КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математического анализа

МЕТРИЧЕСКИЕ И ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Задачи к лабораторным занятиям по курсу
"Функциональный анализ и интегральные уравнения"

КАЗАНЬ – 1998

П е ч а т а е т с я

по решению Редакционно-издательского совета
механико-математического факультета
Казанского государственного университета

Составитель С. Р. Насыров

Настоящее пособие предназначено для практических занятий студентов, обучающихся по специальности "Математика"и направлению "Математика". В связи с тем, что в новых учебных планах курс "Функциональный анализ и интегральные уравнения"изучается два семестра, причем практические занятия проводятся только в первом из них, в пособие не вошли многие важные разделы курса, такие, например, как спектр, вполне непрерывные (компактные) операторы, фредгольмовы операторы.

Как показывает опыт, большинство задач, ввиду достаточно высокого уровня абстракции курса функционального анализа, представляет значительные трудности для студентов. В связи с этим при отборе задач предпочтение отдавалось тем из них, которые не требуют для решения длинных теоретических рассуждений, носят достаточно иллюстративный характер. Сильным студентам, конечно, следует не ограничиваться представленным набором задач, а использовать также такие задачники как

- Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу, М.: Наука, 1984,

- Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В., Задачи и упражнения по функциональному анализу, Минск: Выш. шк., 1978,

а также книгу А. А. Кириллова и А. Д. Гвишиани "Теоремы и задачи функционального анализа М.: Наука, 1979. Несколько интересных упражнений содержится в учебнике А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина "Элементы теории функций и функционального анализа М.: Наука, (любое из новых изданий). Указанные книги использовались при составлении данного пособия. Некоторые задачи предложил включить проф. А. Н. Шерстнев, внимательно просмотревший рукопись и сделавший много замечаний, способствующих улучшению изложения материала.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Геометрия метрических пространств

Пусть X — некоторое непустое множество. *Метрикой* или *расстоянием* на X называется функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим трем условиям (для все точек x, y, $z \in X$):

(1) $\rho(x,y) \geq 0$, $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);
(2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (симметрия);
(3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (неравенство треугольника).

Множество X, наделенное метрикой ρ, т.е. пара (X,ρ) называется *метрическим пространством* (МП). Величина $\rho(x,y)$ называется *расстоянием* между точками x и y МП X.

(*Открытым*) *шаром* радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in X$ называется множество $B(x;r) = \{y \in X | \rho(x,y) < r\}$. *Замкнутым шаром* радиуса r с центром в точке x называется множество $B[x;r] = \{y \in X | \rho(x,y) \leq r\}$.

Метрика порождает топологию на X, базисом которой является множество всех шаров в X. Соответствующее топологическое пространство является хаусдорфовым и удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Последовательность x_n в метрическом пространстве (X,ρ) является *сходящейся*, если $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x) = 0$.

Если $Y \subset X$, $\rho^* = \rho|_{Y\times Y}$ — сужение ρ на Y, то (Y,ρ^*) — МП, которое называется *подпространством* (X,ρ).

1.1. Доказать, что функции ρ, определенные формулами

(a) $\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$;

(b) $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$,

определяют метрики на вещественной прямой. Какие множества будут являться шарами в этих метриках?

1.2. Каким условиям должна удовлетворять функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, чтобы на вещественной прямой можно было задать метрику формулой $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$? Тот же вопрос для непрерывных f.

1.3. Доказать, что на множестве натуральных чисел функция

$$\rho(m,n) = \begin{cases} 0, & \text{если } m = n, \\ 1 + \dfrac{1}{m+n}, & \text{если } m \neq n, \end{cases}$$

является метрикой. Описать шары в этом пространстве.

1.4. Пусть s — множество всех вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Доказать, что

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

— метрика на s.

1.5. Пусть X — произвольное непустое множество. Доказать, что функция $\rho(x, y) = 0$, если $x = y$, $\rho(x, y) = 1$, при $x \neq y$ является метрикой на X. Какую топологию определяет эта метрика? Описать шары в МП (X, ρ).

1.6. Доказать, что если ρ — метрика на X, то

(a) $|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y)$; (вариант неравенства треугольника).

(b) $|\rho(x, u) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y) + \rho(u, z)$ (неравенство четырехугольника);

(c) $\rho(x_1, x_n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \rho(x_k, x_{k+1})$ (неравенство n-угольника).

1.7. Пусть ρ — некоторая метрика на X. Доказать, что следующие функции также определяют метрики на X:

(a) $\rho_1(x, y) = \dfrac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$;

(b) $\rho_2(x, y) = \ln[1 + \rho(x, y)]$;

(c) $\rho_3(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$.

1.8. Какова должна быть функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, чтобы для любого МП (X, ρ) пара $(X, f \circ \rho)$ также была МП?

1.9. Пусть ρ_1 и ρ_2 — две метрики на X. Будет ли метрикой на X функция $\max\{\rho_1, \rho_2\}$? $\min\{\rho_1, \rho_2\}$?

1.9a. Какова должна быть функция двух переменных, чтобы для любого множества X и любых двух метрик ρ_1 и ρ_2 на X функция $f(\rho_1, \rho_2)$ также являлась бы метрикой?

1.10. Может ли в метрическом пространстве шар большего радиуса содержаться в шаре меньшего радиуса? Строго содержаться в шаре меньшего радиуса? При каких значениях a возможно строгое включение $B(x; a) \subset B(y; 1)$?

1.11. Доказать, что замыкание шара $B(x; r)$ лежит в замкнутом шаре $B[x; r]$. Привести пример, когда $\overline{B(x; r)} \neq B[x; r]$.

1.12. Доказать, что диаметр любого шара $B(x; r)$ в МП удовлетворяет неравенству $0 \leq \operatorname{diam} B(x; r) \leq 2r$, причем любое значение из отрезка $[0; 2r]$ может являться диаметром некоторого шара $B(x; r)$ в некотором МП.

2. Примеры метрических пространств

2.1. Убедиться, что следующие функции определяют метрику в пространстве $\mathbb{R}^n$:

(a) $$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|;$$

(b) $$\rho(x,y) = \max_{1\le k\le n} |x_k - y_k|;$$

(c) $$\rho(x,y) = \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right]^{1/2};$$

указание: при доказательстве неравенства треугольника воспользоваться неравенством Коши-Буняковского;

(d) $$\rho(x,y) = \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^p\right]^{1/p} \quad p > 1;$$

указание: при доказательстве неравенства треугольника воспользоваться неравенством Минковского.

Что означает сходимость по метрике в каждом из случаев (a)–(d)?

2.2. Убедиться, что следующая функция определяет метрику на множестве l_1 вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, удовлетворяющих условию: $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$:

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|.$$

2.3. Убедиться, что следующая функция определяет метрику на множестве c_0 стремящихся к нулю вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$:

$$\rho(x,y) = \max_{k} |x_k - y_k|.$$

2.4. Убедиться, что функция

$$\rho(x,y) = \sup_{k} |x_k - y_k|$$

определяет метрику

(a) на множестве l_∞ ограниченных вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$,

(b) на множестве c сходящихся вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$.

2.5. Убедиться, что функция

$$\rho(x,y) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2\right]^{1/2}$$

определяет метрику на множестве l_2 вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k)^2 < \infty$.

2.6. Убедиться, что функция

$$\rho(x,y) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right]^{1/p}$$

определяет метрику на множестве l_p $(p > 1)$ вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$.

2.7. Докажите, что для пространств, рассмотренных в задачах 2.2.–2.6. имеют место вложения $l_r \subset l_p \subset c_0 \subset c \subset l_\infty$, где $1 \leq r < p < \infty$, причем все включения строгие.

2.8. Докажите, что топологии на l_∞, индуцированные различными включениями, описанными в задаче 2.7., являются различными и не совпадают с естественной топологией в l_∞. Приведите пример последовательности $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$, которая бы

(a) лежала в l_1, сходилась в l_∞, но не сходилась в l_1;
(b) лежала в l_2, сходилась в l_∞, но не сходилась в l_2;
(c) лежала в l_1, сходилась в c_0, но не сходилась в l_1;
(d) лежала в l_2, сходилась в c_0, но не сходилась в l_2.

2.9. Показать, что функция

$$\rho(x,y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

определяет метрику на множестве $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций.

2.10. Что означает сходимость последовательности функций в МП $C[a,b]$? Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность
(a) $x_n = t^n - t^{n+1}$; (b) $x_n = t^n - t^{2n}$.

2.11. Показать, что функция

$$\rho(x,y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

определяет метрику на множестве $M[a,b]$ ограниченных на отрезке $[a,b]$ функций.

2.12. Показать, что функция

$$\rho(x,y) = |x(a) - y(a)| + \bigvee_a^b [x(t) - y(t)]$$

определяет метрику на множестве функций ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$.

3. Полные метрические пространства. Теорема о пополнении. Сепарабельные метрические пространства.

Последовательность x_n называется *фундаментальной*, если

$$\lim_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0,$$

т. е. $\forall\varepsilon\ \exists N : \forall m, n > N\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Метрическое пространство называется полным, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.

Теорема о вложенных шарах утверждает, что в полном метрическом пространстве любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров $B[x_1, r_1] \supset B[x_2, r_2] \supset \ldots$, радиусы которых стремятся в нулю, имеет непустое пересечение, точнее, состоит из одной точки, являющейся пределом последовательности центров x_n.

Множество $A \subset X$ называется *нигде не плотным*, если его замыкание не содержит внутренних точек, т.е. не существует шара, содержащегося в A^-. *Теорема Бэра* утверждает, что полное метрическое пространство нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. Таким образом, если (X, ρ) полно и $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, то существует A_n, замыкание которого содержит некоторый шар.

Теорема о пополнении утверждает, что любое метрическое пространства (X, ρ) может быть вложено как подпространство в полное метрическое пространство (X^*, ρ^*), причем $X^- = X^*$. Пространство (X^*, ρ^*) называется *пополнением* пространства (X, ρ) и определяется единственным образом с точностью до изометрии, т.е. биективного отображения, сохраняющего расстояния.

Метрическое пространство (X, ρ) называется *сепарабельным*, если в нем существует конечное или счетное подмножество $A \subset X$, всюду плотное в X (т.е. замыкание множества A совпадает с X).

3.1. Показать, что числовая прямая с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ является полным сепарабельным метрическим пространством.

3.1а. показать, что интервал $(0, 1)$ на числовой прямой с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ не является полным метрическим пространством. Описать пополнение этого пространства.

3.2. Показать, что множество рациональных чисел с метрикой $\rho(x, y) = = |x - y|$ не является полным метрическим пространством. Каково его пополнение?

3.3. Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая, наделенная метрикой

(a) $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$;

(b) $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

(c) $\rho(x, y) = |\exp x - \exp y|$?

Если нет, то описать пополнение по соответствующей метрике. Будет ли это пространство сепарабельным?

3.4. Каким условиям должна удовлетворять непрерывная возрастающая функция f, чтобы в метрике $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$ вещественная прямая была полным метрическим пространством? Если f не удовлетворяет этим условиям, то описать пополнение по этой метрике.

3.5. На множестве натуральных чисел положим

$$\rho(m,n) = \begin{cases} 0, & \text{если } m = n, \\ 1 + \dfrac{1}{m+n}, & \text{если } m \neq n. \end{cases}$$

Доказать, что функция ρ наделяет $\mathbb{N}$ структурой полного метрического пространства. Показать, что шары $B[n; 1 + (2n)^{-1}]$ вложены друг в друга, но их пересечение пусто. Почему это не противоречит теореме Бэра?

3.6. Доказать полноту и сепарабельность метрических пространств l_1 и l_2.

3.7. Доказать полноту и сепарабельность метрического пространства l_p $(p \geq 1)$.

3.8. Доказать, что метрическое пространство l_∞ полно, но не сепарабельно.

3.9. Показать, что функция $\rho(x,y)$ наделяет пространство s всех числовых последовательностей структурой полного метрического пространства, если

(a) $$\rho(x,y) = \sup_{n\geq 1} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|};$$

(b) $$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

3.10. Доказать, что пространство $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций полно и сепарабельно.

Указание. Воспользоваться теоремой Вейерштрасса об аппроксимации.

3.11. Показать, что пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой

$$\rho(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$$

не полно. Приведите пример фундаментальной последовательности в этом пространстве, которая не сходится.

3.12. Показать, что пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой

$$\rho(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\, dt \right)^{1/p} \qquad (p > 1)$$

не полно. Приведите пример фундаментальной последовательности в этом пространстве, которая не сходится.

4. Принцип сжимающих отображений и его применение в конечномерных евклидовых пространствах

Пусть X — пространство с метрикой ρ. Отображение $A : X \to X$ называется *сжимающим* , если существует константа $q \in (0, 1)$ такая, что для любых x, $y \in X$ верно неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leq q\rho(x, y). \tag{4.1}$$

Следует подчеркнуть, что в этом определении константа q должна быть строго меньше единицы.

Принцип сжимающих отображений утверждает, что если X — полное метрическое пространство, то существует единственная точка $y \in X$ такая, что $Ay = y$. Такая точка называется *неподвижной точкой* оператора A. Более того, если x_0 — произвольная точка из X, то последовательность $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1, \ldots, x_n = Ax_{n-1}$ сходится к неподвижной точке y оператора A, причем скорость сходимость степенная: $\rho(x_n, y) \leq Cq^n$, где $C = \rho(x_1, x_0)/(1 - q)$.

Принцип сжимающих отображений широко используется при доказательстве разрешимости различных уравнений (функциональных, дифференциальных, интегральных и пр.). При его применении кроме условия сжимаемости (4.1) следует проверять также полноту метрического пространства X.

4.1. Пусть функция f определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и отображает его в себя, причем $\max_{[a,b]} |f'(t)| < 1$. Доказать, что уравнение $f(t) = t$ имеет на отрезке $[a, b]$ единственное решение.

4.2. Пусть функция f определена и дифференцируема на вещественной оси, причем $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| < 1$. Доказать, что уравнение $f(t) = t$ имеет на вещественной оси единственное решение.

4.3. Пусть функция $x = f(t)$ определена и дифференцируема на вещественной оси, причем $\inf_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| > 1$. Доказать, что уравнение $f(t) = t$ имеет на вещественной оси единственное решение.

Указание. Докажите, что существует обратная функция f^{-1}.

4.4. Показать, что если f — дифференцируемая функция на $[a, b]$, причем $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $0 < c \leq f'(x) \leq d < \infty$, $x \in [a, b]$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение.

Указание. Покажите, что при малых $\varepsilon > 0$ отображение $Ax = x - \varepsilon f(x)$ действует из $[a, b]$ в $[a, b]$ и является сжимающим.

4.5. Используя принцип сжимающих отображений, покажите, что уравнение $\cos t = t$ имеет единственное решение на вещественной оси. Докажите, что это решение лежит в интервале (-1,1). Предложите приближенный метод решения этого уравнения и оцените его погрешность.

4.6. Используя принцип сжимающих отображений, покажите, что уравнение $2te^t = 1$ имеет единственное решение на вещественной оси. Докажите, что это решение лежит в интервале (0,1). Предложите приближенный метод решения этого уравнения и оцените его погрешность.

4.7. Используя принцип сжимающих отображений, покажите, что последовательность

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = x_n - 0,5(x_n^2 - 0,25)$$

сходится к 0,5. Оцените скорость сходимости.

4.8. Найдите предел последовательности $x_{n+1} = \sin x_n$, где x_1 — произвольное число.

4.9. Доказать, что последовательность цепных дробей

$$2; \quad 2+\frac{1}{2}; \quad 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}; \quad 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}, \ \ldots$$

имеет предел и найти его.

4.10. Основываясь на принципе сжимающих отображений, покажите, что система линейных уравнений в $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = \ \ 0.5y + 1 \\ y = \ 0.25x - 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и укажите приближенный метод ее решения.

4.11. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнение $x = Ax + b$, где A — линейное отображение с матрицей $||a_{ij}||$, $b \in \mathbb{R}^n$, имеет единственное решение, если выполняется одно из следующих условий:

(a) $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1;$$

(b) $$\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1;$$

(c) $$\max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1.$$

Указание. Докажите, что оператор A является сжимающим в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метриками, определенными в задаче 2.1.

5. Применение принципа сжимающих отображений в функциональных пространствах

5.1. Докажите, что уравнение $x(t) = t + 0.5x(t^2)$ имеет единственное решение $\tilde{x}(t)$ в пространстве $C[0,1]$. Выпишите несколько членов итеративного процесса $x_{n+1}(t) = t + 0,5x_n(t^2)$, $x_0 = 0$. Найдите n при котором погрешность $\max_{t\in[0,1]} |\tilde{x}(t) - x_n(t)| < 0,001$.

5.2. Доказать, что уравнение $y + 0,5\sin y + f(x) = 0$, где $f \in C[a,b]$ имеет единственное решение $y = y(x)$ в пространстве $C[a,b]$.

5.3. Пусть в полосе $[a,b]\times(-\infty,+\infty)$ функция $F(t,x)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную по x, удовлетворяющую условию

$$0 < m \le F'_x(t,x) \le M < \infty.$$

Показать, что уравнение $F(t,x) = 0$ имеет единственное решение $x = x(t) \in C[a,b]$.

5.4. Докажите, что бесконечная система линейных уравнений

$$x_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x_m + a_n, \quad n = 1,2,\ldots$$

имеет единственное решение $x = (x_1, x_2, \ldots)$ в пространстве l_∞ при любом $a = (a_1, a_2, \ldots) \in l_\infty$, если выполняются неравенства

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \le \alpha < 1, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Указание. См. задачу 4.10.

5.5. Докажите, что бесконечная система линейных уравнений

$$x_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x_m + a_n, \quad n = 1,2,\ldots$$

имеет единственное решение $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$ при любом $a = (a_1, a_2, \ldots) \in l_1$, если выполняются неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nm}| \le \alpha < 1, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Указание. См. задачу 4.10.

5.6. Показать, что линейное интегральное уравнение

$$x(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 stx(s)\,ds + \frac{5}{6}t \tag{5.1}$$

имеет единственное решение $x \in C[0,1]$. Найти методом последовательных приближений точное решение уравнения (5.1).

5.7. Доказать, что оператор

$$Ax(t) = \frac{1}{2}\int_0^t x(\tau)\,d\tau + 1$$

является сжимающим в пространстве $C[0,1]$ и найти его неподвижную точку, решая соответствующее дифференциальное уравнение. Показать, что итерации $x_{n+1} = Ax_n$, $x_0 = 0$ являются частичными суммами ряда Тейлора функции — неподвижной точки оператора A.

5.8. Показать, что условие

$$\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y), \quad \forall x,\ y \in X,\ x \neq y, \tag{5.2}$$

не достаточно для существования неподвижной точки отображения A.

Указание. Рассмотрите оператор $Ax = x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ на вещественной прямой,

5.9. Доказать, что если X — компактное МП, и $A : X \to X$ — отображение, удовлетворяющее условию (5.2), то существует единственная неподвижная точка отображения A.

Указание. Рассмотрите любую последовательность итераций $x_{n+1} = Ax_n$. Докажите, что числовая последовательность $\rho(x_{n+1}, x_n)$ монотонно убывает и, следовательно, сходится к некоторому числу $\gamma \geq 0$. В силу компактности из последовательности x_n можно выделить подпоследовательность x_{n_k}, которая сходится к некоторому $x \in X$. Тогда x_{n_k+1} сходится к $y = Ax$, x_{n_k+2} сходится к Ay, и $\rho(Ax, Ay) = \gamma = \rho(x, y)$. Следовательно, $x = y = Ax$ — неподвижная точка оператора A.

5.10. Привести пример неполного МП и сжимающего отображения в нем, не имеющего неподвижной точки.

6. Линейные нормированные пространства

Линейным пространством (ЛП) над полем Λ (мы рассматриваем только два поля $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется множество E, наделенное двумя операциями — сложением и умножением на скаляр — со свойствами, описываемыми ниже.

Сложение $+ : E \times E \to E$ сопоставляет паре элементов $x, y \in E$ элемент $z \in E$, называемый их *суммой*, и обозначаемый $x + y$. По сложению E представляет собой абелеву группу, т. е.

1) $\forall x, y, z \in E \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность);

2) $\exists!\, \Theta \in E\ \forall x \in E \quad x + \Theta = \Theta + x$, (существование нейтрального элемента или нуля);

3) $\forall x \in E\ \exists y \in E \quad x+y=y+x=\Theta$ (существование обратного элемента, который обозначается $(-x)$);

4) $\forall x, y \in E \quad x+y=y+x$ (коммутативность).

Умножение на скаляр $\cdot : \Lambda \times E \to E$ сопоставляет элементу α поля Λ (скаляру) и элементу $x \in E$ элемент $y \in E$, называемый *произведением* x на α, и обозначаемый $\alpha \cdot x$ или просто αx. При этом операция умножения удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda\ \forall x \in E \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

3) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda\ \forall x \in E \quad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$;

2) $\forall \alpha \in \Lambda\ \forall x, y \in E \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$;

4) $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x$ (здесь 1 — единичный элемент поля Λ).

Элементы линейного пространства E называются *векторами* или *точками*, а элементы поля Λ — *скалярами*. Векторный нуль Θ для простоты также может обозначаться как обычный скалярный нуль 0 в случаях, когда это не приводит к недоразумениям.

Линейное пространство E называется *нормированным* пространством, если на E задана функция $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}+ = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geq 0\}$, называемая *нормой* и удовлетворяющая трем условиям:

(1) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$ (аксиома тождества);

(2) $\forall \alpha \in \Lambda \forall x \in E \quad ||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$ (однородность нормы);

(3) $\forall x, y \in E \quad ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ (неравенство треугольника).

Число $||x||$ называется *нормой элемента* x.

Если E — нормированное пространство, то на E можно ввести метрику ρ, индуцированную нормой, по формуле $\rho(x, y) = ||x-y||$. Следовательно, E как метрическое пространство наделяется топологией. Таким образом, можно говорить об открытых и замкнутых множествах, шарах в E, сходимости последовательностей и пр.

Множество в нормированном пространстве называется *ограниченным*, если существует шар с центром в нуле, содержащий это множество.

6.1. Доказать, что любая сходящаяся последовательность в нормированном пространстве ограничена.

6.2. Доказать, что операции сложения и умножения на скаляр в нормированном пространстве непрерывны.

Указание. Поскольку любое нормированное пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, то достаточно проверить, что если $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\alpha_n \to \alpha$, то $x_n + y_n \to x + y$, $\alpha_n x_n \to \alpha x$.

6.3. Доказать, что норма является непрерывной функцией в нормированном пространстве.

Указание. Поскольку любое нормированное пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, то достаточно проверить, что если $x_n \to x$, то $||x_n|| \to ||x||$.

6.4. Докажите, что если $x_n \to x$ и $||x_n - y_n|| \to 0$, то $y_n \to x$.

6.5. Докажите, что $||x|| \le \max\{||x+y||, ||x-y||\}$.

6.6. Докажите, что объединение конечного числа ограниченных множеств есть множество ограниченное.

6.7. Проверить, что следующие координатные метрические пространства являются нормированными с нормой $||x|| = \rho(x, 0)$:

1) $\mathbb{R}^n$ с метриками, определенными в упражнении 2.1;

2) l_1 — пространство суммируемых числовых последовательностей (упр. 2.2);

3) l_2 — пространство числовых последовательностей, суммируемых с квадратом (упр. 2.5);

3) l_p — пространство числовых последовательностей, суммируемых со степенью p (упр. 2.6);

4) c_0 — пространство сходящихся к нулю числовых последовательностей (упр. 2.3).

6.8. Проверить, что следующие функциональные метрические пространства являются нормированными с нормой $||x|| = \rho(x, 0)$:

(1) $C[a, b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций (упр. 2.9);

(2) $M[a, b]$ — пространство ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций (упр. 2.11);

(3) пространство функций ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ (упр. 2.12);

(4) пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с интегральной метрикой

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \tag{6.1}$$

($p \ge 1$) (упр. 3.11).

6.9. Можно ли ввести норму, согласованную с метрикой, в следующих метрических пространствах:

1) $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x, y) = \operatorname{arctg} |x - y|$;

2) s — множество всех последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

6.10. Докажите, что на пополнении нормированного пространства X по метрике, индуцированной нормой, можно ввести структуру ЛП и норму, согласованные со структурой ЛП и нормой на X. В частности, пополнение пространства непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с интегральной метрикой (упр. 6.8. (4)) является нормированным пространством.

Замечание. Отметим, что оно изоморфно пространству $L_p(a,b)$ функций, интегрируемых по Лебегу со степенью p на отрезке $[a,b]$.

6.11. Можно ли в пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций принять за норму элемента x величину:

(a) $$\max_{[a,b]} |x(t)|;$$

(b) $$\max_{[a,b]} |x'(t)|;$$

(c) $$x(b) - x(a) + \max_{[a,b]} |x'(t)|;$$

(d); $$|x(a)| + \max_{[a,b]} |x'(t)| + \int_a^b |x(t)|\,dt?$$

6.12. Можно ли в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций принять за норму элемента x величину:

(a) $$|x(a)| + |x'(a)| + \max_{[a,b]} |x''(t)|;$$

(b) $$|x(a)| + |x(b)| + \max_{[a,b]} |x''(t)|;$$

(c) $$\left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2} + \max_{[a,b]} |x''(t)|?$$

7. Подпространства в нормированных пространствах. Сравнение норм.

Пусть F — подмножество в нормированном пространстве E, замкнутое относительно операций сложения и умножения на скаляр, т.е.

$$\forall x, y \in F \quad x + y \in F,$$

$$\forall \alpha \in \Lambda\ \forall x \in F \quad \alpha x \in F.$$

Такое множество называется *линеалом* в E. Если F — линеал и замкнутое (в смысле топологии) подмножество в E, то F называется *подпространством* нормированного пространства E. Следует отметить, что эта терминология отличается от терминологии, принятой в алгебре.

Пусть в ЛП заданы две нормы $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$. Говорят, что норма $||\cdot||_1$ сильнее нормы $||\cdot||_2$, если существует константа $C > 0$ такая, что $\forall x \in E$ $||x||_2 \le C||x||_1$ или, что то же самое, $\forall \{x_n\}$ $||x_n||_1 \to 0 \Rightarrow ||x_n||_2 \to 0$. В этом случае пишем $||\cdot||_2 \prec ||\cdot||_1$. Если $||\cdot||_2 \prec ||\cdot||_1$ и $||\cdot||_1 \prec ||\cdot||_2$, то говорят, что нормы $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ эквивалентны. Более сильная норма определяет более сильную топологию на E.

7.1. Доказать, что всякий линеал в конечномерном нормированном пространстве является подпространством.

7.2. Доказать, что всякий конечномерный линеал в нормированном пространстве является подпространством.

7.3. Доказать, что замыкание линеала является подпространством.

7.4. Пусть L — подмножество в пространстве l_2, состоящий из последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, удовлетворяющих условию: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0$. Доказать, что L — линеал в l_2. Является ли L подпространством? Аналогичный вопрос для случая пространств l_1, l_p $(p > 1)$, l_∞.

7.5. Доказать, что пространство c_0 сходящихся к нулю последовательностей является подпространством в пространстве сходящихся последовательностей.

7.6. Доказать, что пространство c сходящихся последовательностей является подпространством в пространстве l_∞ ограниченных последовательностей.

7.7. Доказать, что множество функций $x(t)$ в пространстве $C[a,b]$, удовлетворяющих условию $x(a) = 0$, является подпространством в $C[a,b]$.

7.8. Доказать, что множество $\mathcal{P}$ всех многочленов в $C[a,b]$ является линеалом, но не подпространством. Каково минимальное подпространство в $C[a,b]$, содержащее $\mathcal{P}$?

Указание. Воспользоваться теоремой Вейерштрасса о приближении.

7.9. Какие из перечисленных подмножеств в $C[-1,1]$ являются подпространствами:

(a) четные функции;
(b) многочлены степени не выше фиксированного k;
(c) монотонные функции;
(d) непрерывно дифференцируемые функции;
(e) функции, удовлетворяющие условию

$$\int_{-1}^{1} x(t)\,dt = 0?$$

7.10. Показать, что обычная норма $||\cdot||_1 = \max_{[0,1]} |x(t)|$ в пространстве $C[0,1]$ сильнее интегральной $||\cdot||_2 = \int_0^1 |x(t)|\,dt$, и эти нормы не эквивалентны.

7.11. Доказать эквивалентность норм $||x||_1 = \max_{[a,b]} |x(t)| + \max_{[a,b]} |x'(t)|$ и $||x||_2 = \max_{[a,b]} |x'(t)| + \int_a^b |x(t)|\,dt$ в пространстве $C^1[a,b]$ непрерывно дифференцируемых функций.

7.12 Доказать, что $l_1 \subset l_2$ и обычная норма в пространстве l_1 сильнее l_2-нормы, индуцируемой этим вложением.

7.13 Доказать, что $l_2 \subset l_\infty$ и обычная норма в пространстве l_2 сильнее l_∞-нормы, индуцируемой этим вложением.

8. Банаховы пространства

Нормированное пространство E называется *банаховым*, если оно полно, т.е. любая фундаментальная последовательность в нем сходится.

8.1. Доказать, что всякая фундаментальная последовательность в нормированном пространстве ограничена.

8.2. Доказать, что фундаментальная последовательность в нормированном пространстве, содержащая сходящуюся подпоследовательность, сходится.

8.3. Докажите, что если в нормированном пространстве заданы две эквивалентные нормы, и оно банахово по одной из них, то оно банахово и по другой норме.

8.4. Доказать, что подпространство банахова пространства банахово.

8.5. Доказать, что пополнение линеала в банаховом пространстве изоморфно его замыканию.

8.6. На пространстве многочленов на отрезке $[a, b]$ положим $||x|| = \max_{[a,b]} |x(t)|$. Будет ли полученное пространство банаховым? Если нет, то каково будет пополнение?

Указание. Воспользоваться результатом задачи 7.8.

8.7. На пространстве многочленов на отрезке $[a, b]$ положим $||x|| = \int_a^b |x(t)|\, dt$. Будет ли полученное пространство банаховым? Если нет, то каково будет пополнение?

Указание. Воспользоваться результатами задач 3.11. и 8.4.

8.8. В пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций положим

$$||x|| = \left\{ \int_a^b [x^2(t) + {x'}^2(t)]\, dt \right\}^{1/2}.$$

Проверить аксиомы нормы. Будет ли полученное нормированное пространство банаховым?

8.9. Пусть в нормированном пространстве E любая последовательность замкнутых вложенных шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение. Доказать, что X — банахово пространство.

Указание. Рассмотрите любую фундаментальную последовательность $\{x_n\}$. Выберите подпоследовательность $\{x_{nk}\}$ центров и радиусы шаров $r_k \to 0$ таким образом, чтобы шары были вложены друг в друга. Пересечение шаров должно состоять из одной точки. Далее воспользуйтесь результатом задачи 8.2.

8.10. Пусть L — подпространство нормированного пространства E. Введем на E отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y \in L$. Множество E/L классов эквивалентности ξ элементов $x \in E$ называется *факторпространством* пространства E по подпространству L. Докажите, что E/L — ЛП, причем на нем можно ввести норму $||\xi||_{E/L} = \inf_{x\in\xi} ||x||$. Покажите, что если E банахово, то и факторпространство тоже банахово.

9. Унитарные и гильбертовы пространства

Унитарным (*предгильбертовым*) пространством называется ЛП U над полем Λ, в котором определена функция $(\cdot,\cdot) : U \times U \to \Lambda$, сопоставляющая каждой паре $x, y \in U$ число $\lambda = (x, y)$ и удовлетворяющая свойствам:

(1) $\forall x \in U \quad (x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$;

(2) $\forall x, y \in U \quad (x, y) = \overline{(y, x)}$ (черта сверху означает комплексное сопряжение, в вещественном случае $(x, y) = (y, x)$);

(3) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda \quad \forall x, y \in U \quad (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.

Функция $(\cdot,\cdot)$ называется *скалярным произведением*, а число (x, y) — скалярным произведением векторов x и y.

Любое унитарное пространство является нормированным с нормой $||x|| = \sqrt{(x, x)}$. Эта норма удовлетворяет тождеству параллелограмма:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

для любых $x, y \in U$. Обратно, если в нормированном пространстве имеет место тождество параллелограмма, то в нем можно ввести скалярное произведение по формуле

$$(x, y) = \frac{1}{4}\{||x + y||^2 - ||x - y||^2\} + \frac{i}{4}\{||x + iy||^2 - ||x - iy||^2\}$$

в комплексном случае; в вещественном формула упрощается:

$$(x, y) = \frac{1}{4}\{||x + y||^2 - ||x - y||^2\}.$$

В вещественном случае можно ввести понятие угла ϕ между векторами $x, y \in U$:

$$\phi = \arccos \frac{(x, y)}{||x||\,||y||}.$$

Вектора $x, y \in U$ называются *ортогональными* (пишут $x \perp y$), если $(x, y) = 0$.

Полное унитарное пространство называется *гильбертовым.*

Ортогональным дополнением множества M унитарного пространства H называется множество $M^{\perp} = \{x \in H : \forall y \in M \quad x \perp y\}$.

Пусть M, N — подпространства в H. Говорят, что H является ортогональной суммой M и N (пишут $H = M \oplus N$), если любой элемент x из H допускает единственное представление в виде $x = u + v$, где $u \in M$, $v \in N$, $(u, v) = 0$.

9.1. Доказать, что в унитарном пространстве U имеет место тождество Аполлония:

$$||z - x||^2 + ||z - y||^2 = \frac{1}{2}||x - y||^2 + 2\left|\left|z - \frac{x + y}{2}\right|\right|^2$$

для любых элементов $x, y, z \in U$.

9.2. Доказать, что в унитарном пространстве U имеет место неравенство:

$$||z - x|| \cdot ||y - t|| \leq ||x - y||\,||z - t|| + ||y - z||\,||x - t||$$

для любых элементов $x, y, z, t \in U$. Когда в нем реализуется знак равенства?

9.3. Доказать, что элементы x, y в унитарном пространстве U ортогональны тогда и только тогда, когда $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$ $||\lambda x||^2 + ||\mu y||^2 = ||\lambda x + \mu y||^2$ (обобщенная теорема Пифагора).

9.4. Доказать, что в пространстве $C[a, b]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой.

9.5. Доказать, что в пространстве l_1 нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой.

9.6. В пространстве непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций положим

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)\,dt. \tag{9.1}$$

Является ли полученное пространство унитарным? гильбертовым?

9.7. В пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций положим

$$(x, y) = \int_a^b [x(t)y(t) + x'(t)y'(t)]\,dt.$$

Является ли полученное пространство унитарным? гильбертовым?

9.8. Доказать, что ортогональное дополнение любого множества в гильбертовом пространстве является подпространством.

9.9. Доказать, что для любого множества M в унитарном пространстве H имеет место включение $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. Возможно ли здесь строгое включение?

9.10. Доказать, что в гильбертовом пространстве H равенство $M = (M^{\perp})^{\perp}$ имеет место тогда и только тогда, когда M — подпространство H.

9.11. Пусть M, N — такие подпространства гильбертова пространства H, что $H = M \oplus N$. Верно ли, что $N = M^{\perp}$?

9.12. В пространстве непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций со скалярным произведением (9.1) рассмотрим множество M функций $x(t)$, равных нулю при $t \leq 0$. Доказать, что M — подпространство и описать его ортогональное дополнение.

10. Ограниченные линейные функционалы

Пусть E — нормированное пространство над полем Λ. *Функционалом* на E называется любое отображение $f : E \to \Lambda$. Функционал f называется *линейным*, если $\forall \alpha, \beta \in \Lambda \ \forall x, y \in E \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. В дальнейшем все функционалы предполагаются линейными. Функционал f называется *ограниченным*, если конечна величина

$$||f|| = \sup_{x \neq \Theta} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{||x||=1} |f(x)|, \tag{10.1}$$

называемая *нормой функционала* f. Эквивалентное определение нормы f: $||f|| = \inf\{C : |f(x)| \leq C||x|| \forall x \in E\}$. Из него следует, что если для некоторого числа $C_1 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq C_1||x|| \ \forall x \in E$, то f — ограниченный функционал и $||f|| \leq C_1$. Для оценки нормы функционала снизу можно использовать определение (10.1): если для некоторого элемента $x_0 \in E$ вычислить значение $C_0 = \frac{|f(x_0)|}{||x_0||}$, то $||f|| \geq C_0$.

Линейный функционал ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен, т.е. $\forall \{x_n\} \quad \{x_n\} \to x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(x_0)$. Непрерывность линейных функционалов достаточно проверять в точке $x_0 = \Theta$.

Непрерывные (ограниченные линейные функционалы) в нормированном пространстве E образуют линейное пространство E^* с естественно определяемыми операциями сложения и умножения на скаляр. Норма функционала определяет на E^* структуру банахова пространства. Это пространство называется *пространством, сопряженным к* E.

Напомним структуру сопряженного пространства для основных координатных и функциональных нормированных пространств.

Пространство $(l_1)^*$ изометрически изоморфно пространству l_∞. Любой элемент $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l_\infty$ определяет на l_1 линейный непрерывный функционал $f = f_y$ по правилу:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

при этом $||f|| = ||y||_{l_\infty}$.

Пространство $(l_p)^*$ $(1 < p < \infty)$ изометрически изоморфно пространству l_q, где $q = p/(p-1)$. Любой элемент $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l_q$ определяет на l_p линейный непрерывный функционал $f = f_y$ по правилу:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

при этом $||f|| = ||y||_{l_q}$. В частности, $(l_2)^*$ изоморфно l_2.

Пространство $(c_0)^*$ изометрически изоморфно пространству l_1. Любой элемент $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l_1$ определяет на l_1 линейный непрерывный функционал $f = f_y$ по правилу:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

при этом $||f|| = ||y||_{l_1}$.

Пространство $(L_1(a,b))^*$ сопряженное к пространству функций, интегрируемых по Лебегу на отрезке $[a,b]$, изометрически изоморфно пространству существенно ограниченных функций $L_\infty(a,b)$. Любой элемент $y \in L_\infty$ определяет на $L_1(a,b)$ линейный непрерывный функционал $f = f_y$ по правилу:

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\,dt,$$

при этом $||f|| = ||y||_{L_\infty(a,b)}$.

Пространство $(L_p(a,b))^*$ $(1 < p < \infty)$, сопряженное к пространству функций, интегрируемых по Лебегу на отрезке $[a,b]$ со степенью p, изометрически изоморфно пространству $L_q(a,b)$, где $q = p/(p-1)$. Любой элемент $y \in L_\infty$ определяет на $L_1(a,b)$ линейный непрерывный функционал $f = f_y$ по правилу:

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\,dt,$$

при этом $||f|| = ||y||_{L_q(a,b)}$.

Пространство $(C[a,b])^*$ сопряженное к пространству непрерывных функций на отрезке $[a,b]$, изометрически изоморфно пространству функций ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$. Любая функция ограниченной вариации y на $[a,b]$ определяет на $C[a,b]$ линейный непрерывный функционал $f = f_y$ по правилу:

$$f(x) = \int_a^b x(t)dy(t),$$

при этом $||f|| = \bigvee_a^b y$.

10.1. Доказать, что следующие функционалы являются непрерывными в пространстве $C[0,2]$ и найти их нормы. Для каких из этих функционалов можно знак супремума в (10.1) заменить на максимум?

(a) $$f(x) = 3x(0) + x(2);$$

(b) $$f(x) = 2x(0) - x(2);$$

(c) $$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k), \quad \alpha_k \in \mathbb{R}\ t_k \in [-1,1]\ k = 1, \ldots, n.$$

10.2. Доказать, что следующие функционалы являются непрерывными в пространстве $C[-1,1]$ и найти их нормы. Для каких из этих функционалов можно знак супремума в (10.1) заменить на максимум?

(a) $$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt;$$

(b) $$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - \int_{-1}^0 x(t)\,dt;$$

(c) $$f(x) = \int_{-1}^1 x(t)\,dt - x(0);$$

(d) $$f(x) = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt.$$

10.3. Будут ли ограниченными в пространстве $C[0,1]$ следующие линейные функционалы:

(a) $$f(x) = \int_0^1 x(\sqrt{t})\,dt;$$

(b) $$f(x) = \int_0^1 x(t^2)\,dt;$$

(c) $$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t^n)\,dt?$$

Указание. Найдите предел. Используйте то, что последовательность t^n стремится равномерно к нулю на любом отрезке $[0, 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$.

10.4. Доказать, что следующие функционалы являются непрерывными в пространстве l_p и найти их нормы. Для каких из этих функционалов можно знак супремума в (10.1) заменить на максимум?

(a) $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k},\ p = 1;$$

(b)
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{2k+1}}{k},\ p = 2;$$

(c)
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_k,\ p = 1.$$

10.5. Доказать, что функционал $f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ является непрерывными в пространстве c (упр. 2.4б) сходящихся последовательностей и найти его норму.

10.6. Доказать, что следующие функционалы являются непрерывными в пространстве $L_p[-1,1]$ и найти их нормы. Для каких из этих функционалов можно знак супремума в (10.1) заменить на максимум?

(a)
$$f(x) = \int_{-1}^{1} tx(t)\,dt,\ p = 1;$$

(b)
$$f(x) = \int_{-1}^{1} tx(t)\,dt,\ p = 2;$$

(c)
$$f(x) = \int_{-1}^{1} t^{-1/3}x(t)\,dt,\ p = 2;$$

(d)
$$f(x) = x(0),\ 1 < p < \infty.$$

11. Ограниченные линейные операторы

Пусть E, F — нормированные пространства над полем Λ. *Оператором*, действующим из E в F называется отображение $A : E \to F$. Оператор A называется *линейным*, если $\forall \alpha, \beta \in \Lambda\ \forall x, y \in E \quad A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$. В дальнейшем все операторы предполагаются линейными. Вместо $A(x)$ пишут Ax. Оператор A называется *ограниченным*, если конечна величина

$$||A|| = \sup_{x\neq\Theta} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||Ax||, \tag{11.1}$$

называемая *нормой* оператора A. Эквивалентное определение нормы A: $||A|| = \inf\{C : ||Ax|| \le C||x|| \forall x \in E\}$. Из него следует, что если для некоторого числа $C_1 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $||Ax|| \le C_1||x||\ \forall x \in E$, то A — ограниченный оператор и $||A|| \le C_1$. Для оценки нормы оператора снизу можно использовать определение (11.1): если для некоторого элемента $x_0 \in E$ вычислить значение $C_0 = \frac{||Ax_0||}{||x_0||}$, то $||A|| \ge C_0$.

Линейный оператор ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен, т.е. $\forall\{x_n\} \quad \{x_n\} \to x_0 \Rightarrow \{A(x_n)\} \to A(x_0)$. Непрерывность линейных операторов достаточно проверять в точке $x_0 = \Theta$.

Непрерывные (ограниченные) линейные операторы, действующие из E в F, образуют линейное пространство $L(E, F)$ с естественно определяемыми операциями сложения и умножения на скаляр. Норма оператора определяет на $L(E, F)$ структуру нормированного пространства. Если пространство F банахово, то $L(E, F)$ — тоже банахово. Пространство, сопряженное к нормированному пространству E, является частным случаем пространства $L(E, F)$, когда $F = \Lambda$. В случае $E = F$ пространство $L(E, F)$ обозначают через $L(E)$.

11.1. Доказать, что следующие операторы в координатных пространствах являются линейными ограниченными и найти их нормы:

a) $A : l_1 \to l_1$, $A(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$;
b) $A : l_2 \to l_2$, $A(x_1, x_2, \ldots) = (x_n, x_{n+1}, \ldots)$;
c) $A : l_1 \to l_2$, $Ax = x$.

11.2. Доказать, что следующие операторы в пространствах непрерывных функций являются линейными ограниченными и найти их нормы:

(a) $$A : C[-1, 1] \to C[0, 1],\ Ax(t) = x(t);$$

(b) $$A : C[0, 1] \to C[0, 1],\ Ax(t) = t^2 x(0);$$

(c) $$A : C[0, 1] \to C[0, 1],\ Ax(t) = x(t^2);$$

(d) $$A : C[0, 1] \to C[0, 1],\ Ax(t) = \int_0^t x(t)\, dt.$$

11.3. Доказать, что следующие операторы $A : \tilde{L}_2(0, 1) \to \tilde{L}_2(0, 1)$, действующие в пространстве $\tilde{L}_2(0, 1)$ непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ с интегральной нормой (см. задачу 3.11), являются линейными ограниченными и найти их нормы:

(a) $$A : \tilde{L}_2(0, 1) \to \tilde{L}_2(0, 1),\ Ax(t) = t \int_0^1 x(\tau)\, d\tau;$$

(b) $$A : C[0, 1] \to C[0, 1],\ Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau;$$

(c) $$A : C[0, 1] \to C[0, 1], Ax(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \le t \le 1/2; \\ 0, & 1/2 < t \le 1. \end{cases}$$

11.4. Для каких функций $\phi(t)$ оператор $Ax(t) = \phi(t)x(t)$ будет ограничен, если он рассматривается как действующий:

а) из пространства $C[0,1]$ в $C[0,1]$;
б) из пространства $L_2(0,1)$ в $L_2(0,1)$?

11.5. Будет ли ограниченным оператор дифференцирования $A : C^1[0,1] \to \to C[0,1]$?

11.6. Пусть $A : E \to F$ — линейный ограниченный оператор, E, F — банаховы пространства. Всегда ли равенства а) $||x||_1 = ||Ax||$; б) $||x||_2 = = ||x|| + ||Ax||$ задают на E норму? Будет ли в этой норме E банаховым пространством?

12. Обратимые операторы

Пусть E, F — ЛП, $A : E \to F$ — линейный оператор. Если A — биекция, то существует обратное отображение $A^{-1} : F \to E$, которое является взаимно-однозначным и линейным. Оператор A^{-1} при этом называют алгебраически обратным к оператору A. Для существования алгебраически обратного оператора достаточно проверить, что оператор A является сюръективным ($A(E) = F$) и инъективным (ядро оператора $KerA = \{x \in E | Ax = 0\}$ состоит из одной точки Θ).

Если A^{-1} является ограниченным оператором, то говорят, что A обратим (или, более точно, непрерывно обратим), а A^{-1} называют обратным оператором к A.

Теорема Банаха об обратном операторе. Если E, F являются банаховыми пространствами и существует алгебраически обратный оператор A^{-1}, то оператор A обратим.

"Малая"теорема Банаха об обратном операторе. Если E — банахово пространство, $A \in L(E)$ и $||A|| < 1$, то оператор $I - A$ обратим, и

$$||(I - A)^{-1}|| < \frac{1}{1 - ||A||}.$$

Пусть $A : E \to F$ — линейный оператор. Линейный ограниченный оператор $B : F \to E$ называется левым (правым) обратным к A, если выполняется условие $BA = I_E$ ($AB = I_F$), где I_E и I_F — тождественные операторы в пространствах E и F соответственно.

12.1. Если A, $B : E \to E$ — линейные операторы, причем $AB = BA$. Доказать, что если A алгебраически обратим, то $A^{-1}B = BA^{-1}$.

12.2. Если A, $B \in L(E)$, и A обратим, то

$$||AB|| \geq \frac{||A||}{||B^{-1}||}.$$

12.3. В пространстве последовательностей l_2 рассмотрим оператор A, переводящий элемент $x = (x_1, x_2, \ldots)$ в элемент $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$, где

$\lambda_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. При каких условиях на последовательность λ_n существует алгебраически обратный оператор к A? обратный оператор к A?

12.4. Доказать, что оператор $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$, имеет правый обратный, но не имеет левого обратного.

12.5. Доказать, что оператор обратим тогда и только тогда, когда он имеет и правый, и левый обратные. В этом случае правый и левый обратные совпадают между собой и являются обратным оператором к данному.

12.6. В пространстве последовательностей l_2 рассмотрим оператор A, переводящий элемент $x = (x_1, x_2, \ldots)$ в элемент $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Существует ли правый и левый обратные операторы к A? обратный оператор к A?

12.7. В пространстве последовательностей l_2 рассмотрим оператор A, переводящий элемент $x = (x_1, x_2, \ldots)$ в элемент $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$. Существует ли правый и левый обратные операторы к A? обратный оператор к A?

12.8. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$,

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau.$$

Что представляет собой область значений $R(A)$ оператора A? Существует ли на $R(A)$ обратный оператор A^{-1}?

12.9. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$,

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)\, ds.$$

Доказать, что этот оператор обратим и найти A^{-1}.

12.10. Пусть E — банахово пространство, $A \in L(E)$ и $||I - A|| < 1$. Доказать, что оператор A обратим и оценить норму $||A^{-1}||$.

12.11. Пусть E — банахово пространство, $A \in L(E)$ и $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda| > ||A||$. Доказать, что оператор $A - \lambda I$ обратим.

13. Теорема Хана-Банаха. Принцип равномерной ограниченности

Следующие две теоремы, наряду с теоремой Банаха об обратном операторе, являются фундаментальными принципами функционального анализа.

Теорема Хана-Банаха. Пусть f — линейный ограниченный функционал, определенный на линеале нормированного пространства E. Тогда на E существует линейный ограниченный функционал $\tilde{f}$, совпадающий с f на L такой, что $||\tilde{f}|| = ||f||$.

Следствие. Пусть $x \in E$, $x \neq \Theta$. Тогда существует такое $f \in E^*$, что $||f|| = 1$ и $f(x) = ||x||$.

Теорема Банаха-Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности). Пусть A_σ, $\sigma \in \Sigma$ — семейство в $L(E, F)$, где E — банахово, F — нормированное пространство. Если для любого $x \in E$ множество $\{A_\sigma x | \sigma \in \Sigma\}$ ограничено в F, то существует $C > 0$ такое, что $\forall \sigma \in \Sigma$ $(||A_\sigma|| \leq C)$.

13.1. На подпространстве $L = \{(x, y) | 2x - y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ задан линейный функционал φ. Найти продолжение φ до линейного функционала на $\mathbb{R}^2$ с сохранением нормы. Убедиться, что продолжение единственно.

13.2. Пусть L — одномерное подпространство в $C[0, 1]$, натянутое на функцию $f_0(t) = t$ $(t \in [0, 1])$, и $\varphi(\lambda f_0) = \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ — функционал на L. Продолжить φ на $C[0, 1]$ с сохранением нормы. Единственно ли это продолжение?

13.3. Пусть E — нормированное пространство, x, $y \in E$ и $x \neq y$. Доказать, что существует $f \in E^*$ такое, что $f(x) \neq f(y)$.

13.4. Доказать, что если E — нормированное пространство, $x \in E$, то

$$||x|| = \sup_{f \in E^*, ||f|| = 1} |f(x)|.$$

13.5. Доказать, что если E — нормированное пространство, $A \in L(E)$, то $||A|| = \sup\{f(Ax) | x \in E, ||x|| = 1, f \in E^*, ||f|| = 1\}$.

13.6. Доказать, что если нормированное пространство E бесконечномерно, то и сопряженное пространство E^* бесконечномерно.

13.7. Пусть E — банахово пространство, $\varphi_n \in E^*$ $(n \in \mathbb{N})$ и для любого $f \in E$ существует $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(f)$. Доказать, что равенство $\varphi(f) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(f)$ $(f \in E)$ определяет элемент $\varphi \in E^*$.

13.8. Пусть E — банахово, F — нормированное пространство, $A_n \in L(E, F)$ $(n \in \mathbb{N})$ и для любого $x \in E$ существует $\lim_{n\to\infty} A_n x$. Доказать, что равенство $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$ $(x \in E)$ определяет элемент $A \in L(E, F)$.

13.9. Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n \nu_n$ сходится всякий раз, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty |\nu_n|^2$. Доказать, что тогда $\sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^2 < \infty$.

14. Сопряженные операторы

Пусть E, F — нормированные пространства, $A \in L(E,F)$. Оператором, *сопряженным* к A, называется оператор $A^* \in L(F^*, E^*)$, действующий по формуле $A^* f(x) = f(Ax)$. Справедливо равенство $||A^*|| = ||A||$. Справедливо равенство

$$(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^* \qquad (14.1)$$

для любых A, $B \in L(E,F)$, α, $\beta \in \Lambda$. Если $A \in L(E,F)$, $B \in L(F,G)$, то $(AB)^* = B^* A^*$.

Для операторов в унитарных, в частности, в гильбертовых пространствах H сопряженный оператор определяется формулой $(Ax, y) = (x, A^* y)$. Поскольку изоморфизм между H и его сопряженным H^*, осуществляемый посредством скалярного произведения, является антилинейным (т. к. скалярное произведение антилинейно по второму аргументу), то в унитарных пространствах равенство (14.1) имеет вид $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$.

14.1. Найти оператор, сопряженный к оператору $A : l_2 \to l_2$, если

а) $Ax = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$;
б) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n, \ldots)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda_n| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$;
в) $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$;
г) $Ax = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$.

14.2. Найти сопряженные к операторам задачи 14.1, если они рассматриваются как действующие из l_1 в l_1.

14.3. Найти оператор, сопряженный к оператору $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, если

(а) $$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau;$$

(б) $$Ax(t) = tx(t);$$

(в) $$Ax(t) = \int_0^1 tx(s)\, ds;$$

(г) $$Ax(t) = \int_0^1 sx(s)\, ds.$$

14.4. Найти сопряженные к операторам задачи 14.1, если они рассматриваются как действующие из $L_1(0,1)$ в $L_2(0,1)$.

14.5. Пусть оператор $A \in L(E,F)$ обратим. Доказать, что оператор A^* обратим и $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

14.6. Пусть H — гильбертово пространство. Доказать, что
а) $(R(A))^\perp = N(A^*)$;
б) $(R(A^*))^\perp = N(A)$.
Здесь $R(A)$ — область значений, $N(A)$ — ядро оператора A.

14.7. Пусть H — гильбертово пространство. Доказать, что
а) $N(AA^*) = N(A^*)$;
б) $N(A^*A) = N(A)$.