

УДК: 530.1

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МНОГОМЕРНЫХ NLS-СОЛИТОНОВ В НЕОДНОРОДНОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ

В. Ю. Белашов<sup>1</sup>, О. А. Харшиладзе<sup>2</sup>, Дж. Л. Рogaва<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казанский федеральный университет, 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18  
E-mail: [vybelashov@yahoo.com](mailto:vybelashov@yahoo.com)

<sup>2</sup>Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили,  
Грузия, 380043, г. Тбилиси, ул. Университетская, 2  
E-mail: [oleg.kharshiladze@gmail.com](mailto:oleg.kharshiladze@gmail.com)

**Аннотация.** На основе аналитических и численных подходов изучается устойчивость и динамика взаимодействия неоднородных солитоноподобных решений обобщенного нелинейного уравнения Шредингера (GNLS), описывающего волны в плазме, оптоволокне и плоских оптических волноводах с учетом неоднородности и нестационарности среды распространения. Получены достаточные условия устойчивости 2-мерных и 3-мерных решений и показано, что даже в наиболее простом 1-мерном случае уравнение GNLS может иметь устойчивые и квазиустойчивые решения типа солитонов и бризеров, а также неустойчивые, рассеивающиеся со временем, решения. Полученные результаты могут быть полезны в многочисленных приложениях в физике плазмы, нелинейной оптике и многих других областях физики.

**Ключевые слова:** обобщенное нелинейное уравнение Шредингера; солитоны огибающей; бризеры; взаимодействие; многомерные солитоны; неоднородная среда; нестационарная среда; плазма; оптоволокно; оптические волноводы

## INTERACTION OF MULTIDIMENSIONAL NLS-SOLITONS IN NONUNIFORM AND NONSTATIONARY MEDIUM

V. Yu. Belashov, O. A. Kharshiladze, J. L. Rogava

**Abstract.** On the basis of the analytical and numerical approaches the stability and dynamics of interaction of the multidimensional soliton-like solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation, which describes the waves in a plasma, fiber and planar optical waveguides, taking into account inhomogeneity and nonstationarity of propagation medium, is studied. The sufficient conditions of stability of the 2-dimensional and 3-dimensional solutions are obtained, and it is shown that even in the simplest 1-dimensional case the GNLS equation can have stable and quasi-stable solutions of the soliton and breather types and also unstable solutions which disperses with time. Obtained results can be useful in numerous applications in plasma physics, nonlinear optics and in many other fields of physics.

**Keywords:** generalized nonlinear Schrödinger equation; envelop solitons; breathers; interaction; multidimensional solitons; nonuniform medium; nonstationary medium; plasma; fiber; optical waveguides

### Введение

Обобщенное 3-мерное (3D) нелинейное уравнение Шредингера (3-GNLS) [1] описывает динамику огибающей модулированных нелинейных волн и импульсов (волновых пакетов) в средах с дисперсией и имеет многочисленные важные приложения в физике плазмы (например, описывает распространение ленгмюровских волн в горячей плазме), нелинейной оптике (распространение световых импульсов в кристаллах, оптоволокне и плоских оптических волноводах), оно описывает, в частности такие явления, как турбулентность, волновой коллапс и оптическая самофокусировка. Уравнение используется и в других областях физики – таких, например, как теория сверхпроводимости и физика низких температур (в частности, обычное уравнение NLS есть упрощенная 1D форма уравнения Гинзбурга-Ландау, впервые введенного ими в 1950 г. при описании сверхпроводимости), гравитационные волны малой амплитуды на поверхности глубокой невязкой жидкости и др. Отметим, что 3D уравнение 3-GNLS не является полностью интегрируемым, и его аналитические решения в общем случае не известны (за исключением, пожалуй, гладких решений типа уединенных волн). Однако, с использованием

подходов, развитых в [2, 3] для других уравнений (GKP и 3-DNLS) системы ВК (Belashov-Karman), мы можем аналитически исследовать устойчивость возможных решений уравнения 3-GNLS, а динамику взаимодействия солитонов изучить численно. В настоящей работе и реализуется такой подход.

### Уравнение 3-GNLS. Устойчивость решений

Если в системе ВК

$$\partial_t u + \hat{A}(t, u)u = f, \quad f = \sigma \int_{-\infty}^x \Delta_{\perp} u dx + f', \quad \Delta_{\perp} = \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad (1)$$

дифференциальный оператор имеет вид  $\hat{A}(t, u) = i[\gamma|u|^2 - \beta\partial_x^2] + \alpha/2$ , мы имеем класс уравнений 3-GNLS:

$$\partial_t u + i\gamma|u|^2 u - i\beta\partial_x^2 u + (\alpha/2)u = \sigma \int_{-\infty}^x \Delta_{\perp} u dx + f', \quad (2)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma = \varphi(t, x, y, z)$ ,  $f' = f'(t, x, y, z)$ , и  $(\alpha/2)u$  описывает диссипативные эффекты, а  $u$  есть огибающая волнового пакета (импульса). В гамильтоновой форме уравнение (2) с  $\alpha = 0$  (уравнение 3-NLS) будет иметь вид:

$$\partial_t u = \partial_x (\delta H / \delta u), \quad (3)$$

где  $H = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\gamma}{2} |u|^4 + \beta u u^* \partial_x \varphi + \frac{1}{2} \sigma (\nabla_{\perp} \partial_x w)^2 \right] d\mathbf{r}$ ,  $\partial_x^2 w = u$ ,  $\varphi = \arg(u)$ .

Используя метод, подробно изложенный в [2], исследуем устойчивость 2D и 3D решений уравнения (2). При этом, задача для уравнения (3) формулируется в виде вариационного уравнения  $\delta(H + \nu P_x) = 0$ ,  $P_x = \frac{1}{2} \int u^2 d\mathbf{r}$ , смысл которого состоит в том, что все финитные решения уравнения (3) есть стационарные точки гамильтониана  $H$  при фиксированном значении проекции импульса  $P_x$ . В соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости, в динамической системе точки, которые соответствуют минимуму или максимуму гамильтониана  $H$  являются абсолютно устойчивыми. Если же экстремум локальный, то ему будут соответствовать локально устойчивые решения.

Рассмотрим деформации  $H$ , сохраняющие проекцию импульса  $P_x$ :

$$u(x, r_{\perp}) \rightarrow \zeta^{-1/2} \eta^{-1} u(x/\zeta, \mathbf{r}_{\perp}/\eta), \quad \zeta, \eta \in \mathbb{C}.$$

Гамильтониан при этом примет вид  $H(\zeta, \eta) = a \zeta^{-1} \eta^{-2} + b \zeta^{-1} - c \zeta^2 \eta^{(1-d)}$  с интегральными коэффициентами  $a = (\gamma/2) \int |u|^4 d\mathbf{r}$ ,  $b = \beta \int u u^* \partial_x \varphi d\mathbf{r}$ ,  $c = (\sigma/2) \int (\nabla_{\perp} \partial_x w)^2 d\mathbf{r}$ . Из необходимых условий экстремума  $\partial_{\zeta} H = 0$ ,  $\partial_{\eta} H = 0$  сразу же найдем его координаты:

$$\zeta_0 = -ac^{-1}, \quad \eta_0 = \left[ -ab^{-1} (1 + a^2 c^{-2}) \right]^{1/2},$$

где  $b < 0$ , если  $\eta \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , поскольку  $a > 0$ ,  $c > 0$  по определению, и  $b > 0$ , если  $\eta \in \mathbb{C}$ . Достаточные условия минимума в точке  $(\zeta_i, \eta_j)$ :

$$\begin{vmatrix} \partial_{\zeta}^2 H(\zeta_i, \eta_j) & \partial_{\zeta \eta}^2 H(\zeta_i, \eta_j) \\ \partial_{\zeta \eta}^2 H(\zeta_i, \eta_j) & \partial_{\eta}^2 H(\zeta_i, \eta_j) \end{vmatrix} > 0, \quad \partial_{\zeta}^2 H(\zeta_i, \eta_j) > 0.$$

Решая данную систему неравенств, получим следующие результаты. Для волн в случае  $b < 0$  (положительная нелинейность) будем иметь:  $a/c < d = (2\sqrt{2})^{-1} \sqrt{13 + \sqrt{185}}$ , откуда следует, что  $H > -3bd/(1 + 2d^2)$ , то есть гамильтониан ограничен снизу.

При  $b > 0$  (отрицательная нелинейность): замена  $b \rightarrow -b$  эквивалентна замене  $y \rightarrow -iy$ ,  $z \rightarrow -iz$  и  $H < -3bd/(1 + 2d^2)$ , то есть гамильтониан снизу не ограничен (ограничен сверху).

Итак, мы доказали возможность существования устойчивых 3D решений в модели 3-NLS и получили условия их устойчивости, то есть определили области значений коэффициентов

уравнения (характеристик среды), когда 3D солитоны будут устойчивыми.

**Численное моделирование эволюции и взаимодействия GNLS солитонов**

Рассмотрим вначале более простой 1D случай ( $\sigma = 0$ ), когда уравнение (2) принимает вид

$$\partial_t u + i\gamma |u|^2 u - i\beta \partial_x^2 u + (\alpha/2)u = f', \tag{4}$$

где, в общем случае (неоднородная и нестационарная среда),  $\alpha, \beta, \gamma = \varphi(x, t)$ ,  $f' = f'(x, t)$ .

При моделировании мы использовали начальные условия в виде солитоноподобного импульса огибающей  $u_0 = u(x, 0)$  разной формы:

- a)  $u(x, 0) = A \exp(-x^2/l)$ ;
- b)  $u(x, 0) = A \exp[-(x-5)^2/l] + A \exp[-(x+5)^2/l]$ ;
- c)  $u(x, 0) = A [\operatorname{sch}(x-s/2) + \operatorname{sch}(x+s/2)]$ ;
- d)  $u(x, 0) = A [\operatorname{sch}(x) + \operatorname{sch}(x-s/2) + \operatorname{sch}(x+s/2)]$ .

На рис. 1 и 2 представлены результаты, полученные при начальных условиях (a) и (b) в простейшем случае уравнения NLS с  $\beta, \gamma = \text{const}$  (стационарная среда);  $\alpha, f' = 0$  при отрицательной нелинейности,  $\beta > 0$ . В этом случае  $b > 0$  и  $H > -3bd/(1+2d^2)$ , а это значит, что условие устойчивости для отрицательной нелинейности,  $H < -3bd/(1+2d^2)$ , не выполняется, и, как видно из рисунков, мы наблюдаем рассеяние импульсов огибающей со временем.

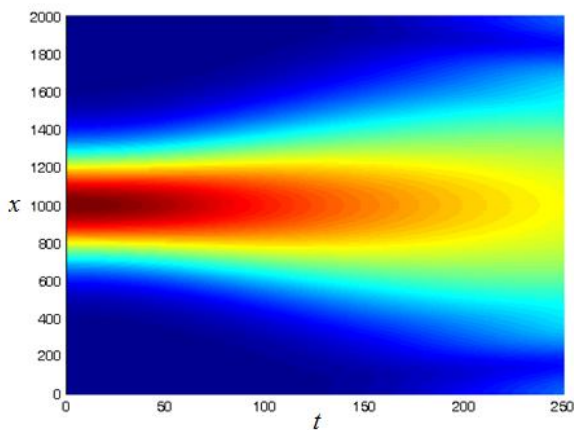


Рис. 1. Эволюция гауссовского импульса огибающей (a) при  $A=2, l=2; \beta=0.5, \gamma=0$ .

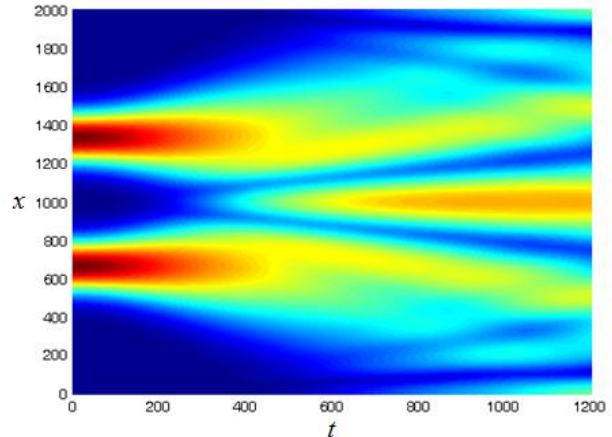


Рис. 2. Эволюция гауссовского импульса огибающей (b) при  $A=1, l=4; \beta=0.5, \gamma=0$ .

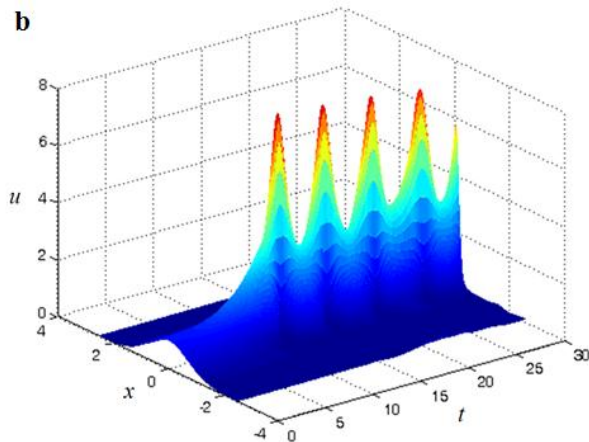
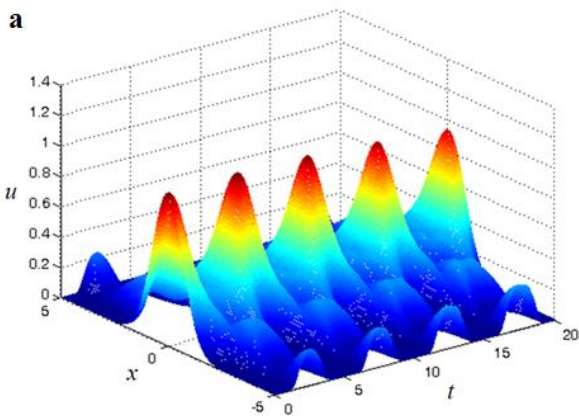


Рис. 3. Эволюция гауссова импульса огибающей в нестационарной среде при  $\alpha, f' = 0$ :  
 a)  $\beta = 0.5, \gamma = -1 + 0.01 \sin 2\pi t$ ; b)  $\gamma = -1, \beta(t) = -0.5$  for  $t \leq 5$  and  $\beta(t) = 0.5(1 + 0.2 \sin 2\pi t)$  for  $t > 5$ ; случаи отрицательной нелинейности.

На рис. 3 представлены два примера результатов эволюции гауссова импульса (а) в нестационарной среде при отрицательной нелинейности, когда условие устойчивости  $H < -3bd/(1+2d^2)$  выполняется. В результате эволюции при этом наблюдается возникновение из начального уединенного импульса мощных устойчивых пульсаций типа бризеров.

Пример взаимодействия солитоноподобных начальных импульсов (d) и (с) при отрицательной нелинейности в рамках модели GNLS приведен на рис. 4, 5, соответственно. В первом случае, условие устойчивости не выполняется, и мы наблюдаем на первом этапе возникновение одного мощного импульса из 3-импульсного начального возмущения и далее, со временем, его распад на два импульса малой амплитуды. Во втором случае, условие устойчивости выполнено, и имеет место устойчивая эволюция 2-импульсного возмущения. В численных экспериментах было также установлено, что при слабой отрицательной нелинейности, когда условие устойчивости выполняется, переход от устойчивой эволюции к режиму устойчивых пульсаций (бризеров) происходит при уменьшении начального расстояния  $s$  между импульсами.

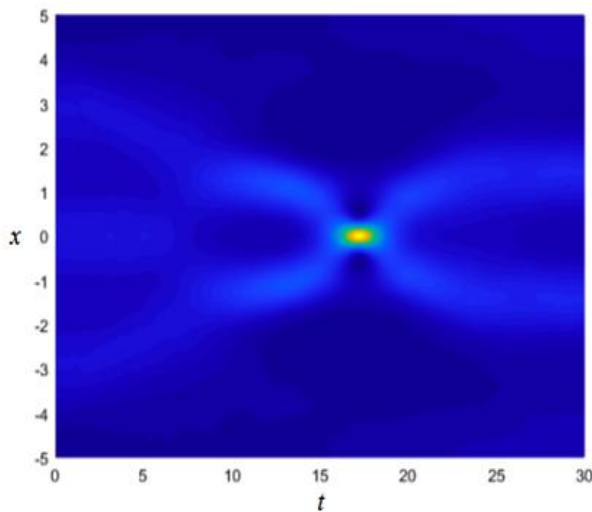


Рис. 4. Взаимодействие трех импульсов GNLS (стационарная среда) при  $\gamma = -1$ ,  $\beta = 0.25$ ; случай слабой отрицательной нелинейности.

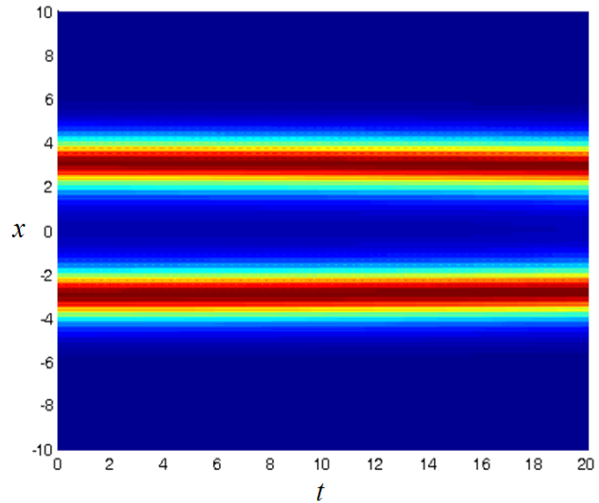


Рис. 5. Отсутствие взаимодействия импульсов GNLS (стационарная среда) при  $\gamma = -1$ ,  $\beta = 0.05$ ; случай отрицательной нелинейности.

### Заключение

В работе аналитически получены условия устойчивости солитоноподобных решений уравнения GNLS и численно изучены случаи устойчивой и неустойчивой (с образованием бризеров) эволюции импульсов различной формы, а также взаимодействие 2- и 3-импульсных структур, приводящее к формированию устойчивых и неустойчивых решений.

### Благодарности

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров. Работа была поддержана Национальным научным фондом Грузии им. Шота Руставели (SRNF) (грант № FR17 252).

### Список литературы

1. Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A., Rogava J. Interaction of the multidimensional NLS solitons in non-uniform and nonstationary medium: modeling and stability problem // J. Astrophys. Aerospace Tech. – 2018. – V. 6. – P. 38.
2. Belashov V.Yu., Vladimirov S.V. Solitary Waves in Dispersive Complex Media. Theory, Simulation, Applications. Springer-Verlag GmbH & Co. KG, Berlin-Heidelberg. – 2005. – 303 p.
3. Belashov V.Yu., Belashova E.S., Kharshiladze O.A. Problem of stability of multidimensional solutions of the BK class equations in space plasma // Advances in Space Research. – 2018. – V. 62. – P. 65-70.