множество подмодулей модуля M , которое замкнуто относительно изоморфных образов. Следуя [2] и [3], введем следующие условия:

\mathcal{A} -(C2): Для каждого $N \in \mathcal{A}$, если $X \leq_{\oplus} M$ и $N \cong X$, то $N \leq_{\oplus} M$.

\mathcal{A} -(C3): Для каждых $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ and $M_1, M_2 \leq_{\oplus} M$, если $M_1 \cap M_2 = 0$, то $M_1 + M_2 \leq_{\oplus} M$.

Также введем следующее условие:

\mathcal{A} -(SSP): Для каждых $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$, если $M_1, M_2 \leq_{\oplus} M$, то $M_1 + M_2 \leq_{\oplus} M$.

Модуль M назовем \mathcal{A} -(SSP)-модулем, если модуль M удовлетворяет условию \mathcal{A} -(SSP). Аналогично определяется понятие \mathcal{A} -(C i)-модуля ($i=2,3$).

Теорема. Пусть M — правый R -модуль и \mathcal{A} множество артиновых подмодулей модуля M , которое замкнуто относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если каждый подмодуль модуля M является \mathcal{A} -проективным, то следующие условия равносильны:

(i) M — \mathcal{A} -(C3)-модуль.

(ii) M — \mathcal{A} -(C2)-модуль.

(iii) Если X_1, \dots, X_n — прямые слагаемые модуля M и $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$, то $\sum_{i=1}^n X_i$ — прямое слагаемое модуля M .

Теорема. Пусть M — правый R -модуль и \mathcal{A} — множество подмодулей модуля M , которое замкнуто относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если каждый фактормодуль модуля M является \mathcal{A} -проективным, то следующие условия равносильны:

(i) M — \mathcal{A} -(SSP)-модуль.

(ii) M — \mathcal{A} -(C3)-модуль.

(iii) Если $M = A_1 \oplus A_2$, $A_1 \in \mathcal{A}$, то образ всякого гомоморфизма $f: A_1 \rightarrow A_2$ является прямым слагаемым в A_2 .

(iv) M — \mathcal{A} -(C2)-модуль.

(v) Если X_1, \dots, X_n — прямые слагаемые модуля M и $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$, то $\sum_{i=1}^n X_i$ — прямое слагаемое модуля M .

Следствие. [1, Предложение 2.1] Следующие условия равносильны для модуля M :

(i) Для всяких простых подмодулей A, B модуля M из условий $A \cong B$, $B \leq_{\oplus} M$ следует, что $A \leq_{\oplus} M$.

(ii) Для любых простых прямых слагаемых A, B модуля M выполнено условие $A \oplus B \leq_{\oplus} M$.

(iii) Для всяких конечнопорожденных полупростых подмодулей A, B модуля M из условий $A \cong B$, $B \leq_{\oplus} M$ следует, что $A \leq_{\oplus} M$.

(iv) Для любых конечнопорожденных полупростых прямых слагаемых A, B модуля M выполнено условие $A \oplus B \leq_{\oplus} M$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Camillo V., Ibrahim Y., Yousif M., Zhou Y. *Simple-direct-injective modules* // J. Algebra. — 2014. — V. 420. — P. 39–53.

2. Lopez-Permouth S. R., Oshiro K., Tariq Rizvi S. *On the relative (quasi-) continuity of modules* // Comm. Algebra. – 1998. – V. 26. – P. 3497–3510.

3. Oshiro K. *Continuous modules and quasi-continuous modules* // Osaka J. Math. – 1983. – V. 20. – P. 681–694.

И. И. Аксанова, Д. З. Уразова

Высокогорская СОШ № 2,

ils050@mail.ru

ДИНАМИКА ОТОБРАЖЕНИЯ, ЗАДАННОГО ТРЕМЯ ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Простые популяционные модели, построенные как одномерные дискретные динамические системы, позволяют исследовать биологические популяции и их характеристики. Такие математические модели можно строить, например, с помощью кусочно-линейных отображений. Отметим, что случай тентообразных отображений, т. е. отображений, задаваемых двумя линейными функциями, изучен достаточно хорошо (см., напр. [1–3]). Представляет интерес изучение случая, когда число линейных функций, задающих отображение, равно трем.

Основная задача нашей работы – изучить динамику кусочно-линейного отображения

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x \leq 0, \\ -3x + 2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x - 3, & x \geq 1. \end{cases}$$

В результате исследования мы получили, что заданное отображение имеет три неподвижные точки: $x = -2$, $x = 0.5$ и $x = 3$,

причём все они являются отталкивающими. Найдены три, также отталкивающие, дупериодические орбиты отображения f : $x_1 = -\frac{4}{7} \rightarrow x_2 = \frac{6}{7} \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$, $x_3 = -\frac{1}{3} \rightarrow x_4 = \frac{4}{3} \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow \dots$, $x_5 = \frac{1}{7} \rightarrow x_6 = \frac{11}{7} \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow \dots$.

Мы доказали, что на интервале $(-\infty; -2)$ орбиты всех точек стремятся к $-\infty$, а на $(3; +\infty)$ — к $+\infty$. Наиболее интересным является интервал $(-2; 3)$, так как орбиты всех точек этого интервала остаются внутри него. И именно в этом интервале находятся отталкивающие неподвижные и дупериодические точки. В результате нами доказано, что отображение $f(x)$ на интервале $(-2; 3)$ имеет хаотическое поведение. Именно такую динамику орбиты точки $x_0 \in (-2; 3)$ мы видим на паутиной диаграмме (рис. 1).

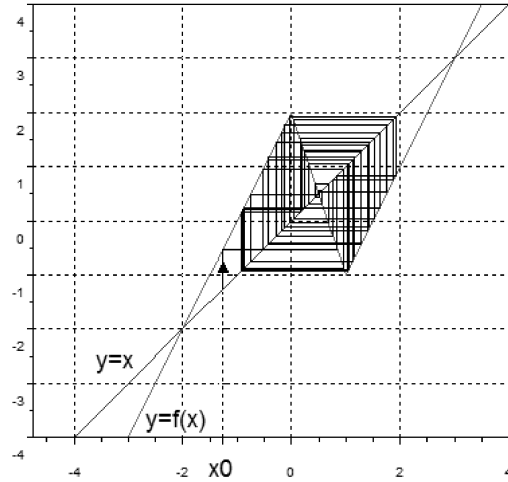


Рис. 1

ЛИТЕРАТУРА

1. Кроновер Р. *Фракталы и хаос в динамических системах*. — М.: Техносфера, 2006. — 352 с.

2. Lindstrom T., Thunberg H. *An elementary approach to dynamics and bifurcations of skew tent maps* // J. Diff. Eq. and Appl. – 2008. – V. 14. – P. 819–833.

3. Sushko I., Gardini L. *Degenerate bifurcations and border collisions in piecewise smooth 1D and 2D maps* // Intern. J. of Bifurcation and Chaos. – 2010. – V. 20. – No 7. – P. 2045–2070.

П. Д. Андреев

*Северный (Арктический) федеральный
университет им. М. В. Ломоносова,
pdandreev@mail.ru*

ХОРДОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ПРОБЛЕМЫ БУЗЕМАНА

Хордовые пространства введены в книге Буземана и Пхадке [1] с уточнением определения в [2] как обобщение класса G -пространств Буземана, детальному изучению которых посвящена книга [3]. Пусть (X, d) — конечно компактное метрическое пространство, удовлетворяющее условию выпуклости по Менгеру. Последнее означает, что для любых двух точек $x, y \in X$ существует точка $m \in X$, лежащая строго между ними, то есть для точек x, y, m выполнено равенство

$$d(x, y) = d(x, m) + d(m, y), \quad \text{где } m \notin \{x, y\}.$$

Из условий конечной компактности и выпуклости по Менгеру следует, что X является геодезическим пространством, то есть любые две точки $x, y \in X$ соединимы в X отрезком $[xy]$. Здесь под отрезком $[xy]$ понимается образ спрямляемого пути $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ с $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$, длина которого $\ell(\gamma) = d(x, y)$.

В общем случае отрезок $[xy]$ определён неоднозначно. Множество всех отрезков пространства X обозначается $T(x, y)$, где точки $x, y \in X$ пробегают множество всех пар различных точек в X . Это же обозначение применяется для каждой конкретной пары $x, y \in X$. Во множестве $T(x, y)$ выделим подмножества

$$Q^*(x, y) \subset Q(x, y) \subset T(x, y).$$

Элементы множества $Q(x, y)$ называются *хордами*, а элементы $Q^*(x, y)$ — *базовыми хордами*.

К числу хорд относится всякий отрезок, являющийся геодезической, где под геодезической понимается объединение последовательно налегающих друг на друга базовых хорд.

Предположим, что множества хорд и базовых хорд в X удовлетворяют следующему перечню аксиом (нумерация аксиом соответствует [2]).

$\Sigma_2(1)$. Всякая точка $p \in X$ имеет окрестность $U(p, r(p))$, в которой любые две точки $a, b \in U(p, r(p))$ соединяются единственной базовой хордой $Q^*(a, b)$.

$\Sigma_2(2)$. Если q — внутренняя точка $Q^*(a, b)$, то $Q^*(a, q) \subset Q^*(a, b)$, причём $Q^*(a, b)$ является единственной базовой хордой длины $d(a, b)$, продолжающей $Q^*(a, q)$.

$\Sigma_2(3)$. Если существуют базовые хорды $Q^*(a_n, b_n)$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ и $a_n \rightarrow a_0$, $b_n \rightarrow b_0$ при $n \rightarrow \infty$, то $Q^*(a_n, b_n) \rightarrow Q^*(a_0, b_0)$ поточечно.

$\Sigma_2(4)$. Для любых двух точек $a, b \in U(p, r(p))$ существует $c \in X$, для которой $Q^*(a, b) \subset Q^*(a, c)$.

$\Sigma_2(a)$. Для любых точек $a, b \in X$ и любого гомотопического класса \mathcal{K} кривых с концами a, b существует хорда, принадлежащая \mathcal{K} .

Отличие в нумерации последней аксиомы обосновывается тем, что она носит глобальный характер и описывает семейство хорд, не являющихся базовыми хордами.

G -пространства Буземана являются частным случаем хордовых пространств. В этом случае хордами являются все отрезки, то есть $Q(x, y) = T(x, y)$, а базовыми хордами служат отрезки, обладающие свойством единственности: отрезок $[xy]$ является базовой хордой G -пространства X тогда и только тогда, когда он является единственным отрезком, соединяющим x и y .

Приложение к книге [3] содержит перечень теорем и нерешённых проблем, касающихся G -пространств. Среди проблем особо выделяются проблемы (7)–(9) (здесь мы сохраняем нумерацию Буземана).

Проблема (7). *Является ли n -мерное G -пространство n -мерным топологическим многообразием?*

Проблема (8). *Является ли произвольное G -пространство локально однородным в смысле Монтгомери (см. [4])?*

Проблема (9). *Всякое ли G -пространство имеет конечную топологическую размерность?*

В действительности, проблема (7) сформулирована в [3] для размерности $n = 3$. В этой формулировке она решена в [5]. Локальная однородность пространства X в смысле Монтгомери означает, что каждая точка $p \in X$ имеет окрестность U_p , в которой выполняется следующее свойство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, при котором для любых двух точек $a \in U_p$ и $b \in X$ на расстоянии $d(a, b) < \delta$ существует однопараметрическое семейство гомеоморфизмов $\Phi_t : U_p \rightarrow \Phi_t(U_p) \subset X$,

$t \in [0, 1]$, что $\Phi_0 = \text{Id}_{U_p}$, $\Phi_1(a) = b$ и $d(x, \Phi_t(x)) < \varepsilon$ для всех $x \in U_p$ и всех $t \in [0, 1]$.

Перечисленные проблемы автоматически переносятся на хордовые пространства. В настоящее время проблема (8) в приведённой здесь формулировке решена полностью, остальные — в некоторых частных случаях. Отдельные частные случаи решений также автоматически переносятся на хордовые пространства.

В первую очередь, говоря о проблеме (9), следует привести статью В. Н. Берестовского [6], где проблема решена при некоторых дополнительных условиях на выпуклость в пространстве X малых шаров.

Теорема конечномерности ([6], Теоремы 1-2). *Пусть X — G -пространство Буземана. Если в X существует непустая область U , в которой все шары выпуклы, или непустая K -выпуклая область при некотором действительном значении K , то X имеет конечную топологическую размерность.*

Метод, применённый В. Н. Берестовским в доказательстве этой теоремы, допускает несложное перенесение на хордовые пространства неположительной кривизны. Под хордовым пространством неположительной кривизны понимается такое хордовое пространство, что у каждой точки есть окрестность, в которой средняя линия любого треугольника, образованного базовыми хордами, не превосходит половины основания. Из однородности пространства следует, что при рассмотрении вопроса о топологической размерности достаточно рассматривать лишь окрестность одной точки.

Теорема 1. *Пусть в хордовом пространстве X существует область неположительной кривизны. Тогда X имеет конечную топологическую размерность.*

К сожалению, выпуклость шаров малого радиуса не обеспечивается аксиомами G -пространства. Примеры G -пространств, так называемых квазигиперболических плоскостей, имеющих невыпуклые шары сколь угодно малого радиуса в окрестности произвольной точки $p \in X$, построены в [7].

Значительное продвижение в решении проблемы (7) выполнено П. Тёрстоном в [8]. Основным результатом этой статьи — всякое 4-мерное G -пространство Буземана является 4-мерным топологическим многообразием. Но помимо этого статья интересна тем, что в ней представлена программа решения проблемы (7) в общем случае. При этом, как вспомогательный результат получено полное решение проблемы (8): всякое G -пространство является топологически однородным и при этом (не только в локальном, но и в глобальном смысле) однородно в смысле Монтгомери. Короткая, но аккуратная проверка этого факта выполнена в [9]. Метод, применённый в [8], повторяется в [1] для доказательства топологической однородности хордовых пространств. Как следствие, всякое хордовое пространство имеет одну и ту же локальную топологическую размерность во всех точках.

В статье [9] введена иная трактовка однородности — G -однородность. Подмножество Z в метрическом пространстве X называется *звёздным* по отношению к точке $p \in \text{Int}(Z)$, если для любой точки $x \in \partial Z$ отрезок $[px]$ существует, однозначно определён, содержится в Z и Z является геодезическим конусом над ∂Z с вершиной p . Z называется *стабильно звёздным* в точке p , если существует $\delta > 0$ такое, что Z является звёздным по отношению к любой точке $y \in B(p, \delta)$. Метрическое пространство X называется локально G -однородным, если для любой точки $x \in X$ есть такой радиус $\varepsilon > 0$, что шар

$B(x, \varepsilon)$ обладает свойством продолжаемости отрезков и является стабильно звёздным по отношению к любой своей точке.

Понятно, что всякое линейно связное локально G -однородное пространство однородно. В общем случае обратное неверно. В [9] высказан ряд проблем, связанных с G -однородностью. Они автоматически переносятся на хордовые пространства (см. подробные определения в [9]).

Проблема 1. *Всякое ли хордовое пространство является локально G -однородным и равномерно локально G -однородным на орбальных множествах?*

Ещё более существенный результат статьи [8] касается топологии G -пространств: всякое G -пространство Буземана является гомологическим многообразием и абсолютным окрестностным ретрактом (сокращённо, ANR).

Практически дословное повторение аргументов П. Тёрстона позволяет сформулировать результат для хордовых пространств.

Теорема 2. *Всякое хордовое пространство является ANR.*

Однако, прямой перенос второй части теоремы Тёрстона на хордовые пространства проблематичен.

Проблема 2. *Всякое ли хордовое пространство является гомологическим многообразием?*

Общая схема Тёрстона решения проблемы (7) для четырёхмерных G -пространств включает 4 шага и может рассматриваться как схема решения проблемы в общем случае. Первый шаг уже описан выше. Результатом является теорема, утверждающая, что всякое G -пространство является ANR и гомологическим многообразием. Последующие шаги выполнены существенно для четырёхмерного случая. Однако, если гипотеза Буземана о том, что всякое G -пространство является многооб-

раziem, верна, то результаты этих шагов также справедливы в общем случае. Это же можно сказать и о хордовых пространствах.

Шаги 2 и 3 являются независимыми друг от друга. Шаг 2 состоит в следующем. Пусть $A \subset X$ и $a \in \overline{X \setminus A}$. Будем говорить, что множество $X \setminus A$ является локально k -связным в a , если любая окрестность U точки a содержит такую её окрестность V , что всякое непрерывное отображение $\partial B^{k+1} \rightarrow V$ продолжается до непрерывного отображения $B^{k+1} \rightarrow V$. Множество A называется локально k -косвязным (коротко, k -LCC), если $X \setminus A$ локально k -связно в любой точке $a \in \overline{X \setminus A}$.

Пространство X называется полукрасиво (semi-nicely) локально $(n - 1)$ -сферическим, если любая точка $y \in X$ имеет сколь угодно малую окрестность V , граница которой ∂V гомотопна S^{n-1} и является 1-LCC множеством.

Теорема ([8, Теорема 3.14.]) *Всякое 4-мерное G -пространство является полукрасиво локально 3-сферическим.*

Шаг 3 связан с понятием разрешимости пространства. Пусть C — компактное метрическое пространство. Оно называется клеточноподобным (cell-like), если существует топологическое многообразие M и вложение $f : C \rightarrow M$ такие, что $f(C)$ в M представимо как пересечение последовательности замкнутых m -клеток Q_1, Q_2, \dots , где $Q_{i+1} \subset Q_i$ и $m = \dim M$. Отображение $f : X \rightarrow Y$ метрических пространств называется клеточноподобным, если таковым является прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки $y \in Y$. Сепарабельное метрическое пространство Y называется разрешимым, если существует многообразие M^n и клеточноподобная сюръекция $f : M^n \rightarrow Y$, называемая разрешением Y .

Критерий разрешимости для гомологических многообразий представлен в работе Куинна [10]. Пусть X — гомологическое многообразие. Будем говорить, что X является подходящим для разрешения, если оно локально компактно, связно, конечномерно, сепарабельно, метризуемо и является ANR.

Теорема ([10]). *Существует корректно определённый инвариант $i(X) \in 1 + 8 \cdot \mathbb{Z}$, соответствующий произвольному подходящему для разрешения гомологическому многообразию X , являющийся препятствием к разрешимости. X разрешимо тогда и только тогда, когда $i(X) = 1$.*

Результатом третьего шага в [8] является следующее.

Предложение ([8], Следствие 3.10). *Всякое 4-мерное G -пространство Буземана X имеет индекс Куинна $i(X) = 1$ и поэтому разрешимо.*

Последний шаг 4 в [8] показывает, что свойств разрешимости и полукрасивой локальной сферичности достаточно для доказательства основной теоремы в случае четырёхмерного G -пространства. Основной аргумент доказательства — тот факт, что отображение разрешения $f : M^4 \rightarrow X$ в этом случае аппроксимируемо гомеоморфизмом.

В случае большей размерности более удобно вместо свойства полукрасивой локальной сферичности рассматривать другое свойство, называемое свойством разделяемости дисков (disjoint disks property, DDP). Говорят, что метрическое пространство X обладает свойством DDP, если любое непрерывное отображение в X пары двумерных клеток B^2 можно аппроксимировать сколь угодно близким к нему отображением, которое имеет непересекающиеся образы указанных клеток. Имеется следующий критерий (решение проблемы распознавания

Кеннона).

Теорема Эдвардса ([11]). Пусть пространство X имеет топологическую размерность $n \geq 5$. Оно является n -мерным топологическим многообразием тогда и только тогда, когда оно разрешимо и обладает свойством DDP .

Таким образом, проблема Буземана (7), сформулированная для хордовых пространств, раскладывается в цепочку проблем, первая из которых уже сформулирована как Проблема 2.

Проблема 3. Пусть X — четырёхмерное хордовое пространство, являющееся гомологическим многообразием. Верно ли, что оно является полукрасиво локально сферическим?

Проблема 4. Пусть X — n -мерное хордовое пространство, являющееся гомологическим многообразием. Верно ли, что оно обладает свойством DDP ?

Проблема 5. Верно ли, что всякое хордовое пространство, являющееся гомологическим многообразием, разрешимо?

В случае четырёхмерного пространства отдельно стоит вопрос об аппроксимируемости разрешения гомеоморфизмом.

Проблема 6. Пусть X — полукрасиво локально сферическое разрешимое хордовое пространство. Верно ли, что оно обладает разрешением, которое аппроксимируемо гомеоморфизмом?

Далее мы остановимся на проблеме (7) в случаях, когда пространство X обладает дополнительными ограничениями на кривизну. В этом случае проблема решена В. Н. Берестовским для G -пространств ограниченной кривизны по А. Д. Александру (см. [12] для пространств кривизны ограниченной снизу

и [13] для пространств кривизны ограниченной сверху) и автором для пространств неположительной кривизны в смысле Буземана (см. [14]). В случае пространств Александрова справедливы следующие теоремы.

Теорема ([12], Теорема 7.) Пусть (X, d) — локально компактное пространство с внутренней метрикой кривизны $\geq K$ по А. Д. Александрову, подчинённое условию локальной продолжаемости кратчайших. Тогда X является топологическим многообразием некоторой конечной размерности n . При этом, для каждой точки $p \in X$ пространство направлений $\Omega_p X$ к X в p изометрично единичной сфере \mathbb{S}^{n-1} , а касательное пространство $K_0(\Omega_p X)$ — n -мерному евклидову пространству.

Теорема ([13], Теорема 1.1). Каждое G -пространство Буземана ограниченной сверху кривизны по А. Д. Александрову является римановым C^0 -многообразием (с непрерывными относительно дистанционных координат компонентами метрического тензора; любые две карты, составленные из дистанционных координат, C^1 -согласованы).

Как мы видим, в обоих случаях теоремы утверждают, что G -пространство с ограничением кривизны в смысле А. Д. Александрова не просто является топологическим многообразием, но имеет дополнительную структуру, характерную для римановых многообразий малой гладкости. Теорема, доказанная автором в [14], не предоставляет такой дополнительной структуры. Кроме того, существенный недостаток доказательства в том, что оно опирается на предельный переход в смысле неглавного ультрафильтра на множестве натуральных чисел, то есть зависит от аксиомы выбора. В действительности, справедлива

более сильная теорема, которая может быть доказана без применения предела по неглавному ультрафильтру.

Теорема 3. *Пусть (X, d) — G -пространство глобально неположительной кривизны в смысле Буземана. Тогда оно гомеоморфно евклидову пространству \mathbb{R}^n при некотором натуральном n . При этом, в каждой точке $p \in X$ корректно определён касательный конус $K_p X$ как предел по Громову-Хаусдорфу при $t \rightarrow +\infty$ метрических пространств (X, d_t) , подобных (X, d) с общей отмеченной точкой p и коэффициентом подобия t . Всякий такой конус изометричен некоторому n -мерному нормированному пространству со строго выпуклой нормой.*

Таким образом, G -пространства неположительной кривизны по Буземану обладают структурой, сходной с финслеровой, но более слабой в том смысле, что в каждой точке такого пространства имеется касательное пространство, которое обладает нормой, эта норма строго выпукла, но не является гладкой.

Аналог утверждения теоремы 3 для хордовых пространств можно сформулировать как гипотезу.

Гипотеза 1. *Всякое хордовое пространство (X, d) глобально неположительной кривизны в смысле Буземана-Пхадке гомеоморфно пространству \mathbb{R}^n . При этом в каждой точке $p \in X$ корректно определён касательный конус, который изометричен некоторому n -мерному нормированному пространству.*

Важный шаг в доказательстве Гипотезы 1 выполнен автором совместно с В. В. Старостиной. Статья, содержащая указанный результат принята к печати.

Теорема 4. *Пусть (X, d) — хордовое пространство неположительной кривизны в смысле Буземана-Пхадке. Тогда в*

каждой точке $p \in X$ корректно определён касательный конус $K_p X$ как предел по Громову-Хаусдорфу при $t \rightarrow +\infty$ метрических пространств (X, d_t) , подобных (X, d) , с общей отмеченной точкой p и коэффициентом подобия t . При этом, на $K_p X$ действует группа H положительных гомотетий с центром p и существует структура хордового пространства неположительной кривизны.

К сожалению, построенная нами структура хордового пространства на $K_p X$ не обязательно является инвариантной относительно действия группы H . Кроме того, при её построении авторы задействовали предельный переход по неглавному ультрафильтру, что также несколько снижает ценность доказанного утверждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00219).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Busemann H., Phadke V. *Spaces with distinguished geodesics*. – NY: Dekker, 1987. – 159 p.
2. Busemann H., Phadke V. *Novel results in the geometry of geodesics* // Adv. Math. – 1993. – V. 101. – P. 180–219.
3. Буземан Г. *Геометрия геодезических*. – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.
4. Montgomery D. *Locally homogeneous spaces* // Ann. Math. – 1950. – V. 52. – P. 261–271.
5. Krakus B. *Any 3-dimensional G-space is a manifold* // Bull. Acad. Pol. Sci. – 1968. – V. 16. – P. 737–740.
6. Берестовский В. Н. *К проблеме конечномерности G-пространства Буземана* // Сиб. матем. ж. – 1977. – Т. XVIII. – № 1. – С. 219–221.

-
7. Грибанова И. А. *Квазигиперболическая плоскость* // Сиб. матем. ж. – 1999. – Т. 40. – № 2. – С. 288–301.
 8. Thurston P. *4-dimensional Busemann G -spaces are 4-manifolds* // Diff. Geom. Appl. – 1996. – V. 6 – P. 245–270.
 9. Berestovskii V. N., Halverson D., Repovš D. *Locally G -homogeneous Busemann G -spaces* // Diff. Geom. Appl. – 2011. – V. 29. – P. 299–319.
 10. Quinn F. An obstruction to resolution of homology manifolds // Mich. Math. J. – 1987. – V. 34. – P. 285–291.
 11. Edwards R. D., *The topology of manifolds and cell-like maps* // Proc. International Congress of Mathematicians, Helsinki, 1978 – Helsinki: Acad. Sci. Fenn., 1980. – P. 195–211.
 12. Берестовский В. Н. *Многообразия с внутренней метрикой односторонне ограниченной по А.Д. Александрову кривизны* // Мат. Физ. Ан. Геом. – 1994. – Т. 1. – № 1. – С. 41–59.
 13. Берестовский В. Н. *Пространства Буземана ограниченной сверху кривизны по Александрову* // Алг. Ан. – 2002. – Т. 14. – Вып. 5. – С. 3–18.
 14. Андреев П. Д. *Доказательство гипотезы Буземана для G -пространств неположительной кривизны* // Алг. Ан. – 2014. – Т. 26. – Вып. 2. – С. 1–20.

Д. Ю. Ахметов

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
akhmetov.dy@gmail.com*

ОБЛАЧНЫЕ СЕРВИСЫ СТИЛЕВОГО ОФОРМЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПУБЛИКАЦИЙ

Предложена система сервисов, предоставляющих веб-инструменты подготовки публикации по математике. Сервисы организованы в виде конструкторов, позволяющих в интерактивном режиме оформить статью в соответствии со стиливыми требованиями журнала, выполнить проверку на соответствие стиливым требованиям научного журнала, снабдить статью ключевыми словами и оформить библиографию по специальному шаблону.

На этапе представления научной публикации проводится проверка статьи на соответствие стиливым правилам журнала (стилевая валидация) – в ряде журналов, эта проверка выполняется в автоматическом режиме [1, 2]. В научных журналах, принимающих статьи в TEX-нотации, предлагается использовать стиливой файл, специально подготовленный редакцией. Конструктор, в интерактивном режиме “собирающий” статью по правилам выбранного стиливого файла, существенно сокращает время регистрации статьи в информационной системе журнала, обеспечивая быстрое прохождение этапа валидации [3].

Сервис подготовки списка литературы физико-математической публикации позволяет оформить библиографию в соответствии с правилами конкретного научного журнала. Предоставляется возможность в интерактивном режиме выбрать тип

публикации и, затем, ввести выходные данные в поля формы.

Кроме того, имеется возможность конвертации библиографических данных, оформленных в системе ВІВТех, а также размеченных командами пакета `amsbib`, разработанного в рамках проекта MathNet [4]. Программа помогает выбрать общепринятое сокращение названия большинства научных журналов. Система сервисов реализована для журнала Lobachevskii Journal of Mathematics на платформе ScienceTatarstan.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-07-08522, № 15-47-02472) и РГНФ (проект № 14-03-12004).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ахметов Д. Ю., Елизаров А. М., Липачёв Е. К. *Стилевая валидация математических документов в электронном научном журнале* // Тр. Казанск. шк. по компьютерной и когнитивной лингвистике. – Казань, 2014. – Вып. 16. – С.26–28.

2. Ахметов Д. Ю., Елизаров А. М., Липачёв Е. К. *Автоматизация процесса первичной обработки математической статьи в информационной системе электронного научного журнала* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Матер. Двенадцатой молодежной науч. шк.-конф. “Лобачевские чтения – 2013”. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2013. – Т. 47. – С. 6–10.

3. Ахметов Д. Ю., Елизаров А. М., Липачёв Е. К. *Система автоматизации редакционных процессов на платформе электронных научных журналов* // Уч. зап. инст. соц. и гум. знаний. – 2014. – № 1(12). – Ч. 2. – С. 228–233.

4. Жижченко А. Б., Изаак А. Д. *Информационная система Math-Net.Ru. Применение современных технологий в научной*

работе математика // Успехи матем. наук. – 2007. – Т. 62. – Вып. 5(377). – С. 107–132.

А. Н. Ахметова

*Казанский национальный исследовательский технический
университет им. А.Н. Туполева,
achmetowa@inbox.ru*

**СРАВНЕНИЕ КОНФОРМНОГО И ВНУТРЕННЕГО
РАДИУСОВ В СЛУЧАЕ
ДВУСВЯЗНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТИ**

Рассмотрим кольцо $D = \{z : q < |z| < 1\}$. Взяв универсальную поверхность наложения U_D ([1], с. 255) для D , построим конформное отображение $f_U(\zeta)$ единичного круга E на односвязную многолиственную область U_D . *Конформным радиусом* области D назовем величину

$$R(D, f_U(\zeta)) = |f'_U(\zeta)|(1 - |\zeta|^2), \quad \zeta \in E.$$

Известно, что поверхность конформного радиуса для D состоит из трех частей [2]: выпуклой вверх, выпуклой вниз и образованной седловыми точками.

Внутренним радиусом области D в точке $\zeta = z$ будем называть величину

$$r(D, z) = \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{|\zeta - z|}{|F'(\zeta, z)|},$$

где

$$F(\zeta, z) = \frac{(1 - \frac{\zeta}{z}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k} \frac{\zeta}{z})(1 - q^{2k} \frac{z}{\zeta})}{(1 - \bar{z}\zeta) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k} \bar{z}\zeta)(1 - q^{2k} \frac{1}{\bar{z}\zeta})}$$

функция, отображающая кольцо D на круг с концентрическим разрезом ([3], с. 233), причем

$$|F(\zeta, z)|_{|\zeta|=q} = 1, \quad |F(\zeta, z)|_{|\zeta|=1} = \frac{1}{|z|}.$$

Заметим, что в односвязном случае введенные величины совпадают с привычным понятием конформного радиуса ([4], с. 37).

Критические точки внутреннего радиуса заполняют окружность $|z| = \sqrt{q}$.

Допредельные варианты поверхностей внутреннего и конформного радиусов для кольца D представляются довольно близкими. Исследование предельных вариантов при $q \rightarrow 0$ позволяет сделать вывод об их "неидентичности". Конформный радиус в пределе строится над двусвязной областью, и поверхность его имеет целый континуум максимальных точек. Поверхность же внутреннего радиуса строится над односвязной областью с единственной точкой максимума в нуле. По-видимому, различие в строении может быть связано с различными постановками внешней обратной краевой задачи [5].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Аксентьев Л. А., Ахметова А. Н., Хмельницкая А. В. *О выпуклости поверхностей, определяемых конформным радиусом плоской области* // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 4. – С. 3–20.
3. Ахиезер Н. И. *Элементы теории эллиптических функций*. – М.: Наука, 1970. – 304 с.
4. Авхадиев Ф. Г. *Неравенства для интегральных характеристик областей*. – Казань: Казан. ун-т, 2006. – 141 с.

5. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. *Обратные краевые задачи*. – Казань: Казан. ун-т, 1965. – 334 с.

И. Б. Бадриев, М. В. Макаров, В. Н. Паймушин

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Казанский национальный исследовательский технический
университет им. А. Н. Туполева–КАИ,
ildar.badriev1@mail.ru, makarovmaksim@mail.ru,
vrajtmushin@mail.ru*

**ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РАСЧЕТА
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ
С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМ
ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В ОДНОМЕРНОЙ
ПОСТАНОВКЕ**

Настоящая работа посвящена описанию комплекса программ для расчета напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем в геометрически нелинейной одномерной постановке.

Кинематические соотношения для наполнителя выводятся путем последовательного интегрирования по поперечной координате исходных трехмерных уравнений теории упругости, предварительно упрощенных за счет введения предположения о равенстве нулю тангенциальных компонент напряжений [1, 2]. Предполагаем, что края несущих слоев пластины жестко закреплены. Кроме того, считаем, что на кромках пластины диафрагмы отсутствуют.

Сформулирована обобщенная постановка задачи в виде интегральных тождеств относительно функций из пространств

Соболева. Для приближенного решения задачи методом сумматорных тождеств [3] построена конечно-разностная аппроксимация задачи. Численное решение осуществляется с помощью двухслойного итерационного метода [4] с предобуславливателем, являющимся линейной частью оператора построенной разностной схемы.

Разработан комплекс программ [5] в среде Matlab, с помощью которого производилось численное моделирование рассматриваемых процессов. Программы написаны в соответствии с модульным принципом, что позволило осуществить раздельное программирование, отладку и тестирование составных частей пакета программ, а также простую модернизацию и настройку пакета на решение задач различного уровня сложности. Для создания графического интерфейса использовалась специализированная среда GUIDE (см. [6, 7]).

Пользователь может задавать число точек сетки, изменять толщины несущих слоев и заполнителя оболочки, менять параметры, определяющие свойства оболочки (жесткости на растяжение-сжатие, модули упругости первого рода, изгибные жесткости слоев), итерационный параметр, точность вычислений (величину относительной погрешности на соседних итерациях). Визуально выводятся графики прогибов и осевые перемещения точек срединных поверхностей несущих слоев и касательных напряжений в заполнителе.

На основе разработанного комплекса программ проведены численные эксперименты для модельной задачи. Приведены результаты численных экспериментов. Проведен анализ полученных результатов.

Разработанный комплекс может применяться для проектирования конструкций из композитных материалов, в том числе,

внешние нагрузки, которые могут привести к потере устойчивости (разрушению) оболочки.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, и при поддержке РФФИ (проекты № 15-01-05686, № 15-41-02569, № 15-38-21099).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Paimushin V. N., Bobrov S. N. *Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms* // Mechanics of composite materials. – 2000. – V. 36. – No 1. – P. 59–66.

2. Paimushin V. N. *Nonlinear theory of the central bending of three-layer shells with defects in the form of sections of bonding failure* // Soviet Applied Mechanics. – 1987. – V. 23. – Is. 11. – P. 1038–1043.

3. Карчевский М. М., Ляшко А. Д. *Разностные схемы для нелинейных задач математической физики*. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1976. – 156 с.

4. Badriev I. B., Banderov V. V., Makarov M. V., Paimushin V. N. *Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate* // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9. – No 78. – P. 4095–4102.

5. Бадриев И. Б., Бандеров В. В., Макаров М. В., Паймушин В. Н. *Расчет напряженно-деформированного состояния трехслойной оболочки с трансверсально-мягким наполнителем в одномерной постановке* // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ: РОСПАТЕНТ, 2015, № 2015613029 от 02.03.2015.

6. Бадриев И. Б., Бандеров В. В., Задворнов О. А. *Разработка графического пользовательского интерфейса в среде MATLAB*. – Казань: Изд-во Казанск. федерального ун-та, 2011. – 112 с.

7. Бандеров В. В. *Создание пользовательского интерфейса при разработке программных комплексов в среде MATLAB // Сеточные методы для краевых задач и приложения*. Матер. Девятой Всерос. конф. – Казань: Отечество, 2012. – С. 48–49.

**И. С. Балафендиева, Д. В. Бережной, Л. Р. Секаева,
Л. У. Султанов**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
e_xo@mail.ru*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СУХИХ
И ВОДОНАСЫЩЕННЫХ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ГРУНТОВЫХ СРЕД
С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ КОНСТРУКЦИЯМИ**

При расчете водонасыщенных грунтовых сред принимается модель квазидвухфазного грунта, для которой считается, что газ либо полностью растворен в жидкости, либо находится частично в пузырьках, движущихся со скоростью фильтрующейся жидкости. При моделировании напряженного состояния используется принцип напряжений Терцаги. Уравнение пьезопроводности (для установившейся фильтрации) записывается с учетом закона фильтрации в форме Дарси-Герсеванова. Механизм взаимодействия между элементами деформируемых конструкций реализован в рамках конечно-элементной методики. Все возможные случаи отрыва моделируются в рамках

механики сплошной среды, т. е. путем введению между контактирующими поверхностями дополнительного контактного слоя из материала, обладающего специфическими свойствами. Полученная задача является нелинейной и требует применения специальных методик для ее решения.

Для оценки достоверности проведенных расчетов и оценки разработанной методики проводились сравнения их результатов с данными мониторинговых исследований обделки возводимого тоннеля. В частности, на блоках трех колец устанавливались специальные приборы, измеряющие их деформации (тензометры) до размещения этих блоков в обделку тоннеля. Затем по истечению достаточного времени, необходимого для стабилизации напряженного состояния как в обделке, так и в грунтовой массе ее окружающей, снимались показания окружных и продольных деформаций. Эти окончательные показания измеряющих деформации приборов принимались как базовые при оценке напряженного состояния обделки при эксплуатации тоннеля.

Исходя из полученных результатов, можем отметить, что разработанная численная методика исследования напряженно-деформированного состояния колец обделки тоннеля метрополитена в трехмерной постановке с моделированием контактного взаимодействия блоков между собой дает результаты, хорошо согласующиеся с данными натурных испытаний. Следовательно, на ее основе можно рассчитывать подобные конструкции и получать достоверные результаты. В частности, можно судить о напряженном состоянии внешней поверхности обделки, для которой невозможно получить экспериментальные данные по напряжениям.

Издание тезисов доклада осуществлено при финансовой

поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научных проектов № 15-41-02555, № 15-31-20602.

И. С. Балафендиева, А. Ф. Галимов, Л. Р. Секаева

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
e_xo@mail.ru*

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ГРУНТОВЫХ НАСЫПЕЙ С УЧЕТОМ ДИЛАТАНСИИ

Известно, что в зависимости от режимов и условий нагружения и свойств геоматериала развитие деформации может протекать в режимах дилатансии и уплотнения. На определенном интервале давлений больших различий в особенностях поведения геологических сред не проявляется. В условиях сдвига прочность грунта сильно зависит от гидростатического давления, а сдвиговая деформация обычно сопровождается изменением объема. С ростом давления происходит увеличение эффективной прочности. В ходе сдвиговой деформации имеет место дилатансия, рассеянное накопление микротрещин с увеличением эффективного объема. Разрушение, в основном, протекает по межзерненным границам, а в полосах локализации заметно разрыхление среды. Различие в поведении плотных и пористых пород проявляется при давлениях, превышающих некоторую пороговую величину.

В процессе моделирования грунтов вводят специальные характеристики прочности, которые определяют их несущую способность. К ним кроме сцепления и угла внутреннего трения относят и коэффициент дилатансии, который характеризует разрыхление или уплотнение грунта при девиаторном нагружении. Был проведен модельный расчет грунтовой насыпи.

Расчетная область нагружалась собственным весом (число шагов по нагрузке было выбрано равным 100), информация о координатах была подготовлена в расчете на откос высотой в 30 м, предельная высота определялась умножением начальной высоты на достигнутое число шагов по нагрузке (в процентном соотношении). Для насыпи из гравелистого песка (с учетом и без учета дилатансии) исследовалась сходимости конечно-элементного решения. При расчетах с учетом дилатансии принималось, что угол дилатансии на 30° меньше угла внутреннего трения.

Можно отметить, что учет дилатансии замедляет переход насыпи в предельное состояние, причем при этом образуется вторая полоса скольжения, а реализованная методика позволяет проводить расчет упругопластического деформирования грунтовых массивов, подчиняющихся закону сухого трения с учетом и без учета дилатансии.

Издание тезисов доклада осуществлено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научных проектов № 15-41-02555, № 15-31-20602.

И. С. Балафендиева, А. Ф. Галимов, А. Т. Шакирова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

e_xo@mail.ru

ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ РЕЗЕРВУАРОВ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Одной из главных задач развития научно-технического прогресса в промышленности является широкое использование

систем компьютерного моделирования и автоматизированного проектирования технологических процессов. Однако, в настоящее время, несмотря на всеобщую компьютеризацию отечественных предприятий, проектирование и изготовление элементов конструкции резервуаров, применяемых в химическом производстве, часто основывается на опыте практической работы технологов, сложившихся технологических традициях использовании известных решений, а также трудоемком и металлоемком методе проб и ошибок. Опытные специалисты-практики держат в голове большое количество информации об удачных и неудачных попытках и оперируют ею, зачастую опираясь на интуицию и лишь в редких случаях – на строгие алгоритмы. Эти методы работы определяют качество и себестоимость резервуаров.

Вместе с тем, теории гидродинамических, тепловых, фазовых, диффузионных, фильтрационных, химических, деформационных и других процессов, протекающих при эксплуатации резервуаров, достаточно хорошо разработаны, в общем виде решены многие ключевые задачи. Базой для описания указанных выше процессов служат математические модели, разработанные методами математической физики. Однако следует отметить, что математические модели и их решения, корректно описывающие поведение резервуаров сложной геометрии, а тем более их расчетная автоматизированная реализация, не нашли широкого отражения в отечественной литературе, что свидетельствует о недостатке наработок по этой проблеме. С другой стороны, актуальность решения подобных задач вполне очевидна. На основании изложенного, актуальна проблема разработки метода расчета напряженно-деформированного состояния резервуаров сложной формы при термосиловом нагруже-

нии и автоматизированной реализации этого метода в апробированных отечественных системах компьютерного моделирования.

В работе реализован алгоритм расчета связанной задачи термоупругости на основе метода конечных элементов. Расчет проводится на основе трехмерных линейных 8-узловых конечных элементов сплошной среды, узловыми неизвестными которого являются проекции вектора перемещений на координатные оси рабочей плоскости и температура. Предложенная авторами методика расчета позволяет эффективно решать трехмерные задачи термоупругого деформирования элементов конструкций при резком изменении внешних тепловых воздействий.

Издание тезисов доклада осуществлено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научных проектов № 15-41-02555, № 15-01-08733.

И. И. Валеев, М. В. Фалилеева

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЗАДАЧ
ПО ТЕМЕ “ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК”
В СООТВЕТСТВИИ С ТРЕБОВАНИЯМИ
ФГОС ООО**

Одним из ключевых нововведений ФГОС ООО является перевод обучения с количественно-знаниевой основы на понятийную, т. е. ключевым в обучении становится формирование изучаемых понятий, а не передача определенного объема знаний. Такая необходимость созрела и в математике, поскольку высокий уровень абстракции изучаемых понятий в программе

7–9 класса, оторванность от субъективного опыта учащегося обусловили ежегодное понижение уровня математической подготовки учащихся в нашей стране (по результатам ЕГЭ). Для методики математики становится важным нахождение приемов правильного формирования изучаемых понятий. Для реализации данной задачи нами был разработан комплекс задач по теме “Четырехугольники” для школьного курса геометрии, направленный на формирование у учащихся понятия “четырёхугольник”.

Наши ранние исследования учебного задачного материала на примере темы “Четырёхугольник” показали, что в современных учебниках по геометрии для усвоения понятия не представлены в необходимом соотношении задачи различных уровней трудности (по классификации В. П. Беспалько [1]). Был сделан вывод о том, что во всех базовых школьных учебниках по данной теме представлено всего лишь по несколько задач на ученический уровень, и всего лишь по одной задаче на четвертый, то есть творческий уровень усвоения [2]. Между тем, именно задачи на ученический уровень усвоения выполняют функции выделения простейших свойств и признаков изучаемого понятия в представлении учащегося, определения его простейших метапредметных свойств. Задачи творческого уровня позволяют более «сильным» учащимся перейти на более высокий качественный уровень понимания изучаемого понятия, а отсутствие подобных задач не дает им такой возможности.

Наши наблюдения за учащимися и студентами показывают, что понятие “четырёхугольник” не сформировано. Это показывает простой проведенный нами эксперимент. В начале урока просим нарисовать чертеж к задаче: “В четырёхугольнике $ABCD\dots$ ”. Оказывается, что большинство учащихся 9–11 классов

и студенты рисуют параллелограммы, ромбы, прямоугольники; самые “сильные” – неравнобокую трапецию. Поэтому целью составления системы упражнений стало формирование “четырёхугольника”, как фигуры: выпуклой или невыпуклой, точка пересечения продолжений сторон (или продолжений и сторон) должна быть видимой на чертеже, стороны и углы должны иметь различные меры и др.

Одной из составляющей частью разработки является изображение схемы изучаемого понятия и его существенных свойств. Например, в комплексе представлено задание на классификацию. Учащиеся должны разбить представленные четырёхугольники на два класса. Руководствуясь параллельностью противоположных сторон и параллельностью только одной стороны, они должны прийти к разбиению четырёхугольников на параллелограммы и трапеции. Особое внимание уделяется и задачам на опознание, сравнение и аналогию. Среди задач есть задачи-проблемы, а также задачи четвертого уровня усвоения, направленных на самостоятельное создание способа решения проблемы поискового характера. Например, нужно доказать, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренной трапеции, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Беспалько В. П. *Слагаемые педагогической технологии*. – М.: Педагогика, 1989. – 192 с.
2. Валеев И. И., Фалилеева М. В. *Представление четырёхугольников в школьном курсе планиметрии* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2014. – Т. 50. – С. 186.
3. Подходова Н. С. *Реализация ФГОС ОО: новые решения в*

обучении математике // Мин-во обр. и науки РФ, Рос. гос. пед. ун-т им. А.И. Герцена, НИИ общ. образования. – Санкт-Петербург; Архангельск: Кира, 2014. – С. 255.

С. В. Ванягина

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Нижекамский химико-технологический институт,
wasilisk.1995@mail.ru*

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СОСУДА

Пусть заполненный водой цилиндрический сосуд высотой h и площадью дна f имеет в дне отверстие, площадь которого F . Требуется найти время T истечения воды через отверстие.

Решение сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$-Fdx = f\sqrt{2gx}dt,$$

где x – уровень жидкости в момент времени t . В результате получаем

$$-\frac{F}{f}\sqrt{\frac{2x}{g}} + c = t,$$

где константа $c = \frac{F}{f}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ находится из условия $x = h$ при $t = 0$. Наконец, при $x = 0$ получаем значение искомого времени

$$T = -\frac{F}{f}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев К. К. *Составление и решение дифференциальных уравнений*. – Минск: „Вышэйшая школа“, 1973. – 560 с.

Е. М. Вечтомов

*Вятский государственный гуманитарный университет,
vecht@mail.ru*

**ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ АЛГЕБРА:
ПОЛУКОЛЬЦА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ**

Функциональная алгебра представляет собой раздел современной математики, находящийся на стыке абстрактной алгебры, общей топологии, топологической алгебры и функционального анализа и имеющий два основных направления исследований: алгебры непрерывных функций, ассоциированные с топологическими пространствами; функциональные представления и характеристики абстрактных алгебраических структур [1–3].

В лекции мы затронем первое направление, точнее, тему полуколец $C(X, S)$ всех непрерывных функций на топологических пространствах X со значениями в топологическом (или топологизированном) полукольце S с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций.

В качестве S выступали: (топологическое) поле R действительных чисел, полуполе с нулем $R^+ = [0, \infty)$, полуполе $P = (0, \infty)$, полукольца $[0, 1]$ и $(0, \infty]$, (топологизированное) полукольцо $[0, \infty]$ и др.

Теория полуколец $C(X, R^+)$ и полуколец $C(X, P)$ изложена в [5], причем R^+ и P брались как с обычным сложением, так и с тах-сложением. Полукольца $C(X, [0, 1])$ с тах-сложением рассматривались в [4, глава 3]. Изучение полуколец непрерывных числовых функций служит продолжением и развитием классической теории колец $C(X, R)$, начало которой в середине XX века положили М. Stone, И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров, Е. Hewitt, Л. Gillman, М. Henriksen.

Программа исследования полуколец $C(X, S)$ включает в себя изучение структурных алгебраических свойств, идеалов, конгруэнций и подалгебр, их решеток, гомоморфизмов и двойственностей. При разных полукольцах значений S при изучении полуколец $C(X, S)$ выявляется как определенная общность (скажем, для R , R^+ и P), так и своя специфика (в случае $[0, 1]$ и прочих). В последнее время автор и Н. В. Шалагина исследовали полукольца $C(X, (0, \infty])$ и частичные полукольца $C(X, [0, \infty])$, теории которых существенно отличаются друг от друга и от классов полуколец непрерывных числовых функций.

В лекции предполагается сделать краткий исторический обзор по данной тематике, осветить общие и специальные алгебраические и функционально-топологические свойства указанных видов полуколец непрерывных функций. Будут представлены новые результаты о полукольцах непрерывных функций и сформулированы проблемы для дальнейшего их изучения.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки РФ «Функциональная алгебра и полукольца» (проект № 1.1375.2014/К).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вечтомов Е. М. *Полукольца и пучки. Обзор результатов исследований за 2008–2012 годы* // Вестник ВятГГУ. – 2013. – № 1(1). – С. 185–193.
2. Вечтомов Е. М. *К теории полуколец непрерывных функций* // Матер. XXI Междун. конф. «Математика. Образование». – Чебоксары: ЧГУ, 2013. – С. 19–34.
3. Вечтомов Е. М., Варанкина В. И. *Развитие функциональной алгебры в Вятском государственном гуманитарном университете* // Вестник ВятГГУ. – 2015. – № 5. – С. 137–145.

4. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В. *Элементы теории полукольца: монография*. – Киров: ООО “Радуга-ПРЕСС”, 2012. – 228 с.

5. Вечтомов Е. М., Сидоров В. В., Чупраков Д. В. *Полукольца непрерывных функций: монография*. – Киров: ООО “Радуга-ПРЕСС”, 2011. – 312 с.

Н. Ф. Габсаликова, Д. В. Бережной

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
n.gabsalikova@yandex.ru*

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СЫПУЧИХ ГРУНТОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЧАСТИЦ

Развитие вычислительной техники позволило вернуться к проблеме описания сред на микроуровне. В последние время все чаще стал использоваться метод частиц. Он заключается в том, что тело представляется как совокупность взаимодействующих частиц. В качестве таких частиц выступают атомы, молекулы и материальные точки. Количественная сложность компьютерной модели позволяет получать качественно новые результаты.

Для ускорения расчета потенциал взаимодействия обычно обрезается на некотором заданном расстоянии, то есть считается, что взаимодействие между частицами пренебрежимо мало и оно не учитывается в расчетах. Поэтому для расчетов, производимых в данной работе, пространство разбивается на кубические ячейки и для частиц, находящихся в некоторой ячейке, рассматривается взаимодействие только с частицами из пограничных с ней ячеек. Таким образом, удается добиться, что число операций оказывается пропорциональным числу

частиц. Вся область пространства разделяется между процессорами, на каждом шаге интегрирования процессор проводит вычисление внутри отведенной ему области с захватом граничных ячеек из соседних областей, а затем происходит обмен информацией о частицах, находящихся в пограничных ячейках.

Используемый в работе потенциал Леннарда-Джонса является двухпараметрическим, поэтому он имеет очень ограниченные возможности для вариации макроскопических параметров моделируемого им материала. Фактически, он позволяет удовлетворить значению только одного макроскопического параметра – это, например, модуль упругости или предел прочности в статике, скорость распространения продольных волн в динамике. Отношение между указанными параметрами остается неизменным. С другой стороны, данный потенциал достаточно точно описывает силы взаимодействия Ван-дер-Ваальса, играющие важную роль в твердых телах. Потенциал Леннарда-Джонса широко применяется как классический модельный потенциал, особенно в работах, в которых основной задачей является исследование общих физических закономерностей, а не получение точных количественных результатов.

В работе был реализован метод частиц, позволяющий исследовать взаимодействие некоторой системы материальных точек, находящихся в потенциальном поле. Для описания движения совокупности материальных точек использовалась система уравнений движения. Ее интегрирование проводилось при помощи метода Верле. Были рассмотрены потенциалы взаимодействия с указанием их основных свойств. При составлении уравнений движения предусматривалась возможность движения материальных частиц с учетом диссипации. Кроме то-

го, можно было исследовать поведение материальных точек, находящихся в поле силы тяжести. Был решен ряд модельных задач, при решении которых применялся потенциал Леннарда-Джонса. Полученные результаты были проанализированы.

Издание тезисов доклада осуществлено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научных проектов № 15-41-02555, № 15-07-05380.

А. Р. Гайнуллина

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
GaynullinaAlina@gmail.com*

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОММУТАТИВНЫХ ОПЕРАД

Коммутативные операды были введены и исследованы в [1]. В [2] было показано, как можно использовать операды такого типа в криптографии с открытым ключом. Поэтому является актуальным вопрос о нахождении новых коммутативных операд, пригодных для приложений. В данной заметке описывается класс операд (и алгебры над операдами из этого класса), внутри которого, возможно, есть подходящие для приложений объекты. Один частный пример был анонсирован в [3].

Пусть $G_{(+)}$ — решеточно упорядоченная группа. Сконструируем \mathbb{Z}_2 -градуированную группу $G = G_{(+)} \cup G_{(-)}$, полагая $G_{(-)} = G_{(+)}$ как множество, $G_{(-)} < G_{(+)}$, и операция умножения строится исходя из определения \mathbb{Z}_2 -градуировки.

Пусть $\bar{G} = G \cup \{0\}$, $G_{(-)} < 0 < G_{(+)}$, умножение на 0 определяется очевидным образом. Положим $G^\blacktriangleright(n) = \{\bar{G}^n | n = 1, 2, \dots\}$. На $G^\blacktriangleright = \{G^\blacktriangleright(n) | n = 1, 2, \dots\}$ определена структура симметрической операды. Определим подопераду

$C^{\max} \subset G^\blacktriangleright$ следующим образом: $C^{\max}(n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in G^\blacktriangleright(n) \mid \max |x_i| = 1\}$ и аналогично определяется подоперада $C^{\min} \subset G^\blacktriangleright$. Пусть $G_0 \subset G_{(+)}$ — подполугруппа с единицей, порождающая группу $G_{(+)}$, такая, что $G_0 = \{x \in G_{(+)} \mid x \leq 1\}$ для C^{\max} , и $G_0 = \{x \in G_{(+)} \mid x \geq 1\}$ для C^{\min} . Положим $M_1 = \text{Alg}(G^\blacktriangleright)$ — многообразие алгебр над операдой G^\blacktriangleright . Построим многообразие M_2 .

Операции многообразия M_2 :

1. Две унарные операции вида $a \mapsto (\varepsilon) \cdot a$, где $\varepsilon = \pm 1$;
2. Для любого $\alpha \in G_0 \cup \{0\}$ определены бинарные операции $a_1 \overset{\alpha}{\circ} a_2$ и $a_1 \underset{\alpha}{\circ} a_2$, причем $a_1 \overset{1}{\circ} a_2 = a_1 \underset{1}{\circ} a_2 = a_1 \circ a_2$.

Тождества многообразия M_2 :

$$\begin{aligned} (1) \cdot a &= a; & a_1 \overset{\alpha}{\circ} (a_2 \underset{\beta}{\circ} a_3) &= (a_1 \overset{\alpha}{\circ} a_2) \underset{\beta}{\circ} a_3; \\ (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) \cdot a &= (\varepsilon_1) \cdot ((\varepsilon_2) \cdot a); & (\varepsilon)(a_1 \overset{\alpha}{\circ} a_2) &= ((\varepsilon) \cdot a_1) \overset{\alpha}{\circ} ((\varepsilon) \cdot a_2); \\ a_1 \overset{\alpha}{\circ} a_2 &= a_2 \underset{\alpha}{\circ} a_1; & (a_1 \underset{\beta}{\circ} a_2) \overset{\alpha}{\circ} a_3 &= a_1 \overset{\alpha}{\circ} (a_2 \overset{\alpha \cdot \beta}{\circ} a_3). \end{aligned}$$

Теорема. *Многообразия M_1 и M_2 рационально эквивалентны.*

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (проект 1.2045.2014).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тронин С. Н. *Операды и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами* // Сиб. матем. журн. — 2006. — Т. 47. — № 3. — С. 670 — 694.
2. Tronin S. N., Gaynullina A. R. *Some applications of the operad theory in public-key cryptography* // Матер. конф. “Алгебра и математическая логика: теория и приложения”. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2014. — С. 146–147.

3. Гайнуллини А. Р. *Многообразии алгебр над операдой полых кубов* // Мат. XIII Межд. конф. “Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения”. – Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2015. – С. 110–112.

Л. Р. Гайнулина, Д. В. Бережной

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
leysan5684@yandex.ru*

РАСЧЕТ УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГОЕМКОСТИ СИСТЕМЫ МАХОВИК-КОЖУХ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

В связи с развитием современных технологий в промышленности и на транспорте появляется множество мобильных устройств, поэтому большое значение приобретает проблема аккумуляции энергии. Одной из относительно простых и, в то же время, крайне перспективных является технология накопления энергии при помощи маховика. Маховик сохраняет переданную ему энергию в виде кинетической энергии вращения. При достаточно быстром вращении он может накапливать кинетическую энергию, которую легко не только наращивать, но и использовать, превратив маховик в электромеханический аккумулятор.

Применение потенциальной связи в режиме взаимного отталкивания позволяет разгрузить наружные слои маховика за счет передачи нагрузки на корпус и таким образом увеличить скорость вращения маховика и запасаемую энергию. Также за счет включения в работу корпуса кинетического накопителя энергии, находящегося в сжатом состоянии из-за разности

внутреннего и внешнего атмосферного давления, можно уменьшить его вес за счет снятия нагрузки на величину, создаваемую потенциальным полем, и изменить знак нагрузки с сжатия на растяжение.

Расчет маховиков по удельной кинетической энергоемкости определяется удельной прочностью материала маховика и коэффициентом формы. При оценке упругой потенциальной энергии деформации используется такой параметр, как отношение временного сопротивления материала на разрыв к его модулю Юнга. Этот фактор дает более широкие возможности при конструировании маховичных накопителей энергии, т. к. в ряде случаев накопленная потенциальная энергия деформации может в разы превышать кинетическую энергию вращения, а влияние формы маховика на его энергоемкость может быть совершенно противоположным. Кроме того, если маховик будет накапливать больше потенциальной энергии деформации (чем кинетической), можно будет снизить скорость вращения и ее ускорение, что благоприятно скажется на безопасности эксплуатации и сроке службы конструкции и позволит отказаться от герметичного кожуха, создающего вакуум в зоне вращения маховика.

В работе излагаются основы методики численного исследования удельной энергоемкости кинетических накопителей энергии, реализованных по схеме маховик-кожух. В дополнение к традиционной оценке энергоемкости по кинетической энергии маховика добавляется оценка удельной энергоемкости системы маховик-кожух, находящейся в потенциальном поле. Анализируются возможности использования различных конструкционных материалов при изготовлении собственно маховика и кожуха. Отмечается, что наличие потенциального поля

в системе маховик-кожух позволяет повысить удельную энергоемкость кинетического накопителя энергии.

Издание тезисов доклада осуществлено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научных проектов № 15-41-02555, № 15-01-05686.

О. В. Гермидер, В. Н. Попов

*Северный (Арктический) федеральный
университет им. М.В. Ломоносова,
v.porov@narfu.ru, o.germider@narfu.ru*

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В РАМКАХ КИНЕТИЧЕСКОГО ПОДХОДА
ПОТОКА ТЕПЛА В ДЛИННОМ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ КАНАЛЕ**

Рассматривается задача о переносе тепла в эллиптическом канале при наличии параллельного его оси градиента температуры. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, использовано уравнение Вильямса, записанное в декартовой системе координат [1], а в качестве граничного условия на стенке канала – модель диффузного отражения. Отклонение состояния газа от равновесного предполагается малым, что позволяет получить решение задачи в линеаризованном виде. С целью нахождения линейной поправки к локально-равновесной функции распределения задача сведена к решению линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$c_{\perp} \cos \varphi \frac{\partial Z}{\partial x} + c_{\perp} \sin \varphi \frac{\partial Z}{\partial y} + Z(x, y, c_{\perp}, \varphi) + 1 = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$b^2 x_0 \cos \varphi + a^2 y_0 \sin \varphi \leq 0, \quad (2)$$

где (c_{\perp}, φ) – полярные координаты вектора скоростей молекул газа в пространстве скоростей, a и b – полуоси эллипса, (x_0, y_0) – координаты точки отражения молекулы газа от поверхности эллиптического канала в плоскости, перпендикулярной его оси.

С применением метода характеристик построено аналитическое решение уравнения (1) с граничными условиями (2):

$$Z(x, y, c_{\perp}, \varphi) = \exp \left(-\frac{x}{c_{\perp} \cos \varphi} - \frac{a^2(y - x \operatorname{tg} \varphi)}{c_{\perp} \cos \varphi (a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2)} \right) \times \\ \times \exp \left(\frac{\pm ab \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 - (y - x \operatorname{tg} \varphi)^2}}{c_{\perp} \cos \varphi (a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2)} \right) - 1. \quad (3)$$

Здесь верхний знак “+” имеет место при $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, а нижний знак “–” – в случае, если $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Согласно (3) и исходя из статистического смысла функции распределения молекул газа по координатам и скоростям, построен профиль вектора потока тепла в канале и вычислен поток тепла через поперечное сечение канала. Показано, что в случае, когда одна из полуосей канала много меньше другой, полученные в работе результаты переходят в аналогичные результаты для каналов с бесконечными параллельными стенками [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках Государственного задания “Создание вычислительной инфраструктуры для решения наукоемких прикладных задач” (проект № 3628).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Латышев А. В., Юшканов А. А. *Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения: монография.* – М.: МГОУ, 2004. – 271 с.

2. Гермидер О. В., Попов В. Н., Юшканов А. А. *Вычисление потока тепла в длинном канале постоянного прямоугольного поперечного сечения // Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, наноэлектронных приборов и экологических технологий: Сб. матер. межд. конф.* – Москва: “Диона”, 2015. – С. 53.

Д. Х. Гиниятова

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
normaliti@gmail.com*

**ОЦЕНКА ГРАДИЕНТА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
РАДИУСА И ШТРАФНЫЕ МНОЖИТЕЛИ
ДЛЯ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА**

Пусть Ω и Π – две области в \mathbb{C} , снабженные метрикой Пуанкаре. Через $A(\Omega, \Pi)$ обозначим класс функций f , локально голоморфных или мероморфных в Ω и таких что $f(\Omega) \subset \Pi$. Через $\lambda_{\Omega}(z)$ обозначим коэффициент гиперболической метрики области Ω в точке $z \in \Omega$ и рассмотрим константу C_n , представляющую собой наименьшее возможное число в неравенстве

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \leq C_n(\Omega, \Pi) \frac{(\lambda_{\Omega}(z))^n}{\lambda_{\Pi}(w)}, \quad w = f(z).$$

Константу C_n принято называть штрафным множителем, см. [1], [2].

Большинство результатов, связанных с нахождением константы C_n , относятся к односвязным областям. Поэтому изучение данной тематики для произвольных конечносвязных областей представляет особый интерес. В [3] доказана

Теорема. *Для всех гиперболических областей $\Omega, \Pi \subset \mathbb{C}$*

$$C_2(\Omega, \Pi) = \frac{1}{2} \left(\sup_{z \in \Omega} \left| \nabla \frac{1}{\lambda_\Omega(z)} \right| + \sup_{w \in \Pi} \left| \nabla \frac{1}{\lambda_\Pi(w)} \right| \right)$$

Известно также [3], что если A – концентрическое кольцо с модулем $M(A)$ и $\gamma(\Omega) = \sup_{z \in \Omega} |1/(\lambda_\Omega(z))|$, тогда

$$\frac{(\gamma(A))^2}{16} = \frac{1}{4} + (M(A))^2 \quad (1)$$

В настоящей работе получен аналог формулы (1) для эксцентрического кольца.

Рассмотрим эксцентрическое кольцо Ω , ограниченное окружностями $|z| = 1$ и $|z - z_0| = \rho \in (0, 1)$, $z_0 = (a + ib)/2 \in (0, 1)$, $\rho = (b - a)/2 < 1$. Через $M = M(\Omega)$ обозначим модуль Ω , а через $t = (a + q)/(1 + qa) = (b - q)/(1 - bq)$, $q = e^{-2\pi M}$ – смещение, тогда справедлива следующая

Теорема 1. *Для эксцентрического кольца Ω с модулем M и со смещением t*

$$\gamma(\Omega) \leq \sqrt{4 + 16M^2} + 4t.$$

Оценка точна, причем равенство достигается при $t = 0$.

Рассмотрим предельный случай эксцентрического кольца – круг с произвольно выколотой точкой. Нами доказана

Теорема 2. *Пусть D_a – круг с произвольно выколотой точкой a . Тогда*

$$\gamma(D_a) \leq 2 + 4|a|.$$

Оценка точна, и равенство достигается когда a совпадает с центром круга.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Schwarz-Pick type inequalities*. – Boston-Berlin-Bern: Birkhäuser, 2009. – 156 p.
2. Гиниятова Д. Х. Обобщение теорем Саца и Рушевея о точных оценках производных аналитических функций // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 12. – С. 84–89.
3. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Punishing factors for finitely connected domains* // Monatshefte f. Math. – 2006. – V. 147. – P. 103–115.

Е. Г. Гоник, М. В. Петров, Т. Г. Федорова

*Чувашский государственный
университет им. И.Н. Ульянова,
tanusha2884@mail.ru*

МЕТОДЫ ИСПЫТАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК, ЗАПОЛНЕННЫХ СЫПУЧИМ МАТЕРИАЛОМ, ПРИ ИЗГИБЕ

Транспортировка и хранение сыпучих материалов осуществляется автоцистернами, цистернами, контейнерами. Все эти емкости имеют форму цилиндрических оболочек. Обеспечение устойчивости данных оболочек во время эксплуатации является одной из ключевых задач [1].

Для исследований поведения оболочек при изгибе и чистом изгибе было разработано несколько методов испытаний. Для осуществления этих методов в лаборатории было собрано несколько специальных установок. Образцы подбирались

из условий геометрического и физического подобия из алюминиевого сплава 3004 или его модификации – алюминиевого сплава 3104 – в состоянии Н19 со следующими параметрами подобия. Отношение радиуса испытываемой оболочки к радиусу изготавливаемых на заводе цистерн равно 0,02, и отношение соответствующих толщин испытываемой оболочки и изготавливаемой цистерны равно 0,02.

Экспериментальная установка состояла из модельного образца, нагружающего устройства, измерительных приборов, измерителя деформаций, тензорезисторов. С помощью нагружающего устройства была приложена нагрузка на образец. В качестве измерительных приборов использовались индикаторы и электронный штангенциркуль. Деформации в образце замерялись тензорезисторами, включенными по полумостовой схеме к измерителю деформаций, наклеенных в продольном и поперечном направлениях в верхней и нижней точках в зоне потери устойчивости образца.

Для испытаний на поперечный изгиб образцы жестко закреплялись одним концом, другой конец, где прикладывалась вертикальная нагрузка, оставался свободным.

Для испытаний на чистый изгиб образцы устанавливались на две шарнирные опоры с консолями по концам. Вертикальные сосредоточенные нагрузки прикладывались на концах [2].

Образцы применялись пустыми и с наполнителем. В качестве наполнителя использовался железный порошок ПЖ-5. Эксперименты выполнялись в следующей последовательности.

- 1) Проводилось тщательное обследование образцов на наличие геометрических несовершенств, измерялись их размеры.
- 2) Образцы устанавливались в установку для испытаний.
- 3) Настраивались приборы для измерений.
- 4) Производилось

предварительное нагружение для проверки работы приборов. 5) Равными ступенями нагружался образец до потери устойчивости. При увеличении вертикальной нагрузки, замерялись показания индикаторов и тензорезисторов, диаметры оболочки. Нагрузка доводилась до критической, при которой происходит потеря устойчивости оболочки. 6) Для более точного определения момента потери устойчивости в зону потери устойчивости с противоположной стороны этой зоны устанавливался микрометрический винт. Конечная деформированная форма образца фиксировалась с помощью фотоаппарата. Гофры образовывались в сжатой зоне. 7) Выполнялась статистическая обработка результатов экспериментов. По значениям приложенных сил и перемещениям строились графики их зависимости. Устойчивость терялась при упругих деформациях образцов. Данная методика испытаний на устойчивость тонкостенных оболочек применяется на ЗАО «Чебоксарское предприятие «Сеспель»».

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Федорова Т. Г. *Экспериментально-теоретическое исследование упругопластического деформирования, потери устойчивости и закритического поведения цилиндрических оболочек с сыпучим наполнителем при изгибе* // Дис.....канд. тех. наук. Н. Новгород, 2013. – 137 с.
2. Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г. *Экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных оболочек при чистом изгибе* // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева: Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – Вып. 2 (24). – С. 119–125.

В. А. Гущина

*Поволжская государственная
социально-гуманитарная академия,
violetta.novikova.1991@mail.ru*

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА А. А. ДЕЗИНА

Речь идет об уравнении

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} y)|y|^n U_{xx} + U_{yy} - b^2(\operatorname{sgn} y)|y|^n U = 0, \quad (1)$$

в области $D = \{(x, y) | 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β, l, b, n – заданные положительные постоянные.

Задача Дезина. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \quad (2)$$

$$Lu = 0; \quad (3)$$

$$u(0, y) - u(l, y) = h_1(y),$$

$$u_x(0, y) - u_x(l, y) = h_2(y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (5)$$

$$u_y(x, -\alpha) - \lambda u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (6)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $F(x, y)$, $h_1(y)$ и $h_2(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, λ – заданный действительный параметр.

А. А. Дезин в своих работах [1, 2] отметил, что метод поиска разрешимых расширений для дифференциальных операторов может быть адаптирован к оператору L Лаврентьева-Бицадзе с условиями периодичности по переменной x . В работах З. А. Нахушевой [3], [4, с. 143–153] задача (2)–(6) изучена,

когда $\alpha = l$, $h_1(y) = h_2(y) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$, $F(x, y) = f(x, y) \cdot H(y)$, где $H(y)$ – функция Хевисайда, $\lambda \geq 0$. Показано, что при $\lambda < 0$ однородная задача (когда $f(x, y) \equiv 0$) имеет нетривиальные решения.

Данная работа является продолжением исследований авторов [5], где задача (2) – (6) была изучена при $F_1(x, y) = F_2(x, y) \equiv 0$, $h_1(y) = h_2(y) \equiv 0$. Здесь для общего случая сформулированной задачи установлен критерий существования единственного её решения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Дезин А. А. *On the solvable extensions of partial differential operators* // Outlines of the Joint Soviet-American Symposium on Partial Differential Equations. – Novosibirsk, 1963. – С. 65–66.
2. Дезин А. А. *Операторы с первой производной по времени и нелокальные граничные условия* // Изв. АН СССР. – 1967. – Т. 31. – № 1. – С. 61–86.
3. Нахушева З. А. *Об одной нелокальной задаче А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45. – № 8. – С. 1199–2003.
4. Нахушева З. А. *Нелокальные краевые задачи для основных и смешанных типов дифференциальных уравнений*. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2011.
5. Сабитов К. Б., Новикова В. А. *Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* // Изв. вузов. Матем. – (принята в печать).

А. И. Давлетшин

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт механики и машиностроения Казанского
научного центра Российской академии наук,
anas.davletshin@gmail.com*

УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ

Для изучения гидродинамического взаимодействия пузырьков в жидкости широко применяются аналитико-численные методы, в которых разрешающие соотношения представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [1, 2]. При этом, если рассматривается пространственное взаимодействие, то в силу сложности задачи пузырьки, как правило, предполагаются сферическими. Однако, в результате взаимодействия поверхности пузырьков могут деформироваться. При деформировании каких-либо пузырьков в группе свойства всей группы могут существенно измениться. В таких случаях деформацию пузырьков следует учитывать, иначе полученные предсказания их поведения могут оказаться далекими от действительности.

В настоящей работе предлагаются уравнения пространственного гидродинамического взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учётом их малых деформаций. При выводе уравнений предполагается, что пузырьки находятся в пучности интенсивной стоячей волны с давлением, изменяющимся по гармоническому закону. Колебания давления жидкости вызывают радиальные пульсации пузырьков, что, в свою очередь, приводит к их взаимодействию. В результате взаимо-

действия пузырьки в ходе расширения-сжатия могут перемещаться в пространстве, а их поверхности испытывать малые деформации. Газ в пузырьках принимается идеальным гомобарическим, его давление – изменяющимся по адиабатическому закону. Считается, что эффекты вязкости и сжимаемости жидкости малы. Поэтому они учитываются с помощью поправок к уравнениям взаимодействия пузырьков, выведенным в предположении, что жидкость является идеальной несжимаемой. Вывод уравнений взаимодействия осуществляется методом сферических функций с использованием интеграла Коши-Лагранжа, кинематических и динамических граничных условий на поверхности пузырьков.

Полученные уравнения взаимодействия пузырьков имеют первый порядок точности относительно A/R и четвертый порядок точности (что на порядок выше, чем известные в литературе) относительно R/D , где R – характерный радиус пузырьков, A – амплитуда характерного отклонения их поверхности от сферической в виде сферических гармоник, D – характерное расстояние между пузырьками.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (проекта № МК-2244.2014.1).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Doinikov A. A. *Mathematical model for collective bubble dynamics in strong ultrasound fields* // J. Acoust. Soc. Am. – 2004. – V. 116. – No 2. – P. 821–827.
2. Давлетшин А. И. *Моделирование гидродинамического взаимодействия сферических газовых пузырьков в жидкости* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. ун.-та, 2014. – Т. 78. – С. 62–63.

Д. Н. Даутова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
dautovadn@gmail.com

УТОЧНЕНИЕ АСИМПТОТИКИ ИСКАЖЕНИЯ МОДУЛЯ РОМБОВИДНОЙ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Конформный модуль — важная числовая характеристика двусвязной области в комплексной плоскости. Среди свойств модуля особо можно отметить инвариантность при конформных отображениях и квазиинвариантность при квазиконформных отображениях.

Данная работа связана с задачей М. Vuorinen (см., напр., [1]) — исследовать, как изменяется модуль $m(D)$ двусвязной плоской области D под действием квазиконформного отображения f_M , являющегося растяжением области вдоль оси абсцисс для достаточно большого коэффициента растяжения M . Мы рассматриваем области вида $\tilde{G}_M = \{(x, y) \mid 1 < |x/M| + |y| < k\}$, где $k > 1$ фиксировано. Требуется исследовать асимптотику модуля $m(\tilde{G}_M)$ при $M \rightarrow \infty$.

Ранее в [2] нами было получено, что модуль \tilde{G}_M , эквивалентен величине $\frac{k-1}{4M}$, $M \rightarrow \infty$. В данной работе мы уточняем этот результат и устанавливаем оценку для следующего члена асимптотики (теорема 2).

Для уточнения полученной эквивалентности сначала получим двустороннюю оценку модуля $m(\tilde{G}_M)$, исходя из геометрии данной области и свойств конформного модуля. Применение определения модуля четырехсторонника как экстремальной длины семейства кривых, соединяющих противоположные стороны, дает нам неравенство $m(\Pi) \leq m(G_M) \leq m(P)$, где

G_M – трапеция, являющаяся четвертой частью области \tilde{G}_M , P – прямоугольник, вписанный в G_M , а Π – четырехсторонник, являющийся полуполосой, содержащей G_M , с отмеченными четырьмя точками на границе.

С применением принципа симметрии мы можем выразить модуль \tilde{G}_M через модуль четырехсторонника G_M и установить следующий результат.

Теорема 1. *Для модуля двусвязной области \tilde{G}_M справедливо неравенство*

$$\frac{K(\mu)}{2K(\mu')} \leq m(\tilde{G}_M) \leq \frac{(k-1)M}{4(M^2+1)},$$

где $\mu = \exp\left(-2\pi \frac{M^2+k}{(k-1)M}\right)$, $\mu^2 + \mu'^2 = 1$, $K(\mu), K(\mu')$ – полные эллиптические интегралы первого рода.

Как следствие, получаем оценку для модуля \tilde{G}_M .

Теорема 2. *Имеет место неравенство:*

$$\left| m(\tilde{G}_M) - \frac{k-1}{4M} \right| \leq \frac{C(k)}{M^2} + O\left(\frac{1}{M^3}\right), \quad M \rightarrow \infty,$$

где $C(k) = \frac{\ln 16}{8\pi}(k-1)^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nasyrov S. R. *Riemann-Schwarz reflection principle and asymptotics of modules of rectangular frames* // Computational Methods and Functional Theory. – 2015. – V. 1. – P. 59–74.
2. Даутова Д. Н. *Асимптотика модулей ромбовидных окон* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва. – 2013. – Т. 47. – С. 39–40.

**А. В. Демарева, Ю. И. Кибец, Т. Г. Федорова,
Д. В. Шошин, Ю. А. Шушкина**

Нижегородский государственный университет

им. Н.И. Лобачевского,

kibec@tech.unn.ru

ВЕРИФИКАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ MHS ЗАПОЛНИТЕЛЯ

Рассматривается упругопластическое деформирование MHS (Metal Hollow Spheres) заполнителя – пористого материала, получаемого путем соединения однородных металлических полых сфер [1]. Деформирование MHS заполнителя описывается с позиций механики сплошных сред с применением текущей лагранжевой формулировки. Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей. В качестве уравнений состояния используются соотношения теории течения с кинематическим и изотропным упрочнением. Для снижения трудоемкости расчетов применяется двухуровневая модель динамики MHS заполнителя [2, 3]. На нижнем уровне этой модели на основании анализа деформирования представительных объемов, с учетом их структуры, определяются приведенные характеристики среды верхнего уровня, которая предполагается континуально однородной, физически нелинейной средой, свойства которой зависят от вида напряженно-деформированного состояния.

Решение задачи при заданных начальных и краевых условиях основано на методе конечных элементов [4] и явной конечно-разностной схеме интегрирование по времени типа “крест”. Изложенная методика конечно-элементного реше-

ния трехмерных задач нелинейного деформирования МНС заполнителя реализована в рамках программного комплекса “Динамика-3” [5].

Для верификации вычислительной модели МНС заполнителя [2, 3] проведены расчеты деформирования сферической оболочки и их набора при квазистатическом сжатии и динамическом ударном нагружении.

Рассмотрена осесимметричная задача потери устойчивости и закритического поведения титановой сферической оболочки при ее сжатии между двумя недеформируемыми плитами, сближающимися с постоянной скоростью 1 м/с. По результатам численного решения задачи построена зависимость контактной силы от перемещения плит, на основании которой были определены диаграмма деформирования и параметры математической модели МНС заполнителя [2, 3].

С применением полученных данных решена задача о падении плиты на набор сферических оболочек, расположенных на неподвижном основании. Решение задачи осуществлялось в двух вариантах с применением: а) конечно-элементной дискретизации сферических оболочек и б) вычислительной модели МНС заполнителя [2, 3]. Как показало сопоставление результатов расчетов вычислительная модель [2, 3] позволяет с приемлемой точностью определять интегральные параметры деформирования МНС заполнителя (контактные силы, смещения, скорости смещения) и оценивать его демпфирующие свойства.

Работа выполнена в рамках реализации гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (НШ - 593.2014.8), а также при поддержке РФФИ (проект № 14-08-00656-а).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Caty O., Maire E., R Bertin P, Dejaeger R., Bouchet R. *Experimental determination of the macroscopic fatigue properties of metal hollow sphere structures* // Materials Letters. – 2009. – № 63. – P. 1131–1134.

2. Демарева А. В., Кибец А. И., Кибец Ю. И., Федорова Т. Г., Фролова И. А., Шошин Д. В. *Вычислительная модель нелинейного деформирования MHS заполнителя* // Матер. XIX Междуна. конф. по вычислит. механике и совр. прикл. прогр. системам (ВМСППС'2015) 23-31 мая 2015 г. – Алушта, Крым. М.: Изд-во МАИ, 2015. – С. 253–255.

3. Демарева А. В., Иванов В. А., Жестков М. Н., Кибец А. И., Кибец Ю. И., Шошин Д. В. *Численное решение динамических задач деформирования композитных оболочек с пористым наполнителем* // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2014. – Вып. 76(1). – С. 46–54.

4. Баженов В. Г., Артемьева А. А., Гоник Е. Г., Кибец А. И., Федорова Т. Г., Шошин Д. В. *Конечно-элементное моделирование упругопластического выпучивания незамкнутых сферических оболочек при сжатии* // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2012. – Вып. 74. – С. 84–91.

5. Вычислительный комплекс “Динамика-3”. Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности. Аттестационный паспорт программного средства. Регистрационный паспорт аттестации ПС № 325 от 18.04.2013.

А. Ю. Долгоносова, Н. И. Жукова

Нижегородский архитектурно-строительный университет,

Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики,”

annadolgonosova@gmail.com, nzhukova@hse.ru

ГРАФИКИ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ СЛОЕНИЙ

Псевдоримановы слоения (M, \mathcal{F}) характеризуются существованием трансверсально проектируемой псевдоримановой метрики на многообразии M . Далее псевдоримановы слоения на псевдоримановых многообразиях рассматриваются с такой метрикой. Нами доказан следующий критерий псевдоримановости слоений.

Теорема. Пусть (M, \mathcal{F}) — слоение коразмерности q на n -мерном псевдоримановом многообразии (M, g) , метрика на слоях которого не вырождается. Тогда для того чтобы слоение (M, \mathcal{F}) было псевдоримановым, необходимо и достаточно, чтобы геодезическая, ортогональная этому слоению в одной точке, оставалась ортогональной ему в каждой своей точке.

Из этой теоремы вытекает аналогичный результат Б. Рейнхарта для римановых слоений на римановых многообразиях, подробное доказательство которого содержится в известной монографии П. Молино „Римановы слоения“. При этом существенно используется свойство геодезических линий риманова многообразия быть локально кратчайшими, которое не имеет аналога для псевдоримановых многообразий. Нами применяется другой подход и результаты работы А. Д. Льюиса о распределениях на многообразиях линейной связности.

Ш. Эресманом введено понятие группоида голономии слоения, позднее Х. Винкелькемпером была предложена эквивалентную конструкцию, названная им *графиком слоения*.

График $G(\mathcal{F})$ слоения (M, \mathcal{F}) коразмерности q на n -мерном многообразии M представляет собой, вообще говоря, нехаусдорфово $(n + q)$ -мерное многообразие и содержит всю информацию о слоении (M, \mathcal{F}) и его группах голономии. Определены две канонические проекции $p_1 : G(\mathcal{F}) \rightarrow M$ и $p_2 : G(\mathcal{F}) \rightarrow M$, являющиеся субмерсиями.

Нами показано, что график $G(\mathcal{F})$ любого псевдориманова слоения (M, \mathcal{F}) является хаусдорфовым многообразием, на нем существует единственная псевдориманова метрика h , относительно которой индуцированное слоение

$$\mathbb{F} := \{\mathbb{L} = p_1^{-1}(L) \mid L \in \mathcal{F}\}$$

является псевдоримановым, а канонические проекции p_1 и p_2 — псевдоримановыми субмерсиями. При этом существенно используется сформулированная выше теорема. Доказано, что группы голономии слоев $L \in \mathcal{F}$ и $\mathbb{L} = p_1^{-1}(L) \in \mathbb{F}$ изоморфны. Установлено также, что каждый слой \mathbb{L} слоения \mathbb{F} , наделенный индуцированной метрикой, есть невырожденно приводимое псевдориманово многообразие, и исследована его структура.

Показано, что для полных псевдоримановых слоений (M, \mathcal{F}) канонические проекции p_1 и p_2 образуют локально тривиальные расслоения с общим стандартным слоем, и дано описание структуры их графиков и индуцированных на графиках слоений. Особое внимание уделено структуре графиков вполне геодезических псевдоримановых слоений.

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект № 138) в 2015 году.

А. С. Елгушова, З. З. Ризванов, Л. Р. Шакирова
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
aelgushova@yandex.ru, rizvanov.zemfir@mail.ru,
liliana008@mail.ru

ЛОБАЧЕВСКИЙ В XXI ВЕКЕ

1 декабря – день рождения выдающегося русского ученого Николая Ивановича Лобачевского, создателя неевклидовой геометрии, сыгравшего значительную роль в становлении Казанского университета. В течение 40 лет он преподавал в Казанском университете предметы физико-математического цикла, 19 лет руководил им в должности ректора, выполнял обязанности библиотекаря университета, председателя строительного комитета.

Известно, какой вклад внёс Лобачевский в развитие мировой науки. Кроме геометрии, он получил ряд ценных результатов и в других областях математики:

- а) в алгебре он независимо от Ж. Данделена разработал метод приближённого решения уравнений;
- б) в математическом анализе получил ряд тонких теорем о тригонометрических рядах, уточнил понятие непрерывной функции, дал признак сходимости рядов и др.;
- в) в разные годы он опубликовал несколько содержательных статей по алгебре, теории вероятностей, механике, физике, астрономии и проблемам образования.

Как много он сделал для становления и развития нашего университета! В разные годы он был:

- а) председателем Строительного комитета Казанского университета; руководил строительством зданий библиотеки, астрономической обсерватории, анатомического театра, клиники, университетской церкви;
- б) членом издательского комитета журнала “Казанский вестник”;
- в) библиотекарем Казанского университета;
- г) лично руководил спасением университетских зданий и имущества во время пожара в Казани, за что получил благодарность императора.

За период своего преподавания в Казанском университете он вел курсы по геометрии, тригонометрии, алгебре, анализу, теории вероятностей, механике, физике, астрономии и даже гидравлике, часто замещал отсутствующих преподавателей.

А как мы, потомки великого математика, чтим его память? Какова роль Лобачевского в современном обществе? И что мы, студенты, знаем о Лобачевском? Ответить на эти вопросы мы постараемся в нашей статье.

Какие объекты увековечивания памяти Лобачевского мы знаем? В 1896 году, через 40 лет со дня смерти Н.И. Лобачевского, перед зданием Казанского университета был установлен памятник великому математику, созданный русским скульптором Марией Диллон. 10 июня 1994 года в г. Козловка Чувашской республики открыли народный историко-краеведческий Дом-музей Н.И. Лобачевского.

Нам было интересно узнать, что знают школьники о Николае Ивановиче Лобачевском. Мы провели анкетирование в средних общеобразовательных школах Мамадышского района и города Кукмор, а также в Лицее им. Лобачевского при КФУ.

В анкету входили такие вопросы:

1. Кем был Лобачевский?
2. В чем состоит его главное открытие?
3. Слышали ли или читали ли вы о Лобачевском? Если да, то где вы впервые услышали о нем?

В результате было установлено, что бóльшая часть учащихся 9–11 классов знает кем был Лобачевский. Чаще всего встречаемый ответ – “математик”. Второй вопрос ввел в затруднение учащихся школ Мамадышского района и г. Кукмор. Только немногие написали, что его главное открытие – неевклидова геометрия; кто-то просто оставлял прочерк. У учащихся Лицея им. Лобачевского второй вопрос трудностей не вызвал. На третий вопрос были получены различные ответы. В сельских школах учащиеся отметили, что слышали о великом геометре в школе, читали в интернете, в учебниках. В Лицее им. Лобачевского добавили также, что ученому были посвящены классные часы и конференции.

В ходе исследования мы пришли к выводу, что для того чтобы имя Лобачевского стало узнаваемо для учащихся общеобразовательных школ, необходимо как можно чаще проводить просветительские конференции в память о великом математике. Учителям математики на уроках необходимо указывать на важность открытий, сделанных Лобачевским, а во время проведения недели математики в школах – проводить классные

часы с исторической справкой о биографии Лобачевского, ставить театрализованные сценки, показывать готовые видеоматериалы о великом математике.

Дальнейшее исследование проводилось среди студентов Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского федерального университета. Предметом исследования стал вопрос: насколько хорошо знакомы студенты с именем великого математика. Анкетирование проводилось среди студентов 1 курса и магистрантов педагогического отделения, студентов 4 курса, обучающихся по специальности “Математика и компьютерные науки”. Студентам 1 курса и магистрантам были предложены следующие вопросы:

1. Сколько лет Н. И. Лобачевский был на посту ректора?
2. Назовите имена учителей Н. И. Лобачевского?
3. Каков вклад Н. И. Лобачевского в развитие Казанского университета?
4. Хотели бы Вы посетить дом-музей Н. И. Лобачевского в г. Козловка?

Анкетирование для студентов 4 курса было разработано Л. Р. Шакировой, преподавателем курса истории математики. Список вопросов был обширный и требовал хорошей историко-математической подготовки. Анализ результатов показал, что сложнее всего 1 – 3-й вопросы дались студентам 1 курса. Выявились лишь остаточные школьные знания о великом математике, но зато на наше предложение посетить музей мы получили много положительных откликов. Это радует, значит, есть стремление узнать о Н.И. Лобачевском больше. Магистрантов

вопросы не смутили, большинство анкетированных смогли правильно ответить на поставленные вопросы.

Студентам 4 курса пришлось сложнее. Анкетирование состояло из 25 вопросов. Лишь единицы смогли ответить на 18 вопросов. На такие вопросы как: назовите научные труды Н. И. Лобачевского; чем, кроме науки, увлекался профессор; *назовите научные области, в которых находит применение геометрия Лобачевского* – ответили большинство. Однако вопросы: *в каком году Н.И. Лобачевский поступил в гимназию; назовите его учителей; назовите имена ученых Казанского университета – популяризаторов идей Лобачевского, назовите имена ученых, развивающих его идеи* и другие вызвали затруднения у студентов.

Для того чтобы студенты знали и гордились ученым, имя которого носит наш Институт, ощущали всецело его вклад в развитие Казанского университета и мировую математику, необходимо как можно больше студентов привлекать к участию в конференции, ежегодно организуемых в Казанском федеральном университете. А мы, в свою очередь, решили организовать поездку в Дом-музей Н. И. Лобачевского в г. Козловка Республики Чувашия, что позволит студентам окунуться в атмосферу того времени и узнать больше о жизни великого математика.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Васильев А. В. *Николай Иванович Лобачевский. 1792–1856.* – М.: Наука, 1992. – 229 с.
2. Лаптев Б. Л. *Н. И. Лобачевский и его геометрия.* – М.: Просвещение, 1976.
3. Сосов Е. Н., Фомин В. Е., Шакирова Л. Р., Шурыгин В. В., Шурыгин В. В. (мл.), Тарзимова Г. Д. *Николай Иванович Ло-*

бачевский: историко-биографический сборник. – Казань: Жиен, 2014. – 656 с.

4. Шакирова Л. Р. *Николай Иванович Лобачевский и Казанский университет.* – Казань: Казанский университет, 2013. – 20 с.

Е. О. Еремеева

Université Paris Dauphine IX,

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

maybejanee@gmail.com

**АДАПТАТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПОДАВЛЕНИЯ
“ШУМА” В ЦИФРОВОМ СИГНАЛЕ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ
АВТОРЕГРЕССИИ**

Современные методы обработки цифровых сигналов позволяют существенно улучшить и оптимизировать качество оцифровки архивных фонограмм, исправить недостатки при перенесении звука. Наиболее эффективными разработками в этой области являются адаптативные алгоритмы подавления шума (см. [5]). Цифровой сигнал представляется в виде суммы полезного сигнала и шума, который, в свою очередь, является совокупностью постоянных фоновых и импульсных (краткосрочных высокочастотных) помех (см. [4]).

В работе предложен метод очистки сигнала, полученного оцифровкой фонограммы с винилового диска, от импульсных искажений с использованием модели авторегрессии — скользящего среднего. В основе модели лежит предположение, что каждый момент цифрового стационарного сигнала можно определить с помощью параметров авторегрессии (см. [3]).

Предложенный метод осуществляет:

- обнаружение помех;
- подбор оптимальных параметров восстановления дефектных зон с учетом свойств данного сигнала (см. [1, 2]);
- замещение недостающих фрагментов с помощью статистических методов (см. [6]).

Метод реализован в пакете MatLab и протестирован на наборе звукозаписей, полученных с виниловых грампластинок.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Bai M. R., Ih J.-G., Benesty J. *Acoustic Array Systems. Theory, Implementation, and Application*. – Wiley-IEEE Press, 2014. – 536 p.
2. Canazza S., De Poli G., Maesano S., Mian G. *On the performance of a noise reduction technique based on a psychoacoustic model for restoration of old audio recordings* // Proc. of the COST G-6 Conference on DAFX, 2000.
3. Friedlander B., Porat B. *The Modified Yule-Walker Method of ARMA Spectral Estimation* // Transactions on Aerospace Electronic Systems. – 1984. – No. 2. – P. 158–173.
4. Godsil S., Rayner P. *Digital audio restoration – a statistical model based approach*. – Springer, 1998. – 346 p.
5. Волков А. Л. *Адаптивный алгоритм цифровой обработки звуковых сигналов для реставрации фонограмм* // Дисс. ... канд. техн. наук. – СПб.: СПбГИК и Т, 2000. – 199 с.
6. Кривошеев В. И., *Современные методы цифровой обработки сигналов (цифровой спектральный анализ)*. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2006. – 117 с.

Н. С. Ерыгина

*Белгородский государственный национальный
исследовательский университет,
Erygina_N@bsu.edu.ru*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В работе исследуется задача о фильтрации жидкости из водоема в твердый пористый грунт. Пусть $Q \subset \mathbf{R}^3$ – область, которая включает в себя верхнюю часть Ω^0 – водоем, нижнюю часть $\Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup \Omega_s^\varepsilon$ – пористый грунт и их общую границу $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$: $Q = \Omega^0 \cup \Omega \cup S^0$. Вектор перемещения среды $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ и давление среды $p(\mathbf{x}, t)$ при $t > 0$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в Q

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_0 \tilde{\rho}^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\zeta \mathbb{P}_f + (1 - \zeta) \mathbb{P}) + \tilde{\rho}^\varepsilon \mathbf{e}, \quad (2)$$

$$\mathbb{P}_f = \alpha_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\right) - p \mathbb{I}, \quad (3)$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\right) + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I} \quad (4)$$

(в смысле теории распределений), дополненной следующими краевыми и начальными условиями:

$$\mathbb{P}_f(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = -p^0(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in S_0^1 = S^1 \cap \bar{\Omega}_0 \subset \partial Q, \quad (5)$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = -p^0(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in S_1^1 = S^1 \cap \bar{\Omega} \subset \partial Q, \quad (6)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S^2 = S \setminus \bar{S}^1, \quad (7)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q. \quad (8)$$

Здесь $\tilde{\varrho}^\varepsilon = (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon)\varrho_f + (1 - \zeta)(1 - \chi^\varepsilon)\varrho_s$, $\zeta = \zeta(\mathbf{x})$ – характеристическая функция области Ω^0 , $\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}/\varepsilon)$ – характеристическая функция порового пространства Ω_f^ε , $\chi(\mathbf{y})$ – 1–периодическая функция, определяющая структуру порового пространства.

Теорема. Пусть $\mu_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon)$, $\mu_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\mu/\varepsilon^2$, $\lambda_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon)$ и выполнены предположения: $\mu_0 = 0$, $0 < \mu_1 < \infty$, $\tau_0 > 0$, $\lambda_0 = \infty$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ и произвольного промежутка времени $[0, T]$ существует единственное обобщенное решение \mathbf{w}^ε , p^ε задачи (1) – (8), а предельные функции $\mathbf{w} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{w}^\varepsilon$, $\mathbf{v} = \partial \mathbf{w} / \partial t$, $p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p^\varepsilon$ удовлетворяют начально-краевой задаче

$$\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \varrho_f \mathbf{e}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{(f)} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\mathbf{v}^{(f)} = \int_0^t \mathbb{B}^{(f)}(\tau_0; t - \tau) \cdot (-\nabla p^{(f)}(\mathbf{x}, \tau) + \varrho_f \mathbf{e}) d\tau, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \in S^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} p^{(f)}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \in S^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega_0}} p(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S^0,$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \in S^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbf{v}^{(f)}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \in S^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega_0}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{x} \in S^0,$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p^0(t), \quad \mathbf{x} \in S_0^1; \quad p^{(f)}(\mathbf{x}, t) = p^0(t), \quad \mathbf{x} \in S_1^1,$$

$$\mathbf{v}^{(f)}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S^2,$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_0,$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ – вектор нормали к границе S^0 (или S^2) в точке $\mathbf{x} \in S^0$ (или S^2), $\mathbb{B}^{(f)}(\tau_0; t)$ – симметричная матрица.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 14–17–00556).

Н. И. Жукова, К. И. Шеина

Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”,

nzhukova@hse.ru, kse51091@mail.ru

**ГРУППЫ БАЗОВЫХ АВТОМОРФИЗМОВ
КАРТАНОВЫХ СЛОЕНИЙ,
МОДЕЛИРУЕМЫХ НА НЕЭФФЕКТИВНЫХ
КАРТАНОВЫХ ГЕОМЕТРИЯХ**

Исследуются картановы слоения, то есть слоения, допускающие трансверсальную картанову геометрию. Картановы слоения включают в себя параболические, римановы, псевдоримановы, конформные, проективные слоения и слоения с трансверсальной проектируемой связностью.

Мы исследуем общую ситуацию, когда трансверсальная картанова геометрия может быть неэффективной. Неэффективные картановы геометрии имеют нетривиальную группу калибровочных преобразований, играющую важную роль в физических теориях.

Рассматривается категория \mathcal{CF} картановых слоений, в которой изоморфизмы сохраняют не только слоение, но и трансверсальную картанову геометрию. Через $A_B(M, F)_\zeta$ обозначается фактор-группа группы всех автоморфизмов слоения (M, F) с трансверсальной картановой геометрией ζ по нормальной подгруппе автоморфизмов, оставляющей каждый слой инвариантным. Нами доказана

Теорема 1. *Пусть (M, F) — картаново слоение с трансверсальной картановой геометрией $\tilde{\xi}$ типа (\tilde{G}, \tilde{H}) . Тогда (M, F) допускает также ассоциированную эффективную трансверсальную картанову геометрию ξ типа (G, H) , где*

$G = \tilde{G}/K$, $H = \tilde{H}/K$ и K — ядро пары (\tilde{G}, \tilde{H}) , то есть максимальная нормальная подгруппа \tilde{G} , содержащаяся в \tilde{H} . При этом, группы базовых автоморфизмов в категории \mathcal{CF} $A_B(M, F)_{\tilde{\xi}}$ и $A_B(M, F)_{\xi}$ изоморфны.

Найдено достаточное условие для того, чтобы полная группа базовых автоморфизмов картанова слоения со связностью Эресмана допускала единственную структуру конечномерной группы Ли в категории \mathcal{CF} . Получены некоторые точные оценки размерности этой группы, зависящие от трансверсальной картановой геометрии и от топологии слоев этого слоения. Найдены также достаточные условия для того, чтобы группа $A_B(M, F)_{\tilde{\xi}}$ была дискретной.

Мы показываем, что ростковая группа голономии $\Gamma(L)$ любого слоя L картанова слоения с трансверсальной картановой геометрией типа (G, H) изоморфна некоторой подгруппе группы Ли H . Мы говорим, что слой L имеет дискретную группу голономии, если эта подгруппа дискретна в H .

Напомним, что слой L слоения (M, F) называется собственным, если он является вложенным подмногообразием многообразия M . Слоение называется собственным, если все его слои — собственные. В частности, доказана

Теорема 2. *Если картаново слоение (M, F) , рассматриваемое с ассоциированной эффективной трансверсальной картановой геометрией ξ , имеет собственный слой с дискретной группой голономии, то группа $A_B(M, F)_{\tilde{\xi}}$ допускает единственную структуру группы Ли.*

Подчеркнем, что условие теоремы 2 заведомо выполняется для собственных картановых слоений.

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект № 138) в 2015 году.

Д. Х. Зайнетдинов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
damir.zh@mail.ru

ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННАЯ СВОДИМОСТЬ НА МНОЖЕСТВАХ И ПАРАХ МНОЖЕСТВ

Данная работа посвящена изучению свойств предельно монотонных множеств и пар множеств, а также исследованию предельно монотонной сводимости (для краткости будем обозначать также через lm -сводимость) между множествами, между парами множеств. Кроме того, рассматривается взаимосвязь понятий lm -сводимости на множествах и Σ -сводимости для семейств специального вида.

В работе [1] вводится понятие Σ -сводимости на семействах подмножеств натуральных чисел, позволяющее рассматривать семейство само по себе, не фиксируя при этом его представление с помощью натуральных чисел. В связи с изучением предельно монотонного множества и пары множеств [2], возникло понятие lm -сводимости на множествах и lm -сводимости между парами множеств. В данной работе lm -сводимость на множествах будет рассмотрена посредством Σ -определимости специальных семейств начальных сегментов для этих множеств.

Определения предельно монотонной функции, предельно монотонного оператора и lm -сводимости на множествах, которые мы будем использовать, можно найти в работе [3].

Пусть даны два произвольных множества A и B . Возьмем в качестве семейств для множеств A и B соответствующие семейства начальных сегментов, а именно, $\mathcal{S}(A) = \{\mathbb{N} \upharpoonright a : a \in A\}$ и $\mathcal{S}(B) = \{\mathbb{N} \upharpoonright b : b \in B\}$. Следующая теорема устанавливает взаимосвязь между понятиями lm -сводимости двух мно-

жеств и Σ -сводимости семейств специального вида для этих множеств.

Теорема 1. $A \leq_{lm} B \iff \mathcal{S}(A) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(B)$.

Следующая теорема говорит о том, что определение lm -сводимости множества к паре множеств эквивалентно определению Σ -сводимости между семействами начальных сегментов для данного множества и пары множеств.

Теорема 2. $A \leq_{lm} (B, C) \iff \mathcal{S}(A) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(B, C)$.

Далее определим предельно монотонную сводимость между двумя парами множеств через Σ -определимость заданных для них семейств специального вида. Пусть даны две произвольные пары множеств (A, B) и (C, D) . Зададим для этих двух пар множеств следующие семейства начальных сегментов, а именно: $\mathcal{S}(A, B) = \{\{0\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright a : a \in A\} \oplus \{\{1\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b : b \in B\}$ и $\mathcal{S}(C, D) = \{\{0\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright c : c \in C\} \oplus \{\{1\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright d : d \in D\}$ соответственно. При этом нетрудно заметить, что $\mathcal{S}(A, B) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(C, D) \iff \mathcal{S}(A) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(C, D)$ и $\mathcal{S}(B) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(C, D)$. Тогда по теореме 2 имеем: $\mathcal{S}(A) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(C, D)$ и $\mathcal{S}(B) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(C, D) \iff A \leq_{lm} (C, D)$ и $B \leq_{lm} (C, D) \iff (A, B) \leq_{lm} (C, D)$. Отсюда немедленно следует, что $(A, B) \leq_{lm} (C, D) \iff \mathcal{S}(A, B) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(C, D)$.

В работе [3] было установлено существование такой пары множеств (A, B) , что для любого множества C выполнено неравенство $(A, B) \not\leq_{lm} C$. Используя этот результат, можем заключить, что класс рассматриваемых семейств является собственным. Таким образом, имеем следующий результат.

Теорема 3. *Существуют такая пара множеств (A, B) , что для любого множества C выполнено неравенство $\mathcal{S}(A, B) \not\sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(C)$.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-01-31200, № 15-31-20607 и № 15-41-02507-р_поволжье_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г. *О сводимости на семействах* // Алгебра и логика – 2009. – Т. 48. – № 1. – С. 31–53.
2. Kalimullin I. Sh., Khoussainov B., Melnikov A. *Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2013. – V. 141. – No 9. – P. 3275–3289.
3. Faizrahmanov M., Kalimullin I., Zainetdinov D. *Maximality and Minimality under Limitwise Monotonic Reducibility* // Lobachevskii J. of Math. – 2014. – V. 35. – No 4. – P. 333–338.

С. К. Зубкова

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
kuzmina_s@list.ru*

ГОЛОМОРФНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ НА ТРАНСВЕРСАЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ

Трансверсальное расслоение $T_{tr}M$ слоеного многообразия (M, \mathcal{F}) [1] несет на себе структуру гладкого многообразия над алгеброй дуальных чисел \mathbb{D} [2]. Если карта h из атласа слоения на M относит точке $x \in M$ координаты $\{x^i = h^i(x), y^\alpha = h^\alpha(x)\}$, где x^i , $i = 1, \dots, m$, – трансверсальные координаты, а y^α , $\alpha = 1, \dots, n$, – слоевые, то индуцированные координаты на $T_{tr}M$ имеют вид $\{x^i, y^\alpha, \dot{x}^i\}$, где \dot{x}^i – координаты трансверсального вектора – элемента факторпространства T_xM/VT_xM касательного пространства T_xM по подпространству VT_xM ,

образованному касательными векторами к слою L_x , проходящему через точку $x \in M$. Структура \mathbb{D} -гладкого многообразия, моделируемого \mathbb{D} -модулем $\mathbb{D}^m \oplus \mathbb{R}^n$, на $T_{tr}M$ задается координатами $\{X^i = x^i + \varepsilon \dot{x}^i \in \mathbb{D}, y^\alpha \in \mathbb{R}\}$.

Пусть $P_{fol}^r M$ – главное расслоение слоеных r -реперов на M (r -струй в нуле ростков изоморфизмов пространства \mathbb{R}^{m+n} с каноническим слоением коразмерности m на многообразии M). Поле слоеного геометрического объекта на M задается эквивариантным отображением $\lambda : P_{fol}^r M \rightarrow F$, где F – расслоенное многообразие, на котором задано действие структурной группы G расслоения $P_{fol}^r M$.

Слоение \mathcal{F} индуцирует слоение \mathcal{F}_{tr}^r на расслоении $P_{fol}^r M$, и расслоение $T_{tr}P_{fol}^r M$ представляет собой главное подрасслоение расслоения \mathbb{D} -гладких r -реперов на $T_{tr}M$.

Применение функтора T_{tr} к отображению $\lambda : P_{fol}^r M \rightarrow F$ приводит к отображению $T_{tr}\lambda : T_{tr}P_{fol}^r M \rightarrow T_{tr}F$, определяющему поле голоморфного (\mathbb{D} -гладкого) объекта на расслоении $T_{tr}M$ – лифт поля λ на расслоение $T_{tr}M$.

Будем называть два голоморфных поля объекта типа $\Lambda : T_{tr}P_{fol}^r M \rightarrow T_{tr}F$ эквивалентными, если одно из них можно перевести в другое \mathbb{D} -гладким диффеоморфизмом $\Phi : T_{tr}M \rightarrow T_{tr}M$ над тождественным отображением многообразия M на себя.

Теорема. *Голоморфное поле объекта $\Lambda : T_{tr}P_{fol}^r M \rightarrow T_{tr}F$ на расслоении $T_{tr}M$ эквивалентно лифту $T_{tr}\lambda : T_{tr}P_{fol}^r M \rightarrow T_{tr}F$ некоторого поля объекта $\lambda : P_{fol}^r M \rightarrow F$ тогда и только тогда, когда ограничение отображения Λ на $P_{fol}^r M$ имеет вид*

$$\Lambda|_{P_{fol}^r M} = T_{tr}\lambda \circ u^r,$$

где u^r – лифт некоторого трансверсального поля $u : M \rightarrow T_{tr}M$ на расслоение $P_{fol}^r M$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Molino P. *Riemannian foliations*. – Birkhäuser, 1988. – 339 p.
2. Shurygin V. V. *Structure of smooth mappings over Weil algebras and the category of manifolds over algebras* // Lobachevskii J. Math. – 1999. – V. 5. – P. 29–55.

О. А. Изосимова

*ННГУ им. Лобачевского,
izosimova93@yandex.ru*

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИСТОЧНИКЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В классической работе [1] исследуется обратная задача об источнике для уравнения Пуассона и, в частности, получены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять локализованная в пространстве функция источников, порождающая локализованное в пространстве решение. В дальнейшем были получены различные обобщения результатов этой работы ([2], [3]).

В настоящем сообщении рассматривается уравнение

$$P(\partial)u(x) = f(x), \quad (1)$$

где $P(\partial)$ – произвольная линейная дифференциальная операция в частных производных с постоянными коэффициентами.

Предполагается, что функция $f \in L_2(R^n)$ локализована в некоторой открытой ограниченной области $\Omega \subset R^n$, то есть $f(x) = 0$ на R^n/Ω . Рассматривается вопрос о необходимых и достаточных условиях на функцию источников f из указанного класса, при которых уравнение (1) имеет хотя бы одно обобщенное решение $u \in L_2(R^n)$, также локализованное в Ω , то есть $u(x) = 0$ при $x \in R^n/\Omega$. Для обыкновенной дифференциальной операции P с постоянными коэффициентами аналогичный результат устанавливается конструктивно с помощью метода вариации произвольных постоянных.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Новиков П. С. *Об единственности решения обратной задачи потенциала* // Докл. АН СССР. – 1938. – Т. 18. – С. 165–168.
2. Bleistein N., Cohen J. K. *Nonuniqueness in the inverse source problem in acoustics and electromagnetics* // J. of Math. – Ph. – 1977. – V. 18. – No 2. – P. 194–201.
3. Isakov V. *Inverse Source Problems*. – RI: Amer. Math. Soc., 1990. – Mathematical Surveys and Monographs. – No 34. – 193 p.

Э. Н. Карабашева

*Казанский государственный
архитектурно-строительный университет,
enkarabasheva@bk.ru*

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЛИСТНОСТИ
ОТОБРАЖЕНИЙ НА ПОЛИГОНАЛЬНЫЕ
ОБЛАСТИ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ
ВЕРШИН**

Задача состоит в построении функции $z(\zeta)$, которая давала бы конформное отображение верхней полуплоскости D на односвязную полигональную область D_z . Граница полигональной области $L_z = \partial D_z$ — это две ломаные линии L_z^1 и L_z^2 с общей точкой $A_0(0, 0)$. Одна из особенностей области D_z состоит в том, что L_z^1 и L_z^2 составлены из бесконечного числа прямолинейных звеньев. Углы, которые образуют первые звенья ломаных L_z^1 и L_z^2 с вещественной осью, известны, обозначим их $\eta_0^1\pi$ и $\eta_0^2\pi$, где $0 \leq \eta_0^1\pi < 2\pi$, угол при вершине A_0 равен $(\eta_0^2 - \eta_0^1)\pi$, где $0 < \eta_0^2\pi - \eta_0^1\pi < \pi/2$. Координаты вершин A_k, A_{-k} неизвестны, но внутренние углы $\alpha_k\pi, \alpha_{-k}\pi$ при этих вершинах заданы. Ограничения на внутренние углы следующие: $0 < \alpha_k < 1, 1 < \alpha_{-k} < 2, k = \overline{1, \infty}$.

Строим конформное отображение так, чтобы контуру L_z^1 соответствовала действительная полуось $\xi > 0$, точке A_0 — начало координат, концу линии L_z^1 — точка $\zeta = +\infty$, контуру L_z^2 — действительная полуось $\xi < 0$, концу линии L_z^2 — точка $\zeta = -\infty$.

Общая формула конформного отображения с описанными выше ограничениями получена с использованием решения однородной задачи Гильберта с разрывными коэффициентами и

двусторонним завихрением на бесконечности вида $O(\ln^\alpha |x|)$, где $0 < \alpha < 1$. Такой метод построения конформного отображения представлен в работе Р. Б. Салимова и П. Л. Шабалина [1], [2]. Ими была рассмотрена задача построения отображения полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин в случае, когда $\kappa^+ + \kappa^- < 3$ и сходятся ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j = \kappa^+, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{-j} = \kappa^-. \quad (1)$$

Исследование задачи при расходимости ряда (1) проведено в работе [3], для построения конформного отображения авторы применяли решение однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия и двусторонним завихрением на бесконечности степенного порядка $O(|x|^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$.

Отличие данной работы от предыдущих в расходимости рядов (1), приводящей к “завихрению” краевого условия задачи Гильберта вида $O(\ln^\alpha |x|)$, где $0 < \alpha < 1$. Построена функция конформного отображения и проведено исследование однолистности отображений описанного вида.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. *Обратная задача М. А. Лаврентьева об отображении полуплоскости на многоугольник в случае бесконечного числа вершин* // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10. – Вып. 1. – С. 23–31.
2. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. *Отображение полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин* // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 10. – С. 76–80.

3. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. *Одно обобщение формулы Шварца-Кристоффеля* // Сиб. журн. индустр. матем. – 2010. – Т. 13. – № 4. – С. 109–117.

4. Karabasheva E. N., Shabalin P. L. *Univalence of mappings from half-plane to a polygonal domains with infinite sets of vertices* // Lobachevskii J. of Math. – 2015. – V. 36. – Iss. 2. – P. 144–153.

О. М. Кечина

*Поволжская государственная
социально-гуманитарная академия,
otka-83@mail.ru,*

**НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ
УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

Рассмотрим в прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ нелокальную задачу для уравнения

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\right) (u_{xy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u) = f(x, y), \quad (1)$$

с условиями

$$u(0, y) = \mu(y), \quad (2)$$

$$u_y(0, y) = \nu(y), \quad (3)$$

$$\int_0^a u(x, y) dx = \psi(y), 0 \leq y \leq b, \quad (4)$$

$$\int_0^b u(x, y) dy = \varphi(x), 0 \leq x \leq a, \quad (5)$$

Теорема. Пусть $A(x, y), B(x, y), C(x, y) \in C^1(\bar{\Omega})$,

$$C_{xy} \in C(\bar{\Omega}), \quad f(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}),$$

$$\varphi(x) \in C[0, a] \cap C^2(0, a), \quad \psi(y) \in C[0, b] \cap C^2(0, b),$$

$$A_y \geq 0, \quad B_x \geq 0, \quad C_{xy} \geq 0, \quad A_y B_x - C^2 \geq 0,$$

$$\alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0, \quad \mu(y), \nu(y) \in C^2[0, b].$$

Тогда существует единственное классическое решение $u(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$ задачи (1) – (5).

Доказательство теоремы проводится методом “вспомогательных задач”. При этом используется тот факт, что решением вспомогательной задачи для уравнения

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \beta \frac{\partial w}{\partial y} = f(x, y),$$

где

$$w(x, y) = u_{xy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u,$$

с условиями (2) и (3) будет функция

$$w(x, y) = \nu'(y - \frac{\beta}{\alpha}x) + A(0, y - \frac{\beta}{\alpha}x)\nu(y - \frac{\beta}{\alpha}x) + \\ + B(0, y - \frac{\beta}{\alpha}x)\mu'(y - \frac{\beta}{\alpha}x) + C(0, y - \frac{\beta}{\alpha}x)\mu(y - \frac{\beta}{\alpha}x) + \frac{1}{\alpha} \int_0^x f(\xi, y)d\xi.$$

Остальные рассуждения основаны на результатах из [2], [3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Филиппов А. Ф. *Введение в теорию дифференциальных уравнений: Учебник.* – М.: КомКнига, 2007. – 240 с.

2. Пулькина Л. С. *О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения* // Дифференц. ур. – 2000. – № 2. – С. 279–280.

3. Кечина О. М. *Нелокальные задачи с интегральными условиями в прямоугольных областях* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Самара, 2010. – 101 с.

П. В. Ковтуненко

*Новосибирский государственный университет,
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева,
pkovtunenko@gmail.com*

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТОНКОМ СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Движение тонкого слоя вязкой неоднородной жидкости со свободной границей на наклонной плоскости в поле силы тяжести в приближении пограничного слоя описывается следующей системой уравнений (в терминах безразмерных величин):

$$u_t + uu_x + vv_y + bh_x = a + K \left(\eta u_y \right)_y, \quad \eta_t + u\eta_x + v\eta_y = 0,$$

$$v = - \int_0^y u_x dy, \quad h_t + \left(\int_0^h u dy \right)_x = 0, \quad u \Big|_{y=0} = 0, \quad u_y \Big|_{y=h} = 0.$$

Здесь x, y, t – декартовы координаты и время; $u(t, x, y), v(t, x, y)$ – горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости; $h(t, x)$ – функция, задающая форму свободной поверхности; $\eta(t, x, y)$ – функция, характеризующая стратификацию жидкости по вязкости; b, a, K – безразмерные постоянные.

Для исследования данной системы используется теория обобщённой гиперболичности, развитая В. М. Тешуковым.

Предложена система дифференциальных балансовых соотношений, аппроксимирующая исходную интегродифференциальную модель. В частном случае отсутствия стратификации ($\eta(t, x, y) \equiv \text{const}$) в рамках теории обобщенной гиперболичности проводится исследование слабых разрывов решений и показывается, что разрывы производных решения сосредоточены на обобщенных характеристиках. При этом, в процессе эволюции течения амплитуда слабого разрыва может обращаться в бесконечность, что соответствует нелинейному опрокидыванию волн и образованию сильных разрывов. Для проведения численного моделирования распространения нелинейных возмущений используется многослойная аппроксимация системы балансовых соотношений, которая позволяет рассматривать исходную модель в виде конечномерной системы дифференциальных законов сохранения. Проводится сравнение численных расчетов, полученных при помощи данной многослойной модели и по модифицированной модели Шкадова.

В случае, допускающем стратификацию, выполняется аналогичное моделирование. В рамках многослойной аппроксимации исходной интегродифференциальной модели проводятся численные расчеты, целью которых является исследование влияния стратификации на развитие течения. В рамках данного подхода исследуется эволюция колонны более вязкой жидкости в менее вязкой при прохождении волновых возмущений.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (2012-1.5-8503), Интеграционного проекта СО РАН №30 и Программы Президиума РАН № 4.8, Программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-2133.2014.1)

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Chesnokov A. A., Kovtunen P. V. *Weak Discontinuities in Solutions of Long-Wave Equations for Viscous Flow* // Stud. Appl. Math. – 2014. – V. 132.
2. Lagree P.-Y., Staron L., Popinet S. *The granular column collapse as a continuum: validity of a two-dimensional Navier-Stokes model with a $\mu(I)$ -rheology* // J. Fluid Mech. – 2011. – V. 686.

Н. Б. Красникова, Н. И. Насырова

*Северный (Арктический) федеральный
университет им. М. В. Ломоносова,*

*Казанский национальный исследовательский технический
университет им. А.Н. Туполева,*

ngoza@yandex.ru

**БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИКЕ ОТОБРАЖЕНИЙ
С ПАРАМЕТРОМ**

Дискретные динамические системы, заданные непрерывными функциями одной переменной, а также кусочно-гладкими отображениями с одним или несколькими параметрами, широко используются в качестве математических моделей электрических сетей, систем передачи сигналов, биологических популяций, других систем и процессов в экономике, физике, технических и социальных науках.

При изучении динамики таких отображений с параметрами, их неподвижных точек, периодических орбит и их типов часто встречаются бифуркации, когда при изменении параметра меняется и поведение отображения. Наиболее типичными в

семействах функций одной переменной являются бифуркации типа «седло-узел», «вилка», «смена устойчивости», бифуркации Хопфа (рождения цикла) и удвоения периода.

Для простых отображений с одним параметром значения параметра, при которых происходят бифуркации, можно определить аналитическими методами, но в большинстве случаев это является весьма сложной задачей. Помочь в решении этой проблемы может построение бифуркационных диаграмм, которые отражают притягивающие неподвижные точки, периодические орбиты и хаотические аттракторы, соответствующие определённым интервалам значений параметра.

В результате исследования поведения асимметрического тентообразного отображения

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax, & x \leq 0 \\ 1 - bx, & x \geq 0 \end{cases}$$

плоскость параметров (a, b) разбивается на 11 областей с определённой динамикой $f(x)$, которая нами описана. Исследование динамики этого отображения в данных областях проводилось различными методами и в работах других авторов (см., напр., [1, 2]), однако динамика на границах областей исследована не полностью.

При проведении исследования поведения отображения $f(x)$ на границах найденных областей оказалось, что часть границ относится к одной из пограничных областей, а для другой части границ динамика является более сложной, и для её описания аналитических методов недостаточно. С помощью бифуркационных диаграмм мы изучили динамику $f(x)$ на границах между областями: 1) на части гиперболы, описываемой условиями $b = 1/a$, $0 < a < 1$, 2) на прямолинейных участках $b = 1$, $a < -1$, $-1 < a < 1$ и $a > 1$. Бифуркационные диаграммы,

которые показывают зависимость аттрактора функции от значений одного параметра (в данном случае, при фиксированном другом, либо выражающемся через первый параметр), позволяют нам составить более полное представление о динамике отображения $f(x)$ на границах этих областей.

Рассмотрим, например, поведение функции $f(x)$ на ветви гиперболы $b = 1/a$ при $0 < a < 1$. Заметим, что в области по одну сторону этой гиперболы существует глобальный двухпериодический аттрактор, а по другую сторону границы динамика отображения носит хаотический характер. Построенные бифуркационные диаграммы с начальными точками $x_0 = -5$, $x_0 = -0.2$, $x_0 = 0.3$ и $x_0 = 7$ показывают, что на гиперболе – границе этих областей существуют двух- и четырёхпериодические аттракторы, часто сменяющие друг друга.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Lindstrom T., Thunberg H. *An elementary approach to dynamics and bifurcations of skew tent maps* // J. of Difference Eq. and Appl. – 2008. – V. 14. – P. 819–833.
2. Sushko I., Gardini L. *Degenerate bifurcations and border collisions in piecewise smooth 1D and 2D maps* // Intern. J. of Bifurcation and Chaos. – 2010. – V. 20. – No 7. – P. 2045–2070.

А. В. Кулешов

*Балтийский федеральный университет им. И.Канта,
arturkuleshov@yandex.ru*

**КАНОНИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ
НА НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВАХ
ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОЕКТИВНОГО
ПРОСТРАНСТВА**

Пусть P_n — проективное пространство размерности n , $GP(n)$ — группа проективных преобразований пространства P_n ($n \geq 4$).

Определение 1. *Гиперплоским элементом пространства P_n называется пара $x = (L_{n-1}, A)$, образованная гиперплоскостью L_{n-1} (называемой гиперплоскостью элемента x) и точкой $A \in L_{n-1}$ (называемой центром данного элемента).*

Пусть \mathbb{G}^* — множество всех гиперплоских элементов пространства P_n . На этом множестве определены два отображения: $\xi: B \rightarrow P_n^*$ и $\eta: B \rightarrow P_n$, действующие следующим образом: $\xi: (L_{n-1}, A) \mapsto L_{n-1}$, $\eta: (L_{n-1}, A) \mapsto A$.

Утверждение 1. 1) $\mathbb{G}^* \subset P_n \times P_n^*$ — гладкое подмногообразие размерности $2n - 1$; 2) \mathbb{G}^* — однородное $GP(n)$ -пространство; 3) \mathbb{G}^* наделено структурами локально тривиальных расслоений с каноническими проекциями ξ и η .

Определение 2. Семейством \mathbb{W} назовем $(n - 2)$ -мерное подмногообразие пространства \mathbb{G}^* , такое что: 1) $\eta(\mathbb{W})$ — гладкая p -мерная поверхность S_p ($p < n - 2$); 2) проекция $\eta: \mathbb{W} \rightarrow S_p$ является расслоением над S_p с $(n - p - 2)$ -мерными слоями; 3) $T_A(S_p) \subset \xi(x) \quad \forall x \in \eta^{-1}(A)$.

Пусть $F(x)$ — характеристика семейства \mathbb{W} , соответствующая элементу $x \in \mathbb{W}$.

Определение 3. Семейство \mathbb{W} называется *регулярным*, если $\forall x \in \mathbb{W} : F(x) \cap T_{\eta(x)}(S_p) = \eta(x)$.

Если семейство \mathbb{W} регулярно, что $\dim F(x) = 1$, поверхность S_p является тангенциально невырожденной, а во второй дифференциальной окрестности семейства \mathbb{W} инвариантно определена плоскость $K_{p+1}(x) \supset T_{\eta(x)}S_p$. Рассмотрим

$$\mathfrak{F}(A) = \bigcup_{x \in \eta^{-1}(A)} F(x), \quad \mathfrak{K}(A) = \bigcup_{x \in \eta^{-1}(A)} K_{p+1}(x).$$

Определение 4. Регулярное семейство \mathbb{W} называется *три-регулярным*, если $\forall A \in S_p : \mathfrak{F}(A)$ и $\mathfrak{K}(A)$ — поверхности ранга $n - p - 2$ в смысле [1].

Теорема 1. К три-регулярному семейству \mathbb{W} внутренним образом присоединяется оснащение, сопоставляющее каждому его элементу x набор $(N_{p-1}(x), N_{n-p-3}(x), N_0(x), C_0(x))$ таких плоскостей, что

$$[N_{p-1}(x), A] = T_A(S_p), \quad [A, N_0(x)] = F(x),$$

$$[N_{n-p-3}(x), N_0(x), T_A(S_p)] = L_{n-1}, \quad [L_{n-1}, C_0(x)] = P_n,$$

где $A = \eta(x)$, $L_{n-1} = \xi(x)$, $T = T_A(S_p)$, $[\dots]$ — проективная оболочка.

Теорема 2. На три-регулярном семействе \mathbb{W} определены две канонические линейные связности Γ_1 и Γ_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Акивис М. А. Фокальные образы поверхности ранга r // Изв. вузов. Матем. — 1957. — № 1. — С. 9–19.

2. Кулешов А. В. *О внутреннем оснащении одного семейства гиперплоских элементов* // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 45. – Калининград: Изд-во БФУ им. И.Канта, 2014. – С. 65 – 72.

Л. Р. Кутдусова, Л. И. Нуркаева, Е. Р. Садыкова
Казанский (Приволжский) федеральный университет

**“ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ”
В ГЕОМЕТРИИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО
И ЕВКЛИДА**

В современных школьных учебниках геометрии 7–9 классов в качестве основного рабочего аппарата используются признаки равенства треугольников. Благодаря применению признаков равенства треугольников легче усваиваются основные теоремы планиметрии. Все признаки равенства треугольников, имеющие место в геометрии Евклида, также верны и в геометрии Лобачевского. Возможно ли, что признак равенства треугольников по трём сторонам, существующий только в геометрии Лобачевского, верен в геометрии Евклида?

Рассмотрим этот признак в абсолютной геометрии. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Докажем, что данные треугольники равны.

Доказательство.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то вершина A совпадёт с вершиной A_1 при этом совместятся лучи AC с A_1C_1 и AB и A_1B_1 . Но так как мы не знаем, равны ли отрезки AB и A_1B_1 , нельзя утверждать, что вершина B совпадёт с вершиной B_1 , следовательно, в данном случае невозможно утверждать, что треугольники равны. Значит, теорема неверна.

Почему же в геометрии Лобачевского этот признак удаётся доказать? Рассмотрим основные положения, благодаря которым удалось доказать истинность данного признака.

Гиперболическая геометрия Лобачевского построена на аксиоме, являющейся отрицанием аксиомы параллельных прямых в евклидовой геометрии. В этой аксиоме говорится о том, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не менее двух прямых, не пересекающих данную. Из этого вытекает ряд замечательных теорем. Некоторые из них связаны с понятием дефекта треугольника. В евклидовой геометрии дефект любого треугольника равен нулю, в геометрии Лобачевского дефект любого треугольника – положительное число. Благодаря этому, можно доказать теоремы, которые используются в доказательстве признака равенства треугольников по трём углам. Таким образом, признак равенства треугольников по трём углам в геометрии Лобачевского возможен благодаря аксиоме о параллельных, отличной от V постулата Евклида.

С помощью признака равенства треугольников по трём углам можно решать разнообразные задачи, а также доказать ещё некоторые признаки равенства треугольников в геометрии Лобачевского.

Приведем доказательство одного из таких признаков.

Задача. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $\angle B = \angle B_1$, $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$, $\angle CMA = \angle C_1M_1A_1$ где AM и A_1M_1 – медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

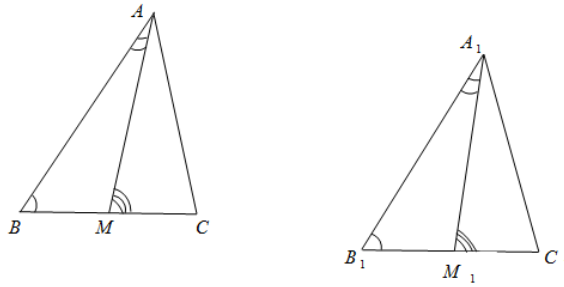


Рис.1

Доказательство.

Так как $\angle CMA = \angle C_1M_1A_1$ то смежные с ними углы равны: $\angle BMA = \angle B_1M_1A_1$. Треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по трём углам, поэтому $AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$. Из второго равенства следует, что $BC = B_1C_1$. Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников: $BA = B_1A_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. Теорема доказана.

Таким образом, использование признаков равенства треугольников дает возможность решать более трудные задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанасян Л. С. *Геометрия Лобачевского*. – М.: Просвещение, 2002.
2. Погорелов А. В. *Геометрия: Учеб. для 7–9 кл. общеобразоват. учреждений*. – М.: Просвещение, 2002.

А. В. Лапин, А. Д. Романенко

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
avlapine@mail.ru, romart92@mail.ru*

**ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА
С ЧЕБЫШЕВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ
К РЕШЕНИЮ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Рассматривается задача состояния в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f + u \text{ в } Q_T, \\ y = 0 \text{ на } \Sigma, \\ y = y_0 \text{ при } t = 0, x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Зададим множества ограничений на функцию управления $U_{ad} = \{u \in L_2(Q_T) : |u| \leq u_1 \text{ п.в. в } Q_T\}$ и функцию состояния $Y_{ad} = \{y \in L_2(Q_T) : y_{min} \leq y \leq y_{max} \text{ п.в. в } Q_T\}$, а также функционал цели

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \int_{Q_T} (y - z_d)^2 dxdt + \frac{\alpha}{2} \int_{Q_T} u^2 dxdt, \quad \alpha > 0.$$

Лемма. *Задача оптимального управления*

$$\min_K J(y, u), \quad K = \{(y, u) \in Y_{ad} \times U_{ad} : \text{выполнено (1)}\}$$

имеет единственное решение при условии $K \neq \emptyset$.

Построим сеточную аппроксимацию задачи (1) на сетке с постоянным шагом h_x по x и набором переменных шагов по времени $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N_t}\}$. При произвольном выборе этих шагов возникает неустойчивость итерационного процесса. В связи с

этим, применялось их упорядочивание по методу, основанному на многочленах Чебышева, благодаря чему удается предотвратить большое накопление погрешностей.

Обозначим через $\|\cdot\|_x$ и (\cdot, \cdot) соответственно евклидову норму в \mathbb{R}^{N_x} и скалярное произведение в $\mathbb{R}^{N_x \times N_t}$.

В итоге получим следующую сеточную задачу

$$\min_{Ly=f+u} \{J(y, u) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_t} \tau_k \|y - z_d\|_x^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{N_t} \tau_k \|u\|_x^2\}. \quad (2)$$

Функция Лагранжа примет вид

$$\mathcal{L}(y, u, \lambda) = \frac{1}{2}(M(y - z_d), (y - z_d)) + \frac{\alpha}{2}(Mu, u) + (\lambda, Ly - u - f) \quad (3)$$

с блочно-диагональной матрицей $M = \text{diag}\{\tau_1 E, \dots, \tau_{N_t} E\}$ и матрицей L – матрицей оператора $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ в Q_T .

Для отыскания решения (2) используем предобусловленный итерационный метод Удзавы:

- $My^{k+1} = Mz_d - L^T \lambda^k,$
- $Mu^{k+1} = \lambda^k,$
- $LM^{-1}L^T \frac{\lambda^{k+1} - \lambda^k}{\rho} = Ly^{k+1} - u^{k+1} - f.$

Теорема. *Метод Удзавы сходится при любых начальных приближениях λ^0 и $0 < \rho < \rho_1$, где ρ_1 не зависит от параметров сетки.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00368).

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. *Методы вычислительной математики.* – М.: Наука, 1977. – 456 с.

А. А. Малюгина

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
alexandra.malyugina@gmail.com

**ПРЕПЯТСТВИЕ К ПРОДОЛЖЕНИЮ
ТРАНСВЕРСАЛЬНОЙ СВЯЗНОСТИ
НА МНОГООБРАЗИИ НАД АЛГЕБРОЙ
ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ДО ГОЛОМОРФНОЙ**

Пусть $M_n^{\mathbb{D}}$ – гладкое многообразие над алгеброй дуальных чисел \mathbb{D} (\mathbb{D} -гладкое многообразие) и $P^{\mathbb{D}}(M_n^{\mathbb{D}}, G^{\mathbb{D}})$ – \mathbb{D} -гладкое главное расслоение над $M_n^{\mathbb{D}}$. Будем предполагать, что слой $G_e^{\mathbb{I}}$ канонического слоения на структурной группе $G^{\mathbb{D}}$, соответствующий идеалу \mathbb{I} алгебры \mathbb{D} , проходящий через единицу группы, является замкнутым подмногообразием, и пусть $G = G^{\mathbb{D}}/G_e^{\mathbb{I}}$.

На многообразии $P^{\mathbb{D}}$ возникают комплексы

$$\hat{d} : \Omega_{ad}^{r,s;p} P^{\mathbb{D}} \rightarrow \Omega_{ad}^{r+1,s;p} P^{\mathbb{D}}$$

тензориальных дифференциальных форм со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{D}}$, с помощью которых можно построить препятствие для существования \mathbb{D} -гладкой связности в расслоении $P^{\mathbb{D}}$ (класс Атья $a(P^{\mathbb{D}})$, см. [1], где рассмотрен случай расслоения \mathbb{D} -линейных реперов).

Всякая \mathbb{D} -гладкая связность в $P^{\mathbb{D}}$ определяет проектируемую связность в трансверсальном (по отношению к каноническому слоению на $M_n^{\mathbb{D}}$) расслоении $P_{tr}(M_n^{\mathbb{D}}, G)$, ассоциированном с расслоением $P^{\mathbb{D}}$ (ассоциированную связность). Однако наличие некоторой \mathbb{D} -гладкой связности в $P^{\mathbb{D}}$ еще не гарантирует существования \mathbb{D} -гладкой связности в $P^{\mathbb{D}}$, ассоциированной с произвольной проектируемой связностью в $P_{tr}(M_n^{\mathbb{D}}, G)$.

Имеет место точная последовательность алгебр Ли

$$0 \rightarrow \mathbb{I}\mathfrak{g}^{\mathbb{D}} \xrightarrow{i} \mathfrak{g}^{\mathbb{D}} \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \rightarrow 0,$$

которая индуцирует точную последовательность комплексов тензориальных форм на расслоении $P^{\mathbb{D}}$ со значениями в алгебрах Ли

$$0 \rightarrow \Omega_{ad}^{r,1;0}(P^{\mathbb{D}}, \mathbb{I}\mathfrak{g}^{\mathbb{D}}) \xrightarrow{i} \Omega_{ad}^{r,1;0}(P^{\mathbb{D}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{D}}) \xrightarrow{p} \Omega_{ad}^{r,1;0}(P^{\mathbb{D}}, \mathfrak{g}) \rightarrow 0$$

и соответствующую длинную точную последовательность в когомологиях

$$\dots \xrightarrow{p_*} H_{ad}^{0,1;0}(P^{\mathbb{D}}, \mathfrak{g}) \xrightarrow{\hat{d}_*} H_{ad}^{1,1;0}(P^{\mathbb{D}}, \mathbb{I}\mathfrak{g}^{\mathbb{D}}) \xrightarrow{i_*} H_{ad}^{1,1;0}(P^{\mathbb{D}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{D}}) \xrightarrow{p_*} \dots$$

Пусть Γ_{tr} – некоторая связность в трансверсальном расслоении. Используя разбиение единицы, по этой связности можем построить связность Γ в $P^{\mathbb{D}}$ с \mathbb{D} -линейной формой связности. Класс $a(\Gamma) \in H_{ad}^{1,1;0}(P^{\mathbb{D}}, \mathbb{I}\mathfrak{g}^{\mathbb{D}})$, построенный по этой связности, является препятствием для существования \mathbb{D} -гладкой связности, ассоциированной с Γ_{tr} . Приведенная выше точная последовательность в когомологиях позволяет указать некоторую форму $\tau \in H_{ad}^{0,1;0}(P^{\mathbb{D}}, \mathfrak{g})$, с помощью которой класс Атьи связности Γ представляется в следующем виде: $a(\Gamma) = \hat{d}_*(\tau)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Малюгина А. А., Шурыгин В. В. *Препятствия к существованию голоморфных линейных связностей на многообразиях над алгеброй дуальных чисел* // Сб. работ Второй Междун. конф. “Якоби 2013. Высокопроизв. вычисления – матем. модели и алгоритмы”. – Калининград, 2013. – С. 79–81.

Н. В. Мартемьянова

*Поволжская государственная
социально-гуманитарная академия,
ninamartem@yandex.ru*

**О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ,
СВЯЗАННОЙ С ПОИСКОМ ЭЛЕМЕНТОВ
ПРАВОЙ ЧАСТИ**

Рассмотрим уравнение смешанного эллиптического-гиперболического типа с неизвестной правой частью

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sign} y \cdot u_{yy} = F(x, y) = \begin{cases} f_1(x)g_1(y), & y > 0, \\ f_2(x)g_2(y), & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β – заданные положительные действительные постоянные, $g_1(y), g_2(y)$ – заданные функции.

Обратная задача. Найти в области D функции $u(x, y)$ и $f_i(x)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие условиям:

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+), f_i(x) \in C(0, l) \cap L_2[0, l]; \quad (2)$$

$$Lu = F(x, y), (x, y) \in D_- \cup D_+; \quad (3)$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), u(x, -\alpha) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq l; \quad (5)$$

$$u_y(x, -\alpha) = \varphi_1(x), u_y(x, -\alpha) = \psi_1(x) \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

где $\varphi(x), \psi(x), \varphi_1(x), \psi_1(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Теорема. *Если существует решение задачи (2) – (6), то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия*

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = -2g_{2k}^{(s)}(-\alpha) \operatorname{ch} \lambda_k \beta + 2g_{2k}^{(c)}(-\alpha) \operatorname{sh} \lambda_k \beta - 2g_{1k}^{(1)}(\beta) \neq 0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-31-50018).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Sabitov K. B., Martemyanova N. V. *Nonlocal boundary value problem for the third order equation of mixed type // Contemp. Analysis and App. Math.* – 2015. – V. 3. – No 2. – С. 153–169.

С. Р. Миронова, Л. Д. Погодина

*Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева (КАИ),
srmironova@yandex.ru*

ОТОБРАЖЕНИЕ ЕДИНИЧНОГО КРУГА НА КРИВОЛИНЕЙНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Пусть числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Односвязная область B конечной плоскости W называется областью, удовлетворяющей условию $(\alpha, \beta)^*$, если:

- 1) $0 \in B$,
- 2) $\partial B = \cup_{k=1}^n l_k$, т. е. граница области B состоит из конечного числа дуг кривых l_k , каждая из которых при выборе регулярной ветви преобразования $\xi = W^{\alpha+i\beta}$, переходит в дугу окружности или радиальный луч с вершиной в точке 0 ,

3) любая вершина A_k , криволинейного n -угольника B является достижимой граничной точкой области B (если в некоторой точке плоскости W располагается несколько угловых точек, то столько же будет и вершин).

Говорят, что функция $f(z)$ подчиняется условию $[\alpha, \beta]^*$, если $f(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(z)$ – регулярная функция в единичном круге D и однолистно отображает D на область B , удовлетворяющую условию $(\alpha, \beta)^*$,

2) $f(0) = 0$.

Обозначим через $\pi\alpha_k$, величину внутреннего угла области B при вершине A_k . Если вершина A_k лежит в бесконечно удаленной точке, то угол при этой вершине берется равным (со знаком минус) углу, образованному пересечением лучей, являющихся образами в плоскости ξ соответствующих кривых l_k, l_{k+1} (на многолистной плоскости ξ).

Теорема. Если функция $f(z)$ подчиняется условию $[\alpha, \beta]^*$, то она удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$\{f, z\} = -\frac{1}{2}(\alpha - 1 + i\beta)(\alpha - 3 + i\beta) \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)^2 + P(z),$$

где

$$P(z) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{(1 - \alpha_k^2)}{2(z - \alpha_k)^2} + \frac{C_k}{z - a_k} \right),$$

где через $\{f, z\}$ обозначена производная Шварца отображения f (см., напр., [1]).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

Э. О. Митягина, А. А. Саламатин

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
elina-fun@mail.ru, arthouse131@rambler.ru*

**ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ КОНВЕКТИВНОЙ
ДИСПЕРСИИ И НЕОДНОРОДНОСТИ УПАКОВКИ
ПРИ ТИПИЧНЫХ РЕЖИМАХ
СВЕРХКРИТИЧЕСКОЙ ФЛЮИДНОЙ
ЭКСТРАКЦИИ**

Сверхкритическая флюидная экстракция — один из технологических методов извлечения ценных природных соединений из растительного сырья. Процесс заключается в прокачке сверхкритического растворителя через аппарат, содержащий зернистый слой, составленный из полидисперсных частиц измельченных растительных семян.

В работе рассматриваются масличные культуры, что при наличии продольной дисперсии позволяет ограничиться квазистационарным конвективным приближением течения [1]:

$$\frac{\partial c}{\partial z} - \delta_D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = q[\chi, f].$$

Здесь z — безразмерная координата, отсчитываемая вдоль оси аппарата, c — концентрация целевых веществ в поровом пространстве зернистого слоя, δ_D — безразмерный комплекс, определяющий относительное влияние на темпы экстракции конвективного переноса по сравнению с дисперсионным, а свободный член q в правой части уравнения описывает интенсивность массоотдачи из частиц слоя и зависит от выбора соответствующей микроскопической модели массопереноса внутри индивидуальной частицы, а также от способа упаковки χ полидисперсных частиц в аппарат (f — функция плотности объемного распределения частиц).

В представленной работе на основе известных корреляций [2, 3] для коэффициента дисперсии определены характерные значения безразмерного комплекса δ_D при типичных режимах эксплуатации установки, в приближении модели сужающегося ядра [1] исследуется влияние способа упаковки частиц в аппарат на динамику выхода из аппарата целевых соединений [4]. Численные расчеты показали, что в рассматриваемом диапазоне скоростей фильтрации главным фактором, определяющим кинетику экстракции на макроуровне, является конвективный массоперенос в порах зернистого слоя. При этом в случае полидисперсного зернистого слоя способ упаковки χ частиц в аппарат оказывается несущественным [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований и Республики Татарстан, грант № 15-41-02542 р_поволжье_а.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Egorov A. G., Salamatin A. A. *Bidisperse shrinking core model for supercritical fluid extraction* // Chem. Eng. Technol. – 2015. – V. 38. – No 7. – P. 1203–1211.
2. Yu D., Jackson K., Harmon T. C. *Dispersion and diffusion in porous media under supercritical conditions* // Chem. Eng. Sc. – 1999. – V. 54. – P. 357–367.
3. Funazukuri T., Kong C., Kagei S. *Effective axial dispersion coefficients in packed beds under supercritical conditions* // J. Supercritical Fluids – 1998. – V. 54. – P. 169–175.
4. Salamatin A. A., Egorov A. G. *Optimization of supercritical fluid extraction: Polydisperse packed beds and variable flow rates* // J. Supercritical Fluids – 2015.

И. А. Модин

*НИИ Механики Нижегородского государственного
университета им. Н.И.Лобачевского,
mianet@mail.ru*

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ПАКЕТОВ ПЛЕТЕННЫХ СЕТОК

Методики испытаний и образцы. Пакеты из металлических плетеных сеток являются перспективным демпфирующим элементом с точки зрения защиты конструкций от ударных и взрывных воздействий. По своему конструктивному строению пакеты сеток представляют собой элемент, имеющий различные деформационные свойства в направлениях нормали к слоям и в направлениях нитей. Экспериментальные исследования динамических свойств проводились в системе разрезного стержня Гопкинсона [1]. Испытывались образцы состоящие из 10 и 20 слоев. Для испытания сборки в условиях ударного растяжения использовался аналог схемы Николаса, представляющей из себя модификацию метода Кольского [1]. Схема эксперимента показана на рис. 1. Отражаясь от свободного торца стержня 1, импульс меняет знак и превращается в импульс растяжения, который движется в сторону образца и нагружает его. Регистрация деформации в тензодатчиках 2 позволяет по формулам, описанным выше, рассчитать деформацию образца и силу, которая действовала на образец в процессе нагружения. Используемая в экспериментах установка состояла из дюралевых мерных стержней диаметром 30 мм.



Рис. 1

Результаты динамических испытаний на сжатие. Скорость деформации изменялась в пределах

$$V = 1500 - 3500 \text{ c}^{-1}.$$

Нагружение проводилось стальным ударником длиной 300 мм. Начальная скорость ударника для каждого испытания фиксировалась. Деформирование образца проходило в несколько циклов, связанных с распространением волн сжатия и растяжения в стержнях. На рис. 2 слева показаны диаграммы деформирования, включающие участки активного нагружения и разгрузки. Деформирование носит ярко выраженный нелинейный характер. Разгрузки близки к прямым линиям. Разгрузочный модуль для проведенных испытаний

$$19 * 10^3 < E_r < 26 * 10^3 \text{ МПа}.$$

Кривые деформирования слабо зависят от количества слоев. Полученные динамические кривые в сравнении со статическими испытаниями [2] располагаются значительно выше, т. е. наблюдается высокая зависимость от скорости деформации.

Результаты динамических испытаний предварительно обжатых образцов на растяжение. На рис. 2 справа показаны усредненные по нескольким опытам диаграммы на растяжение при различных напряжениях предварительного обжатия. Кривые имеют обозначения 1 – 4 при соответствующих

обжатиях = 37,5, 100, 150, 200 МПа. Влияние предварительного обжатия незначительно, динамические кривые лежат в интервале с учетом разброса эксперимента. При статическом растяжении [2] влияние предварительного обжатия более значительно.

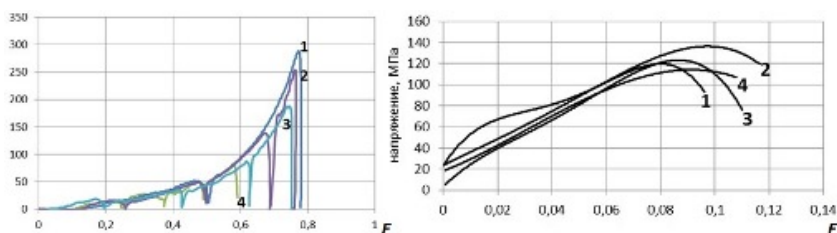


Рис. 2

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-08-00219а, 14-08-00197а). Выражаю благодарность за помощь в проведении экспериментов Константинову А.Ю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bragov A. M., Lomunov A. K. *Methodological aspects of studying dynamic material properties using the Kolsky method* // Int. J. of Impact Engineering, 1995. – V. 16(2). – P. 321–330.
2. Горохов А. Н., Казаков Д. А., Кочетков А. В., Модин И. А., *Исследование деформационных свойств пакетов плетеных металлических сеток при квазистатическом сжатию и растяжению* // Проблемы прочности пластичности. – 2014. – № 76(3). – С. 251.

И. И. Мухаметгалиев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

aabyzov@ksu.ru, tranhoaingocnhan@gmail.com,

ilnur.muhametgal@mail.ru

ОБ ОДНОМ МАТРИЧНОМ АНАЛОГЕ МАЛОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей. Кольцо называется *ниль-чистым*, если каждый его элемент является суммой нильпотентного элемента и идемпотента. Элемент e из кольца R называется *k -потентным*, если выполнено равенство $e^k = e$. В работе [1] было показано, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ кольцо матриц $M_n(F_2)$ является ниль-чистым. Следующее утверждение является обобщением этого факта на случай произвольного конечного поля.

Теорема. *Пусть q – степень простого числа и F_q – конечное поле из q элементов. Тогда для каждого натурального числа n всякая квадратная матрица A размера $(n \times n)$ представима в виде суммы q -потентной матрицы и нильпотентной матрицы.*

Следствие 1. *Пусть R – коммутативное кольцо и I – максимальный идеал кольца R . Если $|R/I| < \infty$, то имеет место сравнение*

$$\text{tr}(A^{|R/I|}) \equiv (\text{tr} A)^{|R/I|} \pmod{I}.$$

Следующее утверждение было установлено В. И. Арнольдом в работе [2].

Следствие 2. *Для всякой целочисленной квадратной матрицы имеет место сравнение по модулю p : $\text{tr}(A^p) \equiv (\text{tr} A)^p$.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Breaz S., Calugareanu G., Danchev P., Micu T. *Nil-clean matrix rings* // Linear Algebra and its Applications. – 2013. – V. 439. – P. 3115–3119.

2. Арнольд В. И. *Динамика Ферма, арифметика матриц, конечная окружность и конечная плоскость Лобачевского* // Функц. анализ и его прил. – 2004. – Т. 38. – Вып. 1. – С. 1–13.

Л. Ю. Низамиева, М. А. Шурыгина

КНИТУ-КАИ

**ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ
СТУДЕНТАМ НЕПРОФИЛЬНЫХ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ**

Преподавание математических дисциплин студентам непрофильных специальностей направлено на формирование их общекультурных и профессиональных компетенций. Уровень подготовленности выпускника к профессиональной деятельности, обусловленный глубокими фундаментальными знаниями и профессиональными навыками, определяет его профессиональную компетентность, составной частью которой является профессиональная математическая компетентность. Обучение математике студентов непрофильных специальностей исследуется в различных отечественных и зарубежных работах, в части которых описываются различные подходы к формированию профессиональной математической компетентности. Но в большинстве работ недостаточно отражается то, что профессиональная математическая компетентность, как и профессиональная компетентность в целом, является характеристикой

конкретного специалиста. Поэтому ее формирование требует учета индивидуальных особенностей обучения, в частности, индивидуальных различий протекания познавательных процессов обучающихся, влияющих на усвоение математического знания.

Получившие в последние десятилетия широкое распространение мультимедийные технологии позволяют учитывать индивидуальные особенности протекания познавательных процессов студентов в процессе обучения математике. Использование мультимедийных технологий предоставляет каждому обучающемуся наиболее оптимальный для него способ восприятия и усвоения изучаемого материала за счет: самостоятельного выбора обучающимся индивидуальной траектории работы с учебным материалом; использования всех видов представления информации, воздействующих на разные сенсорные каналы; интерактивного режима, содержащего не только статическую, но и динамическую последовательность предъявления учебного материала.

Использование мультимедийных технологий и учет индивидуальных особенностей протекания познавательных процессов при обучении математике способствуют повышению уровня профессионально-ориентированных математических знаний, умений и навыков; совершенствованию умений саморегуляции учебной деятельности, повышению уровня мотивации изучения математики; формированию профессиональной математической компетентности. Применение технологий мультимедиа с учетом индивидуальных особенностей протекания познавательных процессов в процессе обучения математике предполагает следующее:

- разработка и представление теоретического материала и

профессионально-ориентированных задач и заданий в вариативной форме;

- структурирование материала с учетом индивидуальных особенностей познавательных процессов на основе результатов диагностики, предусматривающее различный порядок изложения учебного материала для обучающихся и учитывающее индивидуальные особенности познавательных процессов;

- техническое оснащение лекционной аудитории мультимедийными средствами передачи информации;

- обеспечение обучающихся электронными носителями информации, позволяющими оптимизировать процесс обучения математике.

Важны подготовленность и желание преподавателей учитывать индивидуальные психологические особенности обучающихся, формирование их готовности к использованию новейших достижений, научных разработок и передовых технологий. Мы полагаем, что учет индивидуальных особенностей познавательных процессов студентов – один из важнейших компонентов математической подготовки, обеспечивающий развитие профессиональной компетентности, в частности, профессиональной математической компетентности.

А. О. Новиков

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
novartole@yandex.ru*

**ВЫЧИСЛЕНИЕ МОДУЛЯ ДВУСВЯЗНОЙ
ОБЛАСТИ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩУЮ СОБОЙ
РАЗНОСТЬ ДВУХ ГОМОТЕТИЧНЫХ
ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ**

В последнее время возрос интерес к изучению конформных модулей четырехсторонников и двусвязных областей, ограниченных полигонами (см., напр., [1]). В [1], в частности, получена формула для вычисления модуля двусвязной области, являющейся разностью двух гомотетичных прямоугольников. В данной работе с использованием методов из [2] мы получаем другое выражение для этого модуля.

Пусть Ω — двусвязная область, представимая в виде разности $\Omega = ([-\alpha, \alpha] \times [-\beta, \beta]) \setminus ([-a, a] \times [-b, b])$, где $\alpha > a > 0$, $\beta > b > 0$, $\alpha/a = \beta/b$. Оси координат делят Ω на четыре части, каждая из которых составлена из трех равных одинаковых прямоугольников. Обозначим через Ω_1 четырехсторонник, являющийся частью Ω , лежащей в первой четверти, причем «вертикальными» сторонами являются части границы, лежащие на осях координат. В силу принципа симметрии модуль Ω в четыре раза меньше величины, обратной к экстремальной длине L_{Ω_1} семейства кривых, соединяющих «вертикальные» стороны Ω_1 .

Для вычисления L_{Ω_1} отобразим конформно любой из трех прямоугольников, ее составляющих, на верхнюю полушпоскость. По принципу симметрии это отображение продолжается до конформного отображения области Ω_1 на риманову по-

верхность, граница которой лежит над действительной осью. Следовательно, она является половиной компактной римановой поверхности рода нуль, которая униформизируется рациональной функцией. После определения этой функции мы можем найти L_{Ω_1} , а следовательно, и модуль Ω . Сформулируем полученный нами результат.

Обозначим через $K(k)$ эллиптический интеграл первого рода. Пусть

$$\nu = \frac{(1+k)^2}{4k},$$

где параметр k определяется из равенства

$$\frac{K(k')}{K(k)} = \frac{2b}{a}, \quad k' = \sqrt{1-k^2}.$$

Введем величины

$$\varphi = \frac{1}{3} \arccos \frac{1}{\sqrt{\nu}}, \quad u_1 = -3\sqrt{\nu} \cos \varphi, \quad u_2 = -3\sqrt{\nu} \cos \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$\gamma = \frac{u_2 + 3}{u_2 - u_1} (1 - u_1) - 2, \quad s = \frac{1}{2} (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4}).$$

Теорема. *Модуль двусвязной области Ω равен*

$$M_{\Omega} = (4L_{\Omega_1})^{-1}, \quad \text{где} \quad L_{\Omega_1} = \frac{2K(s)}{K(s')}, \quad s' = \sqrt{1-s^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Nasyrov S. R. *Riemann–Schwarz reflection principle and asymptotics of modules of rectangular frames* // Computational Methods and Function Theory. – 2015. – V. 15. – No 1. – P. 59–74.
2. Nasyrov S. R. *Conformal mappings of stretched polyominoes onto half-plane*. – <http://arxiv.org/abs/1308.4392>. – 15 pp.

В. В. Новиков, Л. Н. Февральских

*Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского,
grigorieva_ln@mail.ru*

**ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ВРАЩАЮЩИМИСЯ
НЕКОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ СФЕРИЧЕСКИМИ
ПОВЕРХНОСТЯМИ**

Возникновение магнитного поля Земли связывают с конвекционными токами в жидком ядре, которые невозможны без радиальной составляющей скорости [1]. В данной работе решается задача о движении жидкости между вращающимися сферами, причем центр симметрии внутренней сферы сдвинут относительно центра внешней на малое расстояние, медленно меняющееся со временем. Рассматриваемая модель отвечает современным представлениям о внутреннем строении Земли. В работе [2] показано, что твердое ядро испытывает смещение на расстояние 5–15 км относительно геоцентра вследствие притяжения неоднородностей на границе ядро-мантия. Предложенная модель позволяет получить радиальное течение, с наличием которого связывают существование магнитного поля.

Рассматривается движение однородной несжимаемой вязкой жидкости, заполняющей пространство между двумя вращающимися сферическими поверхностями. Внутренняя сфера радиуса r_1 с центром в точке O_1 вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 относительно оси O_1z_1 системы $O_1x_1y_1z_1$, а внешняя сфера радиуса r_2 с центром в точке O_2 – с постоянной скоростью ω_2 относительно O_2z_2 неподвижной системы

$O_2x_2y_2z_2$. Оси вращения O_1z_1 и O_2z_2 удалены друг от друга на малое расстояние $\delta_x = \delta_{x0} + \delta_{x1}e^{i\Omega t}$ ($\delta_{x0}, \delta_{x1} \ll 1$), медленно меняющееся со временем ($\Omega \ll 1$), а оси O_1x_1 и O_2x_2 - на малое расстояние δ_z ($\delta_z \ll 1$) таким образом, что центр O_1 в системе $O_2x_2y_2z_2$ имеет координаты $O_1(\delta_x, 0, \delta_z)$ (рис. 1).

В предположении малости числа Рейнольдса

$$\frac{\omega_1 r_1^2}{\nu} \ll 1, \quad \frac{\omega_2 r_2^2}{\nu} \ll 1,$$

где ν - кинематическая вязкость жидкости, уравнение Навье-Стокса упрощается. Нелинейную составляющую силы инерции $|(\vec{v}, \nabla)\vec{v}| \ll 1$ можем не принимать в расчет, считая течение ламинарным. Уравнение движения жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}, \quad (1)$$

где p - давление, ρ - плотность жидкости.

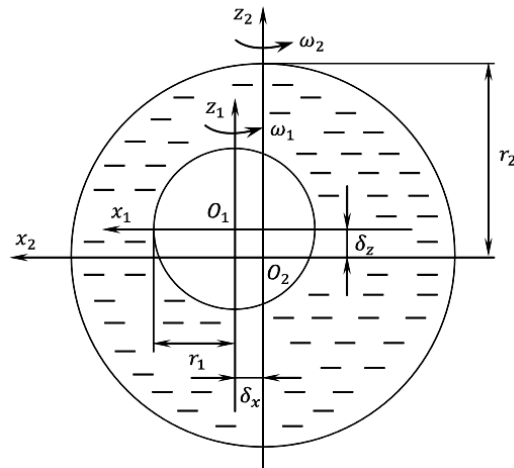


Рис. 1. Модель течения жидкости между вращающимися сферическими поверхностями.

Применив к (1) операцию rot , приходим к уравнению:

$$\frac{\partial \text{rot } \vec{v}}{\partial t} = \text{rot } \Delta \vec{v}. \quad (2)$$

Скорость течения жидкости должна удовлетворять уравнению неразрывности:

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (3)$$

и условиям прилипания к ограничивающим ее поверхностям.

При решении задачи (2), (3) с соответствующими граничными условиями используется аппарат шаровых векторов [3].

Полученное решение показывает, что рассмотренная модель допускает возможность радиального течения в случае смещения внутренней ограничивающей поверхности относительно внешней в направлении, перпендикулярном осям вращения тел.

Данная задача решена в предположении ламинарного течения жидкости. Оценка числа Рейнольдса по средней вязкости жидкого ядра и угловой скорости вращения твердого ядра относительно мантии характеризует режим движения жидкости как промежуточный между ламинарным и турбулентным [4]. Тем не менее, это не исключает возможность обнаруженных особенностей течения в жидком ядре.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08326).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Каулинг Т. *Магнитная гидродинамика*. – 1978.
2. Баркин Ю. В. *К динамике твердого ядра Земли* // Тр. Гос. Астрономического ин-та им. П. К. Штернберга. – 1996. – Т. LXV. – С. 136–145.

3. Петрашень Г. И. *Динамические задачи теории упругости в случае изотропной сферы* // Уч. записки ЛГУ. Серия матем. наук. – 1949. – Вып. 17. – № 114. – С. 2–27.

4. Денисов Г. Г., Новиков В. В., Федоров А. Е. *Как твердое ядро Земли сутки изменяет* // Природа. – 2013. – № 5. – С. 3–10.

П. А. Новиков

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
pnovi@mail.ru*

КОЭФФИЦИЕНТ ГОТОВНОСТИ ЗИП ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОПОЛНЕНИИ

Вычисление коэффициента готовности K комплекта ЗИП при периодическом пополнении (см. [1], п. 1.4.1) для наработки на отказ с экспоненциальным распределением при заданных периоде пополнения T , количестве запчастей в ЗИП L , и параметре экспоненциального распределения λ производится по известной формуле (1.7) [1]. В настоящей работе получен метод вычисления K при периодическом пополнении для наработки на отказ с распределением Вейбулла $G(t) = 1 - \exp\{-(t/\theta)^c\}$ при заданных T , L , и параметрах распределения c и θ .

Метод основывается на разложении Уайта (см. [2], [3], п. 4.4.2.1). Из (4.27b) [3] следует, что вероятность безотказной работы, т. е. вероятность не более чем L отказов в течение времени t (см. [1], п. 1.4.1), равна $P(N_t \leq L) = 1 - F_{L+1}(t)$ (здесь и далее используются обозначения из [3], п. 4.4.2.1). Вви-

ду (4.44a)–(4.44e) [3] вероятность безотказной работы

$$P(t; L) = 1 - \sum_{j=L+1}^{\infty} (-1)^{j+L+1} \frac{a_{L+1}(j)}{j!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{cj}, \quad (1)$$

где $a_1(j) \equiv 1 \ \forall j$, $a_{n+1}(j) = \sum_{i=n}^{j-1} a_n(i) \gamma(i, j)$,

$$\gamma(i, j) = \frac{\Gamma(1 + ic) \Gamma[c(j - i) + 1] j!}{\Gamma(1 + jc) i! (j - i)!}.$$

Применяя формулу (1.5) [1] к выражению (1), получаем формулу для вычисления K при заданных T , L , c и θ :

$$K(T; L) = 1 - \sum_{j=L+1}^{\infty} (-1)^{j+L+1} \frac{a_{L+1}(j)}{j!(cj + 1)} \left(\frac{T}{\theta}\right)^{cj}. \quad (2)$$

В табл. 1 представлены результаты вычислений K по формуле (2) (четвертый столбец) и методом статистического моделирования (пятый столбец) при $T = 1$ и различных c , θ и L . Для $c = 1$ также приведены значения K , полученные по формуле (1.7) [1] с соответствующей перепараметризацией (шестой столбец). Значение ряда (2) вычисляется как конечная сумма вплоть до некоторого фиксированного числа $N = 100$.

Табл. 1

c	θ	L	K_W	K_{MC}	K_{test}
0.8	0.04	6	0.318	0.316	–
0.9	0.07	7	0.581	0.579	–
1.0	0.05	5	0.301	0.299	0.300
1.0	0.20	3	0.713	0.713	0.713
1.1	0.10	8	0.813	0.812	–
1.2	0.15	5	0.787	0.790	–

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Черкесов Г. Н. *Оценка надежности систем с учетом ЗИП. Учеб. пособие.* – СПб.: БХВ–Петербург, 2012. – 480 с.: ил. + CD-ROM.
2. White J. *Weibull renewal analysis* // SAE Technical Paper 640624, 1964. – doi:10.4271/640624.
3. Rinne H. *The Weibull distribution: a handbook* // Chapman and Hall/CRC, 2008. – 808 p.

И. В. Орлова

*Вятский государственный гуманитарный университет,
lubyagina@yandex.ru*

**ИДЕАЛЫ И КОНГРУЭНЦИИ ЦИКЛИЧЕСКИХ
ПОЛУКОЛЕЦ С НЕКОММУТАТИВНЫМ
СЛОЖЕНИЕМ**

Основные результаты, связанные с изучением циклических полуколец с некоммутативным сложением, приведены в работе [1]. Пусть $S = (a)$ – циклическое полукольцо (с некоммутативным сложением) типа (k, n) . Множество C – его цикл.

Теорема 1. *Множества вида $A_s = \{a^s, \dots, a^k, \dots, a^{k+n-1}\}$, где $s \leq k$, циклического полукольца $S = (a)$ типа (k, n) и только они являются идеалами в S . В частности, при $s = k$ множество $A_s = A_k = C$ и оно является наименьшим идеалом в S .*

Следствие 1. *Множества $S = A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_{k-1} \supset A_k = C$ – цепь идеалов циклического полукольца $S = (a)$ типа (k, n) .*

Известно, что каждая подгруппа циклической группы циклическа; и порядок любой подгруппы конечной группы делит её порядок. Заметим, что любая подгруппа (c^d) циклической группы $C = (c)$ порядка n образует класс некоторой конгруэнции ρ :

$$c^r \rho c^{r_1} \iff r - r_1 \equiv 0 \pmod{d}, \quad (1)$$

где d – делитель n .

Обозначим конгруэнцию на конечной циклической группе, задаваемую формулой (1), через ρ_d .

Лемма 1. *Конгруэнция, заданная на мультипликативной группе конечного циклического полуполя, является полукольцевой конгруэнцией.*

Рассмотрим произвольные числа t и d , такие, что $0 \leq t \leq k$, d – делитель числа n . Обозначим через $\rho(t, d)$ – отношение эквивалентности, заданное на конечном циклическом полукольце $S = (a)$ типа (k, n) и удовлетворяющее следующим условиям:

1. $a^r \rho(t, d) a^s \iff ((r < t, s < t) \text{ или } (r \geq t, s \geq t))$;
2. если $r < t$ и $s < t$, то $(a^r \rho(t, d) a^s \iff r = s)$;
3. если $r \geq t$ и $s \geq t$, то $(a^r \rho(t, d) a^s \iff r - s \equiv 0 \pmod{d})$.

То есть “до” элемента a^t отношение $\rho(t, d)$ является отношением равенства, а “начиная” с элемента a^t – отношение $\rho(t, d)$ удовлетворяет формуле (1).

Заметим, что при $d = n$ и любом t все классы конгруэнции $\rho(t, d)$ одноэлементные.

Теорема 2. *Отношение $\rho(t, d)$ и только оно на конечном циклическом полукольце является конгруэнцией.*

Следствие 2. *Количество конгруэнций на конечном циклическом полукольце типа (k, n) равно $(k + 1)\sigma_0(n)$, где $\sigma_0(n)$ – число делителей n .*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вечтомов Е. М., Лубягина И. В. *Циклические полукольца с идемпотентным некоммутативным сложением* // Фунд. и прикл. матем. – 2011/2012. – Т. 17. – Вып. 1. – С. 33–52.

К. А. Петухова

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ksenypet@mail.com*

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КРИПТОСИСТЕМЫ RSA

Математический аппарат, используемый при построении, обосновании и анализе известной криптосистемы *RSA*, относится, в основном, к теории чисел. В [1] было показано, что более адекватным аппаратом является теория коммутативных дедекиндовых колец. Предложенный в [1] подход позволяет считать первоначальный алгоритм *RSA* весьма частным случаем среди обширного класса подобных алгоритмов. Исследования, начатые в [1], были продолжены в [2] и [3]. В нашем докладе показывается, что условия коммутативности и дедекиндовости, вообще говоря, не обязательны. Класс колец, ассоциированных с единицей, среди которого можно искать кольца, подходящие для практической реализации модернизированного *RSA*, — это кольца с коммутирующими идеалами или *CI*-кольца, введенные в [4]. Суть шифрования по методу *RSA* в общем алгебраическом виде такова. Пусть I — идеал кольца

R , такой что $U(R/I)$ — конечная группа. Тогда определен аналог функции Эйлера $\varphi(I) = |U(R/I)|$. Пусть $e \in \mathbb{N}$ таково, что $\text{НОД}(e, \varphi(I)) = 1$, и пусть $d \in \mathbb{N}$ таково, что $ed = 1 + \varphi(I)t$. Будем говорить, что I есть RSA -идеал, если для каждого $x \in R$ выполняется $x^s \equiv x \pmod{I}$ для $s = ed$. Для RSA -идеала можно определить шифрование $m \in R$ по формуле $c = m^e \pmod{I}$ и дешифрование $m = c^d \pmod{I}$. При этом $m, c \in W$, где W — подходящая полная система вычетов по модулю I .

Теорема. Пусть R есть CI -кольцо. Идеал I является RSA -идеалом тогда и только тогда, когда $I = M_1 M_2 \dots M_r$, где M_j — максимальный идеал для каждого j .

Следствие. Если I есть RSA -идеал, то числа e и d с условием $ed = 1 + \varphi(I)t$ можно выбирать произвольно.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной КФУ для выполнения проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 1.2045.2014).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Tronin S. N., Petukhova K. A. *RSA cryptosystem for Dedekind rings* // Матер. конф. “Алгебра и матем. логика: теория и прил.” (г. Казань, 2–6 июня 2014) и сопутств. молод. летней школы “Вычислимость и вычисл. структуры”. — Казань, 2014. — С. 148–149.
2. Петухова К. А. *Об аналоге функции Эйлера для идеалов дедекиндовых колец* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского: Матер. Тринадцатой молодежной шк.-конф. “Лобачевские чтения”. — Казань, 2014. — Т. 50 — С. 148–149.
3. Петухова К. А. *Разложимость в произведение идеалов в некоторых дедекиндовых кольцах и приложения к криптографии* // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: Матер.

Тринадцатой междуна. конф., посв. 85-летию со дня рождения проф. С. С. Рышкова. – Тула, 2015. – С. 200–202.

4. Armendariz E. P. *Rings with Commuting Ideals* // 9th Annual Meeting Texas Section of the MAA. – 2011. – P. 35.

К. У. Рахимов

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
kamoliddin_ru@inbox.ru*

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНФОРМНОГО МОДУЛЯ РАСТЯНУТОГО N -ТЕТРАМИНО

Пусть $H > 0$ – некоторое фиксированное число. Рассмотрим область P_H , которая получается из прямоугольника $[0, 3H] \times [0, 2]$ выбрасыванием прямоугольников $[0, H] \times [0, 1]$ и $[2H, 3H] \times [1, 2]$. При $H = 1$ получаем фигуру, составленную из четырех квадратов, так называемое N -тетрамино. Область P_H получается из этого тетрамино растяжением в H раз в направлении оси абсцисс. Пусть $A_0 = 1 + i$, $A_1 = H$, $M = 2H$, $A_2 = 3H$, $A_3 = 3H + i$, $A_4 = 2H + i$, $A_5 = 2H + 2i$, $N = H + 2i$, $A_6 = 2i$, $A_7 = i$. Рассмотрим P_H как четырехсторонник с отмеченными вершинами A_1, A_2, A_6, A_7 . Интересными являются задача нахождения модуля этого четырехсторонника и связанная с ней задача нахождения конформного отображения P_H на верхнюю полуплоскость.

Для их решения будем использовать методику, предложенную в [1]. Сначала отобразим конформно прямоугольник $A_0A_4A_5N$ на нижнюю полуплоскость так, чтобы вершины A_0, A_4, A_5 и N перешли в точки $0, \infty, m > 1$ и 1 . По принципу симметрии это отображение продолжается до отображения P_H на двулиственную риманову поверхность, являющуюся половиной

односвязной компактной римановой поверхностью, которая униформизируется рациональной функцией

$$\omega(\zeta) = c \frac{\zeta^3(\zeta - \alpha_3)}{(\zeta - 1)^3}. \quad (1)$$

Здесь параметры c и α_3 зависят от значения H . После определения этих параметров находится искомое конформное отображение и модуль четырехсторонника P_H .

Приведем алгоритм для нахождения модуля тетрамино P_H . Нетрудно показать, что $m = (k+1)^2/(4k)$, где k определяется из соотношения $K(k)/K(k') = 2/H$ (здесь $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, $k' = \sqrt{1-k^2}$). Найдем μ как корень уравнения $(1 - \sqrt{m})\mu^3 + (9\sqrt{m} - 3)\mu^2 - 24\sqrt{m}\mu^2 + 16\sqrt{m} = 0$, лежащий на $(0, 1)$. Тогда можно определить параметры в (1):

$$\alpha_3 = (4\mu - \mu^2)/3, \quad c = \frac{m(\mu - 1)^3}{\mu^3(\mu - \alpha_3)}.$$

Далее найдем α_1 и α_2 как корни уравнения $cx^4 - (c\alpha_3 + 1)x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0$, лежащие на $(0, \mu)$ и $(\mu, 1)$, а α_5 и α_6 – как корни уравнения $cx^4 - (c\alpha_3 + m)x^3 + 3mx^2 - 3mx + m = 0$, лежащие на $(0, \nu)$ и $(\nu, +\infty)$. Здесь $\nu = 4 - \mu$.

Пусть $\lambda < 1$ – корень уравнения

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\lambda^2 + 2(2\alpha_6 - \alpha_1 - \alpha_2)\lambda + \alpha_1 - \alpha_2 = 0.$$

Тогда $\text{Mod}(P_H) = K(\lambda)/K(\lambda')$, $\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$.

Отметим, что при конформном отображении P_H на верхнюю полуплоскость точки α_k соответствуют вершинам A_k , а точки μ и ν – точкам M и N .

Рассмотрены примеры, подтверждающие что предложенным методом модуль $\text{Mod}(P_H)$ находится с хорошей точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nasyrov S. R. *Conformal mappings of stretched polyominoes onto half-plane* // <http://arxiv.org/abs/1308.4392>.

З. З. Ризванов, Э. И. Фазлеева

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
rizvanov.zemfir@mail.ru, elmira.fazleeva@mail.ru*

**РОЛЬ ЗАДАЧ “НА ДВИЖЕНИЕ” В КУРСЕ
МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ**

Задачи “на движение” относятся к одним из самых сложных задач в курсе математики для учащихся 5–9 классов средней школы. Связано это, в первую очередь, с тем, что сюжеты таких задач представляют из себя реальные или выдуманные физические процессы и явления. Во-вторых, в этих задачах необходимо составить иллюстративный чертеж, где была бы видна динамика движения со всеми характерными моментами – встречами, остановками и поворотами. В третьих, нужно построить математическую модель задачи (всевозможные вычисления, т. е. выполнение различных арифметических операций; составление уравнений или неравенств и их решение). Таким образом, решение текстовой задачи “на движение” требует от ученика логического мышления, сообразительности и наблюдательности, а также умения самостоятельно осуществлять небольшие исследования.

Все задачи “на движение” можно разделить на четыре типа. К первому типу относятся задачи, в которых, два объекта движутся в одном направлении. Как правило, в них требуется либо определить время, через которое один объект догонит

другой, либо расстояние, на котором объекты будут находиться через некоторое время.

Ко второму типу относятся задачи, в которых объекты движутся навстречу друг другу. В таких задачах, к примеру, требуется определить время, через которое они встретятся.

К третьему типу можно отнести задачи, в которых объекты движутся в противоположных направлениях, и требуется определить, например, расстояние, на котором они окажутся через некоторое время, либо время, через которое объекты окажутся на заданном расстоянии. Встречаются и другие вариации задач на эту тему.

К четвертому типу относятся задачи, связанные с движением по кольцевым дорогам, где требуется определить, например, количество кругов, проделанных одним объектом, за один час или за одну минуту времени.

Определившись с типами задач “на движение” мы провели сравнительную характеристику учебников 5–6, 7–9 классов, на наличие таких задач. Результаты представлены в таблицах 1 и 2.

Табл. 1. Сравнительная характеристика учебников математики 5–6 классов по количеству задач “на движение”

Название учебника	Количество текстовых задач	
	5 класс	6 класс
Математика (авторы: Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов и др.)	40	32
Математика (авторы: И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович)	35	14

Табл. 2. Сравнительная характеристика учебников математики 7–9 классов по количеству задач “на движение”

Название учебника	Количество текстовых задач		
	7 класс	8 класс	9 класс
Алгебра (авторы: Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк и др.)	22	50	20
Алгебра (авторы: Ш.А. Алимов и др.)	30	23	30

Анализ показал, что в целом в представленных учебниках имеется достаточное количество задач “на движение” первых трех вышеприведенных типов со схожими простыми сюжетами: прогулки от дома до школы, от одного населенного пункта до другого; соревнования на лыжах, велосипедах, автомобилях, по плаванию, движение на различном транспорте от одного пункта до другого; движение по течению реки и против течения на теплоходе, катере; движение при попутном ветре, при встречном ветре и т. д. Но для успешной сдачи ОГЭ и

ЕГЭ этого недостаточно, так как в КИМах представлены более сложные задачи; и, вдобавок к этому, задачи четвертого типа в данных учебниках вовсе не встречаются.

В связи с этим, в целях дополнения системы задач конкретных учебников, а также для преодоления трудностей при решении задач “на движение”, нами был разработан электронный учебник с названием “Задачи на движение”.

Учебник создан с помощью программы AutoPlay Media Studio. В нем имеются разделы: теоретическая часть, задачи из текстов ОГЭ и ЕГЭ, задачи для самостоятельного решения и дополнительная информация (пособия).

В теоретической части можно познакомиться с определенными понятиями и рассмотреть методику и алгоритмы решения конкретных типов задач. Во втором разделе приводятся примеры из ОГЭ и ЕГЭ и их решения. В дополнительной информации содержится список литературы.

Задачи выбраны на все четыре типа. Сначала идет ряд простых задач, а затем они постепенно усложняются.

Учебник может стать простым в обращении и незаменимым помощником для учителя и учащихся 5–9 классов в решении задач “на движение”, а также при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ по математике.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кочагина М. Н., Кочагин В. В. *ГИА–2009. Математика: сборник заданий*. – М.: “Эксмо”, 2009. – 240 с.
2. Лапшо Л. Д., Попов М. А. *ОГЭ–2015. Математика: сборник заданий*. – М.: Изд-во “Экзамен”, 2015. – 157 с.
3. Пospelов А. А. *Задачи на движение*. – Санкт-Петербург: Изд. дом “Литература”, 2008. – 157 с.

4. Семенов А. В. *Оптимальный банк заданий для подготовки к ЕГЭ. Единый гос. экзамен 2015. Математика. Уч. пос. под ред. И. В. Яценко, Моск. Центр непр. матем. обр.* – М.: Интеллект-Центр, 2015. – 88 с.

5. Шевкин А. В. *Обучение решению задач в 5–6 классах: Книга для учителя.* – М.: ООО ТИД “Русское слово”, 2012. – 212 с.

Л. В. Рыжова, Г. Р. Хакимова

*Казанский национальный исследовательский технический
университет им. А. Н. Туполева,
krisuga@bk.ru*

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО В МОДЕЛИ ПУАНКАРЕ

Решение задачи на построение на плоскости при помощи циркуля и линейки сводится к решению основных задач, к которым относятся построение биссектрисы угла, середины отрезка, угла, равного данному, перпендикулярных и параллельных прямых, построение треугольников по их элементам.

Для решения задач на построение на плоскости Лобачевского L_2 в модели Пуанкаре мы сначала проводим анализ задачи на языке абсолютной геометрии, а наметив путь решения, переводим его на язык геометрии Лобачевского. Затем поэтапно выполняем построения циркулем и линейкой основных задач, что приводит в результате к построению искомой фигуры.

Нами решены все основные задачи на построение циркулем и линейкой на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре.

Рассмотрим построение угла и отрезка параллельности на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре.

Дана прямая (AB) , точка $C \notin (AB)$, $C \in (DB)$ и $(DB) \parallel (AB)$ в направлении B . Построить отрезок параллельности $[CK] \perp (AB)$, где точка $K \in (AB)$, и $\angle KCB$ – угол параллельности в точке C относительно прямой (AB) .

Построение. Рассмотрим случай, когда прямая (AB) плоскости L_2 является полуокружностью в евклидовом смысле.

1. Переведём сначала задачу на язык абсолютной геометрии. $(CK) \perp (AB)$, тогда $(CC') \perp (AB)$, причём точки C и C' симметричны относительно прямой AB . Прямые (CK) и (CC') совпадают, поэтому мы будем строить перпендикуляр (CC') .

2. В модели Пуанкаре в качестве симметрии относительно прямой (AB) выступает инверсия на евклидовой плоскости, где окружность инверсии ω будет содержать полуокружность AB . Тогда симметричные по Лобачевскому точки C и C' будут взаимно-инверсны по Евклиду относительно окружности ω ($AB \subset \omega$).

Построим точку C' : а) CP – касательная к $\omega(O, \frac{AB}{2})$; б) $PC' \perp OC$, $C' \in OC$. Получили точку C' , инверсную точке C относительно $\omega(O, \frac{AB}{2})$, что следует из определения инверсии.

По Лобачевскому точки C и C' будут симметричны относительно прямой AB . Значит, прямая CC' будет перпендикулярна AB . Прямая Лобачевского CC' в модели Пуанкаре будет в евклидовом смысле полуокружностью с центром на абсолюте Q , проходящей через точки C и C' . Построим эту полуокружность MN . Прямая MN совпадает с прямой CC' , значит $MN \perp AB$ и $MN \cap AB = K$. Тогда $CK \perp AB$.

Значит, CK является отрезком параллельности в точке C относительно прямой AB , а угол параллельности α_0 , соответственно, будет равен $\angle KCB$.

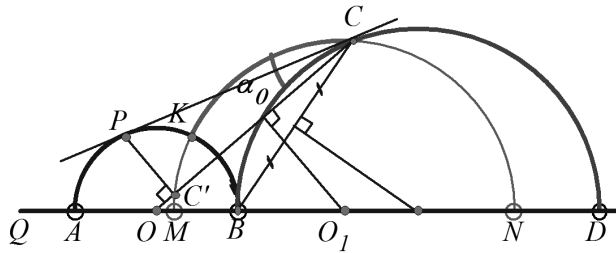


Рис. 1

А. Е. Савенкова

*Самарский государственный технический университет,
alesya.savenkova@mail.ru,*

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим в области $Q_T = (\Omega) \times (0, T)$ уравнение

$$\bar{u}_{tt}(x, t) - \Delta \bar{u}(x, t) + c(x, t)\bar{u}(x, t) = p(x)h(x, t) + f(x, t) \quad (1)$$

и поставим для него следующую задачу: найти пару функций (u, p) , удовлетворяющих (1), начальным данным

$$\bar{u}(x, 0) = \varphi(x), \bar{u}_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

$$\bar{u}(0, t) = \bar{u}(l, t) = 0, \quad (3)$$

и условию переопределения

$$\int_0^T H(t)\bar{u}(x, t)dt = \bar{\delta}(x). \quad (4)$$

Будем считать, что выполнены следующие условия:

$$c(x, t) \in C(\Omega), H(t) \in C^2[0, T], H(T) = H'(T) = 0,$$

$$\int_0^T H(t)h(x,t)dt \geq \sigma_0 > 0, \forall x \in [\Omega], \bar{\delta} \in C^2[\bar{\Omega}], \bar{\delta}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Решение обратной задачи (1)–(4) будем искать в виде

$$\{\bar{u}, p\} = \{u, p\} + \{v, 0\},$$

где $\{v, 0\}$ – решение прямой задачи

$$v_{tt}(x, t) - \Delta v(x, t) + c(x, t)v(x, t) = f(x, t),$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), v_t(x, 0) = \psi(x), v(l, t) = v(0, t) = 0,$$

а $\{u, p\}$ – решение обратной задачи

$$u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + c(x, t)u(x, t) = p(x)h(x, t), \quad (5)$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, \quad (6)$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 \quad (7)$$

с условием переопределения

$$\int_0^T H(t)u(x, t)dt = \delta(x), \quad (8)$$

где

$$\delta(x) = \bar{\delta}(x) - \int_0^T H(t)v(x, t)dt.$$

Однозначная разрешимость обратной задачи (5)–(8) доказана в [1]. Доказательство основано на сведении обратной задачи (5)–(8) к операторному уравнению, для чего потребовалось доказать ряд вспомогательных утверждений, представляющих и самостоятельный интерес. С помощью полученных априорных оценок показана разрешимость операторного уравнения и, как следствие, разрешимость обратной задачи (5)–(8). Доказательство разрешимости прямой задачи при выполнении наложенных на входные данные условий не вызывает трудностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савенкова А. Е. *Обратная задача с интегральным условием переопределения для гиперболического уравнения* // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2014. – № 3(114). – С. 83–92.

А. А. Саламатин, К. Г. Корнев

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Clemson University,
arthouse131@rambler.ru, kkornev@clemson.edu*

**КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ
ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ ДВУУГОЛЬНОЙ
ФОРМЫ: АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ**

В работе моделируется течение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрическом канале (со свободной поверхностью) и трубе (без свободной поверхности) под действием постоянного градиента давления. Сечение столба жидкости (область Ω) изображено на Рис. 1 и представляет собой двуугольник, являющийся результатом разности, пересечения или объединения двух кругов (пунктирные кривые 1, 2 и 3 соответственно).

Квазистационарное приближение течения сводится к двумерному уравнению Пуассона относительно продольной компоненты v вектора скорости, безразмерный вид которого

$$\Delta v(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Форма области Ω полностью определяется тремя параметрами: углом $\theta \in (0; 2\pi)$ двуугольника и радиусами образующих кругов.

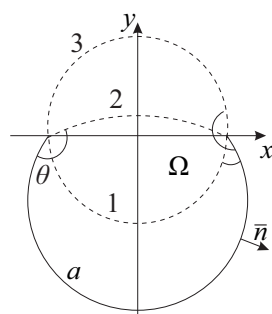


Рис. 1. Область течения Ω . Дугами малого радиуса отмечен угол θ ; \bar{n} – вектор внешней единичной нормали к границе Ω .

Рассматриваемые классы течений отличаются заданием граничного условия на верхнем ребре (кривые 1–3) двуугольника Ω : жидкость в канале обладает свободной поверхностью, на которой задается условие отсутствия трения ($\partial v / \partial n = 0$), а для жидкости в трубе на том же ребре ставится условие прилипания ($v = 0$). На втором ребре (кривая a) всегда задается условие прилипания.

Для каждого типа течения на основе известных формул Пуассона и Дини для задач Дирихле и Неймана на полуплоскости построено аналитическое решение $v(x, y)$. Для этого осуществлен переход от исходной задачи к эквивалентному уравнению Лапласа с неоднородным граничным условием на кривых 1–3 и построено конформное отображение $\xi + i\eta = f(x + iy)$ исходной области Ω на квадрант $\{\xi > 0, \eta > 0\}$. Задача в квадранте допускает продолжение на всю верхнюю полуплоскость $\eta > 0$, что окончательно приводит к задаче Дирихле (течение в трубе) или Неймана (течение в канале) на полуплоскости. Таким образом, решение имеет вид суммы двух интегралов типа Коши по действительной оси.

Аналитическое представление скорости $v(x, y)$ позволяет

исследовать напряжения $\partial v / \partial n$, возникающие на стенках канала или трубы в результате течения жидкости. Для этого при $\theta < \pi/2$ (случай тонких труб или жидкости, хорошо смачивающей канал) потребовалась дополнительная регуляризация решения. Причина заключается в том, что производная плотности интеграла типа Коши, определяющего решение, не удовлетворяет при $\theta < \pi/2$ условию Гельдера. В результате для течения трубе было показано, что при $\pi < \theta < 2\pi$ (объединение двух кругов) напряжения в углах имеют интегрируемую особенность, а при $\theta \leq \pi$ напряжения ограничены.

А. А. Самсонов, П. С. Соловьёв, С. И. Соловьёв

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
sergei.solovyev@kpfu.ru*

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НАГРУЖЕННОЙ ПЛАСТИНЫ

Пусть Ω – область, занимаемая срединной поверхностью пластины, Γ – граница области Ω , $\rho = \rho(x)$ – плотность материала, $D = D(x) = Ed^3/12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость пластины, $E = E(x)$ – модуль Юнга, $\nu = \nu(x)$ – коэффициент Пуассона, $d = d(x)$ – толщина пластины в точке $x \in \Omega$. Предположим, что в точках пластины $x^{(ij)} \in \Omega$ упруго присоединены массы M_{ij} с коэффициентами жесткости подвески K_{ij} , $\sigma_{ij} = K_{ij}/M_{ij}$, $\sigma_i = \sigma_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, r_i$, $r_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, $m \geq 1$, $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_m < \infty$.

Обозначим через $w(x, t)$ нормальные перемещения точки $x \in \Omega$ срединной поверхности пластины в момент времени t ,

через $\eta_{ij}(t)$ – отклонение от положения равновесия груза массы M_{ij} в момент времени t , $j = 1, 2, \dots, r_i, i = 1, 2, \dots, m$. Собственные колебания системы пластина-массы характеризуются гармоническими во времени функциями $w(x, t) = u(x)v(t)$, $x \in \Omega$, $\eta_{ij}(t) = c_{ij}u(x^{(ij)})v(t)$, $t > 0$, где $v(t) = a_0 \cos\sqrt{\lambda}t + b_0 \sin\sqrt{\lambda}t$, $t > 0$; $a_0, b_0, c_{ij}, \lambda$ – постоянные величины, $j = 1, 2, \dots, r_i, i = 1, 2, \dots, m$.

Выполняется [1] уравнение колебания пластины

$$Lw(x, t) + \rho(x)d(x)w_{tt}(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Omega$$

и уравнение осциллятора

$$M_i(\eta_{ij}(t))_{tt} + K_{ij}(\eta_{ij}(t) - w(x^{(ij)}, t)) = 0,$$

где $j = 1, 2, \dots, r_i, i = 1, 2, \dots, m, t > 0$, L – дифференциальный оператор, определяемый выражением: $Lw = \partial_{11}D(\partial_{11}w + \nu\partial_{22}w) + \partial_{22}D(\partial_{22}w + \nu\partial_{11}w) + 2\partial_{12}D(1 - \nu)\partial_{12}w$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_{ij} = \partial_i\partial_j$, $i, j = 1, 2$, $(\psi(t))_t = d\psi(t)/dt$. Движения присоединенных масс и пластины рассматриваются как взаимно вынужденные. При этом действие присоединенных масс заменяется действием гармонической сосредоточенной силы

$$f(x, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} K_{ij}(\eta_{ij}(t) - w(x^{(ij)}, t))\delta(x - x^{(ij)}),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Система уравнений дополняется граничными условиями: $w(x, t) = \partial_n w(x, t) = 0$, $x \in \Gamma$, $t > 0$, где ∂_n – производная по внешней нормали к границе Γ .

Используя соотношения $c_{ij} = \sigma_{ij}/(\sigma_{ij} - \lambda)$, $\sigma_{ij} = K_{ij}/M_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, r_i, i = 1, 2, \dots, m$, получим задачу: найти числа λ и ненулевые функции $u(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющие уравнению

$$Lu + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda}{\lambda - \sigma_i} \sum_{j=1}^{r_i} K_{ij}\delta(x - x^{(ij)})u = \lambda \rho d u, \quad x \in \Omega,$$

и граничному условию $u = \partial_n u = 0$, $x \in \Gamma$. С помощью [2] установлены результаты о существовании и аппроксимации решений сформулированной задачи на собственные значения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00908, № 14-01-00755, № 15-41-02672).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Андреев Л. В., Дышко А. Л., Павленко И. Д. *Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами*. – М.: Машиностроение, 1988. – 200 с.

2. Соловьёв С. И. *Нелинейные задачи на собственные значения. Приближенные методы*. – Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. – 256 с.

Р. Б. Салимов, А. З. Сулейманов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

Казанский государственный

архитектурно-строительный университет,

salimov@5354.ru, ayaz-suleymanov-91@mail.ru

НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ ДЛЯ ФУНКЦИИ, АНАЛИТИЧЕСКОЙ В ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗОМ

В работе рассматривается краевая задача Римана с бесконечным индексом, когда краевое условие задачи задается на положительной действительной оси комплексной плоскости. Для решения этой задачи используется подход, основанный на устранении бесконечного разрыва аргумента коэффициента краевого условия и аналогичный тому, с помощью которого

в случае конечного индекса задачи ранее в работах Ф. Д. Гахова устранялись разрывы коэффициента краевого условия с помощью специально подобранных функций, отличных от используемых в настоящей работе.

Пусть D – область, в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, границей которого служит положительная действительная полуось L . Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в области D , если её граничные значения удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

где $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ – предельные значения функции $\Phi(z)$ при $z \rightarrow t$ “слева” и “справа”, когда соответственно $\text{Im}(z) > 0$ и $\text{Im}(z) < 0$, коэффициент $G(t)$ – заданная функция, удовлетворяющая условиям

- 1) $\ln |G(t)|$ удовлетворяет условию Гёльдера H_L ,
- 2) $\arg G(t) = \nu^+ |t|^\rho + \nu(t)$, где ν^+ , ρ – заданные числа, $\nu^+ > 0$, $0 < \rho < \frac{1}{2}$, $\nu(t)$ – заданная функция, $\nu(t) \in H_L$.

Разработан новый метод построения общего решения, исследована разрешимость. Доказано, что общее решение краевой задачи (1) в классе ограниченных функций определяется формулой

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{E(z)} F(z),$$

в которой $F(z)$ есть любая целая функция порядка $\rho_F < \rho$, удовлетворяющая условию

$$|F(t)| < C e^{t^\rho \nu^+ \cos \pi \rho / (2 \sin \pi \rho)}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения*. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
2. Маркушевич А. И. *Теория аналитических функций. Т. 2*. – М.: Наука, 1968. – 624 с.

Р. Р. Сафиулин, Д. Ю. Топорков

*Институт механики и машиностроения Казанского
научного центра Российской академии наук,
top.dmtr@gmail.com*

**КОЛЛАПС КАВИТАЦИОННЫХ ПУЗЫРЬКОВ
С ОБРАЗОВАНИЕМ УДАРНЫХ ВОЛН**

Одной из наиболее привлекательных для теории и приложений особенностей динамики пузырьков в жидкости являются экстремально высокие давления, плотности и температуры, которых можно достичь в полости пузырька при его сильном сжатии. При этом можно выделить два режима сильного сжатия содержимого пузырька: однородное (и близкое к нему) и неоднородное. В первом режиме газовая среда в пузырьке сжимается всюду одинаково (за исключением тонкого теплового слоя в окрестности межфазной поверхности). Во втором режиме за счет радиального схождения возникающих в пузырьке волн более сильному сжатию подвергается газ в центральной области пузырька. Наиболее сильное сжатие среды в пузырьке достигается при возникновении ударных волн. В связи с этим возникает вопрос, какие газовые среды являются более благоприятными для возникновения в пузырьке ударных волн.

В работе [1] был получен относительно простой критерий возникновения ударных волн в пузырьке при его сильном сжатии, а также была проведена оценка возможности реализации ударных волн в кавитационных пузырьках в воде и жидком ацетоне при давлении жидкости 15 бар. Было установлено, что для образования ударных волн пары ацетона являются намного предпочтительнее паров воды.

В настоящей работе проводится численное исследование возможности реализации ударных волн в кавитационных пузырьках в таких жидкостях, как вода, ацетон, толуол, бензол и этиловый эфир при давлении жидкости 5-150 бар. Для оценки реализации ударных волн применяется критерий работы [1]. Входящие в этот критерий параметры (скорость и ускорение сжатия пузырька, скорость звука в паре на поверхности пузырька и т.д.) определяются в [1] с применением очень сложной математической модели динамики пузырька. В частности, в этой модели движение газа в пузырьке и движение окружающей его жидкости описываются уравнениями газовой динамики с учетом теплопроводности обеих сред, применяются широкодиапазонные уравнения состояния газа и жидкости, учитываются процессы испарения и конденсации на поверхности пузырька. В отличие от [1], в настоящей работе для расчета входящих в критерий реализации ударных волн в пузырьке параметров применяется значительно более простая математическая модель динамики пузырька, а именно, модель Рэлея-Плессета. Сравнение показывает, что и такая модель динамики пузырька для рассматриваемых целей является приемлемой.

Показано, что для формирования ударных волн вода является наименее дружественной. В диапазоне давления жидкости от 30 до 150 бар благоприятнее других является этиловый

эфир, а при давлении жидкости ниже 30 бар более подходящим становится толуол.

Работа выполнена при поддержке Программы РАН № 43 П.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Нигматулин Р. И., Аганин А. А., Ильгамов М. А., Топорков Д. Ю. *Образование ударных волн при сжатии кавитационного пузырька* // ДАН. – 2014. – Т. 458. – № 3. – Р. 282–286.

Е. А. Созонтова

*Елабужский институт Казанского (Приволжского)
федерального университета,
sozontova-elena@rambler.ru*

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ В КВАДРАТУРАХ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе рассматривается

Задача Г. В области $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$ найти регулярное решение системы

$$\begin{cases} u_{xy} + a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 v_y + d_1 u + e_1 v = 0, \\ v_{xy} + a_2 u_x + b_2 v_x + c_2 v_y + d_2 u + e_2 v = 0, \end{cases} \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x_0, y) &= \varphi_1(y), & u(x, y_0) &= \psi_1(x), \\ v(x_0, y) &= \varphi_2(y), & v(x, y_0) &= \psi_2(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагается, что $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\overline{X})$, $\psi_1, \psi_2 \in C^1(\overline{Y})$ (X, Y – стороны характеристического прямоугольника D при $x = x_0, y = y_0$ соответственно) и выполняются условия согласования

$$\varphi_1(y_0) = \psi_1(x_0), \quad \varphi_2(y_0) = \psi_2(x_0).$$

Известно [1, с. 67], что задача (1) – (2) является однозначно разрешимой. Целью нашего исследования является выделение случаев разрешимости данной задачи в квадратурах. Полученные результаты могут быть сформулированы в терминах следующих тождеств

$$\begin{aligned} b_{1y} + a_1 b_1 - d_1 &\equiv 0, \\ c_{1y} + a_1 c_1 - e_1 &\equiv 0, \\ a_{2x} + a_2 c_2 - d_2 &\equiv 0, \\ b_{2x} + b_2 c_2 - e_2 &\equiv 0 \end{aligned} \tag{3}$$

и соотношений

$$\begin{aligned} 1) \quad &b_{2x} - b_{1y} - (\ln c_1)_{xy} + a_2 c_1 \equiv 0; \\ &2) \quad a_2 \equiv 0; \\ &3) \quad b_{2x} - b_{1y} - (\ln c_1)_{xy} \equiv 0, \\ &b_{1y} - b_{2x} + (\ln c_1)_{xy} - a_2 c_1 \equiv \xi_0(x) \eta_0(y) \neq 0; \\ 4) \quad &2[(\ln c_1)_{xy} - b_{2x} + b_{1y}] \equiv a_2 c_1, \\ &(\ln c_1)_{xy} - b_{2x} + b_{1y} \equiv \xi_1(x) \eta_1(y) \neq 0; \\ 5) \quad &b_{2x} - b_{1y} - (\ln c_1)_{xy} \equiv a_2 c_1 \equiv \xi_2(x) \eta_2(y) \neq 0; \\ 6) \quad &m[b_{2x} - (\ln c_1)_{xy}] - b_{1y} \equiv m b_{1y} - b_{2x} + (\ln c_1)_{xy} \equiv \\ &\equiv (m - 1)(a_2 c_1 - b_{1y}); \\ 7) \quad &\sigma_k = \frac{2s'_k(x)t'_k(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2}, \\ &[s_k(x) + t_k(y)](m - 2)s'_k(x)t'_k(y) \neq 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \tag{4}$$

- 1) $c_1 \equiv 0$;
- 2) $-b_{2x} + b_{1y} - (\ln a_2)_{xy} + a_2 c_1 \equiv 0$;
- 3) $b_{2x} - b_{1y} + (\ln a_2)_{xy} \equiv 0$, $-a_2 c_1 \equiv \xi_3(x)\eta_3(y) \neq 0$;
- 4) $b_{1y} - b_{2x} - (\ln a_2)_{xy} \equiv a_2 c_1 \equiv \xi_4(x)\eta_4(y) \neq 0$;
- 5) $2[(\ln a_2)_{xy} + b_{2x} - b_{1y}] \equiv a_2 c_1$,
 $(\ln a_2)_{xy} + b_{2x} - b_{1y} \equiv \xi_5(x)\eta_5(y) \neq 0$; (5)
- 6) $mb_{2x} + (\ln a_2)_{xy} - b_{1y} \equiv m(b_{1y} - (\ln a_2)_{xy}) - b_{2x} \equiv$
 $\equiv (m-1)(a_2 c_1 - b_{2x})$;
- 7) $\sigma_k = \frac{2s'_k(x)t'_k(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2}$,
 $[s_k(x) + t_k(y)](m-2)s'_k(x)t'_k(y) \neq 0$, $k = 3, 4$.

Здесь $\xi_k, \eta_k \in C^1$ ($k = \overline{0, 5}$), $s_k, t_k, m \in C^2$ ($k = \overline{1, 4}$), σ_1, σ_2 равны соответственно левым частям тождеств 1), 2) совокупности (4), а σ_3, σ_4 — левым частям тождеств 1), 2) совокупности (5).

Теорема 1. Пусть при выполнении тождеств (3) и неравенства $c_1 \neq 0$ или удовлетворяется одно из тождеств 1), 2) совокупности (4), или существуют такие функции m, ξ_k, η_k ($k = \overline{0, 2}$), s_k, t_k ($k = 1, 2$) указанных выше классов, что для (4) либо выполнена одна из трех групп соотношений 3) — 5), либо вместе с тождеством 6) имеет место представление 7) для одной из двух функций σ_1, σ_2 . Тогда задача Γ разрешима в квадратурах.

Теорема 2. Если наряду с выполнением тождеств (3) и неравенства $a_2 \neq 0$ или удовлетворяется одно из тождеств 1), 2) совокупности (5), или существуют такие функции m, ξ_k, η_k ($k = \overline{3, 5}$), s_k, t_k ($k = 3, 4$) указанных выше классов, что для (5) либо выполнена одна из трех групп соотношений 3) — 5), либо вместе с тождеством 6) имеет место

представление 7) для одной из двух функций σ_3, σ_4 , то задача Γ разрешима в квадратурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

Д. Т. Тапкин

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
daniil.tapkin@yandex.ru*

ОБОБЩЕННЫЕ АЛГЕБРЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ

Алгебры инцидентности были введены в середине 60-ых годов как естественная среда для изучения комбинаторных проблем. Вскоре стало ясно, что этот объект интересен и сам по себе. В частности он включает в себя произведение n копий кольца R и кольцо верхнетреугольных матриц над R . Существует тесная связь между алгебрами инцидентности и подалгебрами кольца матриц над полем. При изучении строения колец формальных матриц естественным образом возникает конструкция обобщающая алгебры инцидентности.

Все кольца будем считать ассоциативными и с единицей, а модули и бимодули – унитарными. Радикал Джекобсона и группу обратимых элементов кольца R будем обозначать $J(R)$ и $U(R)$ соответственно.

Определение. Пусть дано коммутативное кольцо R и множество X с отношением \leq . Пусть также дан набор $\eta \supseteq \{\eta_{abc} \in R \mid a \leq b \leq c, a, b, c \in X\}$ элементов кольца R , такой что выполняются следующие свойства:

a) $a \leq a, \forall a \in X$ (рефлексивность);

- b) $a \leq b, b \leq c, \eta_{abc} \neq 0$ влечет $a \leq c$ (η -транзитивность);
 c) множество $\{z \mid x \leq z \leq y \text{ и } \eta_{xzy} \neq 0\}$ конечно $\forall x, y \in X$ (обобщенная локальная конечность).

Также потребуем чтобы

- 1) $\forall a, b \in X, \eta_{abb}, \eta_{aab} \in \eta$ и $\eta_{abb} = \eta_{aab} = 1$;
 2) $\forall a \leq b \leq c \leq d \in X, \eta_{abc}, \eta_{acd}, \eta_{abd}, \eta_{bcd} \in \eta$ и $\eta_{abc}\eta_{acd} = \eta_{abd}\eta_{bcd}$.

Такое множество η будем называть мультипликативной системой, а коэффициенты $\eta_{abc} \in \eta$ – мультипликативными коэффициентами. Рассмотрим множество $I(X, R; \{\eta_{abc}\}) = \{f : X \times X \rightarrow R \mid f(x, y) = 0 \text{ если } x \not\leq y\}$. Введем на нем поэлементную операцию сложения и умножения на скаляр. А операцию умножения определим по правилу:

$$(f \cdot g)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y)\eta_{xzy}.$$

Непосредственная проверка показывает, что относительно введенных операций множество $I(X, R; \{\eta_{abc}\})$ становится ассоциативной R -алгеброй, которую будем называть **обобщенной алгеброй инцидентности**. Отношение ' \leq ' будем называть η -предпорядок. Если же дополнительно выполняется свойство

- d) $a \leq b, b \leq a, \eta_{aba} \neq 0$ влечет $a = b$ (η -антисимметричность), то будем говорить что на X задан **частичный η -порядок**.

Обобщенная алгебра инцидентности является прямым обобщением алгебры инцидентности. Были изучены вопросы обратимости элементов обобщенной алгебры инцидентности, изоморфизма этих алгебр. Была введена функция Мёбиуса обобщенной алгебры инцидентности и показано, что сохраняются основные свойства алгебр инцидентности.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абызов А. Н., Тапкин Д. Т. *О некоторых классах колец формальных матриц* // Изв. вузов. Матем. – 2015. – Вып. 3. – С. 1–12.
2. Абызов А. Н., Тапкин Д. Т. *Кольца формальных матриц и их изоморфизмы* // Сиб. матем. журн. – Принята в печать.
3. Тапкин Д. Т. *Кольца формальных матриц и обобщение алгебры инцидентности* // Чебышевский сб. – Принята в печать.

Б. С. Тимергалиев

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
timergalievbs@mail.ru,*

**ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАДВИГЕРА
О СТЕПЕННЫХ МОМЕНТАХ**

Классическое неравенство Брунна-Минковского сравнивает площади и объемы областей. А именно, справедливо неравенство

$$|\Omega_0 + \Omega_1|^{1/n} \geq |\Omega_0|^{1/n} + |\Omega_1|^{1/n}, \quad (1)$$

где $|\Omega|$ – мера множества Ω , Ω_0, Ω_1 – выпуклые тела в \mathbb{R}^n , $\Omega_0 + \Omega_1 := \{z_0 + z_1 \in \mathbb{R}^n : z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$ – векторная сумма (сумма Минковского). Неравенство Брунна-Минковского широко используется в геометрическом анализе, математической физике и теории вероятностей. В настоящее время имеется большое число работ, посвященных этому неравенству. Отметим лишь работу Х. Хадвигера [1], в которой он доказал

неравенство типа Брунна-Минковского для двух моментов выпуклой области, а именно, момента относительно центра масс и момента относительно гиперплоскости.

Пусть Ω – ограниченная, выпуклая область в \mathbb{R}^n . Через s обозначим центр масс области Ω . Определим функционал

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} |z_1 - s_1|^2 + |z_2 - s_2|^2 + \dots + |z_n - s_n|^2 dz_1 \dots dz_n, \quad z \in \Omega,$$

где z_1, z_2, \dots, z_n – декартовы координаты точки $z \in \Omega$, s_1, s_2, \dots, s_n – координаты центра масс Ω . Приведем формулировку результата Х. Хадвигера [1]:

Теорема А. Пусть Ω_0, Ω_1 – ограниченные, выпуклые области в \mathbb{R}^n . Тогда для функционала $J(\Omega_t)^{\frac{1}{n+2}}$ выполнено неравенство:

$$J(\Omega_t)^{\frac{1}{2+n}} \geq (1-t)J(\Omega_0)^{\frac{1}{2+n}} + tJ(\Omega_1)^{\frac{1}{2+n}}, \quad (2)$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 | z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leq t \leq 1$.

Данная работа посвящена обобщению неравенства (2).

Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n . Определим функционал

$$I(k, \Omega) = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} \alpha_1 |z_1 - s_1|^{2k} + \\ + \alpha_2 |z_2 - s_2|^{2k} + \dots + \alpha_n |z_n - s_n|^{2k} dz_1 \dots dz_n, \quad k \in \mathbb{N},$$

где z_1, z_2, \dots, z_n – декартовы координаты точки $z \in \Omega$, s_1, s_2, \dots, s_n – координаты центра масс Ω , $\alpha_i > 0, i = \overline{1, n}$. Нами была доказана следующая:

Теорема. Пусть Ω_0, Ω_1 – ограниченные области в \mathbb{R}^n . Тогда функционал $I(k, \Omega_t)^{\frac{1}{n+2k}}$ вогнут по t , т. е.

$$I(k, \Omega_t)^{\frac{1}{2k+n}} \geq (1-t)I(k, \Omega_0)^{\frac{1}{2k+n}} + tI(k, \Omega_1)^{\frac{1}{2k+n}},$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 | z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leq t \leq 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00351-а).

Выражаю благодарность научному руководителю Авхадиеву Ф.Г. за постановку задачи и ценные указания.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Hadwiger H. *Konkave eikerperfunktionale und hoher tragheitsmomente* // Comment Math. Helv. – 1956. – V. 30. – P. 285–296.

Д. Ю. Топорков, Т. Ф. Халитова

*Институт механики и машиностроения Казанского
научного центра Российской академии наук,
taliny@mail.ru*

СИЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ-СЖАТИЕ ПУЗЫРЬКА, ОБРАЗОВАННОГО В РЕЗУЛЬТАТЕ СЛИЯНИЯ КАВИТАЦИОННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Значительное внимание в динамике пузырьков в жидкости обращается на кумулятивные эффекты, связанные с их сильным сжатием (коллапсом). Наиболее высокие параметры в пузырьке достигаются тогда, когда он в ходе сжатия остается сферическим и в нем возникают сферические радиально сходящиеся ударные волны [1]. Вместе с тем, сферическая форма как пузырька при сжатии, так и ударной волны при сжатии является неустойчивой [2]. Отклонения от сферичности могут быть вызваны действием силы тяжести, поступательным

движением пузырьков, их гидродинамическим взаимодействием. Эти отклонения могут значительно изменить как сценарий сжатия, так и степень концентрации энергии.

В настоящей работе изучаются эволюция несферичности изначально сильно несферического пузырька при его расширении и последующем сжатии и эволюция несферичности радиально-сходящейся ударной волны, возникающей в пузырьке в конце его сжатия. Пузырек образуется в результате слияния двух одинаковых сферических кавитационных микрополостей, когда его начальная несферичность является наибольшей. Насколько известно, такой сценарий сильного расширения-сжатия пузырька не рассматривался. При этом она определяется не одной гармоникой, а линейной комбинацией гармоник. Радиус микрополостей R_0 в момент слияния варьируется в интервале от соответствующих зародышам значений ($\sim 10 - 100$ нм) до величин, при которых несферичность пузырька в конце его сжатия становится значительной. Используются математическая модель и методика расчета работы [3], развитые для изучения схождения ударных волн в полости несферического пузырька. В них учитываются сжимаемость жидкости, испарение-конденсация, теплопроводность жидкости и пара, применяются широкодиапазонные уравнения состояния.

Установлено, что относительно близкое к сферическому сжатие пузырька и его парового содержимого будет реализовываться лишь при $R_0/R_m \leq 0.00056$ (R_m – радиус в момент максимального расширения), т. е. $R_0 \leq 250$ нм. С ростом R_0/R_m от 0.00056 характер сжатия будет все более уклоняться от сферического, а при $R_0/R_m > 0.037$, согласно оценкам по линейной теории, пузырек в ходе сжатия будет разрушаться

(распадаться на более мелкие пузырьки).

Работа выполнена при поддержке Программы РАН № 43 П.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Nigmatulin R.I., et al. *The theory of supercompression of vapor bubbles and nano-scale thermonuclear fusion* // Phys. Fluid. – 2005. – V. 17. 107106.
2. Evans A. K. *Instability of converging shock waves and sonoluminescence* // Phys. Rev. E. – 1996. – V. 54. – No 5. – P. 5004–5011.
3. Аганин А. А., Топорков Д. Ю., Халитова Т. Ф., Хисматуллина Н. А. *Эволюция малых искажений парового пузырька при его сверхсжатии* // Матем. моделирование. – 2011. – Т. 23. – № 10. – P. 82–96.

И. А. Турыгина

*НИИМ Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского,
hodykinainna@gmail.com*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ОДНО И МНОГОСЛОЙНЫМИ ПРЕГРАДАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Газопроницаемые преграды различной структуры являются эффективным средством защиты конструкции от воздействия ударных волн (УВ) [1]. Методами численного моделирования исследуются процессы взаимодействия плоской ударной

волны с проницаемой преградой. Такие преграды представляют собой слои металлических плетеных сеток: консолидированных или разнесенных на некоторое расстояние. Подобные преграды используются для уменьшения амплитуды проходящих ударных волн. Анализируются и сравниваются амплитуды проходящих и отраженных волн. Исследуются давление и другие параметры течения газа в самом пакете сеток во время и после прохождения ударной волны. Расчеты проведены с помощью вычислительного комплекса STAR-CCM+.

Пакет сетки толщиной H состоит из восьми слоев. Для компактно упакованного пакета слои сдвигаются относительно друг друга на 1.25 мм в плоскости пакета и по нормали. Толщина H такого пакета составляет 10.25 мм. Для разнесенных на 20 мм слоев сетки $H = 152$ мм. Размер ячейки сетки 2 мм, диаметр проволоочки 0.5 мм, что дает коэффициент проницаемости $\alpha = 0.64$. Проволочки в пакете сетки предполагаются неподвижными и недеформируемыми в процессе расчета. Предполагается симметрия фрагмента пакета сетки, используемого в расчетах. В качестве краевых условий на плоскостях симметрии и на поверхностях проволоочек используем то, что нормальная скорость газа равна нулю. Область определения задачи включает в себя объем канала, ограниченный плоскостями симметрии, поверхностями проволоочек и плоскостями входа и выхода. Параметры в набегающей УВ задаются в ограниченной области, размеры которой выбираются с тем, чтобы в процессе моделирования отраженные от границ УВ не исказили течение в пакете. Установлено, что интенсивность как отраженной, так и проходящей УВ для разнесенных слоев меньше, чем для консолидированных. Это объясняется большими потерями энергии в процессе взаимодействия проходящих волн с

разнесенными преградами. Вслед за проходящей ударной волной во всех рассмотренных вариантах движется волна разрежения. То есть формируется многоволновая конфигурация в проходящем потоке.

Для оценки достоверности получаемых численных результатов проведены расчеты взаимодействия УВ различной интенсивности с одним экраном в сравнении с экспериментальными данными [1]. Наблюдается соответствие численных и экспериментальных данных.

Работа выполнена при частичном финансировании РФФИ (проект № 13-08-00219).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гельфанд Б. Е., Фролов С. М. *Приближенный расчет ослабления ударных волн проницаемыми преградами* // ПМТФ. – 1990. – № 4. – С. 42–46.

Д. Ю. Тюгин, А. А. Куркин, К. И. Кузнецов

*Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева,
dtyugin@gmail.com, aakurkin@gmail.com,
kost.kuznetsov@gmail.com*

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ МОБИЛЬНОГО РОБОТОТЕХНИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА МОНИТОРИНГА ПРИБРЕЖНОЙ ЗОНЫ

Развитие вычислительных технологий на сегодняшний день позволяет решать сложные задачи прогнозирования природных катастроф методами компьютерного моделирования. Тем

не менее, для создания и верификации математических моделей необходимы натурные данные. При исследовании таких масштабных явлений как цунами особую ценность представляют данные натурных измерений в зоне затопления. Но сбор этих данных, как правило, осложняется различными факторами, такими как угроза повторных землетрясений, неблагоприятные климатические условия и т. п. Кроме того, для получения достаточного количества данных может потребоваться длительное время. Для решения таких задач в НГТУ им. Р. Е. Алексеева ведется разработка мобильного робототехнического комплекса, способного проводить длительный мониторинг волнения водной поверхности с целью накопления статистических данных, их анализа и регистрации аномально больших волн. Он представляет собой подвижную платформу с набором измерительного оборудования, платформа имеет двигатель, шасси и систему управления. Одним из ключевых компонентов комплекса является информационная система, реализующая взаимодействие с измерительным оборудованием, сохранение данных, их анализ и передачу информации в командный пункт. Информационная система разработана на основе клиент-серверной архитектуры, выполняется на бортовом вычислительном устройстве платформы и содержит набор программных модулей. Модуль загрузки данных предназначен для подключения к измерительному оборудованию и получению данных. Он реализует взаимодействие с аппаратным обеспечением: радиолокационной станцией для получения информации о высоте смещения водной поверхности, с лидаром для получения информации о препятствиях на пути следования платформы, с метеостанцией для получения информации о погоде. Получаемые данные записываются в базу данных и файлы.

Модуль представления данных реализует набор программных структур для описания физических величин и связей между ними. Модуль геопривязки считывает положение платформы в пространстве посредством навигационного оборудования, и добавляет эту информацию в наборы данных. Модуль мониторинга состояния системы предоставляет оперативную информацию о состоянии оборудования и ресурсах бортового вычислительного устройства. Модуль анализа данных непрерывно считывают информацию о смещении водной поверхности и выполняет обработку данных. Клиентская часть запускается на ноутбуке оператора и подключается удаленно к комплексу посредством каналов радиосвязи. Она содержит графический пользовательский интерфейс для отображения состояния платформы. В настоящее время ведутся активные работы по доработке платформы и расширению функциональности программного обеспечения.

Представленные результаты научно-исследовательской работы получены при поддержке стипендии президента РФ молодым ученым и аспирантам на 2015-2017 годы (СП-193.2015.5).

Е. С. Ульянова, М. В. Фалилеева

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

**АНАЛИЗ ОЦЕНКИ УРОВНЯ ТРУДНОСТИ ЗАДАЧ
ПО ТЕМЕ “ПЛОЩАДЬ“ УЧАЩИМИСЯ 5-Х
КЛАССОВ**

Каждый участник образовательного процесса имеет свое субъективное мнение об уровне трудности математических задач. Позиция учителя основывается на его профессиональном

опыте, основанном на анализе результатов решений учащихся, и умении решать различные математические задачи.

Первая цель нашего исследования проанализировать, как оценка уровня трудности математических задач учащихся 5-х классов связана с умением решать эти задачи, поскольку наши наблюдения за пятиклассниками во время уроков математики показали, что многие пятиклассники достаточно необъективно оценивают свои возможности в решении математических задач. Например, кто-то уверен, что выполнит все 3 задачи по математике из предложенных, а на деле выходит, что решил только одну.

Вторая цель нашего исследования это понять, как оценивают учащиеся задачи различных уровней трудности. Мы использовали классификацию по уровням усвоения по В. П. Беспалько [1] для анализа задач по теме “Площадь” учебника 5-го класса Н. Я. Виленкина [2], по которому полгода назад наши пятиклассники изучали данную тему. Мы обнаружили, что задачи к параграфу – это задачи ученического (задачи на опознание, различие и классификацию), типового (подстановки, конструктивные, типовые задачи) и эвристического (задачи на преобразование усвоенных методик и их приспособление к ситуации) уравнений. Задачи творческого уровня усвоения (задачи-проблемы, без известных методик решения) не представлены в учебнике.

Мы попросили учащихся оценить уровень сложности 4-х задач различных уровней усвоения по 10-балльной шкале (0 – задача решается устно, не представляет ни малейшей сложности, 10 – задача очень трудная, не знаю, как ее решить) и попросили письменно решить ее. Приведем пример из списка предложенных учащимся задач: “От прямоугольника со сто-

ронами 4 и 6 см отрезали треугольник площадью, равной $1/4$ площади прямоугольника. От оставшейся части отрезали еще треугольник – третью часть, далее от оставшейся отрезали половину. Какова площадь оставшейся фигуры?”

Оценку решений задач учеников проводили по следующей шкале: 3 балла – верное решение, 2 – решение не до конца или не полностью, 1 балл – неверное решение, 0 баллов – решение не предоставлено. Оказалось, что средний балл по решениям задач учащихся в 2,5 раза больше, чем средний балл по уровню оценивания трудности задач учащимися. Таким образом, можно утверждать, что в целом учащиеся недооценивают уровень трудности математических задач. Также мы всесторонне проанализировали, как оценивают задачу учащиеся, решившие задачу верно, неверно и те, кто не предоставил решения. Например, задачу №1 решили верно и оценили от 0 до 3 баллов – 56 % учащихся, также решили верно, но оценили по шкале от 4 до 8 – 8 % учащихся и решили верно, но оценили от 7 до 10 также 8 %.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Виленкин Н. Я. *Математика. 5 класс: учебник для учащихся общеобр. учр.* – М.: МНМОЗИНА, 2013. – 285 с.
2. Беспалько В. П. *Слагаемые педагогической технологии.* – М.: Педагогика, 1989. – 192 с.

П. В. Уртяков, А. Б. Мазо, Е. И. Калинин

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
urtyakovpv@gmail.com*

МОДЕРНИЗАЦИЯ ГАЗОРАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА РЕАКТОРА ДЕГИДРИРОВАНИЯ ИЗОАМИЛЕНОВ

Реактор дегидрирования изоамиленов в изопрен представляет собой сложное техническое устройство. В верхней его части расположено газораспределительное устройство, обеспечивающее смешение сырья (изоамилены) и водяного пара и их подачу в слой катализатора, где и происходят химические реакции, целевым результатом которых является производство требуемого продукта – изопрена. Качество смешения пара с сырьем можно оценить по распределению температуры смеси непосредственно над слоем катализатора, где установлены термопары, так как изоамилены и пар подаются в распределительное устройство при различных температурах: 470 и 670 °С. Фиксируемый термопарами неравномерный прогрев смеси (разброс показаний датчиков достигал 50 °С) свидетельствует о недостаточно эффективном смешении пара и сырья. При этом различные части катализатора работают в принципиально разных условиях: на одних участках в зернистый слой входит холодное, недостаточно разбавленное паром сырье, а на других – перегретое сырье с большим количеством пара. Очевидно, в этой ситуации режим работы реактора в целом будет далек от расчетного.

Для того чтобы выяснить причины низкого качества смешения и предложить пути устранения недостатков конструкции газораспределительного устройства, было проведено матема-

тическое моделирование термогидродинамических процессов в реакторе с использованием CFD-пакета Fluent-Gambit 6.0 [9].

Опираясь на результаты расчетов, для повышения качества смешения мы предложили модернизировать существующее газораспределительное устройство путем выполнения перфорации трубы подвода сырья. За счет этого смешение будет происходить во всем объеме газораспределительного устройства. В случае использования модернизированного газораспределительного устройства предполагается снижение перепада температур в верхнем слое катализатора до 10°C .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мазо А. Б. *Моделирование турбулентных течений несжимаемой жидкости*. – Казань: КГУ им. В.И. Ульянова-Ленина, 2007. – 106 с.
2. Spalart P., Allmaras S. *A one-equation turbulence model for aerodynamic flow* // Technical report AIAA 92-0439. – American Inst. of Aeronautics and Astronautics, 1992. – P. 29.
3. Ривкин С. Л., Александров А. А. *Термодинамические свойства воды и водяного пара* // Справочник. – 2-е изд. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 80 с.
4. Идельчик И. Е. *Справочник по гидравлическим сопротивлениям*. 3-е изд. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.

Ф. А. Фатыхов

*Казанский государственный архитектурный университет,
vitofat@gmail.com*

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА
С БЕСКОНЕЧНЫМ ВРАЩЕНИЕМ
НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ**

Пусть D – единичный круг в плоскости комплексного переменного $D = \{z = re^{i\theta} : 0 < r < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $L = \partial D$. Целью данной работы является нахождение функции $\Phi(z)$, аналитической в области D и непрерывно продолжимой на все точки контура L , по краевому условию

$$\operatorname{Re}[e^{-i\nu(t)}\Phi(t)] = \frac{c(t)}{|G(t)|}, \quad (1)$$

где $G(t) = a(t) - ib(t)$, а $\nu(t) = \operatorname{arg}G(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – заданные на L действительные функции, непрерывные на интервале $(0; 2\pi)$, причем $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ всюду на L со следующими ограничениями для функции $\nu(t)$, $t = e^{i\theta}$,

$$\nu(\theta) = \begin{cases} \frac{\nu^+(\theta)}{\sin^\rho \frac{\theta}{2}} + \tilde{\nu}(\theta), & 0 < \theta < \pi, \\ \frac{\nu^-(\theta)}{\sin^\rho \frac{\theta}{2}} + \tilde{\nu}(\theta), & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases} \quad (2)$$

Данная задача относится к так называемым краевым задачам с бесконечным индексом, которые исследовались в работах [1–3], где завихрение $\nu(t)$ происходило в бесконечно удаленной точке. В данной работе исследование проходило на конечном контуре.

В результате проведенных исследований было получено общее решение однородной краевой задачи (1) в классе ограниченных функций вида

$$\Phi(z) = -ie^{\Gamma(z)} e^{i\frac{1e^{i\alpha}}{(z-1)^\rho}} F(z), \quad (3)$$

где $F(z)$ – произвольная аналитическая в D функция, принимающая на единичной окружности чисто мнимое значение и удовлетворяющая на границе условию $|F(t)| \leq Ce^{Q(t)}$, $t = e^{i\theta}$, $C = \text{const}$. Также были получены условия разрешимости задачи (1). Например, доказана следующая

Теорема. *Если $\rho > 1/2$ и выполняется условие $\nu^- < 0$ или $\nu^+ > 0$, то однородная краевая задача имеет лишь нулевое решение.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сандрыгайло И. Е. *О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1974. – № 6. – С. 16–23.
2. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. *Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения.* – Казань: Изд-во Казанск. матем. о-ва, 2005. – 297 с.
3. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 511 с.

А. А. Хаджи

Тюменский государственный университет,

anna_5955@mail.ru

**ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ
АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ**

Пусть Ω — произвольная неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geq 2$. Для анизотропных квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_{\alpha}(x, u_{x_{\alpha}}))_{x_{\alpha}} - a_0(x, u) = 0, \quad x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1)$$

Предполагается, что функции $a_{\alpha}(x, s)$, $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$, каратеодориевы и существуют положительные числа $\bar{a}_0, \hat{a}_{\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, n$, такие, что для почти всех $x \in \Omega$, $s, t \in \mathbb{R}$, справедливы неравенства:

$$(a_0(x, s) - a_0(x, t))(s - t) \geq \bar{a}_0 B_0(s - t), \quad (2)$$

$$0 \leq (a_{\alpha}(x, s) - a_{\alpha}(x, t))(s - t) \leq \hat{a}_{\alpha} B_{\alpha}(s - t), \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Здесь N -функции $B_0(z), B_1(z), \dots, B_n(z)$ и дополнительные к ним удовлетворяют Δ_2 -условию (см. [1]).

В работе [2] для анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями доказано существование решений задачи Дирихле в произвольных неограниченных областях. М. М. Бокало, О. В. Доманской в [3] установлена единственность решения краевой задачи для уравнения с переменными показателями нелинейности. Здесь выделены достаточные условия, обеспечивающие единственность решения задачи (1) без ограничений на поведение решения при $|x| \rightarrow \infty$.

Пусть существует такое $0 < \epsilon < 1$, что выполнены условия

$$B_\alpha(z^{1+\epsilon}) \prec B_0(z), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Единственность решения задачи (1) установлена при условии, что:

$$B_\alpha(z) = c_\alpha |z|^{p_\alpha}, \quad |z| \leq 1, \quad p_\alpha > 1, \quad c_\alpha > 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, n. \quad (5)$$

Считаем, что показатели p_α , $\alpha = 1, \dots, n$ упорядочены: $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$, тогда числа $q_\alpha = \frac{p_0 p_\alpha}{p_0 - p_\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, n$, также упорядочены: $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$. Предполагаем, что:

$$p_0 > p_1, \quad \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{p_\alpha} > 1, \quad q_n > n. \quad (6)$$

Теорема. Пусть выполнены условия (2) – (6), тогда обобщенное решение $u(x)$ задачи (1) единственно.

Работа выполнена при поддержке СФ БашГУ (грант В15-13).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Рутицкий Я., Красносельский М. *Выпуклые функции и пространства Орлича*. – М.: Физматлит, 1958. – 587 с.
2. Кожевникова Л. М., Хаджи А. А. *Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях* // Матем. сб. – 2015. – Т. 206. – № 8. – С. 99–126.
3. Bokalo M., Domanska O. *On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces* // *Mathematychni Studii*. – 2007. – V. 28. – No 1. – P. 77–91.

Ш. М. Хайдаров

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
15jkeee@gmail.com*

МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИМ КОНТЕНТОМ В ИНФОРМАЦИОННЫХ ИЗДАТЕЛЬСКИХ СИСТЕМАХ

Предложены методы управления математическими документами, в частности, развиты результаты работы [1]. Как известно, управление математическим контентом включает обработку, хранение, отображение и поиск информации. Особенность управления математическими данными, прежде всего, заключается в структурированности как текста (определения, теоремы, доказательства и т.д.), так и самих формул (вложенности и др.).

Разработанное технологическое ядро позволяет обрабатывать содержимое документов в формате OpenXML (см., напр., [2]) с возможностью анализа имеющихся в нем данных, в том числе математических выражений.

Метод обработки математических документов, предложенный в работе, основан на языке семантической разметки MathML (см., напр., [3]). Семантическое представление математических документов используется для решения следующих задач:

- хранение документов с математическим контентом;
- отображение математических текстов в Вебе и на портативных устройствах (см., напр., [4]);
- поиск по формулам в математических текстах.

Неотъемлемой частью предложенной технологии является

конвертация математических данных в форматы Семантического Веба. Программный модуль, предложенный в работе [1], был реализован в виде таблицы стилей XSLT (см., напр., [5]), что позволило ускорить процесс конвертации. Алгоритм работы конвертера представлен на рис. 1.

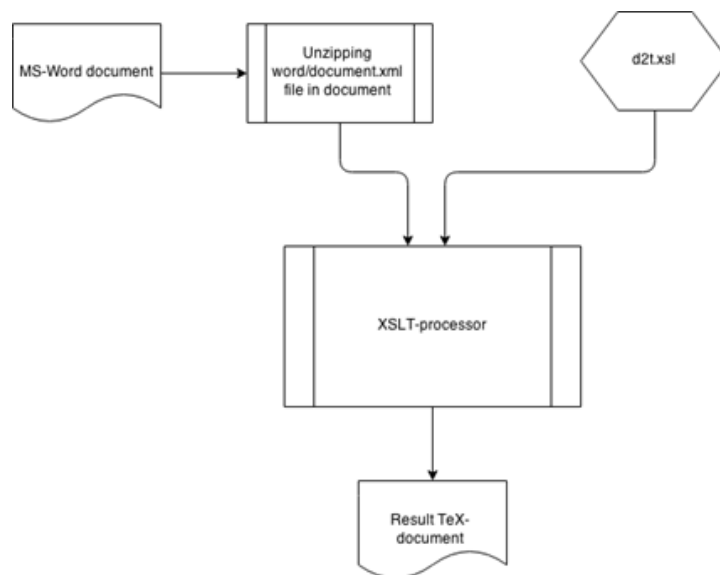


Рис. 1. Алгоритм конвертации OpenXML в TeX

Поиск по математическим формулам также использует разработанные таблицы стилей. Программа поиска включает в себе две подсистемы: первая индексирует математические выражения в коллекции, и вторая представляет пользовательский интерфейс поиска, обрабатывающий запрос и выдающий найденные результаты. Создание индексируемого файла позволяет увеличить эффективность поиска. Общий алгоритм работы программы поисковика представлен в следующей блок-схеме (см. рис. 2).

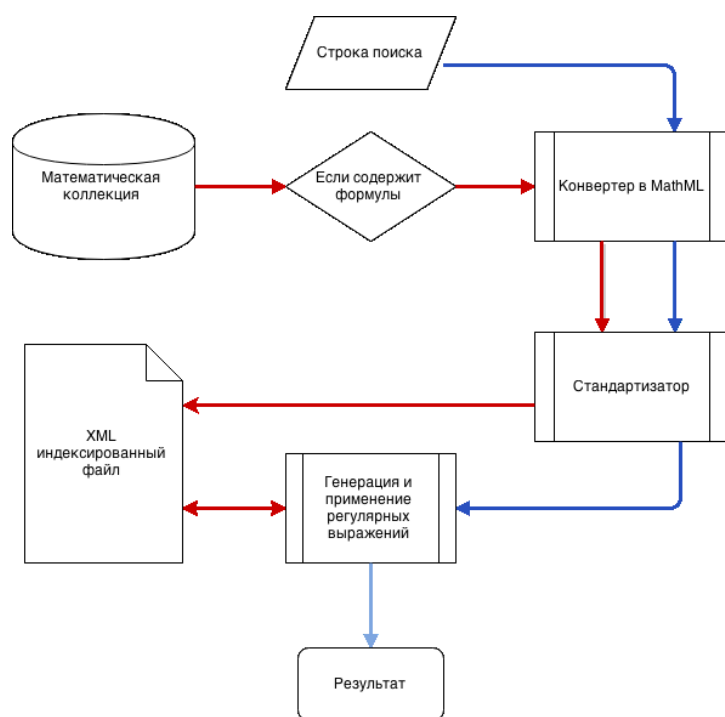


Рис. 2. Алгоритм работы программы поиска по формулам

Поисковое ядро сначала индексирует коллекцию, переводя математические формулы в MathML, затем приводит к единому виду схожие по значению формулы. При вводе поискового запроса генерируется регулярное выражение, по которому и осуществляется поиск.

Для построения системы управления математическим содержанием была установлена и исследована издательская система Open Journal Systems-2.4.6.0. Для развертывания системы был применен локальный сервер Open Server-5.2.2, включающий Apache-2.2, PHP-5.3, MySQL-5.5. Для решения проблемы отображения формул в вебе применяется библиотека MathJax-2.4 и KaTeX (см., напр., [6], [7]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-07-08522, № 15-47-02472) и РГНФ (проект № 14-03-12004).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Липачёв Е. К., Хайдаров Ш. М. *Система сервисов преобразования электронных математических документов на основе облачных технологий* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2013. – Т. 47. – С. 109–110.
2. Воутер В. В. *Open XML – Кратко и доступно.* – Microsoft, 2007. – С. 101.
3. Елизаров А. М., Липачёв Е. К., Малахальцев М. А. *Веб-технологии для математика. Основы MathML.* – М.: Физматлит, 2010. – 194 с.
4. Хайдаров Ш. М. *Методы отображения математических документов на портативных устройствах* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2014. – Т. 50. – С. 174–175.
5. Tidwell D. *XSLT, Second Edition.* – Sebastopol: O'Reilly, 2008. – 988 p.
6. *MathJax. Beautiful math in all browsers.* [Электронный ресурс] // MathJax: URL: <http://www.mathjax.org/>
7. Eisenberg E., Alpert B. *KaTeX – The fastest math typesetting library for the web.* [Электронный ресурс] // GitHub – Build software better, together.: URL: <https://khan.github.io/KaTeX/>

В. Ю. Чебакова

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
vchebakova@mail.ru*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЧЕ–РАЗРЯДА В ЛОКАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Данная работа связана с решением одной из важных задач физики и химии плазмы, а именно, с процессами обработки поверхности в неравновесной низкотемпературной плазме, в таких задачах часто используется ВЧЕ–разряд. Диагностика таких разрядов затруднена и большую роль приобретает моделирование ВЧЕ–разряда. Представленная в настоящей работе модель описывает емкостной ВЧ–разряд между двумя плоско-параллельными электродами, один из которых заземлен, а другой соединен с ВЧЕ–генератором.

В работе [1] путем решения модельной задачи по упрощенной кинетической схеме аргона показано изменение характеристик ВЧЕ–разряда в зависимости от граничных условий, описывающих свойства образца–электрода. Сделан вывод о необходимости включения в кинетическую схему молекулярных ионов и димеров аргона. Поэтому в настоящей работе представлена нелинейная задача, возникающая при моделировании ВЧЕ–разряда в локальном приближении при атмосферном давлении, включающая в себя уравнения конвекции-диффузии для электронного и ионного газа, уравнение Пуассона для потенциала электрического поля, уравнения баланса метастабильных атомов и нейтральных атомов, а также стационарное уравнение теплопроводности атомно-ионного газа и дополненная уравнением конвекции-диффузии для молекулярного иона и кинетическим уравнением для димера аргона,

таким образом в модели учитываются электроны, атомные и молекулярные ионы, метастабильные атомы и димеры аргона, а также атомы в основном состоянии. Описанная система краевых и начально–краевых задач характеризуется несколькими особенностями, осложняющими разработку алгоритма и численного метода ее решения.

Во-первых, она состоит из задач разного типа: начально–краевых задач для уравнений с частными производными параболического типа и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в которых время входит как параметр, а также задачи Коши. Дополнительное усложнение обусловлено разными временными рамками изменения основных характеристик установившегося состояние ВЧЕ–разряда пониженного давления.

Во-вторых, характерной особенностью задачи является большие градиенты плотности заряженных частиц и напряженности электрического поля, электронной температуры в приэлектродных слоях на границе расчетной области, то есть, если в квазинейтральной области для задач, мы имеем процесс с доминированием диффузии (регулярно возмущенная задача), то в приэлектродных областях наблюдается случай сильного доминирования конвекции (сингулярно возмущенная задача). Это приводит к появлению областей сильного изменения решения.

В-третьих, представленная система задач является нелинейной как по отдельным входящим в нее уравнениям, так и в целом.

В-четвертых, необходимость вычисления потока в областях сильно меняющихся коэффициентов при наличии больших градиентов решения.

Для решения рассматриваемой нелинейной системы краевых и начально–краевых задач использовался приближенный метод, основанный на конечномерной аппроксимации задачи с помощью разностных схем с последующим применением для ее реализации итерационного процесса. Значения сеточных функций, соответствующих концентрациям заряженных частиц (молекулярных и атомарных ионов, электронов, димеров и метастабильных атомов), определяются во внутренних точках, тогда как аппроксимирующие потенциал электрического поля, метастабильные атомы и газовую температуру определены во всех точках (включая граничные). Это оправдано тем, что условия для концентраций заряженных частиц сформулированы через плотности потоков данных частиц.

Неявная разностная аппроксимация строится интегро–интерполяционным методом [2] с применением метода направленных разностей [3]. Линеаризация системы проводится по методу типа Зейделя, при этом численный алгоритм основан на опускании нелинейности по входящим коэффициентам на нижний слой. Нелинейные квадратичные слагаемые в правой части были линеаризованы с помощью схемы Ньютона [2]. Решение уравнения для газовой температуры проводилось 1 раз за период T с помощью внутреннего итерационного процесса типа Якоби. Плотности потоков для ионного и электронного газа рассчитываются по методу Гуммеля [4].

Результаты численного решения модельной задачи выявили изменения состава газа в процессе развития разряда, если в начале преобладают молекулярные ионы при небольшой газовой температуре а концентрация возбужденных атомов и димеров приблизительно равная, то при нагреве газа происходит уменьшение концентрации молекулярных ионов и диме-

ров при возрастании концентрации атомарных ионов и уменьшении димеров. Концентрация молекулярных ионов больше в приэлектродных слоях, где температура газа меньше. При этом в разряде существует область сохранения квазинейтральности.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научных проектов №№ 15-41-02672 и 15-41-02569.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чебакова В. Ю. *Численное моделирование высокочастотного емкостного разряда* // Уч. записки Казанск. унта. Серия физико-матем. науки. – 2015. – Т. 157. – Кн. 2. – С. 126–140.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы*. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.
3. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии*. – М: Эдиториал УРСС, 1999. – 248 с.
4. Kulikovskiy A. A. *A more accurate Scharfetter-Gummel algorithm of electron transport for semiconductor and gas discharge simulation* // J. of Comp. Physics. – 1995. – V. 119. – P. 149–155.

Н. В. Шалагинова

*Вятский государственный гуманитарный университет,
korshunnv@mail.ru*

О ПОЛУКОЛЬЦАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В $(0, \infty]$

В статьях [1, 2] начато изучение полуколец $C^\infty(X)$ всех непрерывных функций на топологических пространствах X со значениями в расширенном числовом луче $(0, \infty]$ с поточечными операциями сложения и умножения функций. Для каждой функции $f \in C^\infty(X)$ определено замкнутое множество $H(f) = f^{-1}(\infty)$.

В работе [1] было введено понятие *H-идеала*: идеал I полукольца $C^\infty(X)$ называется *H-идеалом*, если $H(f) = H(g)$ влечет $g \in I$ для любых $f \in I$ и $g \in C^\infty(X)$. H-идеалы в полукольце $C^\infty(X)$ являются биидеалами, то есть выдерживают сложение с любым элементом полукольца. Биидеалы образуют в решетке $\text{Id}C^\infty(X)$ дистрибутивную подрешетку, которая содержит в свою очередь подрешетку всех H-идеалов.

Топологическое пространство, удовлетворяющее аксиомам отделимости T_1 и $T_{3,5}$, называется тихоновским. Тихоновское пространство X называется *F-пространством*, если любая ограниченная непрерывная \mathbf{R} -значная функция, определенная на произвольном конуль-множестве в X , непрерывно продолжается на все пространство X . Тихоновское пространство X называется *P-пространством*, если все нуль-множества функций из $C(X)$ открыто-замкнуты.

Теорема 1. *Для всякого тихоновского пространства X эквивалентны следующие утверждения:*

1. X — *F-пространство*.

2. Все идеалы полукольца $C^\infty(X)$ суть биидеалы.
3. $I + J = I \cap J$ для любых идеалов I и J полукольца $C^\infty(X)$.
4. Теоретико-множественное объединение любых двух (произвольного непустого семейства) идеалов полукольца $C^\infty(X)$ является идеалом.
5. Решетка $\text{Id}C^\infty(X)$ всех идеалов полукольца $C^\infty(X)$ дистрибутивна.

Теорема 2. Для любого тихоновского пространства X равносильны следующие условия:

1. X — P -пространство;
2. для любых $f, g \in C^\infty(X)$ имеем

$$g \in fC^\infty(X) \iff H(f) \subseteq H(g);$$

3. все идеалы полукольца $C^\infty(X)$ являются H -идеалами;
4. $\forall f \in C^\infty(X) \exists g \in C^\infty(X) (f = f^2g)$;
5. $I \cdot J = I \cap J$ для любых идеалов I, J полукольца $C^\infty(X)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. Об идеалах в полукольцах непрерывных $(0, \infty]$ -значных функций // Материалы XIII Междун. конф. “Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения”. — Тула: ТГПУ, 2015. — С. 153–155.
2. Шалагинова Н. В., Вечтомов Е. М. Конгруэнции на полукольце $(0, \infty]^n$ // Фундаментальные и прикладные проблемы механики, математики, информатики: сб. докл. всеросс. науч.-практ. конф. с междунар. участием. — Пермь: ПГНИУ, 2015. — С. 35–39.

А. И. Шангараева

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
linka390@mail.ru*

**ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС
ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА УСКОРЕНИЯ
ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ УРАВНЕНИЙ
ПЕРЕНОСА
ДЛЯ РАДИАЛЬНО–СИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ
ФИЛЬТРАЦИИ МНОГОФАЗНЫХ ЖИДКОСТЕЙ**

Настоящая работа посвящена описанию комплекса программ для реализации алгоритма ускорения численных расчетов уравнений переноса для радиально-симметричных задач фильтрации многофазных жидкостей. Рассмотрению задач фильтрации углеводородов посвящена обширная литература (см., напр., [1–3] и приведенную там библиографию). Как отмечается в [3], разработка месторождений углеводородов представляет собой комплексную проблему, для успешного решения которой требуется привлечение знаний и опыта, накопленных в различных областях науки и инженерной практики. Применение комплексного мультидисциплинарного подхода стало особенно актуальным на современном этапе, характеризующемся, с одной стороны, существенным ухудшением структуры запасов нефти и газа, а с другой – созданием принципиально новых технологий в области исследования и моделирования геологического строения пласта, бурения и закачивания скважин, использованием новых быстродействующих компьютеров для проведения сложных вычислений, геологического и гидродинамического моделирования. Одним из основных инструментов для обоснованного принятия стратегических и тактиче-

ских решений при разработке месторождений углеводородов является моделирование процессов извлечения нефти и газа. Каждое месторождение уникально, неправильное применение тех или иных методов воздействия на пласт может привести к непоправимым последствиям для разработки, поэтому оценку эффективности различных технологий с учетом особенностей конкретного объекта и прогнозирование поведения этого объекта целесообразно осуществлять с помощью предварительного моделирования.

Рассматривается задача ускорения численных расчетов по явной схеме для уравнений переноса, используемого при моделировании нефтяных месторождений. При расчете реальных месторождений необходимо использовать сетки с большим числом узлов, что приводит к значительному увеличению объема вычислений. Как известно, при использовании явной схемы для ее устойчивости необходимо выполнение условия Куранта. Выполнение этого условия требует существенного увеличения объема вычислений. Нами предлагается модификация этого условия, позволяющая получить ускорение времени вычислений. Верификация предлагаемого метода ускорения подробно описана в работах [4–6], в частности, для плоско-параллельного случая, для которого существует автомодельное решение. Там же предлагается использовать разные шаги по времени и их количество в разных областях месторождения так, чтобы с одной стороны, уменьшить объем вычислений, а с другой стороны, обеспечить устойчивость разностных схем. Достижения этих целей предполагается достичь путем введения локального числа Куранта и введения для различных областей фильтрации различных временных шагов. В данной работе описанный подход применяется для радиальной задачи с целью отследить

движение фронта насыщенности.

Для реализации указанного алгоритма был создан комплекс программ в среде Visual Studio [7]. Разработан интерфейс для задания входных данных задачи: геометрия области, радиус скважины и ее дебит, коэффициенты пористости, вязкости. Задаются также начальное давление и насыщенность, параметры расчетной сетки, шаг по пространственной переменной.

Алгоритм выбора шагов состоит в следующем. Сначала для каждой ячейки сетки рассчитывается шаг по времени, исходя из локального условия Куранта, затем определяется наименьший из рассчитанных шагов и определяется коэффициент ускорения, равный отношению шага по времени для ячейки к указанному наименьшему. Полученный коэффициент округляется в сторону нуля до числа, являющегося степенью 2. В результате работы алгоритма получается итоговый временной шаг, равный произведению коэффициента ускорения на наименьший временной шаг, что позволяет осуществить ускорение алгоритма расчета.

С использованием построенных шагов осуществляется решение как уравнения переноса, так и уравнения неразрывности.

В результате работы программы строятся графики распределения фронта насыщенности. Кроме того, имеется возможность создания файла с данными, необходимыми для построения карт нефтенасыщенности, структуру расчетной сетки получившейся в ходе работы алгоритма расчетной сетки, в том числе, карты кратности шагов по временным и пространственным переменным.

Разработанный комплекс был применен для решения модельных задач фильтрации. Были построены графики, описы-

вающие движение фронта насыщенности. Анализ результатов показал, что движение фронта в случае использования предложенного алгоритма с ускорением совпадает с вариантом без ускорения. Кроме того, полученные результаты свидетельствуют о целесообразности применения указанного в работе подхода. Численные решения в случаях применения классического явного метода и метода с ускорением совпадают с достаточной точностью. Таким образом, установлено, что условие Куранта для шага по времени является слишком жестким для задач данного типа. Обоснована возможность увеличения шага по времени в несколько раз, что даёт существенную экономию ресурсов ЭВМ.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 15-41-02315.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Азиз Х., Сеттари Э. *Математическое моделирование пластовых систем*. – М.: Недра, 1982. – 407 с.
2. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. *Движение жидкостей и газов в природных пластах*. – М.: Недра, 1982. – 208 с.
3. Каневская Р. Д. *Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов*. – М.: Ин-т компьют. исслед., 2002. – 140 с.
4. Шангараева А. И. *Анализ алгоритма ускорения расчета нефтенасыщенности в одномерном случае* // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т. 17. – № 14. – С. 460–462.
5. Шангараева А. И., Шевченко Д. В. *Исследование влияния*

локальной неоднородности фазовых проницаемостей на параметры разработки нефтяных месторождений // Уч. записки Казанск. ун-та. Серия Физико-матем. науки. – 2014. – Т. 156. – Кн. 4. – С. 103–111.

6. Шангараева А. И., Шевченко Д. В. *Оптимизация численного решения уравнений переноса для радиально-симметричного случая // Вестн. Тамб. ун-та. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20. – № 5. – С. 1533–1535.*

7. Рендольф Н., Гарднер Д., Минутилло М., Андерсон К. *Visual Studio 2010 для профессионалов. – М.: “Диалектика”, 2011. – 1184 с.*

М. А. Шурыгина, Л. Ю. Низамиева

КНИТУ-КАИ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ
ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ
УЧЕБНИКОВ В ДИСТАНЦИОННОМ
ОБРАЗОВАНИИ**

Предлагается определить особенности использования такой современной образовательной технологии как электронный учебник применительно к системе дистанционного образования. Предполагается, что электронный учебник состоит из изучаемого теоретического материала, разобранных практических задач, заданий для расчетных работ, лабораторного практикума и набора тестовых заданий.

Выявлено, что особенностью использования электронного учебника в дистанционном образовании является необходимость учета активной роли обучаемого в учебном процессе.

Еще одна важная особенность состоит в том, что обучающийся активно участвует в анализе и структурировании информации. Установлено, что в результате освоения материала у обучаемого развивается способность самообучения, самоконтроля и сотворчества с преподавателем. Необходимо отметить, что при использовании электронного учебника с элементами тестов, контрольных и лабораторных работ должны пересматриваться критерии успеваемости.

Для достижения высокого уровня освоения общеобразовательных и профессиональных компетенций при изучении дисциплины по электронному учебнику предлагается использовать индивидуальный подход к каждому обучаемому. Для этого необходимо:

1. Проведение предварительного психологического тестирования для определения психологического типа обучающегося и оперативной адаптации электронного курса к выявленному психологическому типу.

2. Создание широкого спектра возможностей для контроля и самоконтроля обучающегося.

3. При создании электронного учебника необходимо использовать преимущества виртуализации учебного материала, максимально полно представить модели и процессы в учебнике, внедрять соответствующие моделям, процессам и явлениям тренажеры.

При изучении курса с помощью электронного учебника обучающийся студент должен четко осознавать поставленные перед ним цели и задачи учебной дисциплины. Для этого при построении курса необходимо понимать, какие принципы анализа и восприятия информации, постановки целей будут применены, каким способом обобщения и анализа информации студент

будет обучен, какие практические задачи он должен уметь решать в результате освоения курса, какие методики доказательства будут применены.

Учет перечисленных задач и целей необходим как для курса в целом, так и для отдельных модулей. В связи с этим, эффективным подходом к применению электронных учебников в дистанционном образовании является модульный подход к изучению курса. При этом необходимо наличие тестовых заданий как по всему курсу, так и по отдельным модулям, при изучении которых обучаемый получает знания и навыки по определенной области изучаемого предмета.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абдрахманова А. И.	3	Зайнетдинов Д. Х.	75
Абызов А. Н.	5	Зубкова С. К.	77
Аксанова И. И.	7	Изосимова О. А.	79
Андреев П. Д.	9	Калинин Е. И.	156
Ахметов Д. Ю.	22	Карабашева Э. Н.	81
Ахметова А. Н.	24	Кечина О. М.	83
Бадриев И. Б.	26	Кибец Ю. И.	59
Балафендиева И. С.	29, 31, 32	Ковтуненко П. В.	85
Бережной Д. В.	29, 40, 44	Корнев К. Г.	132
Валеев И. И.	34	Красникова Н. Б.	87
Ванягина С. В.	37	Кулешов А. В.	90
Вечтомов Е. М.	38	Кузнецов К. И.	151
Габсаликова Н. Ф.	40	Куркин А. А.	151
Гайнуллина А. Р.	42	Кутдусова Л. Р.	92
Гайнулина Л. Р.	44	Лапин А. В.	95
Галимов А. Ф.	31, 32	Мазо А. Б.	156
Гермидер О. В.	46	Малюгина А. А.	97
Гиниятова Д. Х.	48	Макаров М. В.	26
Гоник Е. Г.	50	Мартемьянова Н. В.	99
Гущина В. А.	53	Миронова С. Р.	100
Давлетшин А. И.	55	Митягина Э. О.	102
Даутова Д. Н.	57	Модин И. А.	104
Демарева А. В.	59	Мухаметгалиев И. И.	107
Долгоносова А. Ю.	62	Насырова Н. И.	87
Елгушова А. С.	64	Низамиева Л. Ю.	108, 176
Еремеева Е. О.	69	Новиков А. О.	111
Ерыгина Н. С.	71	Новиков В. В.	113
Жукова Н. И.	62, 73	Новиков П. А.	116

Нуркаева Л. И.	92	Топорков Д. Ю.	138, 147
Нян Ч. Х. Н.	5	Турьгина И. А.	149
Орлова И. В.	118	Тюгин Д. Ю.	151
Паймушин В. Н.	26	Ульянова Е. С.	153
Петров М. В.	50	Уразова Д. З.	7
Петухова К. А.	120	Уртяков П. В.	156
Погодина Л. Д.	100	Фазлеева Э. И.	124
Попов В. Н.	46	Фалилеева М. В.	34, 153
Рахимов К. У.	122	Фатыхов Ф. А.	158
Ризванов З. З.	64, 124	Февральских Л. Н.	113
Романенко А. Д.	95	Федорова Т. Г.	50, 59
Рыжова Л. В.	128	Хаджи А. А.	160
Савенкова А. Е.	130	Хайдаров Ш. М.	162
Садыкова Е. Р.	92	Хакимова Г. Р.	128
Саламатин А. А.	102, 132	Халитова Т. Ф.	147
Салимов Р. Б.	136	Чебакова В. Ю.	166
Самсонов А. А.	134	Шакирова А. Т.	32
Сафиулин Р. Р.	138	Шакирова Л. Р.	64
Созонтова Е. А.	140	Шалагинова Н. В.	170
Соловьёв П. С.	134	Шангараева А. И.	172
Соловьёв С. И.	134	Шеина К. И.	73
Секаева Л. Р.	29, 31	Шошин Д. В.	59
Сулейманов А. З.	136	Шурьгина М. А.	108, 176
Султанов Л. У.	3, 29	Шушкина Ю. А.	59
Тапкин Д. Т.	143		
Тимергалиев Б. С.	145		

**ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО**

ТОМ 52

ЛОБАЧЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2015

**Материалы Четырнадцатой молодежной
школы-конференции
(Казань, 22 – 27 октября 2015 г.)**

Подписано в печать ?? .10.2015

Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Таймс».

Тираж 200 экз. П. л. ??. Печать ризографическая.

Заказ

Казанский (Приволжский) федеральный университет
420008, Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
