КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Кафедра теории относительности и гравитации

**Т. В. Кропотова, В. Г. Подольский,
П. Е. Кашаргин**

ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Учебно-методическое пособие

Казань — 2017

УДК 517
ББК 22.161

Печатается по рекомендации
Учебно-методической комиссии Института физики КФУ
Протокол № 8 от 30 июня 2017 г.

Рецензент
доктор физико-математических наук, доцент А. А. Попов

Кропотова Т. В.
Пределы последовательностей и функций. Решение задач: Учебно-методическое пособие / Т. В. Кропотова, В. Г. Подольский, П. Е. Кашаргин. — Казань: Казанский университет, 2017. — 108 с.

Пособие представляет собой руководство по решению задач раздела «Пределы» дисциплины «Математический анализ», изучаемого на первом курсе Института физики КФУ. Пособие содержит необходимые теоретические сведения, подробные решения типовых задач курса, упражнения и задачи для работы в аудитории и самостоятельной работы. Предназначено для студентов всех направлений подготовки Института физики КФУ. Может быть полезным для студентов других институтов и факультетов, изучающих дисциплины высшей математики.

Стандартные обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;

$x \in \mathbb{X}$ — число x принадлежит множеству $\mathbb{X}$;

$x \notin \mathbb{X}$ — число x не принадлежит множеству $\mathbb{X}$;

$\Leftrightarrow$ — равносильно, эквивалентно, тогда и только тогда;

$\Rightarrow$ — следует;

$\stackrel{\text{def}}{=}$ — по определению равно;

$[a, b]$ — сегмент (отрезок);

$[a, \infty)$, $(a; \infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$ — полупрямая;

$\exists\, x$ — существует такое x;

$\forall\, x$ — для любого x;

$n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ — натуральное число, зависящее от $\varepsilon > 0$ (ε может быть сколь угодно малым);

$n_E \in \mathbb{N}$ — натуральное число, зависящее от $E > 0$ (E может быть сколь угодно большим);

$\{x_n\}$ — последовательность;

const — константа, постоянная величина;

ч. т. д. — что и требовалось доказать.

Предел последовательности

Определение числовой функции

Определение. Пусть дано числовое множество $X \subset \mathbb{R}$ и каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие одно и только одно число $y \in \mathbb{R}$. В таком случае говорят, что на множестве X определена *однозначная числовая функция*. Правило, устанавливающее соответствие, обозначают некоторым символом, в нашем примере f, пишут $y = f(x)$, x называют *аргументом* или независимой переменной функции, f — *символом функции*, множество X — *областью определения* функции и обозначают $D(f)$. Число y_0, соответствующее значению аргумента x_0, называют *значением функции* при $x = x_0$ (или значением функции в точке x_0). Множество всех значений функции f на множестве $D(f)$ обозначают $E(f)$ или просто Y.

Для указания функции иногда используют только её символ f, которым обозначен закон соответствия между x и y.

Функции f и g называют *равными*, если $D(f) = D(g)$ и равенство $f(x) = g(x)$ является верным для любого значения аргумента x из области определения этих функций.

Определение последовательности

Определение. Функцию, областью определения которой является множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, называют *последовательностью*. Значения такой функции обозначают x_n (a_n, b_n и т. п.) и называют *членами последовательности*, число n называют *номером* члена последовательности x_n.

Итак, если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана числовая последовательность $\{x_n\}$.

Для записи самой последовательности используют обозначения $\{x_n\}$ или $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots;\ n \in \mathbb{N}$.

Последовательность может быть задана с помощью формулы вида $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, выражающей x_n через номер n. Такую формулу называют *формулой общего члена последовательности.* Примером такого задания может служить арифметическая прогрессия, для которой $a_n = a_1 + d(n-1)$, или геометрическая прогрессия, где $b_n = b_1 q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Те же самые арифметическую и геометрическую прогрессии можно задать и следующим образом:

$$x_1 = a,\ x_2 = x_1 + d,\ x_3 = x_2 + d,\ \ldots,\ x_{n+1} = x_n + d,\ n \in \mathbb{N}$$
$$\text{(для арифметической прогрессии);}$$
$$x_1 = b,\ x_2 = x_1 \cdot q,\ x_3 = x_2 \cdot q,\ \ldots,\ x_{n+1} = x_n \cdot q,\ n \in \mathbb{N}$$
$$\text{(для геометрической прогрессии).}$$

В этом случае использованы так называемые *рекуррентные формулы*, т. е. формулы, выражающие n-й член последовательности через члены с меньшими номерами (через предшествующие члены).

Отметим, что члены последовательности не должны быть обязательно различными. Зададим последовательности формулами:

$$(1)\ x_n = 1, \quad (2)\ x_n = (-1)^{n+1}, \quad (3)\ x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}.$$

Распишем эти последовательности:

$$\begin{array}{ll} (1) & x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1,\ x_6 = 1,\ \ldots \\ (2) & x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1,\ x_5 = 1,\ x_6 = -1,\ \ldots \\ (3) & x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = \dfrac{1}{2},\ x_5 = 0,\ x_6 = \dfrac{1}{3},\ \ldots \end{array}$$

Их можно записать короче:

$$\begin{array}{ll} (1) & 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots \\ (2) & 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots \\ (3) & 0,\ 1,\ 0,\ \dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{3},\ \ldots \end{array}$$

В первом случае все члены последовательности одинаковы и равны 1. Во втором случае множество значений членов последовательности состоит из двух чисел 1 и -1, в записи последовательности эти числа чередуются. В третьем примере множество значений членов последовательности бесконечно.

Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение. Последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, называется *ограниченной снизу*, если существует такое число C, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_n \geqslant C$. Последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, называется *ограниченной сверху*, если существует такое число C, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_n \leqslant C$. Последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, называется *ограниченной*, если существуют такие числа C_1 и C_2, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верно двойное неравенство $C_1 \leqslant x_n \leqslant C_2$.

Последняя часть определения равносильна следующему: последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, ограничена, если существует такое положительное число C, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $|x_n| \leqslant C$, или, кратко:

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |x_n| \leqslant C.$$

Здесь использованы символы $\exists$ («существует» или «найдётся») и $\forall$ («любой» или «для любого»), называемые кванторами существования и общности соответственно.

Сформулируем отрицание ограниченности последовательности. Последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, является *неограниченной снизу*, если для любого $C < 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $x_n < C$; кратко:

$$\forall C < 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad x_n < C.$$

Последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, является *неограниченной сверху*, если для любого $C > 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $x_n > C$; кратко:

$$\forall C > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad x_n > C.$$

Последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, является *неограниченной*, если для любого $C > 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $|x_n| > C$, кратко:

$$\forall C > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad |x_n| > C.$$

Заметим, что если последовательность неограничена снизу или неограничена сверху, то она является неограниченной.

П р и м е р 1. Доказать ограниченность последовательностей:

$$1)\ x_n = \frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}}; \qquad 2)\ x_n = \frac{n + (-1)^n}{3n-1};$$

$$3)\ x_n = \sqrt{n^2+1} - n; \qquad 4)\ x_n = \frac{2^n+1}{3^n-2};\ n \in \mathbb{N}.$$

◄ 1) Так как

$$|(-1)^n n + 10| \leqslant |(-1)^n n| + 10 = n + 10,$$

а $\sqrt{n^2+1} > n$, то $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n| = \left|\frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}}\right| \leqslant \frac{n+10}{n} = 1 + \frac{10}{n} \leqslant 11.$$

2) Рассмотрим

$$|x_n| = \left|\frac{n + (-1)^n}{3n-1}\right| \leqslant \frac{n+1}{3n-1}.$$

Выделим целую часть дроби:

$$\frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3}\frac{3n+3}{3n-1} = \frac{1}{3}\frac{(3n-1)+4}{3n-1} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{3n-1}\right)$$

и заметим, что $3n-1 \geqslant 2$. Имеем:

$$|x_n| \leqslant \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{3n-1}\right) \leqslant \frac{1}{3}(1+2) = 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |x_n| \leqslant 1.$$

3) Имеем

$$|x_n| = |\sqrt{n^2+1} - n| = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} \leqslant \frac{1}{n(1+1)} \leqslant \frac{1}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

4) Заметим, что $x_n = \dfrac{2^n+1}{3^n-2} > 0$ при любых $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $x_{n+1} < x_n$:

$$x_{n+1} = \frac{2^{n+1}+1}{3^{n+1}-2} = \frac{(2^{n+1}+2)-1}{(3^{n+1}-6)+4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(2^n+1)-\frac{1}{2}}{(3^n-2)+\frac{4}{3}} <$$

$$< \frac{2}{3} \cdot \frac{2^n+1}{(3^n-2)+\frac{4}{3}} < \frac{2}{3} \cdot \frac{2^n+1}{3^n-2} = \frac{2}{3}x_n.$$

Итак, $x_{n+1} < \dfrac{2}{3}x_n < x_n$, следовательно,

$$x_{n+1} < x_n < x_{n-1} < x_{n-2} < \ldots < x_2 < x_1 = 3.$$

Имеем $0 < x_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. ▶

П р и м е р 2. Доказать неограниченность последовательностей:

$$1)\ x_n = \frac{n^3}{n^2+1}; \quad 2)\ x_n = \sqrt{n^4+n^3+1} - \sqrt{n^4-n^3+1};\ n \in \mathbb{N}.$$

◀ 1) Имеем

$$|x_n| = \frac{n^3}{n^2+1} = \frac{n^3}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{n}{1+\frac{1}{n^2}} > \frac{n}{2}.$$

Для произвольного положительного числа C всегда можно выбрать натуральное число n так, чтобы $n > 2C$. Для этого достаточно взять $n = [2C]+1$, где $[2C]$ — целая часть числа $2C$. При этом будет выполнено $\dfrac{n}{2} > C$ и

$$\forall C > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad |x_n| > C.$$

2) Умножив и разделив на сопряжённое, отправим радикалы в знаменатель:

$$
\begin{aligned}
|x_n| &= |\sqrt{n^4+n^3+1} - \sqrt{n^4-n^3+1}| = \\
&= \sqrt{n^4+n^3+1} - \sqrt{n^4-n^3+1} = \\
&= \frac{2n^3}{\sqrt{n^4+n^3+1} + \sqrt{n^4-n^3+1}} = \\
&= \frac{2n^3}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}\right)} = \\
&= \frac{2n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}}.
\end{aligned}
$$

Так как

$$\sqrt{1+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n^4}} < \sqrt{3}, \quad \sqrt{1-\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n^4}} < \sqrt{3},$$

получим

$$|x_n| = \frac{2n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}} > \frac{2n}{2\sqrt{3}} = \frac{n}{\sqrt{3}}.$$

Для произвольного положительного числа C всегда можно выбрать натуральное число n так, чтобы $n > \sqrt{3}C$, для этого достаточно взять $n = [\sqrt{3}C] + 1$. Для такого n будет выполнено $\dfrac{n}{\sqrt{3}} > C$, и, следовательно, $|x_n| > C$. ►

Предел последовательности

Определение. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого, сколь угодно малого, числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N(\varepsilon)$, что все значения x_n, у которых номер $n > N(\varepsilon)$, удовлетворяют неравенству: $|x_n - a| < \varepsilon$. При этом говорят, что последовательность *сходится* к числу a, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Кратко:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon): \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*. Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Оно означает, что x_n принадлежит так называемой ε-*окрестности числа* a; число ε в этом случае называют *радиусом окрестности*. Именно в этой окрестности произвольного, сколь угодно малого, радиуса оказываются все члены сходящейся последовательности, чей номер превосходит $N(\varepsilon)$.

Обозначение $N(\varepsilon)$ или, более коротко, N_ε указывает, что этот номер, вообще говоря, зависит от ε и не может быть выбран «раз и навсегда». При уменьшении радиуса окрестности ε соответствующий номер N_ε, вообще говоря, увеличивается: чем «уже» окрестность, тем больше оказывается вне её начальных членов последовательности. Доказательство наличия предела последовательности, основанное на использовании его определения, как раз и заключается в выявлении связи между радиусом окрестности ε и номером N_ε, «запирающим» в этой окрестности все последующие члены последовательности.

Отметим, что для установления факта наличия предела последовательности не нужно находить обязательно наименьшее возможное значение N_ε. Следует сопоставить выбранному значению ε «хоть какой-нибудь» номер N, после которого неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ будет обязательно верным.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 2. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Ограниченность последовательности — *необходимое* условие её сходимости, т.е. если последовательность не является ограниченной, то она расходится.

П р и м е р 3. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{n^3-2}{n^2}$ расходится.

◀ Докажем, что данная последовательность неограничена. Действительно,

$$x_n = \frac{n^3-2}{n^2} = n - \frac{2}{n^2} \geqslant n-2.$$

Для любого, сколь угодно большого, положительного числа C всегда можно выбрать натуральное число $n = [C]+3$, где $[C]$ — целая часть C, так, что при этом неравенство $n-2 > C$ окажется верным. Следовательно,

$$\forall C > 0 \quad \exists n = [C]+3,\ n \in \mathbb{N}:\ x_n \geqslant n-2 > C \Rightarrow x_n > C.$$

Таким образом, последовательность $x_n = \dfrac{n^3-2}{n^2}$ неограничена, и, следовательно, расходится. ▶

П р и м е р 4. Исходя из определения предела последовательности, доказать (в этом случае также говорят: доказать на языке «$\varepsilon - N$»):

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2} = 1$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$.

◀ Для выполнения задания нужно показать справедливость неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ при выполнении всех условий из определения предела последовательности на странице 10. Наша главная цель — N_ε, движение к ней начинаем с оценки $|x_n - a|$.

1) Итак,

$$|x_n - a| = \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$. Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ в нашем случае будет выглядеть так: $\dfrac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$. Разрешив его относительно n, получим $n > \dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$. Если выбрать $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]$, то для всех натуральных $n > N_\varepsilon$ будет справедливо

$$n \geqslant \left[\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon},$$

и неравенство $\left|x_n - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$ тоже будет верным. Таким образом, мы показали, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon = \left[\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right],\ N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\varepsilon: \quad \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Согласно определению, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

Таблица, приведённая ниже, даёт наглядное представление о том, после какого номера в ε-окрестность указанного радиуса попадают все члены последовательности, номер которых больше N_ε.

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
N_ε	2	24	249	2499	24999

Чем «уже» окрестность, тем больше оказывается вне её начальных членов последовательности, но на существование и значение предела последовательности это никак не влияет.

Заметим, что вычисления были бы чуть проще, если бы мы воспользовались свойством транзитивности неравенств. Действительно,

$$|x_n - a| = \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{2\cdot 2n} < \varepsilon$$

верно для всех n, для которых

$$\frac{1}{4n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon},\ \text{в этом случае } N_\varepsilon = \left[\frac{1}{4\varepsilon}\right].$$

Нижняя строка таблицы «$\varepsilon - N_\varepsilon$» выглядит теперь иначе.

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
N_ε	2	25	250	2500	25000

Как уже было сказано ранее, на существование и значение предела последовательности этот «сдвиг» N_ε никак не влияет.

2) Начнём с рассмотрения $|x_n - a|$:

$$|x_n - a| = \left|\frac{n^2+1}{n^2} - 1\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

В этом случае $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$, а таблица «$\varepsilon - N_\varepsilon$» выглядит так:

ε	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
N_ε	1	10	100	1000	10000	100000

3) Вновь начнём с рассмотрения модуля разности $|x_n - a|$ и используем свойство транзитивности неравенств:

$$|x_n - a| = \left|\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} - 1\right| = \left|\frac{n - \sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+n}}\right| = \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{\sqrt{n^2+n}} =$$

$$= \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} < \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon.$$

Разрешив последнее неравенство этой цепочки относительно n, получим искомый N_ε:

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon \Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} < 1+2\varepsilon+\varepsilon^2 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon(2+\varepsilon)},$$

следовательно, $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon(2+\varepsilon)}\right]$.

Соответствующая таблица «$\varepsilon - N_\varepsilon$» приведена ниже.

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
N_ε	4	49	499	4999	49999

▶

П р и м е р 5. Доказать, исходя из определения, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4} = \dfrac{1}{3}$.

◀ Рассмотрим

$$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4} - \frac{1}{3}\right| =$$

$$= \left|\frac{3n^2-3n+6-3n^2-2n+4}{3(3n^2+2n-4)}\right| = \left|\frac{-5n+10}{3(3n^2+2n-4)}\right|.$$

Учтём, что конечное число первых членов последовательности может и не находиться в ε-окрестности точки $\dfrac{1}{3}$, и будем рассматривать только $n > 2$. Тогда

$$\left|\frac{-5n+10}{3(3n^2+2n-4)}\right| = \frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)} < \frac{5n}{3(3n^2+2n-4)}.$$

Так как $3n^2+2n-4 > 3n^2-4 = 2n^2+(n^2-4) > 2n^2$ при $n > 2$, то

$$\frac{5n}{3(3n^2+2n-4)} < \frac{5n}{3\cdot 2n^2} = \frac{5}{6n} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{n} < \frac{1}{n}.$$

В итоге

$$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ для всех } n > N_\varepsilon, \text{ где } N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right].$$

Утверждение доказано. ▶

П р и м е р 6. Исходя из определения, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 1)$.

◀ Начнём, как всегда, с рассмотрения модуля разности:

$|x_n - 1| = a^{1/n} - 1.$

$$a^{1/n} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow a^{1/n} < \varepsilon + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \log_a(\varepsilon+1) \Leftrightarrow n > \frac{1}{\log_a(\varepsilon+1)}.$$

Таким образом, неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ выполняется при всех $n > N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\log_a(\varepsilon+1)}\right]$, и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. ►

Определение. Последовательность, предел которой равен нулю, называется *бесконечно малой.*

П р и м е р 7. На языке «$\varepsilon - N$» доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{\cos n}{n}$ является бесконечно малой.

◄ Согласно определению бесконечно малой последовательности, мы должны доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$. Имеем:

$$|x_n - a| = \left|\frac{\cos n}{n} - 0\right| = \left|\frac{\cos n}{n}\right| = \frac{|\cos n|}{n} \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ верно при всех}$$

$$n > N_\varepsilon, \text{ где } N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]. \text{ Утверждение доказано. } \blacktriangleright$$

П р и м е р 8. Доказать, исходя из определения, что последовательность $x_n = \dfrac{1}{n!}$ бесконечно малая.

◄ Как всегда, начнём с рассмотрения модуля разности

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n!} - 0\right| = \frac{1}{n!}.$$

Если мы сразу потребуем выполнения $\dfrac{1}{n!} < \varepsilon$, у нас возникнут большие проблемы с разрешением этого неравенства относительно n. Не будем торопиться и воспользуемся свойством транзитивности неравенств. Напомним, что нам достаточно найти хоть какой-нибудь номер N_ε, для которого вся цепочка в определении на стр. 10 окажется верной, этот номер не должен быть обязательно наименьшим из всех возможных. Используем очевидную для $n > 2$ оценку

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n > \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{(n-1) \text{ раз}} = 2^{n-1},$$

$$n! > 2^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Тогда

$$|x_n| = \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \text{ справедливо при } \ 2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n-1 > \log_2\frac{1}{\varepsilon},$$

т.е. верно для всех $n > N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\log_2\dfrac{1}{\varepsilon} + 1\right]$. ►

В математике определены и бесконечно большие последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого, сколь угодно большого, числа $E > 0$ найдётся такой номер $N(E)$, что все значения x_n, у которых номер $n > N(E)$, удовлетворяют неравенству: $|x_n| > E$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Кратко:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \forall E > 0 \quad \exists N_E \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_E: \quad |x_n| > E.$$

Аналогично определяют

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \forall E > 0 \quad \exists N_E \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_E: \quad x_n > E,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \forall E > 0 \quad \exists N_E \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_E: \quad x_n < -E.$$

Во всех этих случаях говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *имеет бесконечный предел*.

Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной и расходящейся.
Термин «сходящаяся последовательность» используется только для последовательностей, имеющих *конечный предел* (см. определение на стр. 10). В дальнейшем, если не оговаривается противное, под пределом последовательности мы будем понимать конечный предел.

П р и м е р 9. Доказать, что последовательность $x_n = \lg(\lg n)$, где $n \geqslant 2$, является бесконечно большой, т.е. имеет бесконечный предел при $n \to \infty$.

◀ Как и раньше, наша цель — номер N_E, после которого неравенство $|x_n| > E$ обязательно окажется верным.
Начинаем работу, как всегда, с рассмотрения левой стороны данного неравенства, т.е. с $|x_n| = |\lg(\lg n)|$. Отбросим первые девять конечных неположительных членов последовательности и будем рассматривать только $n > 10$. Тогда
$|x_n| = |\lg(\lg n)| = \lg(\lg n) > E$ будет верным при $\lg n > 10^E$, т.е. при

$$n > 10^{10^E} \Rightarrow \forall E > 0 \quad \exists N_E = \left[10^{10^E}\right] \quad \forall n > N_E : \quad |x_n| > E.$$

Утверждение доказано. ▶

Основные теоремы о пределах последовательностей

Две теоремы — теорему 1 и теорему 2 — мы уже сформулировали ранее. Перечислим ещё несколько теорем, играющих важную роль для вычисления пределов.

Теорема 3. (О свойствах пределов, связанных с арифметическими операциями над последовательностями)

1) Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то для любого числа α существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n$, при этом

$$\lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{1}$$

2) Если существуют $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то

а) существует $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)$, при этом

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{2}$$

б) существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n$, при этом

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{3}$$

в) при выполнении требований $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}. \tag{4}$$

Если и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ называют *неопределённостью типа* $\dfrac{0}{0}$. Аналогично определяются и *неопределённости типа* $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$. При работе с такими неопределённостями теорему 3 использовать нельзя, сначала эту неопределённость, как говорят, нужно *раскрыть*.

Теорема 4. (Теорема о трёх последовательностях)

Если существуют $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, и для всех n, начиная с некоторого, справедливо $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ тоже существует и

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Теорему 4 часто называют «теоремой о двух полицейских», «теоремой о двух милиционерах», «теоремой о сжатой последовательности», — это её неофициальные названия.

Теорема 5. (О произведении ограниченной последовательности на бесконечно малую)

Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая, а последовательность $\{y_n\}$ ограниченная, то их произведение $\{x_n y_n\}$ является бесконечно малой последовательностью.

При решении задач очень часто приходится сталкиваться с последовательностями следующего вида:
1) $\left\{\dfrac{1}{n^\alpha}\right\}$, эта последовательность при $\alpha > 0$ является бесконечно малой, а при $\alpha < 0$ — бесконечно большой;
2) $\{q^n\}$, эта последовательность при $|q| < 1$ является бесконечно малой, а при $|q| > 1$ — бесконечно большой.

П р и м е р 10. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n^5+n)}{n^3}$.

◀ Последовательность $\left\{\dfrac{\sin(n^5+n)}{n^3}\right\}$ можно рассматривать как произведение последовательностей $\{\sin(n^5+n)\}$ и $\left\{\dfrac{1}{n^3}\right\}$. Последовательность $\left\{\dfrac{1}{n^3}\right\}$ является бесконечно малой, а последовательность $\{\sin(n^5+n)\}$ — ограниченной, т.к. $|\sin(n^5+n)| \leqslant 1$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, согласно теореме 5, исходная последовательность является бесконечно малой. Кратко:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^5+n)}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(n^5+n\right) \cdot \frac{1}{n^3} = (\text{огр.} \cdot \text{б/м}) = 0. \text{ ▶}$$

П р и м е р 11. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$.

◀ Для доказательства используем теорему 4 о трёх последовательностях.
Чтобы применить эту теорему, нужно показать, что рассматриваемая последовательность $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$ «сжата» с двух сторон бесконечно

малыми последовательностями. Оценка слева очевидна: $0 < \dfrac{n^2}{2^n}$ при любом n. Для получения последовательности, «сопровождающей к нулю» с правой стороны, воспользуемся биномиальным разложением:

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + \ldots + C_n^n > C_n^3,$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, а $C_n^3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$.
Таким образом,

$$2^n > \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{6}{n(n-1)(n-2)}.$$

Умножив последнее неравенство на n^2, получим:

$$\frac{n^2}{2^n} < \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)} \Leftrightarrow \frac{n^2}{2^n} < \frac{6n}{(n-1)(n-2)}.$$

Покажем, что справа — бесконечно малая:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n}{(n-1)(n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n}{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{6}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)} = 0 \cdot 6 = 0$$

(при вычислениях было использовано, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ является бесконечно малой, т.е. её предел равен нулю).
Итак:

$$0 < \frac{n^2}{2^n} < \frac{6n}{(n-1)(n-2)}; \quad \lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{6n}{(n-1)(n-2)} = 0,$$

следовательно, согласно теореме 4, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$. ▶

В рассмотренной в примере 11 неопределённости $\dfrac{\infty}{\infty}$ «соревновались» две последовательности: степенная $\{n^2\}$ и показательная $\{2^n\}$.

Доказанный результат означает, что степенная последовательность $\{n^2\}$ «проигрывает» показательной $\{2^n\}$ в «гонке» к бесконечности. Способом, аналогичным рассмотренному в примере 11, можно доказать справедливость более общего утверждения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0 \text{ при любом положительном } k \text{ и } |a|>1.$$

П р и м е р 12. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

◀ Для доказательства снова используем теорему 4 о трёх последовательностях:

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{\overbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}^{n}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot n}=2\cdot1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{n}<2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2},$$

$$2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=2\cdot\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n};\ \lim_{n\to\infty}\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\frac{9}{2}\cdot0=0.$$

В конце цепочки было использовано утверждение (1) теоремы 3 и то, что последовательность $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ является бесконечно малой. Имеем:

$$0<\frac{2^n}{n!}<\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n},\ \lim_{n\to\infty}0=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=0,$$

следовательно, согласно теореме о трёх последовательностях, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$. ▶

В неопределённости $\dfrac{\infty}{\infty}$ примера 12 тоже «соревновались» две последовательности: показательная $\{2^n\}$ и $\{n!\}$. Согласно доказанному, теперь уже показательная последовательность $\{2^n\}$ «проигрывает» факториалу n в «гонке» к бесконечности.
Справедливо и более общее утверждение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \text{ при любом значении } a.$$

П р и м е р 13. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{5n+7}-\dfrac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$.

◀ В данном примере нужно найти предел разности последовательностей, поэтому, прежде всего, выясним, можно ли использовать утверждение (2) теоремы 3. Для этого попытаемся найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{5n+7}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n^3}{2+5n^3}$, в каждом из них нам придётся раскрывать неопределённость типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Подробнее:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{5n+7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(5+\frac{7}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{5+\frac{7}{n}}=\frac{2}{5},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2n^3}{2+5n^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{1}{n^3}+2\right)}{n^3\left(\frac{2}{n^3}+5\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}+2}{\frac{2}{n^3}+5}=\frac{2}{5},$$

при вычислениях было использовано, что последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{7}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$ и $\left\{\frac{2}{n^3}\right\}$ являются бесконечно малыми, т.е. их пределы равны нулю.
Итак, оба предела существуют. Следовательно, используя формулу (2), получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+7}-\frac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{5n+7}-\lim_{n\to\infty}\frac{1+2n^3}{2+5n^3}=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}=0.\ \blacktriangleright$$

П р и м е р 14. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$.

◀ В этом примере мы имеем дело с неопределенностью типа $\infty-\infty$, для её раскрытия умножим и разделим данное выражение на сопряжённое. Получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0.\ \blacktriangleright$$

П р и м е р 15. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$.

◀ Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}}.$$

В показателе степени стоит сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем $q=\dfrac{1}{2}$. Применив к ней соответсвующую формулу, получим:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}=2\lim_{n\to\infty}2^{-\frac{1}{2^n}}.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$, получим, что

$$2\lim_{n\to\infty}2^{-\frac{1}{2^n}}=2\cdot 1=2. \blacktriangleright$$

П р и м е р 16. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n+2\cdot 5^n}$.

◀ В этом примере мы имеем дело с неопределённостью типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Раскроем её:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n+2\cdot 5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n(5\cdot\frac{2^n}{5^n}-3\cdot 5)}{5^n(100\cdot\frac{2^n}{5^n}+2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n-15}{100\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n+2}=\frac{-15}{2}=-7,5.$$

При вычислениях мы использовали, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$. ▶

П р и м е р 17. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-6)^n-5^{n+1}}{5^n-(-6)^{n+1}}$.

◄ Для раскрытия неопределённости так же, как и в предыдущем примере, сначала вынесем в числителе и знаменателе степень с наибольшим по модулю основанием, затем сократим «виновников» бесконечного роста и воспользуемся появившимися бесконечно малыми:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-6)^n-5^{n+1}}{5^n-(-6)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-6)^n\cdot\left(1-5\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)^n\right)}{(-6)^n\cdot\left(\left(-\frac{5}{6}\right)^n-(-6)\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-5\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)^n}{\left(-\frac{5}{6}\right)^n+6}=\frac{1}{6}.$$

При вычислениях мы использовали, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{5}{6}\right)^n=0$. ►

П р и м е р 18. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

◄ Сразу заметим, что в данном примере нельзя использовать утверждение (2) теоремы 3, поскольку речь идёт не о сумме последовательностей, а об одной последовательности $\{x_n\}$, у которой n-й член является суммой $(n-1)$-го слагаемого:

$$x_n=\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}.$$

Преобразуем x_n так, чтобы можно было использовать утверждения теоремы 3. Для этого приведём все слагаемые к общему знаменателю и используем известную формулу для суммы квадратов первых m последовательных натуральных чисел:

$$1^2+2^2+\ldots+m^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Подробности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\left((n-1)+1\right)\left(2(n-1)+1\right)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

П р и м е р 19. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n}\right)$.

$\blacktriangleleft$ В этом примере мы снова имеем дело с последовательностью $\{x_n\}$, n-й член которой является суммой n слагаемых. Это означает, что на первом этапе нам придётся преобразовать x_n так, чтобы на следующих этапах решения можно было использовать утверждения теоремы 3.

Выпишем явно ещё несколько слагаемых суммы и найдём удвоенный x_n:

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n}, \tag{5}$$

$$2x_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \ldots + \frac{2n-3}{2^{n-2}} + \frac{2n-1}{2^{n-1}}. \tag{6}$$

Далее, используя (6) и (5), получим x_n в виде разности $2x_n - x_n$:

$$x_n \equiv 2x_n - x_n = 1 + \frac{3-1}{2} + \frac{5-3}{2^2} + \frac{7-5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1-(2n-3)}{2^{n-1}} -$$

$$- \frac{2n-1}{2^n} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \ldots + \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n} =$$

$$= 1 + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) - \frac{2n-1}{2^n} =$$

$$= 2 + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right)}{1-\frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Таким образом, $x_n = 3 - \dfrac{1}{2^{n-2}} - \dfrac{2n}{2^n} + \dfrac{1}{2^n}$.

Количество слагаемых в этой сумме не зависит от n, следовательно, теперь можно использовать утверждения теоремы 3:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}x_n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)=3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}}-\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=3.$$

В последнем равенстве мы использовали, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0. \blacktriangleright$$

Монотонные последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если для любого $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n\leqslant x_{n+1}$ ($x_n\geqslant x_{n+1}$).

Последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*), если для любого $n\in\mathbb{N}$ выполняется строгое неравенство $x_n<x_{n+1}$ ($x_n>x_{n+1}$).

Возрастающие и убывающие последовательности называют *монотонными*, строго возрастающие и строго убывающие — *строго монотонными*.

Замечание 1. Данное определение не является общепринятым. В некоторой литературе при выполнении для всех $n\in\mathbb{N}$ неравенства $x_n\leqslant x_{n+1}$ ($x_n\geqslant x_{n+1}$) говорят о *неубывающей* (*невозрастающей*) последовательности, а о *возрастающей* (*убывающей*) последовательности говорят при выполнении строгих неравенств.

Замечание 2. Допустимо, если указанные неравенства будут выполняться для всех натуральных n, начиная с некоторого n_0.

Замечание 3. Строго монотонные последовательности являются частным случаем монотонных.

Теорема 6. (О сходимости монотонных последовательностей)
Если возрастающая последовательность ограничена сверху, то она сходится.
Если убывающая последовательность ограничена снизу, то она сходится.
Если последовательность является монотонной и ограниченной, то она сходится.

П р и м е р 20. Доказать сходимость последовательности

$$x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \ldots + \frac{p_n}{10^n},$$

где p_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — целые неотрицательные числа, и, начиная с p_1, эти числа не превышают 9.

◀ Покажем, что последовательность является монотонной. Для этого сравним с нулём разность последующего и предыдущего членов последовательности.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}} \geqslant 0,\ x_{n+1} - x_n \geqslant 0 \Leftrightarrow x_{n+1} \geqslant x_n,$$

т.е. последовательность является возрастающей.
Покажем, что она ограничена сверху:

$$x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \ldots + \frac{p_n}{10^n} \leqslant p_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n} =$$

$$= p_0 + \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= p_0 + \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = p_0 + \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}} = p_0 + 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n < p_0 + 1.$$

При вычислениях была использована следующая формула для суммы членов геометрической прогрессии:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-1} = \frac{1 - q^m}{1 - q}.$$

Таким образом, для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $x_n < p_0+1$, т.е. последовательность ограничена сверху.
Имеем: последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху. На основании теоремы 6 последовательность имеет конечный предел, т.е. сходится. ►

П р и м е р 21. Доказать сходимость последовательности
$x_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!!}$.

◄ Покажем, что данная последовательность является монотонной и ограниченной.
Для исследования на монотонность рассмотрим отношение $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!\,(2n+1)!!}{(2n+3)!!\,n!} = \frac{n+1}{2n+3} < \frac{n+1}{2n+2} = \frac{n+1}{2(n+1)} = \frac{1}{2},$$

т. е. $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < \dfrac{1}{2}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.
Поскольку все $x_n > 0$, то

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_{n+1} < \frac{1}{2}x_n, \;\; \frac{1}{2}x_n < x_n, \;\; x_{n+1} < \frac{1}{2}x_n < x_n \Rightarrow x_{n+1} < x_n.$$

Таким образом, рассматриваемая последовательность является строго убывающей. Осталось убедиться в том, что она ограничена снизу.
Оценка снизу очевидна: для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется условие $x_n > 0$.
Итак, последовательность $\{x_n\}$ убывает и ограничена снизу. На основании теоремы 6 эта последовательность сходится, т.е. имеет конечный предел. ►

Примечание. Число e, играющее в математическом анализе особую роль, было введено в 1736 г. Леонардом Эйлером именно как предел возрастающей и ограниченной сверху последовательности:

$$e \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Число $e \approx 2,718281828459045$ иррационально и трансцендентно.

Критерий Коши сходимости последовательности

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет *условию Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ и для всех $p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Кратко:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}: \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{7}$$

Последовательность, удовлетворяющую условию Коши, называют *фундаментальной.*

Теорема 7. (Критерий Коши)
Для того чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши, т.е. была фундаментальной.

СЛЕДСТВИЕ. Для того чтобы последовательность не имела конечного предела, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла *отрицанию условия Коши*: существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого натурального N найдутся такие $n \geqslant N$ и $p \in \mathbb{N}$, что будет выполнено неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geqslant \varepsilon$. Кратко:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant N \quad \exists p \in \mathbb{N}: \quad |x_{n+p} - x_n| \geqslant \varepsilon. \tag{8}$$

П р и м е р 22. Доказать сходимость последовательности

$$x_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \ldots + \frac{\cos n}{3^n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

◀ Покажем, что данная последовательность удовлетворяет условию Коши. А именно: покажем справедливость последнего неравенства $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ цепочки (7) при выполнении всех её предшествующих требований. Наша главная цель — N_ε, движение к ней начинаем с оценки $|x_{n+p} - x_n|$:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} \right| + \left| \frac{\cos(n+2)}{3^{n+2}} \right| + \ldots + \left| \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}} \right| =$$

$$= \frac{|\cos(n+1)|}{3^{n+1}} + \frac{|\cos(n+2)|}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{|\cos(n+p)|}{3^{n+p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} \right) =$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^p}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^p}\right) < \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Разрешим последнее неравенство этой цепочки относительно n:

$$\frac{1}{3^n} < \varepsilon \Leftrightarrow 3^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \log_3 \frac{1}{\varepsilon},\ N_\varepsilon = \left[\log_3 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует указанный выше номер N_ε, такой, что при $n \geqslant N_\varepsilon$ и произвольном натуральном числе p выполняется

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Данная последовательность удовлетворяет условию Коши, следовательно, согласно критерию Коши, последовательность имеет конечный предел, т.е. сходится. ►

П р и м е р 23. Доказать сходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}.$$

◄ $|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| =$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \underbrace{- \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}}_{0} \underbrace{- \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2}}_{0} - \ldots \underbrace{- \frac{1}{n+p-1} + \frac{1}{n+p-1}}_{0} -$$

$$- \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ будет справедливым при всех натуральных значениях p и при всех $n \geqslant N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Данная последовательность удовлетворяет условию Коши, следовательно, согласно критерию Коши, последовательность сходится. ▶

П р и м е р 24. Доказать расходимость последовательности

$$x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

◀ Покажем, что данная последовательность удовлетворяет отрицанию условия Коши (8). Как и раньше, начнём с оценивания $|x_{n+p} - x_n|$, но на этот раз будем двигаться в сторону уменьшения выражений. Наша цель — получение положительного числа ε, для которого будет выполнена вся цепочка требований (8). Итак,

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \frac{1}{\ln(n+3)} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+p)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \frac{1}{\ln(n+3)} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+p)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\ln(n+p)} + \frac{1}{\ln(n+p)} + \frac{1}{\ln(n+p)} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+p)} =$$

$$= p \cdot \frac{1}{\ln(n+p)} > p \cdot \frac{1}{n+p}, \quad \text{т.е.} \quad |x_{n+p} - x_n| > \frac{p}{n+p}.$$

Если взять $p = n$, то получим, что

$$|x_{2n} - x_n| > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Т.е., если взять $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то для любого натурального числа N можно выбрать $n = N$ и $p = N$ так, что будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| = |x_{2N} - x_N| > \frac{1}{2}$. Таким образом, данная последовательность не удовлетворяет условию Коши, и, согласно критерию Коши, расходится. ▶

Задание для решения в аудитории

1.1. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$ является бесконечно малой, указав для каждого $\varepsilon > 0$ натуральное число N_ε, такое, что при любом $n > N_\varepsilon$ будет верно $|x_n| < \varepsilon$.
Дополнительно указать значения N_ε для $\varepsilon = 0,1;\ 0,001;\ 0,0001$.

1.2. Доказать, что последовательность $x_n = 2^{\sqrt{n}}$ является бесконечно большой, указав для каждого $E > 0$ натуральное число N_E, такое, что при любом $n > N_E$ будет верно $|x_n| > E$.
Дополнительно указать значения N_E для $E = 10;\ 100;\ 1000;\ 10000$.

1.3. Доказать, исходя из определения, что предел последовательности $x_n = \dfrac{2n-1}{n+0,5}$ равен 2, указав для каждого $\varepsilon > 0$ натуральное число N_ε, такое, что при любом $n > N_\varepsilon$ будет верно $|x_n - 2| < \varepsilon$.
Дополнительно указать значения N_ε для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$.

Вычислить пределы ($n \in \mathbb{N}$):

1.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2}$.

1.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4 + 4n^2} - n^2\right)$.

1.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{n^3} \cdot \operatorname{arctg} n}{3n+5}$.

1.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n + 10 \cdot (-7)^n}{(-7)^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+2}}$.

1.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^n}{1 + 9 + 9^2 + 9^3 + \ldots + 9^n}$.

1.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right)$.

1.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{3^2}{n^3} + \dfrac{5^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right)$.

Доказать ($n \in \mathbb{N}$):

1.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{3^n} = 0$.

1.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n!} = 0$.

1.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

1.14. Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

1.15. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$$

Задание для самостоятельной работы

1.16. На языке «$\varepsilon - N$» доказать, что $\{x_n\}$, где $x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n$, является бесконечно малой последовательностью.
Дополнительно указать N_ε для $\varepsilon = 0,1$; 0,01; 0,001.

1.17. Доказать, что последовательность $x_n = \sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ является бесконечно большой, указав для каждого $E > 0$ натуральное число N_E, такое, что при любом $n > N_E$ будет верно $|x_n| > E$.
Дополнительно указать значения N_E для $E = 10$; 100; 1000; 10000.

1.18. Доказать, исходя из определения, что предел последовательности $x_n = \dfrac{2-n}{2+n}$ равен -1, указав для каждого $\varepsilon > 0$ натуральное число N_ε, такое, что при любом $n > N_\varepsilon$ будет верно $|x_n - (-1)| < \varepsilon$.
Дополнительно указать значения N_ε для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$.

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1.19. $x_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$.

1.20. $x_n = \dfrac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - (-1)^n}$.

1.21. $x_n = \dfrac{\lg^2(10n)}{\lg^2 n}$ $(n \geqslant 2)$.

Вычислить пределы:

1.22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10\,000n}{n^2+1}$.

1.23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

1.24. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

1.25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 7n + 1}{2 - 5n - 6n^2}$.

1.26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$.

1.27. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

1.28. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

1.29. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

1.30. Доказать, что при любом $a > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

1.31. Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+9}{2n-1}.$$

1.32. Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

1.33. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

1.34. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Ответы

1.4. 1. **1.5**. 2. **1.6**. 0. **1.7**. $-\dfrac{10}{7}$. **1.8**. 0. **1.10**. $\dfrac{1}{12}$. **1.10** $\dfrac{4}{3}$. **1.19**. $-\dfrac{1}{2}$. **1.20**. -1. **1.21**. 1. **1.22**. 0. **1.23**. 0. **1.24**. $\dfrac{1}{3}$. **1.25**. $-\dfrac{1}{2}$. **1.26**. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **1.27**. $\dfrac{1}{2}$. **1.28**. 1.

Предел функции

Определение функции

Напомним определение функции и приведём ещё несколько определений.

Определение. Пусть дано числовое множество $X \subset \mathbb{R}$ и каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие одно и только одно число $y \in \mathbb{R}$. В таком случае говорят, что на множестве X определена *однозначная числовая функция.* Правило, устанавливающее соответствие, обозначают некоторым символом, например, f, пишут $y = f(x)$, x называют *аргументом* или *независимой переменной функции*, f — *символом функции*, множество X — *областью определения функции* и обозначают $D(f)$. Число y_0, соответствующее значению аргумента x_0, называют *значением функции при* $x = x_0$ (*значением функции в точке* x_0). *Множество* всех *значений функции* f на множестве $D(f)$ обозначают $E(f)$ или просто Y.
Если каждому значению $x \in X$ соответствует несколько значений $y = f(x)$, то f называют *многозначной функцией.*

Замечание. В дальнейшем мы будем рассматривать, в основном, однозначные числовые функции, называя их, для краткости, просто функциями.

Область определения функции, множество X, представляет собой или открытый промежуток (*интервал*) $(a; b)$: $a < x < b$, или полуоткрытый промежуток (*полуинтервал*) $(a; b]$: $a < x \leqslant b$ и $[a; b)$: $a \leqslant x < b$, или замкнутый промежуток (*сегмент*) $[a; b]$: $a \leqslant x \leqslant b$. Это может быть одна из полупрямых $(-\infty, a]$, $[b; +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(b; \infty)$, или вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$. Наконец, множество X может быть объединением интервалов или отрезков, или их комбинаций, а также состоять из дискретных точек.

Определение. Если функция $y = f(u)$ определена на области U, а U является множеством значений функции $u = \varphi(x)$, определённой на области X, то говорят, что на X задана *сложная функция* $y = f(\varphi(x))$, являющаяся *композицией* двух функций $y = f(u)$ и

$u = \varphi(x)$. В этом случае u называют *промежуточным аргументом функции* f.

Замечание. Сложная функция может быть композицией и трёх, и четырёх, и большего числа функций.

Например, функция $y = \operatorname{tg} x^2$ является композицией двух функций $y = \operatorname{tg} u$ и $u = x^2$, а $y = \lg(\operatorname{tg} x^2)$ — композицией трёх функций $y = \lg u$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = x^2$.

В дальнейшем мы будем рассматривать, как правило, основные элементарные функции (степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические) и их композиции. Ключевая информация об основных элементарных функциях приведена в нашем учебно-методическом пособии: Т. В. Кропотова, В. Г. Подольский, П. Е. Кашаргин «Введение в высшую математику. 1 семестр» [6].

Предел функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой точки x_0.

Определение (Коши). Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (или *при* $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого x, удовлетворяющего условию $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.
В этом случае пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{или} \quad f(x) \to a \text{ при } x \to x_0.$$

Используя логические символы, определение Коши можно записать кратко так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon : \ |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$, равносильное двойному неравенству $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$, показывает, что значения $f(x)$ принадлежат ε-окрестности числа a, которая обозначается так: $U_\varepsilon(a)$.

В свою очередь, двойное неравенство $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, равносильное системе требований $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon$ и $x \neq x_0$, означает, что x принадлежит так называемой *проколотой δ_ε-окрестности точки* x_0, т.е. δ_ε-окрестности x_0, из которой удалён её центр x_0. Эта проколотая окрестность обозначается так: $\overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$.

На «языке окрестностей» определение предела функции по Коши выглядит следующим образом: число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой окрестности $U_\varepsilon(a)$ найдётся такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$, что для каждого $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ соответствующие значения $f(x) \in U_\varepsilon(a)$.

Замечание 2. Из определения следует, что «поведение» $f(x)$ в самой точке x_0 никак не влияет ни на существование, ни на величину предела $f(x)$ в точке x_0.

Определение односторонних пределов.
Число a называется *пределом слева функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (или *левосторонним пределом в точке* x_0), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого x, удовлетворяющего условию $x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a \quad \text{или} \quad f(x_0 - 0) = a.$$

Кратко:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall x, x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 \colon \; |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Число a называется *пределом справа функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (или *правосторонним пределом в точке* x_0), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого x, удовлетворяющего условию $x_0 < x < x_0 + \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a \quad \text{или} \quad f(x_0 + 0) = a.$$

Кратко:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0\ \forall x, x_0<x<x_0+\delta_\varepsilon:\ |f(x)-a|<\varepsilon.$$

Пределы слева и справа называются *односторонними пределами функции $f(x)$ в точке x_0.*

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Предел функции f в точке x_0 существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют пределы как слева, так и справа, и они равны. Их общее значение и является значением предела функции f в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

П р и м е р 1. На языке «$\varepsilon-\delta$» доказать, что $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5$.

◀ Согласно определению Коши, мы должны показать, что для любого, сколь угодно малого, положительного числа ε найдётся такое положительное число δ_ε, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-3|<\delta_\varepsilon$, обязательно будет выполняться неравенство $|(2x-1)-5|<\varepsilon$. Наша цель — получение δ_ε, для которого всё перечисленное окажется верным. Как и при работе с последовательностями, движение к цели начинаем с рассмотрения левой стороны последнего неравенства цепочки требований определения (см. стр. 38). Имеем:

$$|(2x-1)-5| = |2x-6| = 2|x-3| < \varepsilon,\ 2|x-3|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-3|<\frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует, что $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Утверждение доказано.
На «языке окрестностей» мы показали, что любой окрестности $U_\varepsilon(5)$ сопоставляется проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(3)$ радиуса $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, такая, что для каждого $x\in\overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(3)$ соответствующие значения функции $f(x)=2x-1\in U_\varepsilon(5)$.

Таблица, приведённая ниже, даёт наглядное представление о связи радиусов указанных окрестностей.

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
δ_ε	0,05	0,005	0,0005	0,00005	0,000005

►

П р и м е р 2. На языке «$\varepsilon - \delta$» доказать, что $\lim\limits_{x\to -1}(3-2x-x^2) = 4$.

◄ Имеем:

$$|(3-2x-x^2)-4| = |-1-2x-x^2| = |x^2+2x+1| = (x+1)^2 < \varepsilon,$$
$$(x+1)^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x+1| < \sqrt{\varepsilon},\ \delta = \sqrt{\varepsilon}.$$

Итак, мы показали, что любому положительному числу ε сопоставляется положительное число $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$, такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-(-1)| < \delta_\varepsilon$, обязательно выполняется неравенство $|(3-2x-x^2)-4| < \varepsilon$.
Утверждение $\lim\limits_{x\to -1}(3-2x-x^2) = 4$ доказано. Для наглядности приведём «$\varepsilon - \delta$» таблицу, иллюстрирующую эту связь.

ε	0,01	0,0001	0,000001	0,00000001
δ_ε	0,1	0,01	0,001	0,0001

►

Непрерывность функции в точке

Определение. Если
1) функция $f(x)$ определена в точке x_0,
2) существует предел функции $f(x)$ в точке x_0 и
3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,
то функцию $f(x)$ называют *непрерывной в точке* x_0.

Замечание. Все элементарные функции и их композиции непрерывны в любой точке, принадлежащей их области определения.

Согласно сделанному выше замечанию, при вычислении предела примера 2 совсем необязательно использовать язык «$\varepsilon - \delta$», гораздо проще воспользоваться непрерывностью функции $f(x) = 3-2x-x^2$ в точке $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1}(3-2x-x^2) = 3-2\cdot(-1)-(-1)^2 = 3+2-1 = 4.$$

Предел функции при $x \to \infty$

Определение.

Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > \Delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$. Кратко:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\Delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x,\ |x| > \Delta_\varepsilon: \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x > \Delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$. Кратко:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\Delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x,\ x > \Delta_\varepsilon: \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x < -\Delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$. Кратко:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\Delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x,\ x < -\Delta_\varepsilon: \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Замечание. Говорят, что:
все x, удовлетворяющие условию $|x| > \Delta$, образуют Δ-*окрестность* ∞;
все x, удовлетворяющие условию $x > \Delta$, образуют Δ-*окрестность* $+\infty$;
все x, удовлетворяющие условию $x < -\Delta$, образуют Δ-*окрестность* $-\infty$.

Теоремы о пределах

Теорема 9. (О пределах суммы, произведения и частного)

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, то

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = a \pm b, \tag{9}$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = a \cdot b, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{a}{b} \text{ при условии, что } b \neq 0. \tag{11}$$

Теорема 10. (О пределе «зажатой» функции)
Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

Теорема 11. (О пределе сложной функции)
Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a$ и $\lim\limits_{u\to a} f(u)$, причём в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется условие $\varphi(x) \neq a$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ имеет предел в точке x_0, и справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u\to a} f(u). \tag{12}$$

В случае непрерывности функции $f(u)$ в точке a равенство (12) можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} \varphi(x)\right). \tag{13}$$

Замечание. На использовании теоремы 11 основан метод замены переменной при вычислении пределов функций.

Бесконечно малые функции

Определение. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при* $x \to x_0$.

Свойства бесконечно малых функций, следующие из теоремы 9:
1) сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ функций есть бесконечно малая при $x \to x_0$ функция,
2) произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ функций есть бесконечно малая при $x \to x_0$ функция.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 12. (О произведении ограниченной на бесконечно малую) Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ функция, а $\beta(x)$ — функция, ограниченная в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то их произведение $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ функция.

Бесконечно большие функции

Определение. Если для любого, сколь угодно большого, числа $E > 0$ существует такое число $\delta(E) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta(E)$, выполнено неравенство $|f(x)| > E$, то функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой при* $x \to x_0$. В этом случае говорят, что *предел функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *равен бесконечности*, и пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.
Кратко:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall E > 0 \ \exists \delta_E > 0 \ \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_E : \ |f(x)| > E.$$

По аналогии с односторонними конечными пределами определяются и односторонние бесконечные пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{и т. д.}$$

На бесконечно большие функции утверждения теоремы 9, связанные с арифметическими действиями с функциями и пределами, автоматически не переносятся. Справедливы только некоторые аналогии, перечисленные ниже.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$, то
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \infty.$$

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a,\ a \neq 0$, то
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \infty.$$

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \infty.$$

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, то
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = +\infty.$$

5. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, то
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = -\infty.$$

6. Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 $f(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

7. Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 $f(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

Последние два свойства означают, что функция, обратная к бесконечно большой, является бесконечно малой, и наоборот.
Для сокращения записи часто используют следующие символические равенства:

$$\frac{1}{\infty}=0,\ \frac{1}{+\infty}=+0,\ \frac{1}{-\infty}=-0,\ \frac{1}{0}=\infty,\ \frac{1}{+0}=+\infty,\ \frac{1}{-0}=-\infty.$$

Раскрытие неопределённостей

Рассмотрим отношение двух функций: $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, то предел отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to x_0$ нельзя найти, пользуясь теоремой 9, это случай так называемой *неопределенности типа* $\frac{0}{0}$. Существуют следующие *типы неопределённости*:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty-\infty,$$

которые могут возникать как в точке x_0, так и при $x\to\infty$. Вычисление предела во всех этих случаях называется *раскрытием неопределённости.*

Существует несколько способов раскрытия неопределённостей. В этой главе мы рассмотрим один из них, основанный на тождественных преобразованиях функций в проколотой окрестности рассматриваемой точки и последующем использовании либо утверждений теоремы 9, либо так называемых *замечательных пределов* и их следствий.

1. *Первый замечательный предел* (неопределенность типа $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{14}$$

2. *Второй замечательный предел* (неопределенность типа 1^∞)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \quad \text{или} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{15}$$

Следствия первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}. \qquad (16)$$

Следствия второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}\ \text{при}\ a>0,\ a\neq 1, \qquad (17)$$

$$\text{в частности,}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \qquad (18)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ \text{при}\ a>0, \qquad (19)$$

$$\text{в частности,}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \qquad (20)$$

При раскрытии неопределённости типа $\frac{0}{0}$ используют также формулу

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}, \qquad (21)$$

$$\text{при}\ \alpha=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N},\ \text{она выглядит так}:\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}. \qquad (22)$$

Прежде чем использовать следствия 17–20 замечательных пределов, докажем их справедливость.

П р и м е р 3. Используя первый замечательный предел, доказать:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$$

◀ Сделаем замену $\arcsin x=y$, при этом $x=\sin y$ и $y\to 0$ при $x\to 0$. Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}}=1. \ ▶$$

П р и м е р 4. Используя первый замечательный предел, доказать:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$$

◀ Сначала распишем тангенс, исходя из его определения, затем воспользуемся теоремой 9, первым замечательным пределом и непрерывностью функции $y=\cos x$ в точке $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1. \blacktriangleright$$

П р и м е р 5. Используя первый замечательный предел, доказать:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

◀ Воспользуемся тригонометрической формулой половинного аргумента $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

П р и м е р 6. Используя второй замечательный предел, доказать:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}\text{ при } a>0,\ a\neq 1.$$

◀ Сначала воспользуемся свойствами логарифмов — правилом перехода к новому основанию и занесением множителя перед логарифмом в показатель логарифмируемого выражения, а затем непрерывностью логарифмической функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\ln a\cdot x}=\frac{1}{\ln a}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=$$

$$=\frac{1}{\ln a}\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\ln a}\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{\ln a}\ln e=\frac{1}{\ln a}. \blacktriangleright$$

П р и м е р 7. Используя полученный в примере 6 результат, доказать ещё одно следствие второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \text{ при } a>0.$$

◀ Заметим, что при $a=1$ справедливость данного равенства очевидна. Для положительных $a\neq 1$ сделаем замену $a^x-1=y$, при которой $x=\log_a(1+y)$ и $y\to 0$ при $x\to 0$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+y)}{y}}=\frac{1}{\frac{1}{\ln a}}=\ln a. \ ▶$$

П р и м е р 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 2x}$.

◀ Для раскрытия данной неопределенности $\frac{0}{0}$ выполним тождественное преобразование рассматриваемой дроби в проколотой окрестности $x=0$ — вынесем в числителе и знаменателе x за скобку и сократим на него:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1-\frac{\sin 2x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin 2x}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin 2x}{x}}{1+\frac{\sin 2x}{x}}.$$

После проведённых преобразований воспользуемся утверждениями теоремы 9 и первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin 2x}{x}}{1+\frac{\sin 2x}{x}}=\lim_{2x\to 0}\frac{1-2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{1+2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{1-2\cdot 1}{1+2\cdot 1}=-\frac{1}{3}. \ ▶$$

П р и м е р 9. Вычислить

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right).$$

◀ В данном примере нам придётся раскрыть неопределённость $\infty - \infty$. Для этого выполним тождественные преобразования рассматриваемой функции в проколотой окрестности $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{(x-1)(x-4)}+\frac{x-4}{3(x-1)(x-2)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3(x+2)(x-2)+(x-4)^2}{3(x-1)(x-2)(x-4)} = \lim_{x\to 1}\frac{4x^2-8x+4}{3(x-1)(x-2)(x-4)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)^2}{3(x-1)(x-2)(x-4)} = \lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)}{3(x-2)(x-4)} = \frac{0}{9} = 0.$$ ▶

П р и м е р 10. Вычислить

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right).$$

◀ Мы вновь имеем дело с неопределённостью типа $\infty - \infty$. Раскроем её:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-1-x(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \lim_{x\to 2}\frac{-x^2+3x-1}{x(x-1)(x-2)^2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty.$$

Рассматриваемая функция оказалась бесконечно большой. ▶

П р и м е р 11. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right).$$

◀ Раскроем неопределённость $\infty - \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = -\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1} =$$

$$= -\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0\cdot\frac{1}{1+0} = 0.$$

В конце вычислений было использовано, что $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ при $x \to \infty$ являются бесконечно малыми функциями. ▶

П р и м е р 12. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}.$$

◀ На этот раз нам придётся раскрыть неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ для дроби, в числителе и знаменателе которой стоят многочлены переменной x. Вынесем за скобки «главных виновников» бесконечного роста — старшие степени переменой x, произведём доступное сокращение множителей, и уже к преобразованной дроби применим утверждения теоремы 9.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3(1+\frac{1}{x^2})}{x^4\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = 0\cdot 1 = 0.$$

В конце вычислений вновь было использовано, что $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{x^4}$ при $x \to \infty$ являются бесконечно малыми функциями. ▶

П р и м е р 13. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^3+5x^2-4x-2}{(2x+1)(2x^2-1)}.$$

◀ Ещё одна неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ для дроби, в числителе и знаменателе которой стоят многочлены переменной x, при $x \to \infty$. Сформулируем общий рецепт для раскрытия неопределённости в такой ситуации:

- вынести за скобки старшие степени переменой x в числителе и знаменателе,
- произвести доступное сокращение множителей,
- применить к преобразованной дроби утверждения теоремы 9, опираясь на то, что функции вида $\frac{1}{x^k}$, $k \in \mathbb{N}$, являются бесконечно малыми при $x \to \infty$,
- в случае необходимости использовать свойство 2 бесконечно больших функций, сформулированное на странице 45.

Вернёмся к примеру:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{9x^3+5x^2-4x-2}{(2x+1)(2x^2-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(9+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{9+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{9}{2\cdot 2} = \frac{9}{4}. \blacktriangleright$$

П р и м е р 14. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}.$$

$$\blacktriangleleft \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^6\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(\frac{3}{x}-7\right)^2}{x^4\left(2-\frac{1}{x}\right)^4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(\frac{3}{x}-7\right)^2}{\left(2-\frac{1}{x}\right)^4} = \lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(\frac{3}{x}-7\right)^2}{\left(2-\frac{1}{x}\right)^4} = \infty.$$

В конце вычислений было использовано свойство 2 бесконечно больших функций. $\blacktriangleright$

Замечание. Применяя сформулированный выше рецепт, нетрудно получить общий результат раскрытия неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$ для рациональной функции

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m} \text{ при } x \to \infty.$$

Результат таков:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m} = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m; \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

Перейдём к работе с неопределённостью типа $\frac{0}{0}$ для рациональной функции $R(x)$. Начнём с рассмотрения пределов при $x \to 0$. В этом случае неопределённость $\frac{0}{0}$ возникает только тогда, когда и в числителе, и в знаменателе дроби показатели младших степеней переменной x отличны от нуля, т. е. когда

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_lx^{n-l}}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_px^{m-p}}; \quad l < n,\ p < m.$$

При работе с точкой $x = 0$ необходимо учитывать, что бесконечно малыми при $x \to 0$ являются функции вида x^k, $k \in \mathbb{N}$, а не $\frac{1}{x^k}$, $k \in \mathbb{N}$, как при $x \to \infty$.

При $x \to 0$ рецепт раскрытия неопределённости $\frac{0}{0}$ для функции

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_lx^{n-l}}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_px^{m-p}} \quad (l < n,\ p < m)$$

таков:

- вынести за скобки младшие степени переменой x в числителе и знаменателе дроби,

- произвести доступное сокращение множителей,
- применить к преобразованной дроби утверждения теоремы 9, опираясь на то, что функции вида x^k, $k \in \mathbb{N}$, являются бесконечно малыми при $x \to 0$,
- в случае необходимости использовать свойство 2 бесконечно больших функций (см. стр. 45).

П р и м е р 15. Вычислить

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^7 + 5x^6 + 4x^3}{x^7 + 2x^3}.$$

◀ Воспользуемся сформулированным выше рецептом раскрытия неопределённости $\frac{0}{0}$ для рациональных функций:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^7 + 5x^6 + 4x^3}{x^7 + 2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(x^4 + 5x^3 + 4)}{x^3(x^4 + 2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 5x^3 + 4}{x^4 + 2} = \frac{4}{2} = 2. \blacktriangleright$$

П р и м е р 16. Вычислить

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^7 + 5x^6 + 4x^5}{x^7 + 2x^3}.$$

◀ Внимательный читатель наверняка заметил, что рассматриваемая функция отличается от функции примера 15 только значением показателя младшей степени пременной x в числителе. Посмотрим, как это отразится на значении предела:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^7 + 5x^6 + 4x^5}{x^7 + 2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5(x^2 + 5x + 4)}{x^3(x^4 + 2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(x^2 + 5x + 4)}{x^4 + 2} = \frac{0 \cdot 4}{2} = 0. \blacktriangleright$$

П р и м е р 17. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^7+5x^6+4x^2}{x^7+2x^3}.$$

◀ Вновь рассматриваемая функция отличается от функции примера 15 только показателем младшей степени x в числителе. И снова это обстоятельство отразится на значении предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^7+5x^6+4x^2}{x^7+2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^5+5x^4+4)}{x^3(x^4+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^5+5x^4+4}{x\left(x^4+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^5+5x^4+4}{x^4+2}=\infty.$$

В конце вычислений было учтено, что функция $\frac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x\to 0$, и использовано свойство 2 бесконечно больших функций. ▶

Продолжим работу с рациональными функциями, но перейдём к раскрытию неопределённости $\frac{0}{0}$ в точках, отличных от $x=0$.

П р и м е р 18. Вычислить

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-8x+15}{x^2+x-12}.$$

◀ При $x=3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в 0, следовательно, мы имеем дело с неопределённостью типа $\frac{0}{0}$. Используя стандартную схему, разложим квадратные трёхчлены на множители и раскроем неопределённость:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-8x+15}{x^2+x-12}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-5)}{(x-3)(x+4)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-5}{x+4}=\frac{3-5}{3+4}=-\frac{2}{7}.$$

Комментарий: и в числителе, и в знаменателе дроби мы сначала вынесли множитель $x-3$ — «виновника» их обращения в нуль, затем, пользуясь основным свойством дроби, сократили эти множители, далее вычислили предел оставшейся после сокращения дроби. ►

При работе с другими рациональными функциями используется аналогичный алгоритм раскрытия неопределённости:

- преобразовать числитель и знаменатель в произведение так, чтобы за их «зануление» отвечал бы конкретный множитель,
- сократить одинаковые множители в числителе и знаменателе дроби,
- вычислить предел получившегося после преобразования выражения.

Замечание. При разложении многочленов на множители можно использовать два способа.

Способ первый. Группировка слагаемых и вынесение общего множителя.

Способ второй. Основывается на следствии теоремы Безу: если x_0 является корнем многочлена $P_n(x)$, то этот многочлен делится на $x - x_0$ без остатка, и его можно представить в виде

$$P_n(x) = (x - x_0)^k Q_{n-k}(x),$$

где $Q(x_0) \neq 0$ и $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Частное при делении на $x - x_0$ можно найти, используя схему деления «углом» или схему Горнера.

Пример 19. Вычислить

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}.$$

◄ Тип неопределённости: $\frac{0}{0}$. Решим пример тремя способами.

Первый способ — группировка слагаемых, использование формулы сокращённого умножения

$$x^m - 1 = (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots + 1),\ m \in \mathbb{N},$$

и вынесение общего множителя в числителе и знаменателе.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^4-x)-2(x-1)}{(x^5-x)-3(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^3-1)-2(x-1)}{x(x^4-1)-3(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x^2+x+1)-2(x-1)}{x(x-1)(x^3+x^2+x+1)-3(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x-2)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-2}{x^4+x^3+x^2+x-3}=\frac{1+1+1-2}{1+1+1+1-3}=1.$$

Второй способ. Поскольку при $x=1$ и числитель, и знаменатель дроби обращаются в 0, то, согласно следствию теоремы Безу, оба многочлена должны поделиться на $x-1$ без остатка. Найдём частное, используя схему деления «углом»:

$$\begin{array}{r|l}
-\;\; x^4-3x+2 & x-1 \\
\underline{x^4-x^3} \qquad\qquad & \overline{x^3+x^2+x-2} \\
-\;\; x^3-3x+2 & \\
\underline{x^3-x^2} \qquad\quad & \\
-\;\; x^2-3x+2 & \\
\underline{x^2-x} \qquad & \\
-\;\; -2x+2 & \\
\underline{-2x+2} & \\
0 &
\end{array}$$

Полученный результат позволяет записать числитель рассматриваемой дроби в следующем виде:

$$x^4-3x+2=(x-1)(x^3+x^2+x-2).$$

Аналогично для знаменателя:

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 - 4x + 3 & x - 1 \\
\underline{x^5 - x^4} \quad\quad & \overline{x^4 + x^3 + x^2 + x - 3} \\
x^4 - 4x + 3 & \\
\underline{x^4 - x^3} \quad\quad & \\
x^3 - 4x + 3 & \\
\underline{x^3 - x^2} \quad\quad & \\
x^2 - 4x + 3 & \\
\underline{x^2 - x} \quad\quad & \\
-3x + 3 & \\
\underline{-3x + 3} & \\
0 &
\end{array}
$$

следовательно,

$$x^5 - 4x + 3 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x - 3).$$

Имеем:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x - 3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 2}{x^4 + x^3 + x^2 + x - 3} = \frac{1 + 1 + 1 - 2}{1 + 1 + 1 + 1 - 3} = 1.$$

Третий способ. Сделаем замену $x - 1 = t$, при этом $x = 1 + t$, и, если $x \to 1$, то $t \to 0$. Используем формулу бинома Ньютона и получим:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^4 - 3(1+t) + 2}{(1+t)^5 - 4(1+t) + 3} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1 + 4t + 6t^2 + 4t^3 + t^4 - 3 - 3t + 2}{1 + 5t + 10t^2 + 10t^3 + 5t^4 + t^5 - 4 - 4t + 3} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^4 + 4t^3 + 6t^2 + t}{t^5 + 5t^4 + 10t^3 + 10t^2 + t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t(t^3+4t^2+6t+1)}{t(t^4+5t^3+10t^2+10t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^3+4t^2+6t+1}{t^4+5t^3+10t^2+10t+1} = 1. \blacktriangleright$$

П р и м е р 20. Вычислить

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^4-x^3-x^2+5x+4}{x^6+x^5-5x^2-5x}.$$

$\blacktriangleleft$ Тип неопределённости: $\frac{0}{0}$. Разложив числитель и знаменатель на множители (подробные вычисления рекомендуем сделать читателю самостоятельно), получим:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^4-x^3-x^2+5x+4}{x^6+x^5-5x^2-5x} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2(x^2-3x+4)}{(x+1)(x^5-5x)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-3x+4)}{x^5-5x} = \frac{0\cdot 8}{4} = 0. \blacktriangleright$$

П р и м е р 21. Вычислить

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^6+4x-5}{x^3-5x^2+7x-3}.$$

$\blacktriangleleft$ Тип неопределённости по-прежнему $\frac{0}{0}$. Детали разложения числителя и знаменателя на множители мы опять предлагаем воспроизвести читателю самостоятельно, приведём лишь итог разложения и дальнейшие действия:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^6+4x-5}{x^3-5x^2+7x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+5)}{(x-1)^2(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+5}{x-3} = (\infty \cdot (-5)) = \infty.$$

В конце вычислений мы использовали свойство 2 бесконечно больших функций. ▶

Перейдём к рассмотрению пределов выражений, содержащих радикалы. Начнём с раскрытия неопределённости типа $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to \infty$.

П р и м е р 22. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+14x}{2x+\sqrt[3]{x^2}}.$$

◀ Как и при работе с обычной рациональной функцией, вынесем из числителя и знаменателя старшие степени x и избавимся от неопределённости:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+14x}{2x+\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}+14\right)}{x\left(2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+14}{2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \frac{14}{2} = 7. \blacktriangleright$$

П р и м е р 23. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^6-1}{\sqrt{x^{12}+5x^5-1}}.$$

◀ Для вынесения старшей степени в знаменателе нам придётся сначала вынести её за скобку внутри радикала, а затем извлечь из неё квадратный корень:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^6-1}{\sqrt{x^{12}+5x^5-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^6-1}{\sqrt{x^{12}\left(1+\frac{5}{x^7}-\frac{1}{x^{12}}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^6\left(5-\frac{1}{x^6}\right)}{x^6\sqrt{1+\frac{5}{x^7}-\frac{1}{x^{12}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5-\frac{1}{x^6}}{\sqrt{1+\frac{5}{x^7}-\frac{1}{x^{12}}}} = 5. \blacktriangleright$$

П р и м е р 24. Вычислить

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}+\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[5]{x^4-1}}.$$

◀ Определив старшие степени в числителе и знаменателе, вынесем их за скобки:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}+\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[5]{x^4-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}}{\sqrt[4]{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}+\sqrt[5]{x^5\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^5}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}\right)}{x\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}+\sqrt[5]{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^5}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}+\sqrt[5]{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^5}}}=3. \blacktriangleright$$

П р и м е р 25. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^4+13x^2-7}-2x^2\right).$$

◀ Мы имеем дело с неопределённостью типа $\infty-\infty$. Умножая и деля рассматриваемое выражение на сопряжённое, получим другой тип неопределённости: $\frac{\infty}{\infty}$, который раскроем уже привычным для нас способом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^4+13x^2-7}-2x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+13x^2-7-4x^4}{\sqrt{4x^4+13x^2-7}+2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{13x^2-7}{\sqrt{4x^4+13x^2-7}+2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(13-\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt{4+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^4}}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{13-\frac{7}{x^2}}{\sqrt{4+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^4}}+2}=\frac{13}{2+2}=\frac{13}{4}. \blacktriangleright$$

П р и м е р 26. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{x^2}.$$

◀ При $x=0$ числитель и знаменатель обращаются в нуль, тип неопределенности: $\frac{0}{0}$. С помощью тождественных преобразований попытаемся вынести «виновников» зануления за скобку. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое числителю, и воспользуемся формулами сокращённого умножения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-(x+2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4(x^2+x+1)-(x+2)^2}{x^2\left(2\sqrt{x^2+x+1}+(x+2)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+4x+4-x^2-4x-4}{x^2\left(2\sqrt{x^2+x+1}+x+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2\left(2\sqrt{x^2+x+1}+x+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2\sqrt{x^2+x+1}+x+2}=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}.$$ ▶

П р и м е р 27. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt{1+2x}-1}.$$

◀ Тип неопределенности: $\frac{0}{0}$. Умножив числитель и знаменатель дроби на сопряжённое знаменателю, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt{1+2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+8}-2)(\sqrt{1+2x}+1)}{1+2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}\cdot\frac{(\sqrt{1+2x}+1)}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}.$$

На последнем шаге вычислений мы воспользовались утверждением теоремы 9 о работе с пределом произведения функций и тем, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+2x}+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Получим теперь и в числителе множитель в виде степени переменной x. Для этого умножим числитель и знаменатель оставшейся дроби на неполный квадрат суммы и воспользуемся формулой для разности кубов:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{x+8}-2)(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4)}{x(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4)} =$$

$$= \frac{1}{4+4+4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(x+8)-8}{x} = \frac{1}{12} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \frac{1}{12}. \blacktriangleright$$

Замечание. В примере 27 мы дважды *на промежуточных этапах вычислений* использовали утверждение теоремы 9 о работе с пределом произведения функций. Такие действия — от одного множителя предел вычислили, с другим продолжаем работу — допустимы только при работе с произведением и частным. При работе с суммой и разностью вычислять пределы «кусочками» — от одного слагаемого вычислили, от другого нет, — нельзя. *При работе с суммой и разностью функций нужно вычислять предел от всех слагаемых на одном этапе вычислений.*

Пример 28. Вычислить

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[7]{1+x}}{x}.$$

$\blacktriangleleft$ Избавиться от радикалов с помощью тождественных преобразований в данной ситуации существенно сложнее, чем в двух предыдущих примерах. На этот раз для раскрытия неопределённости $\frac{0}{0}$ мы будем использовать формулу (22):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[7]{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x}-1-\left(\sqrt[7]{1+x}-1\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}-\frac{\sqrt[7]{1+x}-1}{x}\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{2}{35}. \blacktriangleright$$

П р и м е р 29. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[8]{1+16x+2x^2}-\sqrt[15]{1-25x+x^3}}{x}.$$

◀ И в этом примере для раскрытия неопределённости $\frac{0}{0}$ нужно использовать формулу (22):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[8]{1+16x+2x^2}-\sqrt[15]{1-25x+x^3}}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[8]{1+16x+2x^2}-1-\left(\sqrt[15]{1-25x+x^3}-1\right)}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[8]{1+16x+2x^2}-1}{x}-\frac{\sqrt[15]{1-25x+x^3}-1}{x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[8]{1+16x+2x^2}-1}{16x+2x^2}\cdot\frac{16x+2x^2}{x}-\frac{\sqrt[15]{1-25x+x^3}-1}{-25x+x^3}\cdot\frac{-25x+x^3}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot 16-\frac{1}{15}\cdot(-25)=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}. \blacktriangleright$$

Замечание. Легко доказать (мы предлагаем сделать это читателю самостоятельно), что справедливо следующее обобщение формулы (22):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m}-1}{x}=\frac{a_1}{n},\ n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}. \quad (23)$$

Используем эту формулу при решении следующего примера.

П р и м е р 30. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}\right).$$

◀ Сделаем замену $t=\dfrac{1}{x}$, при этом $x=\dfrac{1}{t}$ и $t\to 0$ при $x\to\infty$. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3t+4t^2}-\sqrt[3]{1-3t+4t^3}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3t+4t^2}-1-\left(\sqrt[3]{1-3t+4t^3}-1\right)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+3t+4t^2}-1}{t}-\frac{\sqrt[3]{1-3t+4t^3}-1}{t}\right)=\frac{3}{3}-\frac{-3}{3}=1+1=2.$$

В конце вычислений мы использовали формулу (23). ▶

Перейдём к рассмотрению пределов тригонометрических функций. При раскрытии неопределённостей мы часто будем использовать первый замечательный предел (14)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

и его следствия (16)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Начнём с блока простейших упражнений.

П р и м е р 31.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{x}=10\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{10x}=10\cdot 1=10.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x^2}{2x^2}=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x^2}{8x^2}=4\cdot 1=1.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{\operatorname{tg} 7x}{7x}\right)\cdot 7x}{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\cdot 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{2x}=\dfrac{7}{2}=3,5.$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{(5x)^2}\cdot 25=\dfrac{1}{2}\cdot 25=12,5.$

От простейших упражнений перейдём к заданиям, при решении которых нам придётся использовать различные приёмы и методы.

П р и м е р 32. Вычислить

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}, \qquad 2)\ \lim_{x\to \infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}, \qquad 3)\ \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$$

1) ◀ Неопределенность $\frac{0}{0}$. Сделаем замену $\operatorname{arctg} x=t$, тогда при $x\to 0$ новая переменная $t\to 0$, и $x=\operatorname{tg} t$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg} t}=1. \ ▶$$

2) ◀ В этом примере нет неопределенности: функция $\operatorname{arctg} x$ ограничена, т. к., согласно определению, $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2}$; функция $\frac{1}{x}$ бесконечно мала при $x\to\infty$. По теореме о произведении бесконечно малой на ограниченную имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x\cdot\frac{1}{x}=0. \ ▶$$

3) ◀ Здесь также нет неопределённости. Более того, функция непрерывна в точке $x=1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\frac{\operatorname{arctg} 1}{1}=\frac{\pi/4}{1}=\frac{\pi}{4}. \ ▶$$

П р и м е р 33. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x-3\arcsin 4x}{\sin 5x-6\operatorname{arctg}7x}.$$

◀ Для раскрытия неопределённости разделим числитель и знаменатель дроби на x и воспользуемся первым замечательным пределом и его следствиями:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x-3\arcsin 4x}{\sin 5x-6\operatorname{arctg}7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{tg}2x}{x}-\frac{3\arcsin 4x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}-\frac{6\operatorname{arctg}7x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}-12\cdot\frac{\arcsin 4x}{4x}}{5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}-42\cdot\frac{\operatorname{arctg}7x}{7x}}=\frac{2\cdot 1-12\cdot 1}{5\cdot 1-42\cdot 1}=\frac{10}{37}.\ \blacktriangleright$$

П р и м е р 34. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}.$$

◀ Раскроем неопределенность $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x^3}{\sin^6 2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos 3x^3}{(3x^3)^2}\cdot(3x^3)^2}{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^6\cdot(2x)^6}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos 3x^3}{(3x^3)^2}\cdot 9x^6}{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^6\cdot 16x^6}=-\frac{\frac{1}{2}\cdot 9}{1^6\cdot 16}=-\frac{9}{32}.\ \blacktriangleright$$

П р и м е р 35. Вычислить

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}.$$

◀ Воспользуемся формулой для разности косинусов:

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}{x-a}=-\sin a\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=$$

$$=\left(\frac{x-a}{2}=t,\ t\to 0\right)=-\sin a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=-\sin a. \ ▶$$

П р и м е р 36. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{\pi}{x}.$$

$$◀\ \lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\cdot\pi=1\cdot\pi=\pi.$$

В конце вычислений мы учли, что $\frac{\pi}{x}\to 0$ при $x\to\infty$. ▶

П р и м е р 37. Вычислить

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}.$$

◀ Использовать первый замечательный предел сразу нельзя, поскольку x стремится к единице, а не к нулю.
Сделаем замену $x-1=t$, при этом $x=1+t$, и при $x\to 1$ $t\to 0$. Получим:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 7\pi(1+t)}{\sin 2\pi(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(7\pi+7\pi t)}{\sin(2\pi+2\pi t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 7\pi t}{\sin 2\pi t}=-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin 7\pi t}{7\pi t}\cdot 7\pi t}{\frac{\sin 2\pi t}{2\pi t}\cdot 2\pi t}=-\frac{7}{2}.$$

При вычислениях мы учли, что $\sin x$ имеет период 2π, а также использовали формулы приведения. ▶

П р и м е р 38. Вычислить

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}.$$

◀ Сделаем замену, которая позволит нам использовать первый замечательный предел: $\pi - x = t$, при этом $x = \pi - t$ и $t \to 0$ при $x \to \pi$. Получим:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{(\pi - x)(\pi + x)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi - t)}{t(2\pi - t)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t(2\pi - t)} = \frac{1}{2\pi} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2\pi}. \blacktriangleright$$

П р и м е р 39. Вычислить

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin x \sin 2x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$$

◀ Тип неопределённости $\infty - \infty$. Для раскрытия неопределённости сначала применим формулу для синуса двойного аргумента, затем преобразуем разность в отношение и используем первый замечательный предел и его следствие:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin x \sin 2x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x \cos x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}}{1^2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

П р и м е р 40. Вычислить

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x - 1}.$$

◀ Тип неопределённости $\frac{0}{0}$, раскроем её:

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x - 1} = \lim_{x\to\pi/4} (1 + \operatorname{tg} x) \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\sqrt{2}\cos x - 1} =$$

$$= 2 \lim_{x\to\pi/4} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\sqrt{2}\cos x - 1} = \left(x - \frac{\pi}{4} = t,\ x = t + \frac{\pi}{4}, t \to 0 \right) =$$

$$= 2\lim_{t\to 0}\frac{1-\operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-1} = 2\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1+\operatorname{tg}t}{1-\operatorname{tg}t}}{\cos t-\sin t-1} =$$

$$= 2\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-\operatorname{tg}t}\cdot\frac{-2\operatorname{tg}t}{-(\sin t+1-\cos t)} = 4\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}t}{\sin t+1-\cos t} =$$

$$= 4\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\operatorname{tg}t}{t}}{\frac{\sin t}{t}+\frac{1-\cos t}{t^2}\cdot t} = 4\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot 0} = 4. \blacktriangleright$$

П р и м е р 41. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\operatorname{arctg}(\sin^2 x)}.$$

$$\blacktriangleleft \lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\operatorname{arctg}(\sin^2 x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{arctg}(\sin^2 x)}{\sin^2 x}}\cdot\frac{(1-\cos 2x)+x\sin x}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x+x\sin x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\left(2+\frac{x}{\sin x}\right) = 2+1 = 3. \blacktriangleright$$

П р и м е р 42. Вычислить

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sqrt[4]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}.$$

◀ Сначала выделим множитель, не участвующий в создании неопределённости, и вычислим его предел:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sqrt[4]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\pi/2}\sqrt[4]{\sin x}\cdot\frac{1-\sqrt[12]{\sin x}}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sqrt[12]{\sin x}}{\cos^2 x}.$$

Затем, для раскрытия оставшейся неопределённости, сделаем замену $x-\frac{\pi}{2}=t$, при этом $t\to 0$, воспользуемся формулами приведения и пределами (14), (16) и (22):

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sqrt[12]{\sin x}}{\cos^2 x} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt[12]{\cos t}}{\sin^2 t} = -\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[12]{\cos t}-1}{\sin^2 t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[12]{1+(\cos t - 1)} - 1}{\cos t - 1} \cdot \frac{1-\cos t}{t^2} \cdot \frac{1}{\frac{\sin^2 t}{t^2}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}. \blacktriangleright$$

Перейдём к вычислению пределов показательно-степенных функций. Сначала рассмотрим блок примеров, не содержащих неопределённостей и решаемых с использованием формулы

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}. \tag{24}$$

П р и м е р 43.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2x+1}} = 0^{\frac{1}{2}} = 0.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0} = 1.$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0.$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty.$

В следующем примере помимо формулы (24) придётся использовать второй замечательный предел (15).

П р и м е р 44.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^{x} = e^{+\infty} = +\infty.$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^{x} = e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{+\infty}} = 0.$

П р и м е р 45. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2+4}\right)^{x^2}.$$

◀ В данном примере основание степени стремится к единице, показатель — к бесконечности, следовательно, нам придётся раскрывать неопределённость типа 1^∞.
Выполним тождественные преобразования, приводящие к возможности использования второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2+4}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+4}\right)^{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x^2+4}\right)^{x^2+4}\right)^{\frac{x^2}{x^2+4}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+4}} = e^1 = e. \blacktriangleright$$

П р и м е р 46. Вычислить

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}.$$

◀ В данном примере мы также имеем дело с неопределённостью 1^∞. Раскрытие неопределённости начнём с замены $x-\frac{\pi}{2}=t$, затем используем формулы приведения и выполним тождественные преобразования, приводящие к возможности использования второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{t\to 0}(\cos t)^{\operatorname{ctg}^2 t} = \lim_{t\to 0}\left((1+(\cos t-1))^{\frac{1}{\cos t-1}}\right)^{\frac{\cos t-1}{\operatorname{tg}^2 t}} =$$

$$= \left(\lim_{t\to 0}(1+(\cos t-1))^{\frac{1}{\cos t-1}}\right)^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{\operatorname{tg}^2 t}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{\operatorname{tg}^2 t}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

В конце вычислений было использовано, что $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos t-1}{\operatorname{tg}^2 t} = -\dfrac{1}{2}$. Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в справедливости этого результата. ▶

Внимательный читатель заметил, что схема использования тождественных преобразований в примерах (45) и (46) одинакова. Формализуем эту схему для раскрытия неопределённости типа 1^∞.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}$ представляет собой неопределённость 1^∞. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0}\left[1+(u(x)-1)\right]^{v(x)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\left[1+(u(x)-1)\right]^{\frac{1}{u(x)-1}}\right)^{(u(x)-1)\cdot v(x)} =$$

$$= \left(\lim_{x\to x_0}\left[1+(u(x)-1)\right]^{\frac{1}{u(x)-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)\cdot v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)\cdot v(x)}.$$

Таким образом, имеем:

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)\cdot v(x)}. \tag{25}$$

Используем формулу (25) уже при решении следующего примера.

П р и м е р 47. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2e^x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

◀ Тип неопределённости: 1^∞. Используя формулу (25), получим:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2e^x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2e^x-1\right)\cdot\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{1-\cos x}} = e^2.$$ ▶

П р и м е р 48. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos ax}{1+\sin x\cos bx}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}.$$

◀ Тип неопределённости: 1^∞. Используя формулу (25), получим:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos ax}{1+\sin x\cos bx}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos ax}{1+\sin x\cos bx}-1\right)\operatorname{ctg}^3 x}.$$

Вычислим предел показателя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos ax}{1+\sin x\cos bx}-1\right)\operatorname{ctg}^3 x=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos ax-\cos bx)\cos^3 x}{(1+\sin x\cos bx)\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{a-b}{2}x\cdot\sin\frac{a+b}{2}x}{\sin^2 x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin\frac{a-b}{2}x}{x}\cdot\frac{\sin\frac{a+b}{2}x}{x}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{a-b}{2}x}{\frac{a-b}{2}x}\cdot\frac{a-b}{2}\cdot\frac{\sin\frac{a+b}{2}x}{\frac{a+b}{2}x}\cdot\frac{a+b}{2}\right)=$$

$$=-2\cdot\frac{a-b}{2}\cdot\frac{a+b}{2}=-\frac{a^2-b^2}{2}.$$

Таким образом, окончательно:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos ax}{1+\sin x\cos bx}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}=e^{\frac{b^2-a^2}{2}}.$$ ▶

Перейдём к рассмотрению примеров на использование следствий (17)–(20) второго замечательного предела.

П р и м е р 49. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}.$$

◀ Используя формулу (20), получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}(e^{(a-b)x}-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(a-b)x}-1}{(a-b)x}\cdot(a-b)=a-b. \blacktriangleright$$

П р и м е р 50. Вычислить

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a},\ a>0.$$

◀ Сделаем замену $x-a=t$, при этом $x=a+t$ и $t\to 0$ при $x\to a$. Получим

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{a^{a+t}-(a+t)^a}{t}=a^a\lim_{t\to 0}\frac{a^t-\left(1+\frac{t}{a}\right)^a}{t}=$$

$$=a^a\lim_{t\to 0}\frac{(a^t-1)-\left(\left(1+\frac{t}{a}\right)^a-1\right)}{t}=a^a\lim_{t\to 0}\left(\frac{a^t-1}{t}-\frac{\left(1+\frac{t}{a}\right)^a-1}{\frac{t}{a}}\cdot\frac{1}{a}\right)=$$

$$=a^a\left(\ln a-a\cdot\frac{1}{a}\right)=a^a\left(\ln a-1\right)=a^a\ln\frac{a}{e}.$$

В конце вычислений были использованы формулы (19), (21). ▶

П р и м е р 51. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{x+1}-2}{\ln(1+4x)}.$$

◀ При решении данного примера придётся использовать формулы (18) и (19):

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{x+1}-2}{\ln(1+4x)}=2\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\ln(1+4x)}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^x-1}{x}}{\frac{\ln(1+4x)}{4x}}\cdot\frac{1}{4}=2\cdot\frac{\ln 2}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\ln 2}{2}. \blacktriangleright$$

П р и м е р 52. Вычислить

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}.$$

◀ Сначала сделаем замену $x - \pi = t$, при этом $x = \pi + t$ и $t \to 0$ при $x \to \pi$. Затем используем периодичность косинусов, свойства логарифмов, основное тригонометрическое тождество и известные пределы. Получим:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln\cos(2\pi + 2t)}{\ln\cos(4\pi + 4t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln\cos 2t}{\ln\cos 4t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\ln\cos 2t}{2\ln\cos 4t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln\cos^2 2t}{\ln\cos^2 4t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(1 - \sin^2 2t\right)}{\ln\left(1 - \sin^2 4t\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(1 - \sin^2 2t\right)}{-\sin^2 2t} \cdot \frac{-\sin^2 2t}{-\sin^2 4t} \cdot \frac{1}{\frac{\ln\left(1-\sin^2 4t\right)}{-\sin^2 4t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 2t}{\sin^2 4t} = \frac{1}{4}. \text{ ▶}$$

Задание для решения в аудитории

2.1. На языке «$\varepsilon - \delta$» доказать, что

$$1.\ \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = 2; \quad 2.\ \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1 - x)^2} = +\infty.$$

2.2. Используя логические символы, записать утверждения:

$$1.\ \lim_{x\to -0} f(x) = 0; \qquad 2.\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 4;$$

$$3.\ \lim_{x\to 1+0} f(x) = -\infty; \qquad 4.\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty.$$

Найти предел функции (2.3–2.40).

2.3.

$$1.\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2 - 1}. \quad 2.\ \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2 - 1}. \quad 3.\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2 - 1}.$$

2.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2}{2x+1} - \dfrac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right)$.

2.7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^5+(x+2)^5+\ldots+(x+n)^5}{x^5+n^5}$, $n \in \mathbb{N}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{2x}}}}$.

2.14. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)$.

2.15. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+5x}+x\right)$.

2.16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+\sqrt{x^3+x^4}}}{\sqrt{x^2+4}}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{1+7x}-\sqrt[7]{1+5x}}{x}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[8]{1+16x+17x^2-38x^3}-1}{5x+14x^2}$.

2.20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

2.21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

2.22. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

2.23. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$.

2.24. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

2.25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\operatorname{tg}3x}{\sqrt{1+\sin^2 2x}-\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

2.26. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$.

2.27. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$.

2.28.

1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{x+2}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ 2. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+x}{x+2}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{x+2}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

2.29. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2.30. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$.

2.31. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

2.32. $\lim\limits_{x\to 0} (2^x + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

2.33. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+\sin^2 x)}}$.

2.34. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right)}{x}$.

2.35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos 5x}{\ln \cos 4x}$.

2.36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$.

2.37. $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x}$.

2.38. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{th} x}{x}$.

2.39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{ch} 5x}{x^2}$.

2.40. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1 + x\ln(1+x)}{1 - x\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}}$.

Задание для самостоятельной работы

2.41. На языке «$\varepsilon - \delta$» доказать, что $\lim\limits_{x\to 2} (x^2+1) = 5$.

2.42. Используя логические символы, записать утверждения:

1. $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = 1$; 2. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$;

3. $\lim\limits_{x\to 5-0} f(x) = +\infty$; 4. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

Найти предел функции (2.43–2.100).

2.43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 2}{3x^2 - 5x + 1}$.

2.44. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^7 + 5x^6 + 4x^3}{x^7 + 2x^3}$.

2.45. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$.

2.46. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

2.47. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1} - \dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

2.48. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$.

2.49. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$.

2.50. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{101} - 101x + 100}{x^2 - 2x + 1}$.

2.51. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\left(1 + x^{11} + 7x^{13}\right)^3}{\left(1 + x^4\right)^{10}}$.

2.52. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}$.

2.53. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$.

2.54. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$.

2.55. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2} - 2}{x - 6}$.

2.56. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}}$.

2.57. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$.

2.58. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

2.59. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

2.60. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$.

2.61. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

2.62. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x\right)$.

2.63. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

2.64. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

2.65. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 7x}{\sin x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} 10x$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 17x}{\sin 16x}$.

2.66. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin 2x-\sin 3x}$.

2.67. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$.

2.68. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

2.69. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$.

2.70. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\cos\frac{2}{x}-\cos\frac{6}{x}\right)$.

2.71. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{\cos x}-2x\operatorname{tg} x\right)$.

2.72. $\lim\limits_{x\to\pi/3} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

2.73. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

2.74. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$.

2.75. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$.

2.76. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2\sin 3x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x}$.

2.77. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

2.78. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)}$.

2.79. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$.

2.80. 1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$; 2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$.

2.81. 1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x+1}{x+1}\right)^x$; 2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3x+1}{x+1}\right)^x$.

2.82. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)^x$.

2.83. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{3x-1}$.

2.84. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

2.85. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

2.86. $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

2.87. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

2.88. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

2.89. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$.

2.90. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

2.91. $\lim\limits_{x\to 0} (3^x+x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

2.92. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\lg x - 1}{x-10}$.

2.93. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1-\sin x}{\ln(1+x)}$.

2.94. $\lim\limits_{x\to 1/4} \dfrac{1-\operatorname{ctg}\pi x}{\ln\operatorname{tg}\pi x}$.

2.95. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}$.

2.96. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{1/x^2}$.

2.97. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/x^2}$.

2.98. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sh} 3x}-e^{\operatorname{sh} x}}{\operatorname{th} x}$.

2.99. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x\operatorname{arctg} x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/\operatorname{sh}^2 x}$.

2.100. 1. $\lim\limits_{x\to \pi+0} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$; 2. $\lim\limits_{x\to \pi-0} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$.

2.3. **1.** 1; **2.** $\frac{2}{3}$; **3.** $\frac{1}{2}$. **2.4**. 6. **2.5**. 5^{-5}. **2.6**. $-\frac{1}{2}$. **2.7**. n. **2.8**. $\frac{1}{2}$. **2.9**. $\frac{1}{3}$. **2.10**. $\frac{n(n+1)}{2}$. **2.11**. $\frac{12}{5}$. **2.12**. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.13**. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **2.14**. 2. **2.15**. $-\frac{5}{2}$. **2.16**. $\sqrt{5}$. **2.17**. $4\frac{4}{27}$. **2.18**. $\frac{24}{35}$. **2.19**. $\frac{2}{5}$. **2.20**. $\frac{1}{2}$. **2.21**. $\frac{1}{p}$. **2.22**. $\frac{1}{2}$. **2.23**. 1. **2.24**. -24. **2.25**. 2. **2.26**. $\frac{1}{3}$. **2.27**. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.28**. **1.** $\frac{1}{2}$. **2.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **3.** 1. **2.29**. $e^{\frac{3}{2}}$. **2.30**. e. **2.31**. $e^{\operatorname{ctg} a}$ $(a \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$. **2.32**. $2e$. **2.33**. $e^{-\frac{1}{2}}$. **2.34**. 8. **2.35**. $\frac{25}{16}$. **2.36**. 2. **2.37**. $e^{1/e}$. **2.38**. **1.** 1. **2.** $\frac{1}{2}$. **3.** 1. **2.39**. $\frac{25}{2}$. **2.40**. e^2. **2.43**. -2. **2.44**. 2. **2.45**. 10. **2.46**. $(3/2)^{30}$. **2.47**. $\frac{1}{4}$. **2.48**. $-\frac{1}{2}$. **2.49**. $\frac{1}{4}$. **2.50**. 5050. **2.51**. 0. **2.52**. 4. **2.53**. $-\frac{1}{16}$. **2.54**. -2. **2.55**. $\frac{1}{4}$. **2.56**. 3. **2.57**. $\frac{1}{4}$. **2.58**. 3. **2.59**. $\frac{7}{36}$. **2.60**. $\frac{5}{3}$. **2.61**. $\frac{1}{2}$. **2.62**. $-\frac{7}{4}$. **2.63**. $+\infty$. **2.64**. $-\frac{1}{2}$. **2.65**. **1.** 1. **2.** 7. **3.** $\frac{1}{10}$. **4.** $\frac{17}{16}$. **2.66**. -1. **2.67**. $\frac{5}{2}$. **2.68**. $\frac{2}{\pi}$. **2.69**. $\frac{1}{\cos^2 a}$, $a \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{N}$. **2.70**. 16. **2.71**. 2. **2.72**. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.73**. 0. **2.74**. $\frac{4}{3}$. **2.75**. π. **2.76**. $\frac{13}{6}$. **2.77**. $-\frac{1}{12}$. **2.78**. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.79**. $\cos^2 a$. **2.80**. **1.** 0. **2.** $+\infty$. **2.81**. **1.** $+\infty$. **2.** 0. **2.82**. 1. **2.83**. e^{12}. **2.84**. e^2. **2.85**. 1. **2.86**. e^{-1}. **2.87**. 1. **2.88**. e. **2.89**. e^{-2}. **2.90**. $e^{-2/\pi}$. **2.91**. $3e$. **2.92**. $\frac{1}{10\ln 10}$. **2.93**. $-\frac{2}{3}$. **2.94**. 1. **2.95**. $\frac{3}{2}$. **2.96**. $\frac{e}{\pi}$. **2.97**. $e^{3/2}$. **2.98**. 2. **2.99**. $e^{1/2}$. **2.100**. **1.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

O-символика. Соотношения эквивалентности

Сравнение функций при $x \to x_0$. Символы $O(f)$ и $o(f)$

Пусть функция $g(x)$ не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности точки $x = x_0$. Тогда

1. Если существует число $C > 0$ такое, что в этой окрестности справедливо неравенство $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$
   (что при $g(x) \neq 0$ равносильно неравенству $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant C$), то

   функцию $f(x)$ называют *ограниченной по сравнению с функцией $g(x)$ в окрестности точки x_0*,

   в этом случае пишут $f(x) = O\left(g(x)\right)$, $x \to x_0$,

   что читается так: «$f(x)$ есть O большое от $g(x)$ в окрестности точки x_0».

   Замечание. Запись $x \to x_0$ в данном случае имеет несколько иной, чем обычно, смысл; она лишь указывает на то, что рассматриваемое свойство справедливо в некоторой окрестности точки x_0.

2. Если существует конечный $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$, $C \neq 0$, то

   функции $f(x)$ и $g(x)$ называют *функциями одного порядка в окрестности точки x_0* (или *при $x \to x_0$*),

   в этом случае пишут $f(x) = O^*\left(g(x)\right)$, $x \to x_0$,

   что читается так: «$f(x)$ есть O большое со звездой от $g(x)$ в окрестности точки x_0».

   Замечание 1. Это обозначение не является общепринятым, в некоторой литературе функции одного порядка связываются символом $\asymp$.

   Замечание 2. Если существует конечный $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, отличный от нуля, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ — функция, ограниченная в окрестности x_0. Таким образом, если $f(x) = O^*(g(x))$, $x \to x_0$, то справедливо и $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$.

3. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то

   функции $f(x)$ и $g(x)$ называют *эквивалентными при* $x \to x_0$,

   в этом случае пишут $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$.

   Замечание. В некоторой литературе вместо термина «эквивалентные» при $x \to x_0$ используют термин «асимптотически равные» при $x \to x_0$.

4. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то

   функцию $f(x)$ называют *бесконечно малой по сравнению с функцией* $g(x)$ *при* $x \to x_0$,

   в этом случае пишут $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$,

   что читается так: «$f(x)$ есть o малое от $g(x)$ в окрестности точки x_0».

Запись $f(x) = O(1)$ при $x \to x_0$ означает, что функция $f(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0.
Запись $f(x) = o(1)$ при $x \to x_0$ означает, что функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Наибольший интерес представляет сравнение бесконечно малых и бесконечно больших при $x \to x_0$ функций. В этой ситуации приняты следующие уточнения:
если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые при $x \to x_0$ функции, и $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, то функцию $f(x)$ называют *бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с* $g(x)$ *при* $x \to x_0$;

если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие при $x \to x_0$ функции, и $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to x_0$, то функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой более низкого порядка по сравнению с* $g(x)$ *при* $x \to x_0$.

Довольно часто возникает необходимость в более точной — количественной — сравнительной характеристике поведения бесконечно малых и бесконечно больших функций. Принято следующее.

1. Одну из бесконечно малых (бесконечно больших) функций выбирают в качестве своеобразного «эталона», называя её *основной*. Как правило, за основную принимают либо простейшую из всех рассматриваемых в проводимом исследовании функций, либо $x - x_0$ (или $|x - x_0|$) при работе с бесконечно малыми при $x \to x_0$ функциями и $\frac{1}{x-x_0}$ $\left(\text{или } \frac{1}{|x-x_0|}\right)$ при работе с бесконечно большими при $x \to x_0$ функциями.
   Допустим, что выбранная основная функция — $\varphi(x)$.
2. Если $f(x) = O^*\left(\varphi^k(x)\right)$, $x \to x_0$, то говорят, что *функция* $f(x)$ *имеет* k-й *порядок* (относительно функции $\varphi(x)$) *при* $x \to x_0$.
3. Если $f(x) = O^*\left(\varphi^k(x)\right)$, $x \to x_0$, то, согласно определению 2, существует и конечный $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi^k(x)} = C$, где $C \neq 0$. В этом случае

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{C\cdot\varphi^k(x)} = 1, \quad f(x) \sim C\cdot\varphi^k(x),\ x \to x_0,$$

и функцию $C\cdot\varphi^k(x)$, $x \to x_0$ называют *главной частью* (или *главным членом*) *функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$.

П р и м е р 1. Доказать, что $f(x) = O^*\left(g(x)\right)$, $x \to 0$
(т. е. функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка):

1) $f(x) = \sqrt{x+1} - 1, \quad g(x) = 3x;$

2) $f(x) = \sin(x^2 + 4x), \quad g(x) = x^3 - 16x.$

◀ 1) Найдём $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{3x}=\frac{1}{6}\neq 0$, то функции $\sqrt{x+1}-1$ и $3x$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x\to 0$, следовательно $\sqrt{x+1}-1=O^*(3x)$, $x\to 0$. ▶

◀ 2) Найдём $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+4x)}{x^3-16x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+4x)}{x^2+4x}\cdot\frac{x^2+4x}{x^3-16x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+4)}{x(x+4)(x-4)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-4}=-\frac{1}{4}\neq 0.$$

Следовательно, $\sin(x^2+4x)=O^*\left(x^3-16x\right),\ x\to 0.$ ▶

П р и м е р 2. Доказать, что

$$x+x^2\sin x=O\left(x^2\right),\quad x\to+\infty.$$

◀ Покажем, что существует положительное число C, такое, что при достаточно больших значениях x окажется верным следующее утверждение: $|x+x^2\sin x|\leqslant C\cdot|x^2|$. Имеем:

$$|x+x^2\sin x|\leqslant|x|+|x^2|\cdot|\sin x|\leqslant|x|+|x^2|\leqslant|x^2|+|x^2|=2\cdot|x^2|$$

(были использованы неравентсва $|\sin x|\leqslant 1$ и $|x|\leqslant|x^2|$ при $x\geqslant 1$). Таким образом, для всех $x\geqslant 1$, в том числе и при достаточно больших значениях x, справедливо неравенство $|x+x^2\sin x|\leqslant 2\cdot|x^2|$. Согласно определению 1, функция $x+x^2\sin x$ ограничена по сравнению с функцией x^2 при $x\to+\infty$, и

$$x+x^2\sin x=O\left(x^2\right),\quad x\to+\infty. ▶$$

П р и м е р 3. Доказать, что $(1+x)^n = 1 + nx + o(x),\ x \to 0$.

◀ Перепишем доказываемое равенство иначе:

$$(1+x)^n - 1 - nx = o(x),\ x \to 0.$$

Используя формулу бинома Ньютона, найдём $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1 - nx}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \ldots + x^n - 1 - nx}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x + \ldots + x^{n-2}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x\left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x + \ldots + x^{n-2}\right) = 0.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1 - nx}{x} = 0$, то, согласно определению 4, $(1+x)^n - 1 - nx = o(x),\ x \to 0$, откуда следует, что

$$(1+x)^n = 1 + nx + o(x),\ x \to 0. \ ▶$$

П р и м е р 4. Установить, какое из утверждений верно:

а) $\ln(1+e^x) = o(1)$ при $x \to +\infty$,

б) $\ln(1+e^x) = o(1)$ при $x \to -\infty$.

◀ В соответствии с определением

$$\ln(1+e^x) = o(1) \text{ при } \ x \to a, \text{ если } \ \lim_{x\to a} \ln(1+e^x) = 0.$$

а) Очевидно, что $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(1+e^x) = \ln(+\infty) = +\infty$.
Следовательно, утверждение а) является неверным.

б) Очевидно, что $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = \ln 1 = 0$.
Следовательно, утверждение б) является верным. ►

Пример 5. Определить порядок малости функции $f(x)$ относительно x при $x \to 0$:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$,

2) $f(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$,

3) $f(x) = 3^{\sqrt[5]{x}} - 1$,

4) $f(x) = \arcsin(\sqrt{4+x^3} - 2)$,

5) $f(x) = \ln\left(1 + \sqrt{x^7 \sin x}\right)$.

◄ 1) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^k}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{\cos x \cdot x^k} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x^3}{x^k} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} x^{3-k} = \frac{1}{2} \quad (\neq 0,\ \neq \infty)$$

только при $k = 3$. Следовательно, при $x \to 0$ порядок малости функции $\operatorname{tg} x - \sin x$ равен 3. ►

◄ 2) Функция $f(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$ определена при $x \geqslant 0$. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+0} \frac{f(x)}{x^k}$:

$$\lim_{x\to+0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}}{x^k} = \lim_{x\to+0} \frac{\sqrt{1+2x} - (1+\sqrt{x})}{x^k} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{1+2x-1-2\sqrt{x}-x}{x^k(\sqrt{1+2x}+1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2} \lim_{x\to+0} \frac{x-2\sqrt{x}}{x^k} =$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{x^k}=\frac{-2}{2}\cdot\lim_{x\to+0}x^{1/2-k}=-1\quad(\neq 0,\ \neq\infty)$$

только при $k=\frac{1}{2}$. Следовательно, при $x\to+0$ порядок малости функции $\sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}$ равен $\frac{1}{2}$. ►

◄ 3) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{\sqrt[5]{x}}-1}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3^{\sqrt[5]{x}}-1}{\sqrt[5]{x}}\cdot\frac{\sqrt[5]{x}}{x^k}=\ln 3\cdot\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{5}-k}=\ln 3\quad(\neq 0,\ \neq\infty)$$

только при $k=\frac{1}{5}$. Следовательно, при $x\to 0$ порядок малости функции $3^{\sqrt[5]{x}}-1$ равен $\frac{1}{5}$. ►

◄ 4) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(\sqrt{4+x^3}-2\right)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(\sqrt{4+x^3}-2\right)}{\sqrt{4+x^3}-2}\cdot\frac{\sqrt{4+x^3}-2}{x^k}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x^3}-2}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{4+x^3-4}{(\sqrt{4+x^3}+2)x^k}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}x^{3-k}=\frac{1}{4}$$

$(\neq 0,\ \neq\infty)$ только при $k=3$. Следовательно, при $x\to 0$ порядок малости функции $\arcsin(\sqrt{4+x^3}-2)$ равен 3. ►

◄ 5) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x^7\sin x}\right)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x^7\sin x}\right)}{\sqrt{x^7\sin x}}\cdot\frac{\sqrt{x^7\sin x}}{x^k}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^8\cdot\frac{\sin x}{x}}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^8}\cdot\sqrt{\frac{\sin x}{x}}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^k}=1\quad(\neq 0,\ \neq\infty)$$

только при $k = 4$. Следовательно, при $x \to 0$ порядок малости функции $\ln\left(1+\sqrt{x^7 \sin x}\right)$ равен 4. ►

П р и м е р 6. Для указанной функции $f(x)$ при $x \to \infty$ выделить главную часть вида $C\left(\frac{1}{x}\right)^k$,
определить порядок малости относительно бесконечно малой $\frac{1}{x}$.

1) $f(x) = \dfrac{\sin\frac{1}{x+1}}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$,

2) $f(x) = 1-\cos\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$.

◄ 1) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^k}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x+1}}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} \cdot \frac{\frac{1}{x+1}}{x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x+1)x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x}\right)^k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}-k}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}-k}} = 1$$

($\neq 0$, $\neq \infty$) только при $k = \frac{4}{3}$. Следовательно, при $x \to +\infty$ $f(x) = \dfrac{\sin\frac{1}{x+1}}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}} \sim \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}$ (это и есть главная часть указанного вида), порядок малости функции относительно бесконечно малой $\frac{1}{x}$ равен $\frac{4}{3}$. ►

◄ 2) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^k}$, в котором для удобства сделаем замену $\frac{1}{x} = t$ ($t \to 0$ при $x \to \infty$):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^k} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos\left(1-\cos t\right)}{t^k} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos t)}{(1-\cos t)^2} \cdot \frac{(1-\cos t)^2}{t^k} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \left(\frac{1-\cos t}{t^{k/2}} \right)^2 = \frac{1}{8}$$

$(\neq 0,\ \neq \infty)$ только при $k = 4$. Следовательно, при $x \to \infty$

$$f(x) = 1 - \cos\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4$$

(это и есть главная часть указанного вида), порядок малости функции относительно бесконечно малой $\frac{1}{x}$ равен 4. ▶

П р и м е р 7. Для указанной функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ выделить главную часть вида Cx^k,
определить порядок роста относительно бесконечно большой x.

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}$,

2) $f(x) = \sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

◀ 1) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^k}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})x^k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}{(x+2-x-1)\,x^k} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{x^k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^{k-1/2}} = 2$$

$(\neq 0,\ \neq \infty)$ только при $k = \frac{1}{2}$. Следовательно, при $x \to +\infty$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}} \sim 2x^{\frac{1}{2}}$$

(это и есть главная часть указанного вида), порядок роста функции относительно бесконечно большой x равен $\frac{1}{2}$. ▶

◀ 2) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^k}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^k}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1/2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{3/2}}}}}{x^k}=\sqrt{2}$$

$(\neq 0,\ \neq\infty)$ только при $k=\frac{1}{2}$. Следовательно, при $x\to+\infty$

$$f(x)=\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}$$

(это и есть главная часть указанного вида), порядок роста функции относительно бесконечно большой x равен $\frac{1}{2}$. ▶

П р и м е р 8. Для функции $f(x)=\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$ при $x\to\infty$ найти эквивалентную функцию вида Cx^k.

◀ Рассмотрим $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^k}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{(x^3-3x+1)x^k}=2\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)x^{k+3}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{k-2}}=2$$

$(\neq 0,\ \neq\infty)$ только при $k=2$. Следовательно, при $x\to\infty$

$$f(x)=\frac{2x^5}{x^3-3x+1}\sim 2x^2.\ ▶$$

П р и м е р 9. Для функции $f(x)=x^x-1$ при $x\to 1$
выделить главную часть вида $C(x-1)^k$,
определить порядок малости относительно бесконечно малой $x-1$.

◀ Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^k}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{(x-1)^k}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{\ln x^x}-1}{(x-1)^k}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}-1}{(x-1)^k}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\frac{x\ln x}{(x-1)^k}=$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{(x-1)^k} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} \cdot \frac{x-1}{(x-1)^k} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^{k-1}} = 1$$

$(\neq 0,\ \neq \infty)$ только при $k = 1$. Следовательно, при $x \to 1$

$$f(x) = x^x - 1 \sim x - 1$$

(это и есть главная часть указанного вида), порядок малости функции относительно бесконечно малой $x - 1$ равен 1. ▶

П р и м е р 10. Для функции $f(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x}$ при $x \to 1$

выделить главную часть вида $C\left(\frac{1}{x-1}\right)^k$,

определить порядок роста относительно бесконечно большой $\frac{1}{x-1}$.

◀ Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x-1}\right)^k}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\sin \pi x}}{\left(\frac{1}{x-1}\right)^k} = (x - 1 = t,\ t \to 0 \text{ при } x \to 1) = \lim_{t\to 0} \frac{t^k}{\sin \pi(t+1)} =$$

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{t^k}{\sin \pi t} = -\lim_{t\to 0} \frac{\pi t}{\sin \pi t} \cdot \frac{t^k}{\pi t} = -\frac{1}{\pi} \lim_{t\to 0} t^{k-1} = -\frac{1}{\pi}$$

$(\neq 0,\ \neq \infty)$ только при $k = 1$. Следовательно, при $x \to 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sin \pi x} \sim -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{x-1}$$

(это и есть главная часть указанного вида), порядок роста функции относительно бесконечно большой $\frac{1}{x-1}$ равен 1. ▶

Замена функций эквивалентными при вычислении пределов

Использование эквивалентных функций заметно упрощает вычисление пределов в случаях, соответствующих следующей теореме.

Теорема 13. Пусть функции $g(x)$ и $g_1(x)$ не обращаются в нуль в некоторой проколотой окрестности точки $x = x_0$, $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to x_0$, и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$. Тогда существует и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, и справедливо равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Теорема 14. (*Критерий эквивалентности функций*)
Для того, чтобы функция $v(x)$ была эквивалентна функции $u(x)$ при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$v(x) = u(x) + o(u(x)), \quad x \to x_0.$$

При вычислении пределов может быть использована следующая таблица эквивалентных функций:

Эквивалентность при $x \to 0$	**Равенство при** $x \to 0$
$\sin x \sim x$	$\sin x = x + o(x)$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{tg} x = x + o(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin x = x + o(x)$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} x = x + o(x)$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+x) = x + o(x)$
$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$
$a^x - 1 \sim x \ln a$	$a^x = 1 + x \ln a + o(x)$
$(a > 0,\ a \neq 1)$	$(a > 0,\ a \neq 1)$
$e^x - 1 \sim x$	$e^x = 1 + x + o(x)$

П р и м е р 11. Для указанной функции $f(x)$ найти эквивалентную при $x \to 0$ функцию вида Cx^k.

1) $f(x) = 3\sin^2 x^2 - 5x^5$,

2) $f(x) = 2\sin x - \operatorname{tg} 2x$,

3) $f(x) = \sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

◀ 1) $3\sin^2 x^2 - 5x^5 = 3x^4 + o(x^4) - 5x^5 = 3x^4 + o(x^4)$.

Итог: $3\sin^2 x^2 - 5x^5 \sim 3x^4,\ x \to 0$. ▶

◀ 2) $2\sin x - \operatorname{tg} 2x = 2\sin x - \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = 2\sin x - \dfrac{2\sin x \cos x}{\cos 2x} =$

$$= \frac{2\sin x(\cos 2x - \cos x)}{\cos 2x} = \frac{2\sin x\left((1-\cos x) - (1 - \cos 2x)\right)}{\cos 2x} \sim$$

$$\sim \frac{2x\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{(2x)^2}{2}\right)}{1} = 2x \cdot \left(-\frac{3x^2}{2}\right) = -3x^3.$$

Итог: $2\sin x - \operatorname{tg} 2x \sim -3x^3,\ x \to 0$. ▶

◀ 3) Для функции $f(x) = \sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ нет возможности использовать табличные соотношения эквивалентности. Вспомним определение 3 эквивалентных функций и выясним, при каких значениях C и k предел $\lim\limits_{x\to+0} \frac{f(x)}{Cx^k} = 1$. Получим:

$$\lim_{x\to+0} \frac{\sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{Cx^k} = \lim_{x\to+0} \frac{x^{1/8}\sqrt{2x^{3/4} + \sqrt{\sqrt{x}+1}}}{Cx^k} = 1$$

при $C = 1$ и $k = \frac{1}{8}$. Итог: $\sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim x^{\frac{1}{8}},\ x \to +0$. ▶

П р и м е р 12. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

◀ Найдём функцию вида Cx^k, эквивалентную числителю при $x \to 0$. Сначала воспользуемся тригонометрическими соотношениями, затем — *равенствами* из таблицы эквивалентных функций. Получим:

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \operatorname{tg} x(1 - \cos x) = (x + o(x))\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \sim \frac{1}{2}x^3,\ x \to 0.$$

Замечание 1. Если воспользоваться *равенствами* таблицы эквивалентных функций *сразу*, без предварительных тригонометрических преобразований, то получится следующее:

$$\operatorname{tg} x - \sin x = x + o(x) - (x + o(x)) = o(x),\ x \to 0.$$

Т. е. эквивалентная функция имеет более высокий порядок, чем x, и найти её именно таким образом мы не можем.

Замечание 2. В получившемся после тригонометрических преобразований *произведении* можно сразу использовать *соотношения эквивалентности* для *множителей*:

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \operatorname{tg} x(1 - \cos x) \sim x \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^3,\ x \to 0.$$

Вернёмся к вычислению предела. Используя теорему 13 и эквивалентную числителю функцию, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2}. \ ▶$$

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\ln(1 + x^2)}$, используя соотношения эквивалентности.

◀ В этом примере нам придётся использовать теорему 13 несколько раз.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+(\cos x-1)\right)}{\ln(1+x^2)}=$$

$$=\big(\ln\left(1+(\cos x-1)\right)\sim\cos x-1,\quad \ln(1+x^2)\sim x^2,\ x\to 0\big)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\left(\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2},\ x\to 0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2}=-\frac{1}{2}.\ ▶$$

П р и м е р 14. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+5x}-2}$, используя соотношения эквивалентности.

$$◀\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+5x}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt[3]{1+\frac{3x}{8}}-2}{2\sqrt[4]{1+\frac{5x}{16}}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3x}{8}}-1}{\sqrt[4]{1+\frac{5x}{16}}-1}=$$

$$=\left(\sqrt[3]{1+\frac{3x}{8}}-1\sim\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{8},\quad \sqrt[4]{1+\frac{5x}{16}}-1\sim\frac{1}{4}\cdot\frac{5x}{16},\ x\to 0\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{8}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{5x}{16}}=\frac{8}{5}.\ ▶$$

П р и м е р 15. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 3(x-2)}{x^2-3x+2}$, используя соотношения эквивалентности.

◀ Чтобы воспользоваться приведёнными в таблице соотношениями эквивалентности, сделаем замену $x-2=t$, при этом $t\to 0$.

Получим: $$\lim_{x\to 2}\frac{\sin 3(x-2)}{x^2-3x+2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{t^2+t}=$$

$$=\big(\sin 3t\sim 3t,\ t^2+t\sim t,\ t\to 0\big)=\lim_{t\to 0}\frac{3t}{t}=3.\ ▶$$

Решения примеров 16–18 мы приведём уже без комментариев, предлагая читателю воспроизвести недостающие комментарии самостоятельно.

П р и м е р 16.

$$◀ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 7x}-1}{x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{3x}=\frac{7}{3}. ▶$$

П р и м е р 17.

$$◀ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-1. ▶$$

П р и м е р 18.

$$◀ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\arcsin x}-\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}2x}}{\sqrt{1+\operatorname{arctg}3x}-\sqrt{1-\arcsin 4x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\arcsin x}-1\right)-\left(\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}2x}-1\right)}{\left(\sqrt{1+\operatorname{arctg}3x}-1\right)-\left(\sqrt{1-\arcsin 4x}-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac13\cdot\arcsin x-\frac13\cdot\operatorname{arctg}2x}{\frac12\cdot\operatorname{arctg}3x-\frac12\cdot(-\arcsin 4x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x-2\operatorname{arctg}2x}{3\operatorname{arctg}3x+3\arcsin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{21x}=-\frac{2}{21}. ▶$$

Задание для решения в аудитории

3.1. Доказать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка, т. е. $f(x)=O^*\left(g(x)\right),\ x\to 0$.

1. $f(x)=\dfrac{x^2}{6+x},\ \ g(x)=\dfrac{4x^2}{x-1}$.

2. $f(x) = 3\sin^2 4x,\ \ g(x) = x^2 - x^4$.

3.2. Установить, какие из следующих утверждений верны.

1. $x^2 = o(x)$ при: а) $x \to 0$, б) $x \to \infty$.

2. $x = o(x^2)$ при: а) $x \to 0$, б) $x \to \infty$.

3. $\sqrt{x^2 + x} - x = o(1)$ при: а) $x \to +\infty$, б) $x \to -\infty$.

3.3. Установить, какие из следующих утверждений верны при $x \to \infty$.

а) $100x + x\sin x = O(x)$, б) $x = O(100x + x\sin x)$.

3.4. Определить порядок малости функции $f(x)$ относительно x при $x \to 0$.

1. $f(x) = \sin\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}\right)$.

2. $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1$.

3. $f(x) = \cos x - \cos^2 x$.

3.5. Для функции $f(x)$ при $x \to 0$
а) выделить главную часть вида Cx^k,
б) определить порядок малости относительно бесконечно малой x.

1. $f(x) = \sqrt{4 - x^4} + x^2 - 2$.

2. $f(x) = \sin^2 2x + \arcsin^2 x + 2\,\mathrm{arctg}\, x^2$.

3. $f(x) = e^x - 1 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

3.6. Для функции $f(x)$ при $x \to 1$
а) выделить главную часть вида $C(x-1)^k$,
б) определить порядок малости относительно бесконечно малой $x - 1$.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$.

2. $f(x) = \cos 1 - \cos x$.

3. $f(x) = \ln^2 x$.

3.7. Для функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$ при $x \to +\infty$ найти эквивалентную бесконечно большую вида Cx^k.

3.8. Для функции $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$ найти эквивалентную бесконечно малую вида $C\left(\frac{1}{x}\right)^k$.

3.9. Для функции $f(x) = \dfrac{\ln x}{(1-x)^2}$ при $x \to 1$ найти эквивалентную бесконечно большую вида $C\left(\frac{1}{x-1}\right)^k$.

3.10. Найти пределы, используя эквивалентные функции.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(1 + x - 3x^2 + 2x^3)}{\ln(1 + 3x - 4x^2 + x^3)}$.
2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x}$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{(1+x)^3 \cdot \sqrt[3]{(1+x)^2} - 1}$.

Задание для самостоятельной работы

3.11. Доказать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка, т. е. $f(x) = O^*(g(x))$, $x \to 0$.

1. $f(x) = 5 \sin^2 3x$, $g(x) = x^2 - x^4$.
2. $f(x) = \cos x - \cos^3 x$, $g(x) = 4x^2$.
3. $f(x) = \arcsin 3x$, $g(x) = 4x$.
4. $f(x) = 1 - \cos 5x$, $g(x) = x \sin 3x$.
5. $f(x) = \sqrt{16 - x} - 4$, $g(x) = 9x$.
6. $f(x) = \cos 2x - \cos 4x$, $g(x) = 8x^2$.

3.12. Доказать, что $\sqrt{x^2+1}-|x| = O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to \infty$.

3.13. Доказать, что $\operatorname{ch} x - 1 = o(x)$ при $x \to 0$.

3.14. Определить порядок малости бесконечно малой $f(x)$ относительно x при $x \to 0$.

1. $f(x) = \dfrac{3\sqrt{x^3}}{1-x}$.
2. $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x}$.
3. $f(x) = 3\sin^3 x - x^4$.
4. $f(x) = e^{x^2} - \cos x$.
5. $f(x) = 1 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3.15. Определить порядок роста бесконечно большой функции $f(x) = \dfrac{5x^6}{3x^4+x^3+2}$ относительно x при $x \to \infty$.

3.16. Определить порядок роста бесконечно большой $f(x)$ относительно x при $x \to +\infty$.

1. $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.
2. $f(x) = \dfrac{x^{5/2}}{x^{7/3}+1}$.

3.17. Доказать, что бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны.

1. $f(x) = 1-\cos^3 x$, $g(x) = 1,5\sin^2 x$, $x \to 0$.
2. $f(x) = \sin\left(\sqrt{1+x}-1\right)$, $g(x) = \frac{1}{2}\sin x$, $x \to 0$.
3. $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{arctg} x}{x^5+x^2+1}$, $g(x) = x^3$, $x \to 0$.
4. $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{arctg} x}{x^5+x^2+1}$, $g(x) = \dfrac{\pi}{2x^3}$, $x \to +\infty$.

3.18. Для функции $f(x)$ при $x \to 0$
а) выделить главную часть вида Cx^k,
б) определить порядок малости относительно бесконечно малой x.

1. $f(x) = 2x - 3x^3 + x^5$.
2. $f(x) = 1 - x^4 - \cos x^2$.
3. $f(x) = 2^{x^2} - 1$.

3.19. Для функции $f(x) = e^x - e$ при $x \to 1$
а) выделить главную часть вида $C(x-1)^k$,
б) определить порядок малости относительно функции $x - 1$.

3.20. Для функции $f(x) = x^2 + 100x + 10\,000$ при $x \to \infty$ найти эквивалентную бесконечно большую вида Cx^k.

3.21. Для функции $f(x)$ найти эквивалентную бесконечно малую вида $C\left(\frac{1}{x}\right)^k$.

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^4+1}$, $x \to \infty$.
2. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $x \to +\infty$.

В примерах 3.22–3.30 найти пределы, используя эквивалентные функции.

3.22. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$.

3.23. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$.

3.24. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)}$.

3.25. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(5^x-1)(4^x-1)}{(3^x-1)(6^x-1)}.$

3.27. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \cdot \log_2 \dfrac{10+x}{5+x}\right).$

3.28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}.$

3.29. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 6x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$

3.30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos^2 x^4-1)\operatorname{arctg} x^2 \cdot 2x^2 \cdot e^{\sin x}}{x^{12}}.$

Ответы

3.2. **1.** a. **2.** б. **3.** a. **3.3**. a, б. **3.4**. **1.** 1. **2.** $\frac{1}{3}$. **3.** 2. **3.5**. **1.** a) x^2, б) 2. **2.** a) $7x^2$, б) 2. **3.** a) $3x$, б) 1. **3.6**. **1.** a) $\frac{1}{3}(x-1)$, б) 1. **2.** a) $\sin 1 \cdot (x-1)$, б) 1. **3.** a) $(x-1)^2$, б) 2. **3.7**. $x^{\frac{2}{3}}$. **3.8**. $\left(\frac{1}{x}\right)^2$. **3.9**. $\frac{1}{x-1}$. **3.10**. **1.** $-\frac{1}{2}$. **2.** 1. **3.** $\frac{9}{55}$. **3.14**. **1.** $\frac{3}{2}$. **2.** 1. **3.** 3. **4.** 2. **5.** 1. **3.15**. 2. **3.16**. **1.** $\frac{1}{2}$. **2.** $\frac{1}{6}$. **3.18**. **1.** a) $2x$, б) 1. **2.** a) $-\frac{1}{2}x^4$, б) 4. **3.** a) $\ln 2 \cdot x^2$, б) 2. **3.19**. a) $x-1$, б) 1. **3.20**. x^2. **3.21**. **1.** $\left(\frac{1}{x}\right)^3$. **2.** $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$. **3.22**. $\frac{1}{3}$. **3.23**. $\frac{9}{4}$. **3.24**. $-\frac{1}{2}$. **3.25**. $\frac{3}{2}$. **3.26**. $\frac{\ln 5 \cdot \ln 4}{\ln 3 \cdot \ln 6}$. **3.27**. $\frac{5}{\ln 2}$. **3.28**. 2. **3.29**. e^{-18}. **3.30**. -1.

Список литературы

[1] Садовничий В. А., Олехник С. Н., Виноградова И. А. *Задачи и упражнения по математическому анализу. Часть 1. Дифференциальное и интегральное исчисление*: Учебное пособие / Под ред. В. А. Садовничего. — 3-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2001. — 725 с.

[2] Кудрявцев Л. Д. *Курс математического анализа. Том 1*: Учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2017. — 703 с. — Серия: Бакалавр. Базовый курс.

[3] Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. *Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость*: Учебное пособие / Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с.

[4] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1*: Учебник / Г. М. Фихтенгольц. — 11-е изд., стереотип. — СПб.: Лань, 2017. — 608с.

[5] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*: Учебное пособие / Б. П. Демидович. — 19-е изд., испр. — СПб: Лань, 2017. — 624 с.

[6] Кропотова Т. В., Подольский В. Г., Кашаргин П. Е. *Введение в высшую математику. 1 семестр*: Учебно-методическое пособие — Казань, 2015. — 90с.

Содержание

Татьяна Владимировна Кропотова,
Вениамин Григорьевич Подольский,
Павел Евгеньевич Кашаргин

Пределы последовательностей и функций. Решение задач