КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Кафедра геометрии

Е.Н. СОСОВ

Введение в метрическую геометрию и ее приложения

КАЗАНЬ – 2015

УДК 515.124.4

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"*

*Учебно-методической комиссии Института математики и механики
Протокол No. 9 от 18 июня 2015 г.*

*заседания кафедры геометрии
Протокол No. 8 от 11 июня 2015 г.*

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, профессор **В.В. Шурыгин**

Рецензент
кандидат физ.-мат. наук, доцент К(П)ФУ **П.Н. Иваньшин**

Сосов Е.Н.
Введение в метрическую геометрию и ее приложения. Учебно-методическое пособие /Е.Н. Сосов — Казань: Казан. ун-т, 2015. - 98 с.

Пособие содержит введение в метрическую геометрию и ее приложения.
Предназначено для студентов-математиков III-IV курсов.

УДК 515.124.4

Оглавление

Введение

Данное учебно-методическое пособие включает минимум вводного курса и некоторые приложения метрической геометрии. Оно предназначено для студентов-математиков III-IV курсов и рассчитано на 36 часов аудиторной нагрузки с учетом выбора тем преподавателем.

Метрическая геометрия имеет много взаимосвязей с нерегулярной римановой геометрией, гиперболическими группами, теорией фракталов, теорией приближений, геометрической теорией меры, нелинейным функциональным анализом, теорией некорректных задач и дискретной математикой. Эти взаимосвязи поддерживают актуальность метрической геометрии и постоянный приток в нее новых задач. Все задачи в пособии элементарны и служат для контроля правильного усвоения основных понятий.

В пособии приняты следующие обозначения.

$|xy| = \rho(x, y)$ — расстояние между точками x, y в метрическом пространстве (X, ρ).

$\odot$ — символ начала (конца) доказательства.

Т.1.2 (**Л.1.2**, **З.1.2**, **Пр.1.2**, **С.1.2**) обозначает теорему 2 (лемму 2, задачу 2, пример 2, следствие 2) лекции 1.

0.1 Простой путь. Простая дуга. Длина пути. Эквивалентные пути. Кривая в метрическом пространстве

Непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to X$ называется *путем* (*параметризованной кривой*) с концами $\gamma(a)$, $\gamma(b)$. Путь называется замкнутым путем, если $\gamma(a) = \gamma(b)$. Путь с концами x, y обозначим $\gamma_{x,y}$.

Инъективный путь называется *простым* (*жордановым*) *путем*.

Множество $\hat{\gamma} \subset X$ называется *простой дугой*, если найдется такой простой путь $\gamma : [a, b] \to X$, что $\hat{\gamma} = \gamma([a, b])$. $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ — концы дуги. Остальные точки называются *внутренними точками* простой дуги.

Множество $\Gamma \subset X$ называется *простой замкнутой кривой*, если оно является образом при некотором гомеоморфизме окружности $S(O, 1) \subset \mathbb{R}^2$ в X.

Множество $\Gamma \subset X$ называется *простой кривой*, если оно замкнуто и является либо простой замкнутой кривой, либо образом при некотором гомеоморфизме произвольного интервала $I =< a, b >\subset \mathbb{R}$.

Конечное упорядоченное подмножество $\sigma \subset [a, b]$, содержащее a, b, называется *разбиением отрезка* $[a, b]$. Если $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, то $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$, $n + 1 = card(\sigma)$ — *длина разбиения*, $|\sigma| = \max\{t_{i+1} - t_i : i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ — *модуль разбиения.*

Полной вариацией пути $\gamma : [a, b] \to X$ относительно разбиения $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ называется величина

$$V_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})|.$$

Длиной пути $\gamma : [a, b] \to X$ называется величина
$L(\gamma) = \sup\{V_\sigma(\gamma) : \sigma\}$. Путь γ — *спрямляемый*, если $L(\gamma) < +\infty$.

Метрическое пространство называется *линейно* (*метрически*) *связным*, если для любых двух точек из этого пространства найдется (спрямляемый) путь с концами в этих точках.

Пр.1.1 Путь $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = t\sin(1/t)$, если $t \in (0,1]$, и $\gamma(0) = 0$, является неспрямляемым.

$\odot$ Пусть для каждого $n \geq 2$ $\sigma_n = \{0,1\}\cup\{\dfrac{2}{\pi(2i+1)} : i \in \{0,1,\ldots,n\}\}$.
Тогда $V_{\sigma_n}(\gamma) = |\dfrac{2}{\pi(2n+1)}\sin(\pi(2n+1)/2)|+$
$\sum\limits_{i=0}^{n-1}|\dfrac{2}{\pi(2i+3)}\sin(\pi(2i+3)/2)-\dfrac{2}{\pi(2i+1)}\sin(\pi(2i+1)/2)|+|\dfrac{2}{\pi}-\sin 1| \geq$
$\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\dfrac{2}{\pi(2i+3)}+\dfrac{2}{\pi(2i+1)}) = \dfrac{2}{\pi}+\dfrac{2}{\pi(2n+1)}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{(2i+1)}$.

Таким образом, путь γ неспрямляемый, т.к. правая часть полученного неравенства стремится к ∞ при $n \to \infty$. $\odot$

Пути $\gamma : [a,b] \to X$, $\gamma_1 : [c,d] \to X$ называются *эквивалентными путями*, если найдется такое (в общем случае многозначное) монотонное, сюръективное отображение $\psi : [c,d] \to [a,b]$, что для каждого $t \in [c,d]$ $\gamma_1(t) = \gamma(\psi(t))$. Отображение ψ называется *заменой параметра.* (монотоность многозначного отображения понимается так: если $t < u$, то каждый элемент множества $\psi(t)$ не больше (или не меньше) каждого элемента множества $\psi(u)$).

Кривой с концами в точках x, y называется класс эквивалентности путей с теми же концами.

Л.1.1 *Длины эквивалентных путей равны.*

$\odot$ 1. С каждым разбиением $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ отрезка $[a,b]$ свяжем разбиение

$$\hat{\sigma} = (\hat{t}_i)_{i=\overline{0,n}}$$

отрезка $[c,d]$, выбрав точки $\hat{t}_i \in \psi^{-1}(t_i)$ $(i = \overline{0,n})$. Тогда

$$V_{\hat{\sigma}}(\gamma_1) = V_\sigma(\gamma) \Rightarrow L(\gamma_1) \geq V_\sigma(\gamma) \Rightarrow L(\gamma_1) \geq L(\gamma).$$

2. Пусть $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ разбиение отрезка $[c,d]$. Выберем такое разбиение $\hat{\sigma} \subset \psi(\sigma)$, что $\hat{t}_i \in \psi(t_i)$ $(i = \overline{0,n})$. Тогда

$$V_\sigma(\gamma_1) = V_{\hat{\sigma}}(\gamma) \Rightarrow V_\sigma(\gamma_1) \leq L(\gamma) \Rightarrow L(\gamma_1) \leq L(\gamma).\odot$$

Т.1.1 *Для любого пути* $\gamma : [a,b] \to X$ $L(\gamma) = \lim\limits_{|\sigma|\to 0} V_\sigma(\gamma)$.

$\odot$ Пусть $n > 1$, M произвольное неотрицательное вещественное число, удовлетворяющее неравенству $M < L(\gamma)$. Нам достаточно доказать следующее: найдется такое $\eta > 0$, что для любого разбиения σ отрезка $[a, b]$, удовлетворяющего неравенству $|\sigma| < \eta$, выполняются неравенства

$$M \leq V_\sigma(\gamma) \leq L(\gamma).$$

Правое неравенство следует из определения длины пути γ. Выберем

$$0 < \varepsilon < (L(\gamma) - M)/2$$

и такое разбиение $\tau = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ отрезка $[a, b]$, что

$$M + \varepsilon < V_\tau(\gamma).$$

В силу равномерной непрерывности пути γ, найдется такое

$$0 < \eta < \frac{1}{4}\min\{t_{i+1} - t_i : i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}, \quad \text{что} \quad |\gamma(u)\gamma(v)| \leq \frac{\varepsilon}{2n}$$

для любых u, $v \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|u - v| \leq \eta$. Фиксируем η и пусть σ разбиение отрезка $[a, b]$, удовлетворяющее неравенству $|\sigma| < \eta$. Пусть для каждого $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ вершина $\hat{t}_i \in \sigma$ (соответственно $\tilde{t}_i \in \sigma$), ближайшая из σ к t_i, и такая, что

$$\hat{t}_i \leq t_i \quad (t_i < \tilde{t}_i).$$

Тогда, в силу неравенства $|\sigma| < \eta$, получим для каждого $i \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$t_i < \tilde{t}_i < \hat{t}_{i+1} \leq t_{i+1}.$$

Рассмотрим разбиение $\sigma \cup \tau$ отрезка $[a, b]$. Тогда

$$V_{\sigma\cup\tau}(\gamma) - V_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1}(|\gamma(t_i)\gamma(\hat{t}_i)| + |\gamma(t_i)\gamma(\tilde{t}_i)| - |\gamma(\hat{t}_i)\gamma(\tilde{t}_i)|) \leq$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(|\gamma(t_i)\gamma(\hat{t}_i| + |\gamma(t_i)\gamma(\tilde{t}_i)|) \leq 2n\frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$V_\tau(\gamma) \leq V_{\sigma\cup\tau}(\gamma) \leq V_\sigma(\gamma) + \varepsilon$$

и $M \leq V_\sigma(\gamma)$. $\odot$

З.1.1 *Если* $\Gamma \in X$ *— простая замкнутая кривая, то найдется такой замкнутый путь* $\gamma : [a,b] \to X$*, что* $\gamma([a,b]) = \Gamma$ *и* $\gamma(u) \neq \gamma(v)$ *для всех* $u, v \in [a,b]$, $u \neq v$, $\{u,v\} \neq \{a,b\}$.

З.1.2 *Для каждого пути* $\gamma : [a,b] \to X$ *имеет место неравенство* $|\gamma(a)\gamma(b)| \leq L(\gamma)$.

З.1.3 *Пусть* $\gamma_{x,y} : [0,1] \to X$ *— аффинный путь в нормированном пространстве* $(X, ||.||)$*, т.е.* $\gamma(t) = (1-t)x + ty$*. Тогда* $L(\gamma) = ||x - y||$.

З.1.4 *Путь* γ *из примера 1 есть равномерный предел последовательности спрямляемых путей* $\gamma_n : [0,1] \to X$, $\gamma_n(t) = \gamma(t)$*, если* $t \in [\frac{1}{n\pi}, 1]$*, и* $\gamma_n(t) = 0$*, если* $t \in [0, \frac{1}{n\pi}]$*. Таким образом, равномерный предел последовательности спрямляемых путей в общем случае не является спрямляемым путем.*

З.1.5 *Бинарное отношение, введенное на множестве всех путей пространства* X*, является отношением эквивалентности.*

З.1.6 *Для каждого пути* $\gamma : [a,b] \to X$ *найдется эквивалентный путь* $\gamma_1 : [0,1] \to X$.

0.2 Кривая Коха. Свойства длины пути. Длина дуги, как параметр. Характеризация функции длины дуги

Пр.2.1 Пусть путь $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ является равномерным пределом последовательности путей $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ($n \in \{0, 1, \ldots\}$), определяемых индуктивно следующим образом:

а) $\gamma_0(t) = (t; 0)$ для любого $t \in [0,1]$;

б) путь γ_n является аффинным на каждом интервале разбиения

$$\sigma_n = \{\frac{i}{3^n} : i = 0, 1, \ldots, 3^n\}$$

отрезка $[0,1]$ для каждого $n \in \{0, 1, \ldots\}$;

в) для каждого $n \in \{0, 1, \ldots\}$ кусочно-линейный путь γ_{n+1} получается из γ_n разрезанием каждого отрезка I разбиения σ_n на три части равной длины и изменением пути γ_n на средней части J следующим образом:

отрезок $\gamma_n(J)$ заменяется на ломаную, состоящую из боковых сторон равностороннего треугольника с основанием $\gamma_n(J)$.

Из построения ясно, что для каждого $n \in \{0, 1, \ldots\}$ $L(\gamma_{n+1}) = \frac{4}{3}L(\gamma_n)$. Тогда

$$L(\gamma) \geq \lim_{n\to\infty} V_{\sigma_n}(\gamma) = \lim_{n\to\infty} V_{\sigma_n}(\gamma_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{3^n} = \infty.$$

Следовательно, определяющий кривую Коха путь γ, является неспрямляемым.

Т.2.1(аддитивность длины пути) *Для любого пути* $\gamma : [a, b] \to X$ *и для каждого* $c \in [a, b]$ $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$.

$\odot$ Выберем такую последовательность разбиений (σ_n) $(n \in \{1, 2, \ldots\})$ отрезка $[a, b]$, что

$$c \in \sigma_n, \qquad |\sigma_n| \to 0$$

при $n \to \infty$. Пусть для каждого $n \in \{1, 2, \ldots\}$

$$\hat{\sigma}_n = \sigma_n \cap [a, c], \qquad \tilde{\sigma}_n = \sigma_n \cap [c, b].$$

Тогда

$$V_{\sigma_n}(\gamma) = V_{\hat{\sigma}_n}(\gamma|_{[a,c]}) + V_{\tilde{\sigma}_n}(\gamma|_{[c,b]}), \qquad \lim_{n\to\infty} |\hat{\sigma}_n| = \lim_{n\to\infty} |\tilde{\sigma}_n| = 0.$$

Из теоремы 1.1 получим

$$L(\gamma) = \lim_{n\to\infty} V_{\sigma_n}(\gamma) = \lim_{n\to\infty} (V_{\hat{\sigma}_n}(\gamma|_{[a,c]}) + V_{\tilde{\sigma}_n}(\gamma|_{[c,b]})) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]}).\odot$$

Т.2.2 *Для каждого спрямляемого пути* $\gamma : [a, b] \to X$ *функция* $\psi : [a, b] \to [0, L(\gamma)]$, $\psi(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$ *является неубывающей непрерывной сюръекцией.*

$\odot$ Из аддитивности длины пути следует, что функция ψ неубывающая. Фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 1.1 и равномерной непрерывности γ, найдется $\eta > 0$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) $L(\gamma) - V_\sigma(\gamma) < \varepsilon$ для каждого разбиения σ отрезка $[a, b]$ такого, что $|\sigma| < \eta$;

2) $|\gamma(u)\gamma(v)| < \varepsilon$ для любых u, $v \in [a, b]$ таких, что $|u - v| < \eta$.

Пусть u, $v \in [a, b]$ и разбиение σ отрезка $[a, b]$ такие, что

$$v - u < \eta, \qquad |\sigma| < \eta, \qquad \sigma \cap [u, v] = \{u, v\}.$$

Положим $\sigma_1 = \sigma \cap [a, u]$ и $\sigma_2 = \sigma \cap [v, b]$. Тогда, используя аддитивность длины пути и условия 1, 2, получим

$$L(\gamma|_{[a,u]}) + L(\gamma|_{[u,v]}) + L(\gamma|_{[v,b]}) = L(\gamma) < V_\sigma(\gamma) + \varepsilon =$$

$$V_{\sigma_1}(\gamma|_{[a,u]}) + |\gamma(u)\gamma(v)| + V_{\sigma_2}(\gamma|_{[v,b]}) + \varepsilon < L(\gamma|_{[a,u]}) + \varepsilon + L(\gamma|_{[v,b]}) + \varepsilon.$$

Следовательно, $L(\gamma|_{[u,v]}) < 2\varepsilon$. Снова используя аддитивность длины пути, получим отсюда непрерывность функции ψ. $\odot$

Пусть $a \leq c \leq b$. *Произведением (конкатенацией) путей* $\gamma_1 : [a, c] \to X$, $\gamma_2 : [c, b] \to X$, удовлетворяющих условию $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$, называется такой путь $\gamma_1 * \gamma_2 : [a, b] \to X$, что $\gamma_1 * \gamma_2(t) = \gamma_1(t)$ при $a \leq t \leq c$, $\gamma_1 * \gamma_2(t) = \gamma_2(t)$ при $c \leq t \leq b$.

Т.2.3 (Характеризация функции длины дуги) *Пусть C множество всех путей в пространстве (X, ρ) и $L : C \to \mathbb{R}_+$ — функция, сопоставляющая каждому пути его длину. Тогда L — наименьшая функция из функций $F : C \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих следующим двум условиям:*

(i) для каждого пути $\gamma : [a, b] \to X$ $F(\gamma) \geq |\gamma(a)\gamma(b)|$;

(ii) $F(\gamma_1 * \gamma_2) = F(\gamma_1) + F(\gamma_2)$.

$\odot$ Пусть функция $F : C \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям (i), (ii) и $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда

$$F(\gamma) \geq \sum_{i=0}^{n-1} F(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}) \geq \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})| \geq V_\sigma(\gamma).$$

Следовательно, $F(\gamma) \geq L(\gamma)$. Осталось заметить, что в силу задач 1.2, 2.1, функция L удовлетворяет условиям (i), (ii). $\odot$

Говорят, что спрямляемый путь $\gamma : [a, b] \to X$ *параметризован длиной дуги или имеет натуральную параметризацию (параметризован с постоянной скоростью $v > 0$)*, если для любых t, t_1, удовлетворяющих условию $a \leq t \leq t_1 \leq b$, верно равенство

$$L(\gamma|_{[t,t_1]}) = t_1 - t \qquad (L(\gamma|_{[t,t_1]}) = v(t_1 - t)).$$

Т.2.4 *Пусть $\gamma : [a, b] \to X$ спрямляемый путь. Тогда путь*

$$\lambda : [0, L(\gamma)] \to X, \qquad \lambda(u) = \gamma(t),$$

где $\psi(t) = L(\gamma|_{[a,t]}) = u$, эквивалентен пути γ и параметризован длиной дуги.

$\odot$ В силу теоремы 2.2 функция ψ является непрерывной функцией на $[a,b]$. Следовательно, для каждого $u \in [0, L(\gamma)]$ найдется такое $t \in [a,b]$, что $\psi(t) = u$. Пусть t, $\hat{t} \in [a,b]$ такие, что

$$t \leq \hat{t}, \qquad L(\gamma|_{[a,t]}) = L(\gamma|_{[a,\hat{t}]}).$$

Тогда в силу аддитивности длины дуги получим

$$L(\gamma|_{[t,\hat{t}]}) = L(\gamma|_{[a,\hat{t}]}) - L(\gamma|_{[a,t]}) = 0.$$

Следовательно, отображение ψ постоянно на отрезке $[t,\hat{t}]$ и $\gamma = \lambda \circ \psi$. Пусть $v \in [0, L(\gamma)]$ и $\tilde{t} \in [a,b]$ такие, что

$$u \leq v \qquad L(\gamma|_{[a,\tilde{t}]}) = v.$$

Тогда

$$|\lambda(u)\lambda(v)| = |\gamma(t)\gamma(\tilde{t})| \leq L(\gamma|_{[t,\tilde{t}]}) = L(\gamma|_{[a,\tilde{t}]}) - L(\gamma|_{[a,t]}) = v - u.$$

Следовательно, отображение λ нерастягивающее и является путем, эквивалентным пути $\gamma = \lambda \circ \psi$. Кроме того, учитывая лемму 1.1, получим

$$L(\lambda|_{[u,v]}) = L((\lambda \circ \psi)|_{[t,\tilde{t}]}) = L(\gamma|_{[t,\tilde{t}]}) = L(\gamma|_{[a,\tilde{t}]}) - L(\gamma|_{[a,t]}) = v - u.$$

Таким образом, путь λ параметризован длиной дуги. $\odot$

Говорят, что путь $\gamma : [a,b] \to X$, где $a < b$, *параметризован пропорционально длине дуги*, если или γ — постоянный путь, или найдется такой натурально параметизованный путь $\hat{\gamma} : [c,d] \to X$, что $\gamma = \hat{\gamma} \circ \psi$ и $\psi : [a,b] \to [c,d]$ — единственный аффинный гомеоморфизм, т.е

$$\psi(t) = \frac{(d-c)t + bc - ad}{b-a}.$$

З.2.1 *Имеет место равенство $L(\gamma_1 * \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$.*

З.2.2 *Если $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ и пути γ_1, γ_2 параметризованы длиной дуги, то путь γ параметризован длиной дуги.*

З.2.3 *Если $\gamma : [0,1] \to X$ путь, параметризованный пропорционально длине дуги, то γ — липшицево отображение с константой $L(\gamma)$* (см. определение липшицева отображения в лекции 5).

0.3 Дифференцируемые пути в евклидовом пространстве. Пространство путей

Т.3.1 *Пусть* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ C^1*-путь и* $\gamma' : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *его производная. Тогда*

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

$\odot$ Достаточно доказать, что функция

$$\psi : [a, b] \to [0, L(\gamma)], \qquad \psi(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$$

дифференцируема и $\psi'(t) = |\gamma'(t)|$, т.к. $\psi(a) = 0$. Из аддитивности длины дуги получим

$$\psi(\hat{t}) - \psi(t) = L(\gamma|_{[t,\hat{t}]}),$$

где $a \le t < \hat{t} \le b$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ функция $\gamma_j' : [a, b] \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Следовательно, найдется такое $\eta > 0$, что для любых t, $\hat{t}$, удовлетворяющих условиям

$$a \le t < \hat{t} \le b, \qquad \hat{t} - t < \eta,$$

имеем для всех $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\tau \in [t, \hat{t}]$

$$(\gamma_j'(\tau))^2 \le (\gamma_j'(t))^2 + \varepsilon.$$

Пусть t, $\hat{t}$ удовлетворяют условиям

$$a \le t < \hat{t} \le b, \qquad \hat{t} - t < \eta$$

и $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,k}}$ произвольное разбиение отрезка $[t, \hat{t}]$. Тогда для любых $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ найдутся такие $\tau_{i,j} \in [t_i, t_{i+1}]$, что

$$\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i+1}) = \gamma_j'(\tau_{i,j})(t_i - t_{i+1})$$

и, следовательно,

$$V_\sigma(\gamma|_{[t,\hat{t}]}) = \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i+1}))^2} \le$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2}(t_{i+1} - t_i) = \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2}(\hat{t} - t).$$

Правая часть не зависит от σ, следовательно

$$L(\gamma|_{[t,\hat{t}]}) \le \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2}(\hat{t} - t)$$

и $\dfrac{\psi(\hat{t}) - \psi(t)}{\hat{t} - t} \le \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2}$. С другой стороны,

$$\frac{|\gamma(\hat{t}) - \gamma(t)|}{|\hat{t} - t|} \le \frac{\psi(\hat{t}) - \psi(t)}{\hat{t} - t}.$$

В силу того, что функция ψ возрастающая, последние два неравенства верны для любых t, $\hat{t} \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенствам

$$t \ne \hat{t}, \qquad |\hat{t} - t| < \eta.$$

Кроме того,

$$\lim_{|\hat{t}-t|\to 0} \frac{|\gamma(\hat{t}) - \gamma(t)|}{|\hat{t} - t|} = |\gamma'(t)|.$$

Тогда найдется такое $\hat{\eta} > 0$, что для любых t, $\hat{t} \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенствам $t \ne \hat{t}$, $|\hat{t} - t| < \hat{\eta}$, верны неравенста

$$|\gamma'(t)| - \varepsilon \le \frac{\psi(\hat{t}) - \psi(t)}{\hat{t} - t}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \min\{\eta, \hat{\eta}\}$, что для любых t, $\hat{t} \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенствам $t \ne \hat{t}$, $|\hat{t} - t| < \delta$, верно неравенство

$$|\gamma'(t)| - \varepsilon \le \frac{\psi(\hat{t}) - \psi(t)}{\hat{t} - t} \le \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2}.$$

Осталось перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. $\odot$

Множество $C([a, b], X)$ всех путей, определеных на отрезке $[a, b]$ и принимающих значения в пространстве (X, ρ), обычно наделяют метрикой δ, определяющей топологию равномерной сходимости, т.е.

$$\delta(\gamma, \gamma_1) = \sup\{|\gamma(t)\gamma_1(t)| : t \in [a, b]\}$$

для $\gamma, \gamma_1 \in C([a,b],X)$. Часто на множестве путей $C([a,b],X)$ рассматривают и более слабую топологию поточечной сходимости.

Пусть E — топологическое пространство. Функция $f : E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$ называется *полунепрерывной снизу в точке* $x_0 \in E$, если для каждого вещественного m, удовлетворяющего условию $m < f(x_0)$, найдется такая окрестность $W(x_0) \subset E$, что для любого $x \in W(x_0)$ $m \leq f(x)$. Функция $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *полунепрерывной снизу* в E, если она полунепрерывна снизу в каждой точке из E.

Л.3.1 *Пусть последовательность* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится в топологическом пространстве* E *к точке* $x_0 \in E$*,* I *— множество индексов и функции* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$*,* $f_i : E \to \overline{\mathbb{R}}$ $(i \in I)$ *полунепрерывны снизу в точке* x_0*. Тогда*

(i) *функция* $F : E \to \overline{\mathbb{R}}$*,* $F(x) = \sup\{f_i(x) : i \in I\}$ *полунепрерывна снизу в точке* x_0*;*

(ii) $f(x_0) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf f(x_n)$.

$\odot$ (i) В силу свойства верхней грани, для каждого вещественного m, удовлетворяющего условию $m < F(x_0)$, найдется такой индекс $j \in I$, что $m < f_j(x_0)$. Тогда найдется такая окрестность $W(x_0) \subset E$, что для любого $x \in W(x_0)$ $m \leq f_j(x)$, т.к. функция f_j полунепрерывна снизу в точке x_0. Следовательно, для любого $x \in W(x_0)$

$$m \leq f_j(x) \leq F(x).$$

(ii) В силу полунепрерывности снизу функции f в точке x_0, для каждого вещественного m, удовлетворяющего условию $m < f(x_0)$, найдется такая окрестность $W(x_0) \subset E$, что для любого $x \in W(x_0)$ $m \leq f(x)$. Кроме того, для достаточно большого n $x_n \in W(x_0)$, т.к. последовательность (x_n) сходится к точке $x_0 \in E$. Тогда для достаточно большого n $m \leq f(x_n)$. Предположим теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} \inf f(x_n) < f(x_0).$$

Тогда, выбрав такое m, что

$$\lim_{n\to\infty} \inf f(x_n) < m < f(x_0),$$

получим противоречие. $\odot$

Т.3.2 *Функционал длины* $L : C([a,b],X) \to \mathbb{R}_+ \cup \infty$ *является полунепрерывным снизу относительно топологии поточечной сходимости (и, как следствие, относительно топологии равномерной сходимости). Кроме того, если последовательность путей* $\gamma_n : [a,b] \to X$ $(n \in \mathbb{N})$ *поточечно (равномерно) сходится к пути* $\gamma : [a,b] \to X$, *то*

$$L(\gamma) \le \lim_{n\to\infty} \inf L(\gamma_n).$$

$\odot$ Для каждого фиксированного $t \in [a,b]$ отображение вычисления $\gamma \to \gamma(t)$ является непрерывным относительно топологии поточечной сходимости. Следовательно, для каждого фиксированного разбиения σ отрезка $[a,b]$ функция $V_\sigma : C([a,b],X) \to \mathbb{R}_+$ является непрерывной относительно топологии поточечной сходимости, как сумма суперпозиций непрерывных отображений. Первое утверждение теоремы 3.2 следует теперь из утверждения (i) леммы 3.1 и определения фукционала длины. Последнее утверждение теоремы 3.2 следует из доказанного первого утверждения этой теоремы и утверждения (ii) леммы 3.1. $\odot$

С.3.1 *Если последовательность спрямляемых путей*

$$\gamma_n : [a,b] \to X \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

длины которых ограничены одной константой, поточечно (равномерно) сходится к пути $\gamma : [a,b] \to X$, *то путь* γ *спрямляемый.*

С.3.2 *Пусть* $M \in \mathbb{R}_+$. *Тогда множество*

$$\{\gamma \in C([a,b],X) : \ L(\gamma) \le M\}$$

замкнуто в пространстве $C([a,b],X)$ *относительно топологии поточечной сходимости* (топологии равномерной сходимости).

Пр.3.1 Пусть для каждого $n \in \{0,1,\ldots\}$ $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ — кусочно-аффинный путь, график которого есть объединение отрезков, соединяющих пары точек из множества

$$\{(\frac{p}{2^n}; \frac{\varepsilon(p)}{2^n}) : \ 0 \le p \le 2^n\},$$

где $\varepsilon(p) = 0$ при четном p и $\varepsilon(p) = 1$ при нечетном p, в порядке увеличения первой координаты. Рассмотрим последовательность путей

$$\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma_n(t) = (t; F_n(t)) \qquad (n \in \{0,1,\ldots\}).$$

Эта последовательность сходится к пути

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma_n(t) = (t;0),$$

длина которого $L(\gamma) = 1$. Но

$$L(\gamma_n) = \sqrt{2} \qquad (n \in \{0,1,\ldots\}).$$

Следовательно, функция длины не является в общем случае непрерывной.

Пр.3.2 Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \qquad \gamma_n(t) = \frac{\cos(tn^2)}{n}.$$

Тогда

$$L(\gamma_n) \geq \frac{n^2}{n} = n \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Кроме того, последовательность (γ_n) $(n \in \mathbb{N})$ сходится равномерно к постоянному пути

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = 0,$$

длина которого $L(\gamma) = 0$. Таким образом,

$$L(\gamma_n) \nrightarrow L(\gamma) \qquad (n \to \infty).$$

Пр.3.3 Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \gamma_n(t) = 0$$

при $t = 0$ и

$$\gamma_n(t) = \frac{t\sin(1/t)}{n}$$

при $t \in (0,1]$. Тогда из примера 1.1 получим, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $L(\gamma_n) = \infty$. С другой стороны, для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого $t \in [0,1]$

$$\gamma_n(t) \leq 1/n.$$

Следовательно, последовательность (γ_n) $(n \in \mathbb{N})$ сходится равномерно к постоянному пути $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = 0$, длина которого $L(\gamma) = 0$. Таким образом, в этом случае также

$$L(\gamma_n) \nrightarrow L(\gamma) \quad (n \to \infty).$$

0.4 Теорема Арцела-Асколи. Существование кратчайшего пути

Последовательность отображений $f_n : (X, \rho) \to (Y, d)$ $(n \in \mathbb{N})$ называется *равномерно эквинепрерывной* (*равностепенно равномерно непрерывной*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех x, $y \in X$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, y) < \delta$.

Пр.4.1 Последовательность отображений $f_n : (X, \rho) \to (Y, d)$ $(n \in \mathbb{N})$, удовлетворяющая следующему условию: найдутся такие константы $\alpha > 0$, $K \geq 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех x, $y \in X$

$$d(f_n(x), f_n(y)) \leq K\rho^\alpha(x, y),$$

является равномерно эквинепрерывной.

Метрическое пространство называется *ограниченно компактным* (*конечно-компактным, собственным*), если любое его ограниченное замкнутое подмножество компактно.

Пр.4.2 Пусть $n \in \mathbb{N}$. Пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой является ограниченно компактным, а его подпространство $\mathbb{Q}^n$ — несобственным метрическим пространством.

Т.4.1 (Арцела-Асколи) *Пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно эквинепрерывная последовательность отображений из сепарабельного метрического пространства (X, ρ) в собственное метрическое пространство (Y, d) и для каждого $x \in X$ последовательность $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена. Тогда найдется подпоследовательность последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся равномерно на любом компактном подмножестве $K \subset X$ к равномерно непрерывному отображению $f : (X, \rho) \to (Y, d)$.*

$\odot$ Пусть $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ бесконечное счетное всюду плотное подмножество в X. В силу того, что пространство Y собственное и последовательность $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена, она имеет сходящуюся подпоследовательность $(f_{n_1}(x_1))_{n_1\in\mathbb{N}}$. Аналогично, найдется такая подпоследовательность $(f_{n_2})_{n_2\in\mathbb{N}} \subset (f_{n_1})_{n_1\in\mathbb{N}}$, что последовательности $(f_{n_2}(x_1))_{n_1\in\mathbb{N}}$, $(f_{n_2}(x_2))_{n_2\in\mathbb{N}}$ сходятся. Продолжим этот процесс. Тогда для каждого $k > 1$ найдется такая подпоследовательность $(f_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}} \subset (f_{n_{k-1}})_{n_{k-1}\in\mathbb{N}}$, что для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ последовательности $(f_{n_k}(x_i))_{n_k} \in \mathbb{N}$ сходятся. Следовательно, для каждого $x \in D$ последовательность $(f_{n_n}(x))_{n_n \in \mathbb{N}}$ сходится. Упростим обозначения, заменив индекс n_n на индекс n. Пусть $\varepsilon > 0$. Используем равномерную эквинепрерывность последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех x, $y \in X$, удовлетворяющих неравенству $|xy| < \delta$. Для данного $x \in X$ выберем такую точку $y \in D$, что $|xy| < \delta$. Тогда найдется такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех m, $n \geq n_0$

$$d(f_m(x), f_n(x)) \leq d(f_m(x), f_m(y)) + d(f_m(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f_n(x)) < 3\varepsilon,$$

т.к. последовательность $(f_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится. Следовательно, для каждого $x \in X$ последовательность $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится, как фундаментальная последоватеьность в собственном метрическом пространстве. Положим для каждого $x \in X$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Переходя в определении равномерной эквинепрерывности последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ к пределу при $n \to \infty$, получим равномерную непрерывность отображения f. Пусть $K \subset X$ — компактно. Тогда существует номер $n_1 \in \mathbb{N}$, что для каждого $x \in K$ найдется такой

$$x^* \in \{x_1, \ldots, x_{n_1}\} \subset D,$$

что $|xx^*| < \delta$. Кроме того, найдется такой, независящий от выбора $x \in K$, номер $n_2 \in \mathbb{N}$, что для каждого $n \geq n_2$ и для каждого $i \in \{1, \ldots, n_1\}$ $d(f_n(x_i), f(x_i)) < \varepsilon$. Тогда для каждого $x \in X$ и для каждого $n \geq n_2$

$$d(f(x), f_n(x)) \leq d(f(x), f(x^*)) + d(f(x^*), f_n(x^*)) + d(f_n(x^*), f_n(x)) < 3\varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно сходится на компактном подмножестве $K \subset X$ к отображению f. $\odot$

Т.4.2 *Пусть X собственное метрическое пространство, $M \geq 0$ константа, для каждого $n \in \mathbb{N}$ путь $\gamma_n : [a, b] \to X$ параметризован пропорционально длине дуги, $L(\gamma_n) \leq M$ и множество $\{\gamma_n(a) : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено в X. Тогда последовательность путей $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ имеет подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторому пути γ и $L(\gamma) \leq M$.*

$\odot$ В силу задачи 2.3 для каждого $n \in \mathbb{N}$ отображение $\gamma_n : [a, b] \to X$ M-липшицево. Следовательно, последовательность $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно эквинепрерывна. Кроме того, найдется подпоследовательность $(\gamma_m(a))_{m\in\mathbb{N}} \subset (\gamma_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторой точке x, поскольку пространство X собственное. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $m_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $m \geq m_0$ и для каждого $t \in [a, b]$

$$|x\gamma_m(t)| \leq |x\gamma_m(a)| + |\gamma_m(a)\gamma_m(t)| \leq \varepsilon + L(\gamma_m)|t - a| \leq M(b - a) + \varepsilon$$

и последовательность $(\gamma_m(t))_{m\in\mathbb{N}}$ ограничена. Следовательно, по теореме Арцела-Асколи и по теореме 3.2 найдется такая сходящаяся подпоследовательность последовательности $(\gamma_m)_{m\in\mathbb{N}}$, для которой длина предельного пути не больше, чем M. $\odot$

Кривая в метрическом пространстве называется *кратчайшей*, если ее длина наименьшая среди всех кривых с теми же концами. Кривая

$\gamma : I \to X$ для произвольного интервала $I \subset \mathbb{R}$ называется кратчайшей, если ее сужение на любой замкнутый интервал является кратчайшей.

Т.4.3 *Пусть X собственное метрическое пространство, x, $y \in X$ и найдется спрямляемый путь с концами в x, y. Тогда существует кратчайший путь с концами в x, y.*

$\odot$ Пусть $\tau = \inf\{L(\gamma) : \gamma$ — путь с концами в x, $y\}$ и $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такая последовательность путей, соединяющих точки x, y, что $L(\gamma_n) \to \tau$ при $n \to \infty$. Без потери общности можно считать, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ путь γ_n параметризован пропорционально длине дуги и определен на отрезке $[0, 1]$. В силу теоремы 4.2, найдется подпоследовательность последовательности $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся равномерно к некоторому пути γ, соединяющему точки x, y. Из определения τ получим $\tau \leq L(\gamma)$. С другой стороны, в силу теоремы 3.2,

$$L(\gamma) \leq \lim_{n\to\infty} \inf L(\gamma_n) = \tau. \odot$$

З.4.1 *Метрическое пространство X является ограниченно компактным тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$ функция $\rho_x : X \to \mathbb{R}_+$, $\rho_x(y) = |xy|$ — собственная (т.е. прообраз компактного множества компакт)*

З.4.2 *Собственное метрическое пространство является полным и сепарабельным. Замкнутое подпространство собственного метрического пространства является собственным метрическим пространством.*

З.4.3 *Носитель кратчайшей является простой дугой. Всякий отрезок кратчайшей есть кратчайшая.*

0.5 Липшицевы отображения, подобия и изометрические отображения метрических пространств. Расстояние по Липшицу

Пусть $K \geq 0$. Отображение $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ называется *K-липшицевым*, если для любых x, $x' \in X$

$$d(f(x), f(x')) \leq K|xx'|.$$

При $K = 1$ ($0 \leq K < 1$) это отображение называется *нерастягивающим* (*сжимающим*) *отображением*. Отображение f называется *липшицевым*, если найдется такое $K \geq 0$, что f — K-липшицево отображение.

Функцией смещения для отображения $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ называется функция

$$\rho_f : (X, \rho) \to \mathbb{R}_+, \quad \rho_f(x) = |xf(x)|.$$

Растяжение (*дилатация*) *отображения* $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ определяется формулой

$$dil(f) = \sup\{\frac{d(f(x), f(x'))}{|xx'|} : x \neq x'\}.$$

Растяжение (*дилатация*) *отображения f в точке $x \in X$* определяется формулой

$$dil_x(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} dil(f|_{B(x,\varepsilon)}).$$

Т.5.1 *Пусть $\hat{X}$ всюду плотное множество в пространстве (X, ρ), (Y, d) — полное метрическое пространство и $f : (\hat{X}, \rho) \to (Y, d)$ — липшицево отображение. Тогда существует такое единственное липшицево отображение $\tilde{f} : (X, \rho) \to (Y, d)$, что $dil(\tilde{f}) = dil(f)$.*

$\odot$ Пусть $x \in X$ и K — константа Липшица для f. Выберем такую последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \hat{X}$, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ является последовательностью Коши, поскольку для всех i, $j \in \mathbb{N}$

$$d(f(x_i), f(x_j)) \le K|x_i x_j|$$

и $|x_i x_j| \to 0$ при i, $j \to \infty$. Следовательно, последовательность Коши $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в полном пространстве (Y, d). Положим

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Если $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x' = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n$, то

$$d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) = \lim_{n\to\infty} d(f(x_n), f(x'_n)) \le K \lim_{n\to\infty} |x_n x'_n| = K|xx'|.$$

Следовательно, отображение $\tilde{f}$ является липшицевым и $dil(\tilde{f}) = dil(f)$. Кроме того, если два непрерывных отображения совпадают на всюду плотном множестве, то они совпадают всюду. Поэтому отображение $\tilde{f}$ единственно. $\odot$

Отображение $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ называется *билипшицевым*, если существуют такие положительные константы c и C, что для всех x, $x' \in X$

$$c|xx'| \le d(f(x), f(x')) \le C|xx'|.$$

Метрики ρ и ρ' на множестве X называются *липшицево-эквивалентными*, если $id : (X, \rho) \to (X, \rho')$ билипшицево отображение.

Известно, что все нормы на конечномерном векторном пространстве липшицево-эквивалентны.

Сюръекция $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ называется *подобием с коэффициентом подобия* $\sigma_f > 0$, если для любых x, $x' \in X$

$$d(f(x), f(x')) = \sigma_f |xx'|.$$

Подобие f называется *собственным подобием* (*изометрией*), если $\sigma_f \ne 1$ ($\sigma_f = 1$).

Отображение $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ называется *изометрическим отображением* (*отображением, сохраняющим расстояния*), если для любых x, $x' \in X$

$$d(f(x), f(x')) = |xx'|.$$

Отображение f называется *локально изометрическим отображением*, если для любого $x \in X$ найдется такая окрестность $V(x)$, что $f|_{V(x)}$ изометрическое отображение.

Расстоянием по Липшицу между метриками ρ, ρ_1 на множестве X называется величина

$$|\rho\rho_1|_L = \sup\{|\ln \frac{\rho_1(x,x')}{|xx'|}| : x \neq x'\}.$$

Расстоянием по Липшицу d_L *между метрическими пространствами* (X, ρ), (Y, d) называется величина

$$d_L(X,Y) = \inf\{|\rho f^* d|_L : f : (X,\rho) \to (Y,d) - \text{биекция}\},$$

где для любых x, $x' \in X$ $f^*d(x,x') = d(f(x), f(x'))$.

Говорят, что *последовательность метрических пространств* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится по Липшицу к метрическому пространству* X, если $d_L(X_n, X) \to 0$ при $n \to \infty$.

Т.5.2 *Компакты* (X, ρ), (Y, d) *изометричны тогда и только тогда, когда* $d_L(X, Y) = 0$.

$\odot$ Необходимость очевидна. Достаточность. Пусть $d_L(X,Y) = 0$. Тогда найдется такая последовательность биекций $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из X на Y, что $1 - \frac{1}{n} \leq \frac{d(f_n(x), f_n(x'))}{|xx'|} \leq 1 + \frac{1}{n}$ для всех $x \neq x'$. Следовательно, последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно эквинепрерывна и имеет сходящуюся подпоследовательность по теореме Арцела-Асколи. Ясно, что предел этой подпоследовательности является изометрией пространтства (X, ρ) на (Y, d). $\odot$

Пр.5.1 Пусть X граф с двумя вершинами и ребрами $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, причем для каждого $n \in \mathbb{N}$ ребро e_n изометрично отрезку $[0, 1 + 1/n]$ со стандартной метрикой. Пространство Y получено из пространства X добавлением одного ребра e_0, изометричного отрезку $[0, 1]$. Тогда $|XY|_L = 0$ и пространства X, Y не являются изометричными. Действительно, пусть $n \geq 2$. Положим

$$f_n : (X,\rho) \to (Y,d), \quad f_n(e_n) = e_0, \quad f_n(e_k) = e_k \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

$f_n(e_k) = e_{k-1}$ при $k \geq n+1$. Тогда нетрудно проверить, что

$$|\rho f_n^* d|_L \to 0 \quad (n \to \infty).$$

3.5.1 *Для каждого* $\emptyset \neq M \subset X$ *функция*

$$\rho_M : (X, \rho) \to \mathbb{R}_+, \quad \rho_M(x) = \inf\{|xy| : y \in M\}$$

является нерастягивающей функцией.

3.5.2 *Если отображение* $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ *является* K*-липшицевым, то функция смещения для него является* $(K+1)$*-липшицевой функцией.*

3.5.3 *Для* K*-липшицева (липшицева) отображения* $dil(f) \leq K$ $(dil(f) < \infty)$*. Если* $f : (X, \rho) \to (Y, d)$*,* $g : (Y, d) \to (Z, d_1)$ *— липшицевы отображения, то суперпозиция* $g \circ f$ *— липшицево отображение и* $dil(g \circ f) \leq dil(g) dil(f)$*.*

3.5.4 *Множество всех липшицевых отображений из метрического пространства в нормированное пространство является векторным пространством. Для любых таких липшицевых отображений* f*,* g *и числа* $\lambda \in \mathbb{R}$ *имеют место неравенства* $dil(g+f) \leq dil(g) + dil(f)$*,* $dil(\lambda f) \leq |\lambda| dil(f)$*.*

3.5.5 *Для метрических пространств* (X, ρ)*,* (Y, d) *следующие три метрики на множестве* $X \times Y$ *липшицево-эквивалентны:*
$\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{|x_1 x_2|^2 + |y_1 y_2|^2}$,
$\rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 x_2| + |y_1 y_2|$,
$\rho_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 x_2|, |y_1 y_2|\}$.

3.5.6 *Две липшицево-эквивалентные метрики — одновременно полные или неполные.*

3.5.7 *Расстояние по Липшицу неотрицательная, симметричная функция, удовлетворяющая неравенству треугольника.*

0.6 Пространство с внутренней метрикой. Сегмент. Геодезическое пространство

Метрика на множестве X называется *внутренней*, если для любых x, $y \in X$ и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $z \in X$, что

$$\max\{|xz|, |yz|\} \leq |xy|/2 + \varepsilon.$$

Л.6.1 *Пусть X пространство с внутренней метрикой и x, $y \in X$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует равномерно непрерывное отображение z : {двоично-рациональные в $[0,1]$} $\to X$, обладающее свойствами*

$$(i) \quad z(0) = x, \quad z(1) = y;$$

$$(ii) \quad |z\left(\frac{k}{2^n}\right) z\left(\frac{k+1}{2^n}\right)| \leq \frac{1}{2^n}(|xy| + \varepsilon)$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $k = 0, \ldots, 2^n - 1$.

$\odot$ Положим $z(0) = x$, $z(1) = y$ и предположим, отображение z уже определено для чисел вида $\dfrac{k}{2^{n-1}}$ при $k = 0, \ldots, 2^{n-1}$ с более сильным условием, чем (ii):

$$(iii) \quad |z(\frac{k}{2^{n-1}})z(\frac{k+1}{2^{n-1}})| \leq \frac{1}{2^{n-1}}(|xy| + \varepsilon(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}})).$$

Выберем для $k = 0, \ldots, 2^{n-1} - 1$ такую точку $z\left(\dfrac{2k+1}{2^n}\right)$, что

$$\max\{|z\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) z\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)|, |z\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) z\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right)|\} \leq$$

$$\frac{1}{2}|z\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) z\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right)| + \frac{\varepsilon}{2^{2n}}.$$

Используя наше предположение, получим, что правая часть этого неравенства не превосходит

$$\frac{1}{2^n}(|xy| + \varepsilon(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n})).$$

Равномерную непрерывность этого отображения теперь нетрудно получить из (ii). $\odot$

Метрика на множестве X называется *строго внутренней*, если для любых x, $y \in X$ найдется такая точка $z \in X$ (называемая *серединой* между x, y), что

$$|xz| = |yz| = |xy|/2.$$

Метрическое пространство со строго внутренней метрикой называется *метрически выпуклым пространством.*

Пр.6.1 Выпуклое множество без ненулевого конечного числа точек с индуцированной из евклидовой плоскости метрикой является пространством с внутренней метрикой, которая не является строго внутренней метрикой.

В метрически связном пространстве (X, ρ) определим *метрику* ρ_l, относительно которой расстояние $|xy|_l$ между произвольными двумя точками x, $y \in X$ равно нижней грани длин кривых, соединяющих эти точки (эту метрику иногда называют *внутренней метрикой относительно исходной метрики, но чаще — the length metric или the path metric*).

Л.6.2 *В метрически связном пространстве* (X, ρ) ρ_l *— внутренняя метрика и для любых* x, $y \in X$ $|xy| \leq |xy|_l$.

$\odot$ Из определений нижней грани, длины кривой и задачи 1.2 следует, что для любых x, $y \in X$

$$0 \leq |xy| \leq |xy|_l = |yx|_l.$$

Кроме того, если $|xy|_l = 0$, то $x = y$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и x, y, $z \in X$. Выберем такие пути

$$\gamma : [a, b] \to X, \quad \gamma_1 : [a_1, b_1] \to X,$$

что $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$, $\gamma_1(a_1) = y$, $\gamma(b_1) = z$,

$$L(\gamma) \leq |xy|_l + \varepsilon/2, \qquad L(\gamma_1) \leq |yz|_l + \varepsilon/2.$$

Тогда путь $\gamma * \gamma_1$ соединяет точки x, z и

$$|xz|_l \leq L(\gamma * \gamma_1) = L(\gamma) + L(\gamma_1) \leq |xy|_l + |yz|_l + \varepsilon.$$

Используя произвольность $\varepsilon > 0$, получим неравенство треугольника для функции ρ_l. Кроме того, в силу теоремы 2.2 найдется такое $t \in [a, b]$, что

$$L(\gamma|_{[a,t]}) = L(\gamma|_{[t,b]}) = L(\gamma)/2.$$

Полагая $u = \gamma(t)$, получим

$$\max\{|xu|, |yu|\} \leq L(\gamma)/2 \leq \frac{1}{2}|xy|_l + \varepsilon/4.\odot$$

Пр.6.2 Пусть

$$X = ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup \{\{\frac{1}{n}\} \times [0,1] :\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$$

с индуцированной метрикой. Тогда $|(\frac{1}{n}; 0)(0; 0)| \to 0$ при $n \to \infty$, но для каждого $n \in \mathbb{N}$ $|(\frac{1}{n}; 0)(0; 0)|_l \geq 2$. Таким образом, отображение

$id : (X, \rho) \to (X, \rho_l)$ не является непрерывным, в отличие от обратного к нему отображения (согласно лемме 6.2).

Пр.6.3 Пусть $K \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ — кривая Коха, $p \in \mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}^2$ и множество

$$D = \cup\{[p, z] :\, z \in K\}$$

с индуцированной метрикой из $\mathbb{R}^3$. Тогда (D, ρ) гомеоморфно замкнутому диску. Но (D, ρ_l) не является гомеоморфным замкнутому диску. Действительно, $|xy|_l = |xy|$ при $z \in K$, x, $y \in [p, z]$ и

$$|xy|_l = |px| + |py|$$

в противном случае. Следовательно, для каждого $x \in D\backslash\{p\}$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что шар $B(x, \varepsilon) \subset (D, \rho_l)$ гомеоморфен открытому интервалу в $\mathbb{R}$, а не двумерному диску.

Л.6.3

(i) *Если* $\gamma : [a, b] \to (X, \rho)$ *спрямляемый путь, то* $\gamma : [a, b] \to (X, \rho_l)$ *— путь.*

(ii) *Если* $\gamma : [a, b] \to (X, \rho_l)$ *путь, то* $\gamma : [a, b] \to (X, \rho)$ *— путь и* $L_\rho(\gamma) = L_{\rho_l}(\gamma)$.

(iii) *Если* (X, ρ) *— метрически связное пространство, то* $(\rho_l)_l = \rho_l$.

$\odot$

(i) Используя аддитивность длины дуги для всех t_0, $t \in [a, b]$ получим

$$|\gamma(t_0)\gamma(t)|_l \leq L(\gamma|_{[t_0,t]}) = |L(\gamma|_{[a,t]}) - L(\gamma|_{[a,t_0]})|.$$

Тогда в силу теоремы 2.2 $|\gamma(t)\gamma(t_0)|_l \to 0$ при $t \to t_0$.

(ii) Первое утверждение сразу следует из леммы 6.2. Пусть $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ разбиение отрезка $[a, b]$. Из леммы 6.2 получим

$$V_\sigma^\rho(\gamma) \le V_\sigma^{\rho_l}(\gamma) \Rightarrow L_\rho(\gamma) \le L_{\rho_l}(\gamma).$$

С другой стороны,

$$V_\sigma^{\rho_l}(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1}|_l \le \sum_{i=0}^{n-1} L_\rho(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}) = L_\rho(\gamma) \Rightarrow L_{\rho_l}(\gamma) \le L_\rho(\gamma).$$

(iii) Это утверждение следует из определения метрики ρ_l и доказанного утверждения (ii). $\odot$

Сегментом $[x, y]$ с концами x, y в метрическом пространстве называется кривая с этими концами, длина которой равна $|xy|$. Часто сегмент отождествляют с образом изометрического отображения замкнутого интервала в метрическое пространство.

Метрическое пространство называется *геодезическим пространством*, если любые две его точки могут быть соединены сегментом.

T.6.1 *Пусть (X, ρ) полное метрическое пространство с внутренней метрикой. Тогда $\rho_l = \rho$. Если, кроме того, метрика ρ строго внутренняя, то (X, ρ) — геодезическое пространство.*

$\odot$ Пусть x, $y \in X$ и $\varepsilon > 0$ (в случае, когда метрика ρ строго внутренняя, считаем $\varepsilon = 0$). Используя лемму 6.1, найдем равномерно непрерывное отображение z : {двоично-рациональные в $[0, 1]$} $\to X$, обладающее свойствами (i), (ii) этой леммы. Это отображение по непрерывности можно продолжить до непрерывного отображения $\hat{z} : [0, 1] \to X$, поскольку множество двоично-рациональных точек плотно в отрезке $[0, 1]$, равномерно непрерывное отображение z отображает последовательность Коши в последовательность Коши и пространство (X, ρ) полное. Используя свойство (ii), получим

$$L(\hat{z}) \le |xy| + \varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и определения метрики ρ_l, $|xy|_l \le |xy|$. Обратное неравенство получено в лемме 6.2. В случае строго внутренней метрики получили $L(\hat{z}) \le |xy|$. Следовательно, учитывая задачу 1.2, $L(\hat{z}) = |xy|$ и путь $\hat{z}$ параметризует сегмент $[x, y]$. $\odot$

З.6.1 *Если в пространстве с внутренней метрикой* $|xy| < r_1 + r_2$, *то* $B(x, r_1) \cap B(y, r_2) \neq \oslash$.

З.6.2 *В пространстве с внутренней метрикой для всех* $x \in X$ $r > 0$ $\overline{B(x, r)} = B[x, r]$.

З.6.3 *В пространстве* (X, ρ_l) *кривая кратчайшая тогда и только тогда, когда она является сегментом.*

З.6.4 *Пополнение пространства с внутренней метрикой является пространством с внутренней метрикой.*

0.7 Геодезическая кривая, луч, прямая. Выпуклость метрического пространства по Менгеру. Теорема Хопфа–Ринова–Кон-Фоссена

Пусть I интервал в $\mathbb{R}$. Локально изометрическое отображение $\gamma : I \to (X, \rho)$ называется *геодезической параметризованной кривой.*

Прямой (*лучом*) в пространстве (X, ρ) называется образ при изометрическом отображении

$$\gamma : \mathbb{R} \to X \qquad (\gamma : \mathbb{R}_+ \to X).$$

Прямым метрическим пространством называется геодезическое пространство, в котором через любые две различные точки можно провести единственную прямую.

Л.7.1. *Если в пространстве* (X, ρ) $((X, \rho_l))$ *последовательность сегментов* (*кратчайших*) $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *сходится к некоторой кривой* γ, *то эта кривая — сегмент.*

$\odot$ Пусть x, y — концы кривой γ. В силу теоремы 3.2, получим

$$L(\gamma) \leq \lim_{n \to \infty} \inf L(\gamma_n) = |xy|.$$

Осталось использовать задачи 1.2, 6.3. $\odot$

Т.7.1 (Теорема Хопфа–Ринова–Кон-Фоссена) *Для локально-компактного пространства* X *с внутренней метрикой следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *пространство* X *собственное;*

(ii) *пространство* X *полное;*

(iii) *каждый геодезический путь* $\gamma : [0, a) \to X$ *может быть продолжен до пути* $\hat{\gamma} : [0, a] \to X$*;*

(iv) *найдется такая точка* $p \in X$*, что каждый кратчайший путь* $\gamma : [0, a) \to X$ *с* $\gamma(0) = p$ *может быть продолжен до пути* $\hat{\gamma} : [0, a] \to X$*.*

Каждое из условий (i) – (iv) *влечет, что* X *— геодезическое пространство.*

$\odot$ $(i) \Rightarrow (ii)$ См. задачу 4.2.

$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ Оставляем в качестве простых упражнений.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Докажем от противного. Предположим, что найдется некомпактный замкнутый шар. Положим $R = \sup\{r :$ шар $B[p, r]$ компактен$\}$. Тогда $R < \infty$. Докажем, что шар $B(p, R)$ предкомпактен. Пусть $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ произвольная последовательность из этого шара. Можно считать, что $|px_n| \to R$ при $n \to \infty$. В противном случае найдется подпоследовательность последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, содержащаяся в шаре меньшего радиуса и, следовательно, обладающая сходящейся подпоследовательностью, т.к. последний шар компактен. В силу теорем 4.3, 6.1 и задачи 6.3 для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется натурально-параметризованный сегмент

$$\gamma_n : [0, |px_n|] \to X,$$

соединяющий p с $x_n \in B[p, |px_n|]$. Из последовательности $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ можно выбрать подпоследовательность, в которой сужения путей на отрезок $[0, |px_1|]$ сходятся. Из этой подпоследовательности выберем следующую подпоследовательность путей, сужения которых на отрезок $[0, |px_2|]$ сходятся, и так далее. Затем канторовский диагональный процесс (т.е. выбор n-го элемента из n-й подпоследовательности для $n = 1, 2, \ldots$) дает такую последовательность $(\gamma_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$, что для любого $t \in [0, R)$ последовательность $(\gamma_{m_n}(t))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к некоторой точке $\gamma(t) \in X$. В силу леммы 7.1 $\gamma : [0, R) \to X$ является отображением и кратчайшей. Согласно (iv) эту кратчайшую можно продолжить до пути $\hat{\gamma} : [0, R] \to X$. Тогда последовательность $(x_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к $\hat{\gamma}(R)$ и замкнутый шар $B[p, R]$ в силу задачи 6.2 компактен. Для любого $x \in B[p, R]$ найдется такое $r(x) > 0$, что шар $B(x, r(x))$ предкомпактен, т.к. пространство X локально компактно. Выберем конечное подпокрытие $(B[x_i, r(x_i)])$ из покрытия этими шарами шара $B[p, R]$. Объединение шаров этого конечного подпокрытия предкомпактно и содержит шар $B(p, R+\varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Это противоречит выбору R. $\odot$

Следующие примеры показывают, что все условия теоремы 7.1 существенны.

Пр.7.1 Пусть для всех x, $y \in \mathbb{R}$

$$\delta(x, y) = \min\{1, |x - y|\}.$$

Тогда на $\mathbb{R}$ эта метрика локально совпадает со стандартной метрикой и $id : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, |.|)$ — гомеоморфизм. Пространство $(\mathbb{R}, \delta)$ является ограниченным, полным, локально компактным, но не является компактным и пространством с внутренней метрикой. Действительно, $\delta(x, y) = 1$ для всех таких x, y, что $|x - y| > 1$, но

$$\delta_l(x, y) = |x - y| > 1.$$

Пр.7.2 Рассмотрим интервал $(0, 1) \subset (\mathbb{R}, |.|)$ с индуцированной метрикой. Это пространство ограничено, замкнуто в себе, но не является компактным.

Пр.7.3 Пусть X — бесконечномерное банахово пространство. Это пространство со строго внутренней метрикой, как и любое нормированное пространство. Оно не является локально компактным, т.к. шар $B[0, 1] \subset X$ замкнут и ограничен, но не является компактным.

Пр.7.4 Пространство X из примера 7.3 полное пространство с внутренней метрикой, не являющееся локально компактным. С метрикой $\delta(x, y) = \min\{1, ||x - y||\}$ $(x,\ y \in X)$ оно не является геодезическим пространством, т.к. каждая кривая с концами в точках x, y с $||x - y|| > 1$ имеет длину большую единицы, но $\delta(x, y) = 1$.

Л.7.2 *Пусть $x \in (X, \rho_l)$, $r > 0$. Тогда для любых y, $z \in B(x, r)$ найдется путь $\gamma : [a, b] \to X$ с концами y, z длины меньше, чем $2r$. Кроме того, $\gamma([a, b]) \subset B(x, 2r)$.*

$\odot$ Используя неравенство треугольника, получим

$$|yz| \le |yx| + |xz| < 2r.$$

Следовательно, найдется путь $\gamma : [a, b] \to X$ с концами y, z длины меньше, чем $2r$. Последнее включение докажем методом от противного. Пусть найдется такое $t \in [a, b]$, что $\gamma(t) \notin B(x, 2r)$. Тогда

$$|y\gamma(t)| \geq |x\gamma(t)| - |xy|, \quad |z\gamma(t)| \geq |x\gamma(t)| - |xz| > r.$$

Следовательно,

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,t]}) + L(\gamma_{[t,b]}) \geq |y\gamma(t)| + |z\gamma(t)| > 2r.$$

Получили противоречие. $\odot$

Говорят, что точка $z \in (X, \rho)$ *лежит между* различных точек x, $y \in X$, если $z \neq x$, $z \neq y$ и $|xz| + |zy| = |xy|$. Пишут: (xzy).

Метрическое пространство (X, ρ) называется *выпуклым по Менгеру*, если для любой пары различных точек из X найдется точка, лежащая между ними.

Множество A в метрическом пространстве (X, ρ) называется *выпуклым*, если сужение метрики ρ на A — строго внутренняя метрика.

Очевидно, что всякое метрическое пространство со строго внутренней метрикой (в частности, геодезическое пространство) является выпуклым по Менгеру.

Л.7.3 (Транзитивность отношения между) *Для любых попарно различных x, y, z, $t \in X$ (xyz), (xzt) тогда и только тогда, когда (xyt), (yzt).*

$\odot$ Пусть (xyz), (xzt). Тогда

$$|xy| + |yz| = |xz|, \quad |xt| = |xz| + |zt| = |xy| + |yz| + |zt| \geq |xy| + |yt| \geq |xt|.$$

Следовательно, $|xy| + |yt| = |xt|$ и $|yz| + |zt| = |yt|$. Таким образом, (xyt), (yzt). В обратную сторону, аналогично. $\odot$

З.7.1 *Пусть Y — метрическое пространство, X — пространство с внутренней метрикой и $f : X \to Y$ локально K-липшицево отображение. Тогда f K-липшицево отображение.*

0.8 Геодезическая выпуклость и выпуклость по Менгеру. Произведения метрических пространств

Пусть (X, ρ) геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегментом. Множество $A \subset X$ называется *геодезически выпуклым*, если для любых x, $y \in A$ $[x, y] \subset A$. Множество $B \subset X$ называется *строго геодезически выпуклым*, если для любых x, $y \in \overline{B}$

$$(x, y) = [x, y] \backslash \{x, y\} \subset Int(B).$$

Л.8.1 *Пусть (X, ρ) собственное геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегментом и $A \subset X$ геодезически выпукло. Тогда $\overline{A}$ геодезически выпукло.*

$\odot$ Пусть x, $y \in \overline{A}$ и последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ сходятся к x, y соответственно. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\gamma_n : [0, 1] \to X$ параметризация сегмента $[x_n, y_n]$ пропорционально длине дуги. По теореме Арцела-Асколи найдется подпоследовательность $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторому пути $\gamma : [0, 1] \to X$, параметризованному пропорционально длине дуги. Тогда для каждого $t \in [0, 1]$

$$\gamma(t) = \lim_{m \to \infty} \gamma_m(t) \subset \overline{A}.$$

По лемме 7.1 и условию леммы 8.1 γ — параметризация единственного сегмента $[x, y] \subset \overline{A}$. $\odot$

Пусть (X, ρ) геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегментом. *Выпуклой оболочкой* $C(A)$ множества $A \subset X$ называется пересечение всех выпуклых подмножеств в X, содержащих множество A.

Л.8.2 *Пусть (X, ρ) собственное геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегментом, $C_0(A) = A \subset X$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$*

$$C_n(A) = \cup\{[x, y] : x, \ y \in C_{n-1}(A)\}.$$

Тогда $C(A) = \cup\{C_n(A) : n \geq 0\}$.

$\odot$ По индукции нетрудно проверить, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$C_n(A) \subset C(A),$$

поскольку множество $C(A)$ геодезически выпуклое. Следовательно,

$$\cup\{C_n(A) : \, n \geq 0\} \subset C(A).$$

Пусть x, $y \in \cup\{C_n(A) : \, n \geq 0\}$. Тогда найдется такой номер $n \geq 0$, что x, $y \in C_n(A)$. Следовательно,

$$[x, y] \subset C_{n+1}(A) \subset \cup\{C_n(A) : \, n \geq 0\}$$

и множество $\cup\{C_n(A) : \, n \geq 0\}$ — геодезически выпуклое. Тогда

$$C(A) \subset \cup\{C_n(A) : n \geq 0\}. \odot$$

Пр.8.1 Пусть $r > 0$ и $M \subset B(x, r)$, где M — замкнутый заполненный квадрат в $\mathbb{R}^2$. Тогда $B(x, r)$ — строго геодезически выпуклое множество. Но $\cap\{B(x, r) : \, M \subset B(x, r), \, r > 0, \, x \in \mathbb{R}^2\} = M$ — геодезически выпукло, но нестрого.

Т.8.1 *Собственное выпуклое по Менгеру пространство является геодезическим пространством.*

$\odot$ В силу теоремы 6.1 и задачи 4.2 достаточно доказать, что собственное выпуклое по Менгеру пространство является пространством со строго внутренней метрикой. Рассмотрим для различных фиксированных точек x, $y \in X$ множество

$$B = \{z \in X : |xz| + |zy| = |xy|\}.$$

Множество B компактно, как ограниченное и замкнутое множество в собственном пространстве. Функция

$$f : B \to \mathbb{R}, \quad f(z) = \min\{|zx|, |zy|\}$$

непрерывна на компакте. Следовательно, найдется такая точка $m \in B$, что

$$f(m) = \max\{f(z) : \, z \in B\}.$$

Тогда (xmy) и

$$f(m) = \min\{|mx|, |my|\} \leq |xy|/2.$$

Докажем, что
$$f(m) = |mx| = |my| = |xy|/2.$$
Пусть, напротив, $f(m) = |mx| < |my|$. Тогда, по условию, найдется такая точка $v \in X$, что (mvy). В силу леммы 7.2, (xvy) и (xmv). Следовательно,
$$f(m) = |xm| < |xv|$$
и $|vy| \leq f(m) < |xy|/2$. Действительно, если $|vy| > f(m)$, то $\min\{|vx|, |vy|\} > f(m)$ и получаем противоречие. Далее,
$$|mv| = |xv| - |xm| = |xy| - |vy| - |xm| \geq |xy| - 2f(m) > 0.$$
Следовательно,
$$a = \inf\{|mv| : (mvy)\} \geq |xy| - 2f(m) > 0.$$
Пусть последовательность $(|mv_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, где
$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{v \in X : (mvy)\},$$
сходится к a. Тогда найдется подпоследовательность $(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторой точке v_0, т.к. пространство X собственное и множество $\{v \in X : (mvy)\}$ ограниченное. Тогда, по условию, найдется такая точка $\hat{v} \in X$, что $(m\hat{v}v_0)$. Следовательно,
$$|m\hat{v}| < |mv_0| = a.$$
Получили противоречие. Таким образом, $f(m) = |mx| = |my| = |xy|/2$. $\odot$

Л.8.3 *Пусть* (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) *метрические пространства. Тогда*

(i) *при* $p \in [1, \infty)$ *формула*
$$\rho_p((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = (|x_1y_1|^p + |x_2y_2|^p)^{1/p}$$
определяет метрику на $X_1 \times X_2$*;*

(ii) *формула*
$$\rho_\infty((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = \max\{|x_1y_1|, |x_2y_2|\}$$
определяет метрику на $X_1 \times X_2$.

$\odot$ Пусть $p \in [1, \infty)$, $a_1 = |x_1y_1|$, $a_2 = |x_2y_2|$, $b_1 = |y_1z_1|$, $b_2 = |y_2z_2|$.

$$\rho_p((x_1; x_2), (z_1; z_2)) = (|x_1z_1|^p + |x_2z_2|^p)^{1/p} \leq$$

$$((a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p)^{1/p} \leq (a_1^p + a_2^p)^{1/p} + (b_1^p + b_2^p)^{1/p} =$$

$$\rho_p((x_1; x_2), (y_1; y_2)) + \rho_p((y_1; y_2), (z_1; z_2)).\odot$$

Т.8.2 *Если (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) собственные метрические пространства (пространства со строго внутренней метрикой), то $(X_1 \times X_2, \rho_p)$ собственное метрическое пространство (пространство со строго внутренней метрикой) при $p \in [1, \infty]$.*

$\odot$ Докажем для $p \in [1, \infty)$ (для $p = \infty$ доказательство аналогично). Заметим, что проекция $(X_1 \times X_2, \rho_p)$ на (X_1, ρ_1) $((X_2, \rho_2))$ является нерастягивающим отображением. Если $K = K_1 \times K_2$ замкнуто и ограничено в $(X_1 \times X_2, \rho_p)$, то

$$K_1 \subset (X_1, \rho_1), \qquad K_2 \subset (X_2, \rho_2)$$

ограничены и $\overline{K_1}$, $\overline{K_2}$ компактны, как замкнутые и ограниченные множества в собственных пространствах. Следовательно, $\overline{K_1} \times \overline{K_2}$ компактно в $X_1 \times X_2$. Но K замкнуто в компакте $\overline{K_1} \times \overline{K_2}$, следовательно K компакт и $(X_1 \times X_2, \rho_p)$ собственное метрическое пространство. Докажем второе утверждение. Пусть $(x_1; x_2)$, $(y_1; y_2) \in (X_1 \times X_2, \rho_p)$. По условию найдутся такие $z_1 \in X_1$, $z_2 \in X_2$, что

$$|x_1z_1| = |z_1y_1| = |x_1y_1|/2, \qquad |x_2z_2| = |z_2y_2| = |x_2y_2|/2.$$

Тогда

$$\rho_p((x_1; x_2), (z_1; z_2)) = (|x_1z_1|^p + |x_2z_2|^p)^{1/p} =$$

$$((|x_1y_1|/2)^p + (|x_2y_2|/2)^p)^{1/p} = \rho_p((x_1; x_2), (y_1; y_2))/2.$$

Аналогично доказывается, что

$$\rho_p((y_1; y_2), (z_1; z_2)) = \rho_p((x_1; x_2), (y_1; y_2))/2.\odot$$

Т.8.3 *Пусть для каждого $i = 1, 2$ (X_i, ρ_i) геодезическое пространство, $\gamma_i : [0, 1] \to X_i$ параметризация сегмента $[x_i, y_i]$ пропорционально длине дуги. Тогда*

$$\gamma : [0, 1] \to (X_1 \times X_2, \rho_p), \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t); \gamma_2(t))$$

параметризация сегмента $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$ *пропорционально длине дуги при* $p \in [1, \infty]$. *Кроме того,*

$$L(\gamma) = (L(\gamma_1)^p + L(\gamma_2)^p)^{1/p}$$

при $p \in [1, \infty)$ *и*

$$L(\gamma) = \max\{L(\gamma_1), L(\gamma_2)\}$$

при $p = \infty$.

$\odot$ Пусть $p \in [1, \infty)$. Для всех u, $v \in [0, 1]$

$$\rho_p(\gamma(u), \gamma(v)) = (|\gamma_1(u)\gamma_1(v)|^p + |\gamma_2(u)\gamma_2(v)|^p)^{1/p} =$$

$$(L(\gamma_1)^p|u - v|^p + L(\gamma_2)^p|u - v|^p)^{1/p} = (L(\gamma_1)^p + L(\gamma_2)^p)^{1/p}|u - v|.$$

Следовательно, γ — параметризация сегмента пропорционально длине дуги и

$$L(\gamma) = (L(\gamma_1)^p + L(\gamma_2)^p)^{1/p}.$$

При $p = \infty$ доказательство аналогично. $\odot$

З.8.1 *Докажите теоремы 8.2, 8.3 при* $p = \infty$.

0.9 Отображения, неувеличивающие (сохраняющие) длины кривых. Нерастягивающие отображения. Отображения уменьшающие (неуменьшающие) расстояние

$f : (X, \rho) \to (Y, d)$ называется *отображением, неувеличивающим длины кривых с коэффициентом* $K \geq 0$ (*сохраняющим длины кривых*), если для любого спрямляемого пути $\gamma : [a, b] \to X$

$$L_Y(f(\gamma)) \leq K L_X(\gamma) \quad (L_Y(f(\gamma)) = L_X(\gamma)).$$

Инъективное отображение, сохраняющее длины кривых, называется *изометрическим вложением.*

Л.9.1

(*i*) *Если* $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ K*-липшицево отображение, то* f *является отображением, неувеличивающим длины кривых с коэффициентом* K.

(ii) Если $f:(X,\rho_l)\to(Y,d)$ непрерывное отображение, неувеличивающее длины кривых с коэффициентом K, то f — K-липшицево отображение.

$\odot$ (i) Пусть $\gamma:[a,b]\to X$ спрямляемый путь. Для любого разбиения $\sigma=(t_i)_{i=\overline{0,n}}$ отрезка $[a,b]$

$$V_\sigma(f\circ\gamma)=\sum_{i=0}^{n-1}d(f(\gamma(t_i)),f(\gamma(t_{i+1})))\le K\sum_{i=0}^{n-1}|\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})|=KV_\sigma(\gamma).$$

Взяв верхнюю грань по всем разбиениям отрезка $[a,b]$ сначала в правой части неравенства, затем в левой, получим $L_Y(f(\gamma))\le KL_X(\gamma)$.

(ii) Для любых x, $y\in X$

$$d(f(x),f(y))\le\inf\{L_Y(\hat\gamma):\hat\gamma-\text{путь в}\quad Y\quad\text{с концами}\quad f(x),\,f(y)\}\le$$
$$\inf\{L_Y(f\circ\gamma):\gamma-\text{путь в}\quad X\quad\text{с концами}\quad x,\,y\}\le$$
$$K\inf\{L_X(\gamma):\gamma-\text{путь в}\quad X\quad\text{с концами}\quad x,\,y\}=K|xy|_l.\odot$$

Пр.9.1 Пусть (Y,d) дискретное пространство. Тогда для каждого $K\ge 0$ любое $f:(X,\rho)\to(Y,d)$ является отображением, неувеличивающим длины кривых с коэффициентом K, т.к. любой путь в Y имеет нулевую длину.

Л.9.2 *Пусть $f:(X,\rho)\to(X,\rho)$ нерастягивающее отображение и x, $y\in X$. Тогда верны следующие утверждения.*

(i) Если $(yxf(y))$, то $\rho_f(x)\le\rho_f(y)$. В случае равенства : $(xf(y)f(x))$ и $|f(x)f(y)|=|xy|$.

(ii) Если $(xyf(y))$, то $\rho_f(y)\le\rho_f(x)$. В случае равенства : $(xf(x)f(y))$ и $|f(x)f(y)|=|xy|$.

$\odot$ (i) Если $(yxf(y))$, то

$$\rho_f(x)=|xf(x)|\le|xf(y)|+|f(y)f(x)|\le|xf(y)|+|yx|=|yf(y)|=\rho_f(y).$$

В случае равенства, все неравенства становятся равенствами. Из третьего равенства следует, что $|f(x)f(y)|=|xy|$, а из второго равенства следует, что $(xf(y)f(x))$.

(ii) Если $(xyf(y))$, то

$$0<\rho_f(y)=|yf(y)=|xf(y)|-|xy|\le|xf(y)|-|f(y)f(x)|\le|xf(x)|=\rho_f(x).$$

В случае равенства : $|f(y)f(x)| = |yx| > 0$. Следовательно, $f(x) \neq f(y)$, $f(x) \neq x$ и $(xf(x)f(y))$. $\odot$

Л.9.3 *Пусть $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ нерастягивающее отображение и x, $y \in X$. Тогда*

(i) если $|f(x)f(y)| = |xy|$ и найдется сегмент $[x, y]$, то $f|_{[x,y]}$ изометрическое отображение;

(ii) если $(Y, d) = (X, \rho)$, найдется единственный сегмент $[x, y]$ и $f(x) = x$, $f(y) = y$, то для любого $z \in [x, y]$ $f(z) = z$;

(iii) если $(Y, d) = (X, \rho)$ геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегментом, то множество всех неподвижных точек $Fix(f)$ отображения f является замкнутым геодезически выпуклым множеством в X.

$\odot$ (i) Пусть $z \in [x, y]$. Тогда

$$|xy| = |xz| + |zy| \geq |f(x)f(z)| + |f(z)f(y)| \geq |f(x)f(y)| = |xy|.$$

Следовательно, $|f(x)f(z)| = |xz|$ и $|f(x)f(y)| = |xy|$. Если $w \in [x, y]$, то нетрудно проверить, что $|f(z)f(w)| = |zw|$.

(ii) Это следствие (i).

(iii) Замкнутость множества $Fix(f)$ следует из непрерывности отображения f, а геодезическая выпуклость из (ii). $\odot$

$f : (X, \rho) \to (Y, d)$ называется *отображением, неуменьшающим (уменьшающим) расстояния*, если для любых (различных) x, $x' \in X$

$$d(f(x), f(x')) \geq |xx'| \qquad (d(f(x), f(x')) < |xx'|).$$

Т.9.1 *Пусть X компактное метрическое пространство и $f : X \to X$ уменьшающее расстояния отображение. Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку $x \in X$ и для любого $y \in X$ последовательность $(f^n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к точке x при $n \to \infty$.*

$\odot$ Пусть x точка минимума для функции ρ_f, которая существует, поскольку эта функция непрерывна на компакте. Если $f(x) \neq x$, то

$$\rho_f(f(x)) = |f(x)f^2(x)| < |xf(x)| = \rho_f(x).$$

Получили противоречие. Следовательно, $f(x) = x$. Эта неподвижная точка единственная. Если предположить, что существует еще одна неподвижная точка y отображения f, то получаем противоречие, т.к.

$$|xy| = |f(x)f(y)| < |xy|.$$

Пусть $y \in X$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ $y_n = f^n(y)$. Тогда или $y_n = x$ для некоторого n, в этом случае для каждого $m \geq n$ $f^m(y) = x$, или для каждого $n \geq 0$

$$|y_{n+1}x| = |f(y_n)f(x)| < |y_n x|.$$

Во втором случае найдется

$$l = \lim_{n\to\infty} |y_n x|,$$

т.к. последовательность строго убывает и ограничена снизу. Пусть $(y_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к точке z подпоследовательность последовательности $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, которая существует, т.к. X компактно. Тогда

$$l = \lim_{i\to\infty} |y_{n_i}x| = \lim_{i\to\infty} |y_{n_i+1}x| = \lim_{i\to\infty} |f(y_{n_i})x| = |f(z)x| = |zx|.$$

Но при $z \neq x$

$$|f(z)x| = |f(z)f(x)| < |zx|.$$

Следовательно, $z = x$. $\odot$

Л.9.4 *Пусть X геодезическое пространство, $f : X \to X$ уменьшающее расстояния отображение и x точка локального минимума для функции ρ_f. Тогда x единственная неподвижная точка отображения f.*

$\odot$ Докажем методом от противного. Пусть $x \neq f(x)$ и $(xyf(x))$. Тогда из утверждения (i) леммы 9.2 получим, что верно неравенство $\rho_f(y) < \rho_f(x)$ или $|f(x)f(y)| = |xy|$. Если точка y достаточно близка к точке x, то первое неравенство приводит к противоречию с тем, что x точка локального минимума для функции ρ_f. А второе равенство приводит к противоречию с тем, что f уменьшает расстояния. Следовательно, $f(x) = x$. Если предположить, что существует еще одна неподвижная точка x' отображения f, то получаем противоречие, т.к.

$$|xx'| = |f(x)f(x')| < |xx'|.\odot$$

Л.9.5 *Пусть $f : X \to X$ неуменьшающее расстояния отображение, $x,y \in X$ и $(xf(y)y)$. Тогда $\rho_f(x) \geq \rho_f(y)$. Причем, если имеет место равенство, то $|f(x)f(y)| = |xy|$ и $(f(x)xf(y))$.*

$\odot$ Используя условия, получим

$$\rho_f(x) = |xf(x)| \geq |f(y)f(x)| - |f(y)x| \geq |xy| - |f(y)x| = |yf(y)| = \rho_f(y) > 0.$$

Если $\rho_f(x) = \rho_f(y)$, то из третьего неравенства получим $|f(x)f(y)| = |xy| > 0$, а из второго неравенства получим $(f(x)xf(y))$. $\odot$

З.9.1 *Биекция $f : (X, \rho_l) \to (Y, d_l)$, сохраняющая длины кривых, является изометрией.*

0.10 Изометрии компактных пространств

Пусть $M \subset (X, \rho)$ и $\varepsilon > 0$. Множество $S \subset X$ называется *ε-сетью* для M, если для любого $x \in M$

$$|xS| \leq \varepsilon.$$

Множество $S \subset (X, \rho)$ называется *ε-разделенным* для $\varepsilon > 0$, для любых двух различных точек x, $y \in S$

$$|xy| \geq \varepsilon.$$

Т.10.1 *Пусть X — компактное метрическое пространство. Тогда*

(i) любое нерастягивающее сюрьективное отображение $f : X \to X$ является изометрией;

(ii) если отображение $f : X \to X$ не уменьшает расстояния, то f является изометрией.

$\odot$ (i) Пусть, напротив, найдутся такие точки p, $q \in X$, что

$$|f(p)f(q)| < |pq|.$$

Выберем такое $\varepsilon > 0$, что

$$|f(p)f(q)| < |pq| - 5\varepsilon.$$

Пусть n — такое натуральное число, что в X существует хотя бы одна ε-сеть мощности n. Рассмотрим множество $W \subset X^n$ всех ε-сетей в X, состоящих из n точек каждая. Это множество замкнуто в (X^n, ρ_∞), следовательно, оно компактно. Определим функцию

$$F : X^n \to \mathbb{R}, \quad F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} |x_i x_j|.$$

Тогда найдется элемент $S = (x_1, \ldots, x_n) \in W$, на котором липшицева функция F достигает минимума. Кроме того,

$$f(S) = (f(x_1), \ldots, f(x_n)) \in W,$$

т.к. f — нерастягивающая сюръективная функция. Более того, $F(f(S)) \le F(S)$, т.к. для всех i, $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$|f(x_i)f(x_j)| \le |x_i x_j|.$$

Но $F(S)$ — минимум функции F на W. Следовательно, $F(f(S)) = F(S)$ и для всех i, $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$|f(x_i)f(x_j)| = |x_i x_j|.$$

С другой стороны, найдутся такие номера i, $j \in \{1, \ldots, n\}$, что

$$|px_i| \le \varepsilon, \quad |qx_j| \le \varepsilon.$$

Для этих номеров мы имеем

$$|x_i x_j| \ge |pq| - |px_i| - |qx_j| \ge |pq| - 2\varepsilon,$$

$$|f(x_i)f(x_j)| \le |f(p)f(q)| + |f(p)f(x_i)| + |f(x_j)f(q)| \le |f(p)f(q)| + 2\varepsilon < |pq| - 3\varepsilon.$$

Таким образом, $|f(x_i)f(x_j)| < |x_i x_j|$. Противоречие.

(ii) Выберем произвольно x, $y \in X$ и $\varepsilon > 0$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ положим $x_n = f^n(x)$, $y_n = f^n(y)$. Тогда найдутся сходящиеся подпоследовательности

$$(x_{n_m})_{m \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \qquad (y_{n_m})_{m \in \mathbb{N}} \subset (y_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

т.к. пространство X компактно. Следовательно, найдется такой номер n_m, что

$$|x_{n_m} x_{n_{m+1}}| < \varepsilon/2, \quad |y_{n_m} y_{n_{m+1}}| < \varepsilon/2.$$

Тогда для $k = n_{m+1} - n_m$

$$|xx_k| \le |x_1 x_{k+1}| \le \ldots \le |x_{n_m} x_{n_{m+1}}| < \varepsilon/2.$$

Аналогично, $|yy_k| < \varepsilon/2$. Следовательно,

$$|xy| \le |x_1y_1| \le \ldots \le |x_ky_k| \le |x_kx| + |xy| + |yy_k| < |xy| + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$,

$$|xy| = |x_1y_1| = |f(x)f(y)|.$$

Следовательно, f — изометрическое отображение и $f(X)$ — компакт. Докажем, что f сюръекция. Пусть, напротив, найдется $p \in X \backslash f(X)$. Тогда существует, такое $\varepsilon > 0$, что

$$B(p, \varepsilon) \cap f(X) = \emptyset,$$

поскольку компакт $f(X)$ замкнут в компакте X. В силу задачи 10.1, найдется максимальное число n точек ε-разделенного множества в X и пусть $S \subset X$ — ε-разделенное множество из n точек. Тогда $f(S)$ — ε-разделенное множество из n точек, т.к. f — изометрическое отображение. С другой стороны,

$$|pf(S)| \ge |pf(X)| \ge \varepsilon.$$

Следовательно, $f(S) \cup \{p\}$ — ε-разделенное множество из $n + 1$ точек. Получили противоречие. $\odot$

Пр.10.1 Простой путь

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t; \sin t)$$

— изометрическое вложение, но не изометрия на образ.

Л.10.1 *Пусть (X, ρ) геодезическое пространство, $M \subset X$ открыто, $(M, d = \rho|_M)$ метрически связно. Тогда включение $i : (M, d_l) \to X$ является локальной изометрией.*

$\odot$ Пусть $x \in M$ и $B(x, 2r) \subset M$. В силу леммы 7.2, для любых y, $z \in B(x, r)$ найдется сегмент

$$[y, z]_X \subset B(x, 2r) \subset M.$$

Тогда

$$d_l(y, z) \le L([y, z]) = |yz| = d(y, z).$$

Следовательно, $d_l(y, z) = d(y, z)$ и $i : B(x, r) \to X$ — сохраняет расстояния. Таким образом, i локальная изометрия, поскольку $M \subset X$ открыто. $\odot$

Л.10.2 *Пусть* $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ *локальная изометрия. Тогда для любого* $x \in X$ *найдется такое положительное вещественное число* r, *что*

$$f|_{B(x,r)} : B(x,r) \to B(f(x), r)$$

— изометрия и $\psi : X \to (0, \infty]$,

$$\psi(x) = r_x = \sup\{r : \ f|_{B(x,r)} : B(x,r) \to B(f(x), r) - \textit{изометрия}\}$$

— нерастягивающее отображение.

$\odot$ Пусть $x \in X$. Тогда найдется такая окрестность $V(x)$, что

$$f|_{V(x)} : V(x) \to f(V(x))$$

— изометрия. Выберем $B(x,r) \subset V(x)$. Тогда $f|_{B(x,r)}$ — изометрическое отображение и

$$B(f(x), r) \subset f(V(x)).$$

Кроме того, для любого $q \in B(f(x), r)$ найдется такое $p \in V(x)$, что $f(p) = q$. Но

$$|xp| = d(f(x), q) < r.$$

Следовательно, $p \in B(x, r)$ и

$$f|_{B(x,r)} : B(x,r) \to B(f(x), r)$$

— изометрия. Если найдется такое $x \in X$, что $r_x = \infty$, то $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ — изометрия и для любого $x \in X$ $r_x = \infty$. Пусть для любого $x \in X$ $r_x < \infty$. Заметим, что для всех $r > 0$, $x' \in B(x, r)$

$$B(x', r - |xx'|) \subset B(x, r).$$

Следовательно, $|r_x - r_{x'}| \le |xx'|$. $\odot$

Л.10.3

(i) Локальная изометрия сохраняет длины.

(ii) Если $f : (X, \rho_l) \to (Y, d_l)$ *— локальная изометрия, то* f *— нерастягивающее отображение.*

(iii) Если $f : (X, \rho_l) \to (Y, d_l)$ *— локальная изометрия и гомеоморфизм, то* f *— изометрия.*

$\odot$ (i) Пусть $\gamma : [a,b] \to X$ — путь. Из компактности отрезка $[a,b]$ следует, что найдется такое $r > 0$, что для каждого $t \in [a,b]$ $r < r_{\gamma(t)}$. В силу равномерной непрерывности отображения γ, найдется такое $\delta > 0$, что для всех t, $t' \in [a,b]$, удовлетворяющих неравенству $|t - t'| < \delta$,

$$|\gamma(t)\gamma(t')| < r.$$

Пусть $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ такое разбиение отрезка $[a,b]$, что $|\sigma| < \delta$. Тогда для каждого $i = \overline{0, n-1}$

$$\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset B(\gamma(t_i), r).$$

Следовательно,

$$L(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}) = L(f \circ \gamma|_{[t_i,t_{i+1}]})$$

и в силу аддитивности длины дуги $L(\gamma) = L(f \circ \gamma)$.
(ii) Это следствие доказанного утверждения (i) и утверждения (ii) леммы 9.1.
(iii) Это следствие доказанного утверждения (ii). $\odot$

Пусть $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ непрерывное отображение, $\gamma : [a,b] \to Y$ путь, $x \in f^{-1}(\gamma(a))$. Путь $\gamma'[a,b] \to X$ называется *лифтом* (*подъемом*) *пути* γ с началом в точке x относительно отображения f, если $f \circ \gamma' = \gamma$ и $\gamma'(a) = x$.

З.10.1 *Если в метрическом пространстве существует $(\varepsilon/3)$-сеть из n точек, то ε-разделенное множество не может содержать более чем n точек. Максимальное (по числу точек) ε-разделенное множество в метрическом пространстве является ε-сетью.*

З.10.2 *Пусть $(C(X), ||.||_\infty)$ — банахово пространство непрерывных функций $X \to \mathbb{R}$ на компакте (X, ρ_l) с нормой*

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Тогда отображение

$$E : (X, \rho_l) \to (C(X), ||.||_\infty), \quad E(x) = \rho(x, \cdot)$$

является изометрическим вложением и изометрией на образ.

0.11 Локальные изометрии. Фактор-пространство

Т.11.1 (Обратный образ внутренней метрики, индуцированной локальным гомеоморфизмом) *Пусть X линейно связное хаусдорфово топологическое пространство, $f : X \to (Y, d_l)$ сюрьективный локальный гомеоморфизм. Тогда существует единственная внутренняя метрика на X, относительно которой f локальная изометрия.*

$\odot$ Для любого пути $\gamma : [0,1] \to X$ положим

$L^*(\gamma) = L(f\circ\gamma)$, $\quad \rho : X\times X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $\quad |xy| = \inf\{L^*(\gamma) : \gamma_{x,y}-\text{путь}\}$.

Докажем, что ρ — метрика. Пусть x, y, $z \in X$. Тогда $|xy| = |yx| \geq 0$ и

$$|xz| \leq L^*(\gamma_{x,y} * \gamma'_{y,z}) = L^*(\gamma_{x,y}) + L^*(\gamma'_{y,z}).$$

Взяв нижние грани в правой части неравенства, получим

$$|xz| \leq |xy| + |yz|.$$

Пусть $x \neq y$. Выберем такие непересекающиеся окрестности $V(x)$, $V(y)$, что $f|_{V(x)} : V(x) \to f(V(x))$, $f|_{V(y)} : V(y) \to f(V(y))$ гомеоморфизмы. Пусть

$$B(f(x), r(x)) \subset f(V(x)), \qquad B(f(y), r(y)) \subset f(V(y)).$$

Тогда для любого пути $\gamma_{x,y}$

$$L^*(\gamma) = L(f\circ\gamma) > r(x) + r(y) > 0.$$

Следовательно, $|xy| > 0$. Пусть $\gamma_{x,y} : [a,b] \to X$ — путь, $\gamma' = f\circ\gamma$, $s \in [a,b]$ и окрестность $V(\gamma(s))$ такая, что

$$f|_{V(\gamma(s))} : V(\gamma(s)) \to f(V(\gamma(s)))$$

— гомеоморфизм. Выберем такое $r(s) > 0$, что $B(\gamma'(s), r(s)) \subset f(V(\gamma(s)))$ и положим

$$V'(\gamma(s)) = V(\gamma(s)) \cap f^{-1}(B(\gamma'(s), r(s))).$$

Тогда . $f|_{V'(\gamma(s))} : V'(\gamma(s)) \to B(\gamma'(s), r(s))$ — гомеоморфизм. Покроем компакт $\gamma'([a,b])$ конечным набором открытых шаров

$$(B(\gamma'(s_i), r(s_i)/2))_{i=\overline{0,k}} \qquad (s_i \in [a,b], \quad i = \overline{0,k}).$$

В силу компактности отрезка $[a, b]$, найдется такое разбиение этого отрезка $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$, что для каждого $i = \overline{0, n-1}$ найдется $j \in \{0, \ldots, k\}$, для которого

$$\gamma'([t_i, t_{i+1}]) \subset B(\gamma'(s_j), r(s_j)/2).$$

В силу леммы 7.2, для любого $i = \overline{0, n-1}$ найдется такой путь γ_i', соединяющий $\gamma'(t_i)$ с $\gamma'(t_{i+1})$, что $L(\gamma_i') < r(s_j)$ и принадлежащий открытому шару $B(\gamma'(s_j), r(s_j))$. Пусть для любого $i = \overline{0, n-1}$

$$\gamma_i = (f|_{V'(\gamma(s_j))})^{-1}(\gamma_i')$$

(это лифт пути γ_i') и

$$\gamma_{x,y}^* = \gamma_0 * \ldots * \gamma_{n-1}.$$

Тогда

$$L^*(\gamma_i) = L(\gamma_i') < r(s_j)$$

и $L(\gamma_{x,y}^*) < \infty$. Следовательно, $|xy| < \infty$ и ρ — метрика. Пусть $x \in X$. Тогда найдется такая окрестность $V(x)$, что

$$f|_{V(x)} : V(x) \to B(f(x), r(x))$$

— гомеоморфизм. Пусть

$$V'(x) = f^{-1}(B(f(x), r(x)/4)) \cap V(x), \quad x_1,\, x_2 \in V'(x),$$

$$y_1 = f(x_1),\, y_2 = f(x_2) \in B(f(x), r(x)/4).$$

Тогда

$$|y_1y_2| = \inf\{L(\gamma) :\, \gamma_{y_1,y_2} - \text{путь}\}.$$

В силу леммы 7.2, найдем путь γ_{y_1,y_2}, чей образ содержится в $B(f(x), r(x)/2)$ и чья длина меньше чем $r(x)/2$. Пусть γ_{x_1,x_2}' лифт пути γ. Тогда $L^*(\gamma') = L(\gamma)$ и

$$|x_1x_2| \leq d(y_1, y_2) = \inf\{L(\gamma) :\, \gamma_{y_1,y_2} - \text{путь}\}.$$

Пусть $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такая последовательность путей с концами x_1, x_2, что

$$L^*(\gamma_n) \to |x_1x_2| \quad (n \to \infty).$$

Кроме того,

$$d(y_1, y_2) \leq L^*(\gamma_n) \to |x_1x_2| \quad (n \to \infty).$$

Следовательно, $d(y_1, y_2) = |x_1x_2|$ и f изометрически отображает $V'(x)$ на свой образ. Пусть x, $x' \in X$. В силу утверждения (i) леммы 10.3, для любого пути $\gamma_{x,y}$ $L(\gamma) = L(f \circ \gamma)$. Таким образом, $L(\gamma) = L^*(\gamma)$ и из определения ρ следует, что это внутренняя метрика. Пусть ρ' еще одна внутренняя метрика на X, относительно которой f локальная изометрия. Тогда

$$\rho'(x, x') = \inf\{L(\gamma) : \gamma_{x,x'} - \text{путь}\} = \inf\{L(f \circ \gamma) : \gamma_{x,x'} - \text{путь}\} = |xx'|.\odot$$

Т.11.2 *Пусть $f : (X, \rho_l) \to (Y, d)$ локальная изометрия и пространство (X, ρ_l) полное. Тогда для любой геодезической (кратчайшей) $\gamma : [0, a] \to Y$ и любой такой точки x_0, что $f(x_0) = \gamma(0)$, существует единственная геодезическая (кратчайшая) $\hat{\gamma} : [0, a] \to X$, удовлетворяющая условиям: $\hat{\gamma}(0) = x_0$ и $f(\hat{\gamma}(t)) = \gamma(t)$.*

$\odot$ Пусть путь γ параметризован длиной дуги. Рассмотрим такой участок $[0, t)$ отрезка $[0, a]$, что путь $\gamma|_{[0,t)}$ может быть лифтирован в X, т.е. найдется такой путь $\hat{\gamma}_t : [0, t) \to X$, что $f \circ \hat{\gamma} = \gamma|_{[t,0)}$ и $\hat{\gamma}(0) = x_0$. Множество таких участков не пусто, т.к. сужение f на достаточно малую окрестность точки x_0 является изометрией на образ. Пусть $[0, t_0)$ максимальный интервал, для которого такой лифт существует. Выберем такую сходящуюся к t_0 при $n \to \infty$ последовательность $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $t_n < t_0$. Тогда $(\hat{\gamma}_{t_0}(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ является последовательностью Коши, сходящейся к точке p, поскольку пространство X полное. Ясно, что точка p не зависит от выбора последовательности $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Кроме того, последовательность

$$(f \circ \hat{\gamma}_{t_0}(t_n) = \gamma(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

сходится к точке $\gamma(t_0)$ при $n \to \infty$, поэтому γ допускает лифт на отрезке $[0, t_0]$. Если $t_0 \neq a$, то поскольку f локальная изометрия, найдется такое $\varepsilon > 0$, что существует лифт пути $\gamma|[0, t_0 + \varepsilon)$. Получили противоречие с тем, что $[0, t_0)$ максимальный интервал. Покажем, что если $\gamma : [0, a] \to Y$ — сегмент, то $\hat{\gamma} : [0, a] \to X$ — сегмент. Пусть $L(\gamma) = |\gamma(0)\gamma(a)|$. Тогда $L(\hat{\gamma}) = |\gamma(0)\gamma(a)|$, поскольку локальная изометрия сохраняет длину пути. Но локальная изометрия является нерастягивающим отображением, поэтому

$$L(\hat{\gamma}) = |\gamma(0)\gamma(a)| \leq |\hat{\gamma}(0)\hat{\gamma}(a)| \leq L(\hat{\gamma})$$

и $L(\hat{\gamma}) = |\hat{\gamma}(0)\hat{\gamma}(a)|$. $\odot$

Л.11.1 *Пусть $f : (X, \rho_l) \to (Y, d_l)$ локальная изометрия, $I = [a, b]$ ($I = \mathbb{R}$, $I = [0, \infty)$), $\gamma : I \to X$ — путь и $f \circ \gamma : I \to Y$ — параметризация сегмента (прямой, луча). Тогда $\gamma : I \to X$ — параметризация сегмента (прямой, луча).*

$\odot$ Пусть $I = [a, b]$. Тогда, в силу леммы 10.3,

$$|f(\gamma(a))f(\gamma(b))| \leq |\gamma(a)\gamma(b)| \leq L_X(\gamma) = L_Y(f \circ \gamma) = |f(\gamma(a))f(\gamma(b))|.\odot$$

Пусть R — отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, ρ). Определим функцию $\rho_R : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, $\rho_R(x, y) =$

$$\inf\{\sum_{i=1}^{k} |p_i q_i| : p_1 = x,\, p_{i+1} \sim q_i,\, q_k = y,\, i \in \{1, \dots, k-1\},\, k \in \mathbb{N}\},$$

которая задает *фактор-полуметрику* на фактор-пространстве. Сопоставим полуметрическому пространству (X, ρ_R) метрическое пространство $(X/\rho_R, \rho_R)$, отождествляя точки, находящиеся на нулевом расстоянии (сохраняя то же самое обозначение ρ_R для этой метрики). Полученная метрика называется *фактор-метрикой* или *метрикой фактор-пространства.*

Пусть $(X_\alpha, \rho_{\alpha l})_{\alpha \in A}$ — семейство пространств с внутренней метрикой. *Внутренней метрикой дизъюнктного объединения пространств* называется функция

$$\rho_l : \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \times \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

удовлетворяющая двум условиям :

1. Если найдется такое $\alpha \in A$, что x, $y \in X_\alpha$, то $\rho_l(x, y) = \rho_{\alpha l}(x, y)$;
2. В противном случае $\rho_l(x, y) = \infty$.

Л.11.2 *Пусть $b : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ — произвольная функция, D — класс таких полуметрик ρ на X, что $\rho \leq b$. Тогда для любых x, $y \in X$*

$$\rho_m(x, y) = \sup\{|xy| :\ \rho \in D\}$$

— максимальная полуметрика в D. Если b — конечная функция, то ρ_m — конечная полуметрика.

$\odot$ Докажем лишь неравенство треугольника (остальные свойства легко проверить). Для любых x, y, $z \in X$

$$\rho_m(x, y) \leq \sup\{|xz| + |zy| :\ \rho \in D\} \leq$$

$$\sup\{|xz| : \rho \in D\} + \sup\{|zy| : \rho \in D\} = \rho_m(x,z) + \rho_m(z,y). \odot$$

С.11.1 *Пусть пространство X покрыто семейством $(X_\alpha, \rho_\alpha)_{\alpha \in A}$, где для каждого $\alpha \in A$ ρ_α — полуметрика. Класс D всех таких полуметрик ρ, что для каждого $\alpha \in A$*

$$\rho(x,y) \leq \rho_\alpha(x,y)$$

для всех x, $y \in X$, содержит единственную полуметрику ρ_m, обладающую свойством: для каждого $\rho \in D$ для всех x, $y \in X$

$$\rho(x,y) \leq \rho_m(x,y).$$

Причем, если для каждого $\alpha \in A$

$$\rho_\alpha = \rho_{\alpha l},$$

то $\rho_m = \rho_{ml}$. Если, кроме того, X связно, для каждого $\alpha \in A$ X_α открыто и ρ_α — конечная, то ρ_m — конечная.

$\odot$ Если ρ_α заданы не на всем X, то полагаем $\rho_\alpha(x,y) = \infty$ при $x \notin X_\alpha$ или $y \notin X_\alpha$. Применим лемму 11.2 к функции

$$b(x,y) = \inf\{\rho_\alpha(x,y) : \alpha \in A\}.$$

Пусть для каждого $\alpha \in A$

$$\rho_\alpha = \rho_{\alpha l}.$$

Тогда $\rho_{ml} \leq \rho_{\alpha l} = \rho_\alpha$, т.к. $\rho_m \leq \rho_\alpha$ и $\rho_m \in D$. Следовательно, $\rho_m = \rho_{ml}$, т.к. ρ_m максимальна. $\odot$

Т.11.2 *Пусть R — эквивалентность на (X,ρ) и для любых x, $y \in X$ $b_R(x,y) = 0$ при $x \sim y$, $b_R(x,y) = |xy|$ в остальных случаях. Тогда ρ_R — максимальная среди всех полуметрик $\hat\rho$, удовлетворяющих неравенству $\hat\rho \leq b_R$.*

$\odot$ Пусть D — класс всех таких полуметрик $\hat\rho$, что $\hat\rho \leq b_R$. Тогда $\rho_R \in D$ и достаточно доказать неравенство $\rho_R \geq \hat\rho$ для каждого $\hat\rho_R \in D$. Пусть $x = p_1$, $y = q_k$ и $b_R(q_i, p_{i+1}) = 0$ при $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Тогда

$$\hat\rho(x,y) \leq \sum_{i=1}^{k} \hat\rho(p_i, q_i) + \sum_{i=1}^{k-1} \hat\rho(q_i, p_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^{k} |p_i q_i|.$$

Следовательно, $\hat{\rho} \le \rho_R$ $\odot$

З.11.1 ρ_R *— полуметрика.*

З.11.2 *В метрическом пространстве* (X, ρ) $\rho_R \le \rho$.

З.11.3 *Закончить доказательство следствия 11.1.*

0.12 Однородные пространства. Метрика Буземана на группе подобий метрического пространства

Метрическое пространство называется *метрически однородным*, если для любых x, $y \in X$ найдется такая изометрия $I : X \to X$, что $I(x) = y$. Пространство, локально изометричное евклидову пространству называется *плоским метрическим пространством.*

Пусть G подгруппа группы $Iso(X, \rho_l)$. Введем на X отношение эквивалентности R_G следующим образом : $x \sim y$, если найдется такой элемент $g \in G$, что $x = g(y)$. Обозначим $X/G = X/R_G$.

Рассмотрим метрику $\hat{\rho}$ на X/G

$$\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) = \inf\{|xy| : \, x \in \hat{x}, \, y \in \hat{y}\}$$

для $\hat{x}$, $\hat{y} \in X/G$. Учитывая, что класс эквивалентности точки $x \in X$ является орбитой

$$O(x) = \{g(x) : \, g \in G\}$$

этой точки, можно дать другое определение этой метрики

$$\hat{\rho}(O(x), O(y)) = \inf\{|xg(y)| : \, g \in G\}.$$

Л.12.1 *Имеет место равенство* $\hat{\rho} = \rho_{R_G}$.

$\odot$ Пусть $x = p_1$, $y = q_k \in X$. Из определения метрики ρ_{R_G} следует, что найдутся такие изометрии $g_i \in G$ при $i \in \{1, \dots, k-1\}$, что $g_i(p_{i+1}) = q_i$. Рассмотрим новую последовательность

$$\tilde{p}_1 = p_1 = x, \quad \tilde{q}_1 = q_1, \quad \tilde{p}_2 = g_1(p_2), \quad \tilde{q}_2 = g_1(q_2), \dots,$$

$$\tilde{p}_k = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_{k-1}(p_k), \qquad \tilde{q}_k = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_{k-1}(q_k).$$

Тогда $|p_i q_i| = |\tilde{p}_i \tilde{q}_i|$, т.к. $g_i \in G$ при $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{k} |p_i q_i| = \sum_{i=1}^{k} |\tilde{p}_i \tilde{q}_i|.$$

С другой стороны, по выбору изометрий $g_i\ \tilde{q}_i = \tilde{p}_{i+1}$. Тогда

$$|x\tilde{q}_k| \leq \sum_{i=1}^{k} |\tilde{p}_i \tilde{q}_i| + \sum_{i=1}^{k-1} |\tilde{p}_{i+1} \tilde{q}_i| = \sum_{i=1}^{k} |p_i q_i|.$$

Но $q_k = y$, следовательно, $\tilde{q}_k \in O(y)$. Таким образом, доказали неравенство $\hat{\rho} \leq \rho_{R_G}$. Пусть $y^* \in O(y)$, $x^* \in O(x)$. Тогда $y^* \sim y$, $x^* \sim x$. Положим $p_1 = q_1 = x$, $p_2 = x^*$, $q_2 = y^*$, $p_3 = q_3 = y$. Тогда $\hat{\rho} \geq \rho_{R_G}$. $\odot$

Л.12.2 *Пусть X — локально компактное и полное пространство. Если метрика ρ — строго внутренняя, то метрика $\hat{\rho}$ — строго внутренняя.*

$\odot$ Докажем в том случае, когда все орбиты компактны. Общий случай получается из данного с помощью аппроксимации. Пусть $\hat{x}$, $\hat{y} \in X/G$. Выберем такие $x \in \hat{x}$, $y \in \hat{y}$, что $\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) = |xy|$. Это возможно, поскольку орбиты компактны. Пусть точка $z \in X$ такая, что $|xz| = |zy| = |xy|/2$. Тогда

$$\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{z}) \leq |xz| = |xy|/2 = \hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y})/2.$$

Аналогично, $\hat{\rho}(\hat{y}, \hat{z}) \leq \hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y})/2$. Из неравенства треугольника следует, что эти неравенства являются равенствами. Следовательно, $\hat{z}$ — середина между $\hat{x}$, $\hat{y} \in X/G$. $\odot$

Пр.12.1 Если $G = \{g \in Iso(\mathbb{R}^2) : g(x; y) = (x + k; y + l),\ k,\ l \in \mathbb{Z}\}$, то фактор-пространство $\mathbb{R}^2/G$ является плоским тором. Если

$$G = \{g \in Iso(\mathbb{R}^2) :\ g = id \vee g(x; y) = (x; -y)\},$$

то фактор-пространство $\mathbb{R}^2/G$ является полуплоскостью.

Пусть $p \in (X, \rho)$ и $Sim(X, Y)$ — множество всех подобий метрического пространства X на метрическое пространство (Y, d). *Метрика Буземана* δ_p на множестве $Sim(X, Y)$ определяется формулой

$$\delta_p(f, \varphi) = \sup\{d(f(x), \varphi(x))e^{-|px|} :\ x \in X\}$$

для всех f, $\varphi \in Sim(X,Y)$.

Неподвижная точка собственного подобия называется *центром подобия*, а множество всех центров подобий пространства X обозначается $Cen(X)$.

Л.12.3 *Пусть p, $q \in (X,\rho)$ и $\mathbb{R}_+^*$ — группа положительных вещественных чисел со стандартной операцией умножения. Тогда верны следующие утверждения.*
(i) δ_p — метрика на множестве $Sim(X,Y)$;
(ii) метрики δ_p, δ_q липшицево эквивалентны на $Sim(X,Y)$;
(iii) отображение $\sigma : (Sim(X), \circ) \to \mathbb{R}_+^*$, $\sigma(f) = \sigma_f$ — непрерывный гомоморфизм, ядро которого есть группа изометрий;
(iv) для любых f, $\varphi \in Sim(X,Y)$, $\theta \in Sim(Y)$, $\psi \in Iso(X)$ имеют место равенства $\delta_p(f \circ \psi, \varphi \circ \psi) = \delta_{\psi(p)}(f,\varphi)$, $\delta_p(\theta \circ f, \theta \circ \varphi) = \sigma_\theta \delta_p(f,\varphi)$;
(v) множества $Cen(X)$, $X \backslash Cen(X)$ инвариантны относительно действия группы $Sim(X)$ на X;
(vi) если группа $Sim(X)$ действует транзитивно на полном метрическом пространстве X, то и группа $Iso(X)$ действует транзитивно на пространстве X.

$\odot$

(i) Для всех f, $\varphi \in Sim(X,Y)$ из неравенств

$$\delta_p(f,\varphi) \leq \sup\{(d(f(x),f(p)) + d(f(p),\varphi(p)) + d(\varphi(p),\varphi(x)))e^{-|px|} : x \in X\} \leq$$

$$\sigma_f + d(f(p),\varphi(p)) + \sigma_\varphi$$

следует конечность величины $\delta_p(f,\varphi)$. Очевидно, что

$$\delta_p(f,\varphi) = \delta_p(\varphi,f) \geq 0$$

для всех f, $\varphi \in Sim(X,Y)$. Пусть $f \neq \varphi$. Тогда найдется такая точка $x_0 \in X$, что $f(x_0) \neq \varphi(x_0)$ и

$$\delta_p(f,\varphi) \geq d(f(x_0),\varphi(x_0))e^{-|x_0 p|} > 0.$$

Докажем неравенство треугольника

$$\delta_p(f,\varphi) \leq \sup\{(d(f(x),h(x)) + d(h(x),\varphi(x))e^{-|px|} : x \in X\} \leq$$

$$\delta_p(f,h) + \delta_p(h,\varphi)$$

для всех f, φ, $h \in Sim(X,Y)$.
(ii) Это следует из очевидных неравенств

$$\delta_p(f,\varphi)e^{-|pq|} \le \delta_q(f,\varphi) \le \delta_p(f,\varphi)e^{|pq|}.$$

(iii) Пусть x, $y \in X$ различны, f, $\varphi \in Sim(X,Y)$ произвольные. Тогда

$$d(f \circ \varphi(x), f \circ \varphi(y)) = \sigma_f \sigma_\varphi |xy|.$$

Следовательно, $\sigma(f \circ \varphi) = \sigma(f)\sigma(\varphi)$. Последнее утверждение очевидно. Докажем непрерывность σ. Пусть $\delta_p(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$, где f, $f_n \in Sim(X,Y)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $x \in X$

$$d(f_n(x), f(x)) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Следовательно,

$$\sigma(f_n)|xy| = d(f_n(x), f_n(y)) \to d(f(x), f(y)) = \sigma(f)|xy|$$

и $\sigma(f_n) \to \sigma(f)$ при $x \ne y$, $n \to \infty$.
(iv) Доказательство очевидно.
(v) Пусть $x \in Cen(X)$, т.е. найдется собственное подобие f такое, что $f(x) = x$. Тогда для каждого $\psi \in Sim(X)$

$$\sigma(\psi \circ f \circ \psi^{-1}) = \sigma(f).$$

Следовательно, $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$ — собственное подобие. Кроме того,

$$\psi \circ f \circ \psi^{-1}(\psi(x)) = \psi(x).$$

Таким образом, $\psi(x) \in Cen(X)$.
(vi) Пусть x, $y \in X$. Тогда найдется такое подобие $f \in Sim(X)$, что $f(x) = y$. Рассмотрим нетривиальный случай, когда подобие f собственное. Тогда, в силу полноты пространства, найдется такая точка $z \in X$, что $f(z) = z$. Кроме того, найдется такое подобие g, что $g(x) = z$. Тогда

$$\sigma(f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g) = 1$$

и $f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g(x) = y$. $\odot$

Пусть $Const(X,Y)$ — множество постоянных отображений из X в Y. Приведем без доказательства некоторые результаты о группе подобий с метрикой Буземана.

Т.12.1 *Если пространства* (X,ρ), (Y,d) *— полные, то пространства* $(Sim(X,Y)\cup Const(X,Y),\delta_p)$, $(Iso(X,Y)\cup Const(X,Y),\delta_p)$ *— полные.*

Т.12.2 *Если пространство* (X,ρ) *— собственное, то топология пространства* $(Sim(X,Y)\cup Const(X,Y),\delta_p)$ *совпадает как с топологией поточечной сходимости, так и с компактно-открытой топологией.*

Т.12.3 *Если пространства* (X,ρ), (Y,d) *— собственные, то пространство* $(Sim(X,Y)\cup Const(X,Y),\delta_p)$ *— собственное. Если кроме того, пространство* (X,ρ) *— компактно, пространство* $(Sim(X,Y)\cup Const(X,Y),\delta_p)$ *— компактно.*

Т.12.4 $(Sim(X),\delta_p)$ *— топологическая группа, действующая непрерывно на пространстве* (X,ρ).

Т.12.5 *Пусть пространство* (X,ρ) *— полное. Тогда верны следующие утверждения.*

(i) *Если* $Cen(X)=X$, *то*

$$\overline{Sim(X)}=Sim(X)\cup Const(X,X)$$

(замыкание выполняется в пространстве $(Lip(X,Y),\delta_p)$);

(ii) Если $Cen(X)\neq\emptyset$, X, то $Cen(X)\subset\partial(Cen(X))$ и

$$\overline{Sim(X)}=Sim(X)\cup Const(X,\partial(Cen(X)));$$

(iii) Если $Cen(X)=\emptyset$, то

$$\overline{Sim(X)}=Sim(X)=Iso(X).$$

З.12.1 *Собственное подобие полного метрического пространства на себя обладает единственным центром подобия.*

З.12.2 *Если метрическое пространство* X *ограничено, то* $Sim(X)=Iso(X)$.

З.12.3 *Докажите свойство* (iv) *леммы 12.3.*

З.12.4 *Докажите, что* δ_p *является метрикой на множестве* $Lip(X,Y)$ *всех липшицевых отображений из метрического пространства* (X,ρ) *в метрическое пространство* (Y,d).

0.13 Отклонение и метрика Хаусдорфа

Обозначим $B(X)$ ($B[X]$) множество всех непустых (замкнутых) ограниченных подмножеств метрического пространства (X, ρ).

Отклонением по Хаусдорфу множества $M \in B(X)$ от непустого множества $W \subset X$ называется число

$$\beta(M, W) = \sup\{|xW| : x \in M\}.$$

Л.13.1 *Пусть M, $H \in B(X)$, $\emptyset \neq W \subset X$. Тогда верны следующие утверждения.*

(i) $\beta(M, W) \leq \beta(M, H) + \beta(H, W)$;

(ii) $\beta(M, H) = \inf\{r : M \subset B(H, r)\}$, где $B(H, r) = \cup\{B(x, r) : x \in H\}$ — обобщенный шар;

(iii) Если для каждого $\alpha \in A$ $M_\alpha \in B(X)$ и $M = \bigcup\limits_{\alpha \in A} M_\alpha$, то

$$\beta(M, H) = \sup\{\beta(M_\alpha, H) : \alpha \in A\}.$$

$\odot$ (i) Для каждого $\varepsilon > 0$ для любого $y \in M$ найдется такое $z \in H$, что

$$|yz| \leq |yH| + \varepsilon.$$

Тогда

$$|yW| \leq |yz| + |zW| \leq |yz| + \beta(H, W) \leq$$
$$|yH| + \varepsilon + \beta(H, W) \leq \beta(M, H) + \beta(H, W) + \varepsilon.$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$|yW| \leq \beta(M, H) + \beta(H, W).$$

Осталось взять верхнюю грань в левой части последнего неравенства.

(ii) Пусть

$$R = \inf\{r : M \subset B(H, r)\}$$

и число $r > 0$ такое, что $M \subset B(H, r)$. Тогда для каждого $y \in M$ найдется такая точка $x \in H$, что $|xy| < r$ и, следовательно, $|yH| < r$. Взяв верхнюю грань в левой части установленного неравенства, получим $\beta(M, H) \leq r$.

Теперь в правой части возъмем нижнюю грань. Тогда получим $\beta(M, H) \leq R$. Предположим, что равенства нет. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что

$$\beta(M, H) + \varepsilon < R.$$

Следовательно, для каждого $y \in M$ найдется такая точка $x \in H$, что

$$|yx| < |yH| + \varepsilon \leq \beta(M, H) + \varepsilon.$$

Тогда

$$y \in B(x, \beta(M, H) + \varepsilon) \subset B(H, \beta(M, H) + \varepsilon).$$

В силу произвольности $y \in M$,

$$M \subset B(H, \beta(M, H) + \varepsilon).$$

Таким образом, наше предположение приводит к противоречию.

(iii) Пусть $x \in M$. Тогда найдется такое $\alpha \in A$, что $x \in M_\alpha$. Следовательно,

$$|xH| \leq \beta(M_\alpha, H) \leq \sup\{\beta(M_\alpha, H) :\ \alpha \in A\}.$$

Возъмем в левой части полученного неравенства верхнюю грань. Тогда получим

$$\beta(M, H) \leq \sup\{\beta(M_\alpha, H) :\ \alpha \in A\}.$$

Неравенство в другую сторону очевидно. $\odot$

Расстоянием по Хаусдорфу между множествами M, $W \in B(X)$ называется число

$$\alpha(M, W) = \max\{\beta(M, W), \beta(W, M)\}.$$

Л.13.2 *Пусть M, $W \in B(X)$. Тогда верны следующие утверждения.*

(i) α — *псевдометрика* (метрика) на множестве $B(X)$ ($B[X]$);

(ii) $\alpha(M, W) = \inf\{r :\ M \subset B(W, r),\ W \subset B(M, r)\}$;

(iii) $\alpha(M, W) = \sup\{||xM| - |xW|| :\ x \in X\}$.

$\odot$ (i) Это следует из определения, утверждения (i) леммы 13.1 и задачи 13.1.

(ii) Это следует из определения и утверждения (ii) леммы 13.1.

(iii) $\sup\{||xM| - |xW|| :\ x \in X\} \geq$

$$\max\{\sup\{||xM| - |xW|| :\ x \in M\}, \sup\{||xM| - |xW|| :\ x \in W\}\} = \alpha(M, W).$$

Докажем неравенство в другую сторону. Для каждого $\varepsilon > 0$ для любого $x \in X$ найдутся такие $m_x \in M$, $w_x \in W$, что

$$|xm_x| \le |xM| + \varepsilon, \qquad |xw_x| \le |xW| + \varepsilon.$$

Тогда

$$|xW| \le |xm_x| + |m_xW| \le |xM| + |m_xW| + \varepsilon \le |xM| + \beta(M,W) + \varepsilon.$$

Аналогично получим неравенство

$$|xM| \le |xW| + \beta(W,M) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$||xM| - |xW|| \le \alpha(W,M) + \varepsilon.$$

Возъмем в левой части полученного неравенства верхнюю грань. Тогда получим

$$\sup\{||xM| - |xW|| : x \in X\} \le \alpha(W,M) + \varepsilon.$$

Осталось перейти в правой части неравенства к пределу при $\varepsilon \to 0$. $\odot$
Рассмотрим еще одно расстояние для M, $W \in B(X)$.

$$D(M,W) = \sup\{|xy| :\ x \in M,\ y \in W\}.$$

Отметим, что для любых M, $W \in B(X)$ верно неравенство
$\alpha(M,W) \le D(M,W)$ и функция $D : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет неравенству треугольника (докажите!). $D(M) = D(M,M)$ — диаметр множества $M \in B(X)$.

Л. 13.3. *Пусть M, W, A, $B \in B(X)$. Тогда*

$$|D(M,W) - D(A,B)| \le \max\{\min\{\beta(M,A) + \beta(W,B), \beta(M,B) + \beta(W,A)\},$$
$$\min\{\beta(A,M) + \beta(B,W), \beta(A,W) + \beta(B,M)\}\}.$$

В частности

$$|D(M) - D(A)| \le 2\alpha(M,A).$$

$\odot$ Выберем произвольно $x \in M$, $y \in W$, $a \in A$, $b \in B$. Применим неравенство треугольника

$$|xy| \le \min\{|xa| + |ab| + |by|, |xb| + |ba| + |ay|\} \le$$

$$\min\{|xa| + |by|, |xb| + |ay|\} + D(A, B).$$

Возьмем в правой части последнего неравенства инфимум по всем $a \in A$, $b \in B$. Тогда получим

$$|xy| \le \min\{|xA| + |yB|, |xB| + |yA|\} + D(A, B) \le$$

$$\min\{\beta(M, A) + \beta(W, B), \beta(M, B) + \beta(W, A)\} + D(A, B).$$

Возьмем теперь в левой части полученного неравенства супремум по всем $x \in M$, $y \in W$. Тогда получим

$$D(M, W) - D(A, B) \le \min\{\beta(M, A) + \beta(W, B), \beta(M, B) + \beta(W, A)\}.$$

Из этого неравенства и произвольности M, W, A, $B \in B(X)$ следует требуемое неравенство. $\odot$

Л.13.4 *Пусть X банахово пространство $p \in X$, M, W, $M_1, \ldots, M_n$, $W_1, \ldots, W_n \in B(X)$. Тогда верны следующие утверждения.*

(i) $\alpha(M_1 + \ldots + M_n, W_1 + \ldots + W_n) \le \alpha(M_1, W_1) + \ldots + \alpha(M_n, W_n)$;

(ii) $\beta(\overline{C(M)}, p) \le \beta(M, p)$.

$\odot$ (i) Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ найдутся такие $x_i \in M_i$, $y_i \in W_i$, что

$$\beta(M_1 + \ldots + M_n, W_1 + \ldots + W_n) \le \rho(x_1 + \ldots + x_n, W_1 + \ldots + W_n) + \varepsilon,$$

$$\beta(W_1 + \ldots + W_n, M_1 + \ldots + M_n) \le \rho(y_1 + \ldots + y_n, M_1 + \ldots + M_n) + \varepsilon.$$

Кроме того, для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ найдутся такие $z_i \in W_i$, что

$$||x_i - z_i|| < \alpha(M_i, W_i) + \varepsilon/n.$$

Тогда

$$\beta(M_1 + \ldots + M_n, W_1 + \ldots + W_n) - \varepsilon \le$$

$$\rho(x_1 + \ldots + x_n, W_1 + \ldots + W_n) \le ||x_1 + \ldots + x_n - (z_1 + \ldots + z_n)|| \le$$

$$||x_1 - z_1|| + \ldots + ||x_n - z_n|| \le \alpha(M_1, W_1) + \ldots + \alpha(M_n, W_n) + \varepsilon.$$

Осталось перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, а затем провести аналогичные рассуждения с заменой M на W.

(ii) Пусть $x \in C_1(M)$. Тогда найдутся такие $\lambda \in [0, 1]$, y, $z \in M$, что

$$x = (1 - \lambda)y + \lambda z.$$

Кроме того,
$$|xp| \le (1-\lambda)|yp| + \lambda|zp| \le \beta(M,p).$$
Следовательно, $\beta(C_1(M),p) \le \beta(M,p)$. По индукции доказывается, что для каждого $n \in \mathbb{N}$
$$\beta(C_n(M),p) \le \beta(M,p).$$
Пусть $x \in C(M)$. Тогда найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $x \in C_n(M)$. Следовательно, $|xp| \le \beta(M,p)$. Возъмем в левой части полученного неравенства верхнюю грань. Тогда получим
$$\beta(\overline{C(M)},p) = \beta(C(M),p) \le \beta(M,p).\odot$$

Т.13.1 *Если пространство* (X,ρ) *— полное, то пространство* $(B[X],\alpha)$ *— полное.*

$\odot$ Пусть $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность в $B[X]$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\alpha(M_n, M_m) < \varepsilon$ для всех m, $n \ge n_0$. Рассмотрим множество M всех таких точек $x \in X$, что для любой окрестности U точки x
$$U \cap M_n \ne \emptyset$$
для бесконечно многих $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\alpha(M_n, M) \to 0$ при $n \to \infty$. Найдется такое $m \ge n_0$, что
$$B(x,\varepsilon) \cap M_m \ne \emptyset,$$
т.е. найдется такая точка $y \in M_m$, что $|xy| < \varepsilon$. Кроме того, $|yM_n| < \varepsilon$. Тогда
$$|xM_n| \le |xy| + |yM_n| < 2\varepsilon.$$
Осталось доказать, что для каждого $x \in M_n$ $|xM| < 2\varepsilon$. Положим $n_1 = n$ и для каждого $k > 1$ выберем такое число $n_k \in \mathbb{N}$, что $n_k < n_{k+1}$ и
$$\alpha(M_l, M_s) < \varepsilon/2^k$$
для любых l, $s \ge n_k$. Пусть $x_1 = x$. В силу того, что для каждого $k \in \mathbb{N}$
$$\alpha(M_{n_k}, M_{n_{k+1}}) < \varepsilon/2^k,$$
найдется точка $x_{k+1} \in M_{n_{k+1}}$ такая, что для каждого $k \in \mathbb{N}$
$$|x_k x_{k+1}| < \varepsilon/2^k.$$

Последовательность $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ фундаментальная, т.к.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k x_{k+1}| < 2\varepsilon.$$

Следовательно, она сходится к некоторой точке $y \in X$. Тогда

$$|xM| \le |xy| = \lim_{k\to\infty} |xx_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k x_{k+1}| < 2\varepsilon.\odot$$

Т.13.2 (Бляшке) *Если пространство (X,ρ) — компактное, то пространство $(B[X],\alpha)$ — компактное.*

$\odot$ Учитывая теорему 13.1, достаточно доказать, что $(B[X],\alpha)$ вполне ограничено. Пусть S конечная ε-сеть в X и $M \in B[X]$. Рассмотрим множество

$$S(M) = \{x \in S : |xM| \le \varepsilon\} \in B[X].$$

Пусть $y \in M$. Тогда найдется такая точка $x \in S$, что $|xy| \le \varepsilon$. Кроме того, $x \in S(M)$, т.к.

$$|xM| \le |xy| \le \varepsilon.$$

Следовательно, для каждого $y \in M$

$$|yS(M)| \le \varepsilon.$$

Тогда $\alpha(M, S(M)) \le \varepsilon$, поскольку по определению $S(M)$ для каждого $x \in S(M)$ $|xM| \le \varepsilon$. В силу произвольности $M \in B[X]$, множество $B[S]$ является ε-сетью в $B[X]$. $\odot$

З.13.1 *Пусть $M \in B(X)$, $\varnothing \ne W \subset X$. $\beta(M,W) = 0$ тогда и только тогда, когда $M \subset \overline{W}$.*

З.13.2 *Если $\beta(M,H) < r$, то $M \subset B(H,r)$.*

З.13.3 *Если для каждого $\alpha \in A$ $H_\alpha \in B(X)$ и $\bigcup\limits_{\alpha\in A} H_\alpha \subset H$, то*

$$\beta(M,H) \le \inf\{\beta(M,H_\alpha) :\ \alpha \in A\}.$$

З.13.4 *Пусть X банахово пространство, $a \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\beta(aM,aW) = |a|\beta(M,W), \qquad \alpha(aM,aW) = |a|\alpha(M,W).$$

З.13.5 *Пусть M, $W \in B(X)$. $\alpha(M,W) = \inf\{r : M \subset N_r(W), W \subset N_r(M)\}$, где*

$$N_r(M) = \{x \in X :\ \exists y \in M(|yx| \le r)\}.$$

0.14 Расстояние по Громову–Хаусдорфу. Метрика Буземана

Расстоянием по Громову–Хаусдорфу между метрическими пространствами (X,ρ), (Y,d) называется величина
$d_{GH}(X,Y) = \inf\{r$: существуют метрическое пространство (Z,d') и его подпространства X', Y', изометричные X, Y соответственно такие, что $\alpha(X',Y') < r\}$. Причем допускается, что $\alpha(X',Y')$ и $d_{GH}(X,Y)$ могут принимать бесконечные значения.

Можно доказать, что $d_{GH}(X,Y) = \inf\{\alpha(X,Y)\}$, где инфимум берется по всем метрикам на $X \cup Y$, продолжающим метрики X и Y.

Л.14.1 *Функция d_{GH} удовлетворяет неравенству треугольника.*

$\odot$ Пусть метрики ρ_{12}, ρ_{23} пространств $X_1 \cup X_2$, $X_2 \cup X_3$ такие, что их сужения на пространства X_1, X_2 и X_3 соответственно, совпадают с исходными метриками этих пространств. Пусть

$$\rho_{13}(x_1,x_3) = \inf\{\rho_{12}(x_1,x_2) + \rho_{23}(x_2,x_3) : x_2 \in X_2\}.$$

Нетрудно проверить, что вместе с исходными метриками на X_1, X_3 ρ_{13} определяет метрику на $X_1 \cup X_3$. Кроме того,

$$\alpha(X_1,X_3) \le \alpha(X_1,X_2) + \alpha(X_2,X_3),$$

где $\alpha(X_i,X_j)$ соответствует метрике α_{ij} при i, $j \in \{1,2,3\}$. $\odot$

Множество $R \subset X \times Y$ называется *соответствием* между множествами X и Y, если для каждой точки $x \in X$ найдется такая точка $y \in Y$, что $(x,y) \in R$, и для каждой точки $y \in Y$ найдется такая точка $x \in X$, что $(x,y) \in R$

Искажением $\mathrm{dis}R$ соответствия R между метрическими пространствами (X,ρ), (Y,d) называется величина

$$\mathrm{dis}R = \sup\{||xx'| - d(y,y')| : (x,y),\ (x',y') \in R\}.$$

Т.14.1 *Для любых метрических пространств X и Y имеет место равенство*

$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\{disR : R\}$, *где инфимум берется по всем соответствиям* R *между* X *и* Y, *т.е.* $d_{GH}(X,Y) = \inf\{r :$ *существует соответствие* R *между* X *и* Y *с* $disR < 2r\}$.

$\odot$ Докажем, что для любого $r > d_{GH}(X,Y)$ найдется соответствие R с $\mathrm{dis}R < 2r$. Можно считать, что X и Y подпространства некоторого пространства Z и $\alpha(X,Y) < r$ в Z, т.к. $d_{GH}(X,Y) < r$. Пусть

$$R = \{(x,y) \in X \times Y : \rho_Z(x,y) < r\}.$$

Это соответствие, поскольку $\alpha(X,Y) < r$. Следовательно, для любых (x,y), $(x',y') \in R$

$$|d_Z(x,x') - d_Z(y,y')| \le d_Z(x,y) + d_Z(x',y') < 2r.$$

Докажем теперь, что для любого соответствия R

$$d_{GH}(X,Y) \le \frac{1}{2}\inf\{\mathrm{dis}R : R\}.$$

Пусть $\mathrm{dis}R = 2r$. Достаточно доказать, что на дизъюнктном объединении $X \cup Y$ найдется такая полуметрика d, что $d|_{X\times X} = d_X$, $d|_{Y\times Y} = d_Y$ и $\alpha(X,Y) \le r$ в $(X \cup Y, d)$. Для любых $x \in X$ и $y \in Y$ положим $d(x,y) = \inf\{d_X(x,x') + r + d_Y(y',y) : (x',y') \in R\}$. Расстояния внутри X, Y прежние — d_X и d_Y соответственно. Теперь нетрудно проверить неравенство треугольника и верность неравенства $\alpha(X,Y) < r$. $\odot$

Пусть $\varepsilon > 0$. Отображение $f : (X,\rho) \to (Y,d)$ называется *ε-изометрией*, если

$$\mathrm{dis}f = \sup\{|d(f(x),f(x')) - |xx'|| : x,\, x' \in X\} \le \varepsilon$$

и образ $f(X)$ является ε-сетью в Y.

С.14.1 *Пусть* (X,ρ), (Y,d) *метрические пространства и* $\varepsilon > 0$. *Тогда*

(i) *если* $d_{GH}(X,Y) < \varepsilon$, *то найдется* 2ε-*изометрия из* X *в* Y;

(ii) *если найдется* ε-*изометрия из* X *в* Y, *то* $d_{GH}(X,Y) < 2\varepsilon$.

$\odot$

(i) Пусть R — соответствие между X и Y с $\mathrm{dis}R < 2\varepsilon$. Для каждой точки $x \in X$ выберем такую точку $f(x) \in Y$, что $(x, f(x)) \in R$. Очевидно, полученное отображение обладает свойством

$$disf \le \mathrm{dis}R < 2\varepsilon.$$

Для точки $y \in Y$ рассмотрим такую точку, что $(x, y) \in R$. Точки y, $f(x)$ находятся в соответствии с x. Тогда

$$d(y, f(x)) \leq |xx| + \mathrm{dis}R < 2\varepsilon.$$

Следовательно, $d(y, f(X)) < 2\varepsilon$.
(ii) Пусть для ε-изометрии f

$$R = \{(x, y) \in X \times Y : d(y, f(x)) \leq \varepsilon\}.$$

Множество R является соответствием, т.к. $f(X)$ является ε-сетью в Y. Если (x, y), $(x', y') \in R$, то

$$|d(y, y') - |xx'|| \leq |d(f(x), f(x')) - |xx'|| + d(y, f(x)) + d(y', f(x')) \leq 3\varepsilon.$$

Следовательно, $\mathrm{dis}R \leq 3\varepsilon$, а по предыдущей теореме

$$d_{GH}(X, Y) \leq \frac{3}{2}\varepsilon < 2\varepsilon.\odot$$

Т.14.2 *d_{GH} является конечной метрикой на пространстве классов изометричных компактных пространств.*

$\odot$ Осталось доказать, что из равенства $d_{GH}(X, Y) = 0$ следует изометричность компактных пространств X и Y. В силу следствия 14.1, найдется такая последовательность отображений $f_n : X \to Y$, что $\mathrm{dis} f_n \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем счетное всюду плотное множество $S \subset X$. Используя канторов диагональный процесс, можно найти такую подпоследовательность (f_{n_k}) последовательности (f_n), что для каждой точки $x \in S$ последовательность $(f_{n_k}(x))$ сходится в Y. Не умаляя общности, можно предположить, что это выполняется для исходной последовательности. Пусть отображение $f : S \to Y$ является пределом последовательности отображений (f_n), т.е. для каждого $x \in S$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

В силу того, что для всех x, $x' \in S$

$$|d(f_n(x), f_n(x')) - |xx'|| \leq \mathrm{dis} f_n \to 0$$

при $n \to \infty$, отображение f сохраняет расстояния. Используя теорему 5.1, продолжим f до сохраняющего расстояния отображения из всего X

в Y. Но существует аналогичное сохраняющее расстояния из Y в X. Следовательно, X и Y изометричны. $\odot$

Соответствие R ассоциировано с сюръекцией $f: X \to Y$, если

$$R = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Назовем соответствие R между множествами X и Y выделенным, если оно ассоциированно или с сюръекцией $f : X \to Y$, или с сюръекцией $g : Y \to X$.

Задача вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа между конкретными ограниченными метрическими пространствами (X, d_X) и (Y, d_Y) с помощью соответствий обычно приводит к большому объему вычислений, поэтому иногда удобнее ввести более простое расстояние

$$d_s(X, Y) = \frac{1}{2} \inf\{\operatorname{dis} R : \ R - \text{выделенное соответствие между } X \text{ и } Y\}.$$

Очевидно, что расстояние d_s симметрично и для любых ограниченных метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y)

$$d_{GH}(X, Y) \leq d_s(X, Y).$$

Пусть $\operatorname{card}(S)$ — мощность множества S. Следующее предложение 1 показывает, что это расстояние также как и расстояние Громова–Хаусдорфа удовлетворяет неравенству треугольника.

Т.14.3 *Пусть (X, d_X), (Y, d_Y) и (Z, d_Z) — ограниченные метрические пространства. Тогда имеет место неравенство*

$$d_s(X, Y) \leq d_s(X, Z) + d_s(Z, Y).$$

$\odot$ Пусть для определенности существует сюръекция из множества X на множество Y. Тогда достаточно рассмотреть следующие три случая.

1. Пусть существуют сюръекции из множества X на множество Z и из множества Z на множество Y, т.е.

$$\operatorname{card}(X) \geq \operatorname{card}(Z) \geq \operatorname{card}(Y).$$

Представим произвольную сюръекцию $f : X \to Y$ в виде композиции сюръекций $g : X \to Z$ и $h : Z \to Y$. Тогда для любых x, $x' \in X$

$$|d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x'))| \leq |d_X(x, x') - d_Z(g(x), g(x'))| +$$

$$|d_Z(g(x), g(x')) - d_Y(h(g(x)), h(g(x')))| \leq$$
$$\sup\{|d_X(x, x') - d_Z(g(x), g(x'))| : x, x' \in X\}+$$
$$\sup\{|d_Z(z, z') - d_Y(h(z), h(z'))| : z, z' \in Z\}.$$

Следовательно,

$$\sup\{|d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x')| : x, x' \in X\} \leq$$
$$\sup\{|d_X(x, x') - d_Z(g(x), g(x'))| : x, x' \in X\}+$$
$$\sup\{|d_Z(z, z') - d_Y(h(z), h(z'))| : z, z' \in Z\}.$$

Взяв сначала инфимум по всем сюръекциям $f : X \to Y$ в левой части полученного неравенства, а затем инфимумы по всем сюръекциям $g : X \to Z$ и $h : Z \to Y$ в правой части неравенства, получим требуемое неравенство.

2. Пусть существует сюръекция из множества Z на множество X. Таким образом,

$$\mathrm{card}\,(Z) \geq \mathrm{card}\,(X) \geq \mathrm{card}\,(Y).$$

Представим произвольную сюръекцию $h : Z \to Y$ в виде композиции сюръекций $g : Z \to X$ и $f : X \to Y$. Тогда для любых $z, z' \in Z$

$$|d_X(g(z), g(z')) - d_Y(f(g(z)), f(g(z')))| \leq |d_X(g(z), g(z')) - d_Z(z, z')|+$$
$$|d_Z(z, z') - d_Y(h(z), h(z'))| \leq \sup\{|d_Z(z, z') - d_X(g(z), g(z'))| : z, z' \in Z\}+$$
$$\sup\{|d_Z(z, z') - d_Y(h(z), h(z'))| : z, z' \in Z\}.$$

Следовательно,

$$\sup\{|d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x')| : x, x' \in X\} \leq$$
$$\sup\{|d_Z(z, z') - d_X(g(z), g(z'))| : z, z' \in Z\}+$$
$$\sup\{|d_Z(z, z') - d_Y(h(z), h(z'))| : z, z' \in Z\}.$$

Взяв сначала инфимум по всем сюръекциям $f : X \to Y$ в левой части полученного неравенства, а затем инфимумы по всем сюръекциям $g : Z \to X$ и $h : Z \to Y$ в правой части неравенства, получим требуемое неравенство.

3. Пусть существует сюръекция множества Y на множество Z. Таким образом,

$$\mathrm{card}\,(X) \geq \mathrm{card}\,(Y) \geq \mathrm{card}\,(Z).$$

Представим произвольную сюръекцию $g : X \to Z$ в виде композиции сюръекций $f : X \to Y$ и $h : Y \to Z$. Тогда для любых $x,\ x' \in X$

$$|d_X(x,x') - d_Y(f(x), f(x'))| \le |d_X(x,x') - d_Z(g(x), g(x'))| +$$

$$|d_Z(h(f(x)), h(f(x'))) - d_Y(f(x), f(x'))| \le$$
$$\sup\{|d_X(x,x') - d_Z(g(x), g(x'))| :\ x,\ x' \in X\} +$$
$$\sup\{|d_Y(y,y') - d_Z(h(y), h(y'))| :\ y,\ y' \in Y\}.$$

Следовательно,

$$\sup\{|d_X(x,x') - d_Y(f(x), f(x')| :\ x,\ x' \in X\} \le$$

$$\sup\{|d_X(x,x') - d_Z(g(x), g(x'))| :\ x,\ x' \in X\} +$$
$$\sup\{|d_Y(y,y') - d_Z(h(y), h(y'))| :\ y,\ y' \in Y\}.$$

Взяв сначала инфимум по всем сюръекциям $f : X \to Y$ в левой части полученного неравенства, а затем инфимумы по всем сюръекциям $g : X \to Z$ и $h : Y \to Z$ в правой части неравенства, получим требуемое неравенство. $\odot$

Отметим, что в случае, когда $\mathrm{card}\,(X) = \mathrm{card}\,(Y)$

$$d_s(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\{\mathrm{dis}\, f :\ f : X \to Y - \text{биекция}\},$$

где $\mathrm{dis}\, f = \sup\{|d_X(x,x') - d_Y(f(x), f(x')| \ :\ x,\ x' \in X\}$ — *искажение биекции* f. Следовательно, в этом случае верна следующая грубая оценка

$$d_s(X,Y) \le \frac{1}{2}\max\{|D(X) - m(Y)|, |D(Y) - m(X)|\},$$

где, например, $m(X) = \inf\{|xy| :\ x,\ y \in X,\ x \ne y\}$.

Пр.14.1 Пусть $M = \{0,1,2,10\}$, $W = \{0,1,9,10\}$ подпространства множества вещественных чисел со стандартной метрикой. Тогда нетрудно вычислить, что

$$d_{GH}(M,W) = 0.5 < \alpha(M,W) = 1 < 3.5 = d_s(M,W).$$

Пр.14.2 Пусть A, B — два множества вершин прямоугольников в евклидовой плоскости с длинами сторон a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно и диагоналями $a_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $b_3 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. Тогда элементарный, но утомительный расчет приведет к равенству

$$d_s(A, B) = \frac{1}{2}\min\{\max\{|a_1 - b_{\sigma(1)}|, |a_2 - b_{\sigma(2)}|, |a_3 - b_{\sigma(3)}|\} : \sigma \in S(3)\},$$

где $S(3)$ — группа всех подстановок трех элементов. Можно также проверить, что $d_{GH}(A, B) = d_s(A, B)$. Уже в этом простом случае проверка ясно покажет, что вычислять $d_{GH}(A, B)$ намного сложнее, чем $d_s(A, B)$.

Пусть $p \in (X, \rho)$. *Метрикой Буземана* на множестве $CL_0(X)$ всех непустых замкнутых подмножеств пространства X называется функция

$$\delta_p : CL_0(X) \times CL_0(X) \to \mathbb{R}_+, \quad \delta_p(M, W) = \sup\{||xM| - |xW||e^{-|px|} : x \in X\}.$$

Л.14.2
(i) Для любого $p \in X$ δ_p — метрика на множестве $CL_0(X)$;
(ii) для любых p, $q \in X$ метрики δ_p, δ_q липшицево эквивалентны.

$\odot$ Из неравенств

$$\delta_p(M, W) = \sup\{||xM| - |xW||e^{-|px|} : x \in X\} \leq$$
$$\sup\{(|xM| + |xW|)e^{-|px|} : x \in X\} \leq$$
$$\sup\{(|pM| + |pW| + 2|px|)e^{-|px|} : x \in X\} \leq |pM| + |pW| + 2$$

следует, что величина $\delta_p(M, W)$ конечная. Докажем неравенство треугольника (другие аксиомы определения метрики легко проверяются). Пусть $\varepsilon > 0$, M, W, $L \in CL_0(X)$. Тогда найдется $z \in X$

$$\delta_p(M, W) - \varepsilon \leq ||zM| - |zW||e^{-|pz|} \leq$$
$$(||zM| - |zL|| + ||zL| - |zW||)e^{-|pz|} \leq \delta_p(M, L) + \delta_p(L, W).$$

Осталось перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.
(ii) Используя очевидное неравенство

$$e^{-|px|} \leq e^{-|qx|}e^{|pq|},$$

получим требуемые неравенства

$$\delta_p(M, W)e^{-|pq|} \leq \delta_q(M, W) \leq \delta_p(M, W)e^{|pq|}. \odot$$

Доказательство следующей сложной теоремы содержится в [3].

Т.14.4 *Если пространство (X, ρ) — собственное, то пространство $(CL_0(X), \delta_p)$ — собственное.*

0.15 Верхний угол. Угол. Пространство направлений. Конус

Треугольник $\triangle xyz$ в метрическом пространстве (X, ρ) состоит из трех точек (вершин) x, y и z, соединенных тремя кратчайшими (сторонами): $[x, y]$, $[y, z]$ и $[z, x]$, с длинами $|xy|$, $|yz|$ и $|zx|$ соответственно.

Пусть M_k^2 евклидова плоскость при $k = 0$, плоскость Лобачевского при $k < 0$ и двумерная открытая полусфера при $k > 0$, радиуса $1/\sqrt{k}$.

Для каждого треугольника $\triangle xyz$ в X построим в плоскости M_k^2 *треугольник сравнения* $\triangle\overline{xyz}$ с теми же длинами сторон (при $k > 0$ всегда считаем, что периметр $\triangle xyz$ меньше, чем $2\pi/\sqrt{k}$.), т.е. $|xy| = |\overline{xy}|$, $|yz| = |\overline{yz}|$ и $|zx| = |\overline{zy}|$. *Угол сравнения* $\tilde{\measuredangle} xyz$ (или $\tilde{\measuredangle}(x, y, z)$) определяется равенством

$$\tilde{\measuredangle} xyz = \arccos \frac{|xy|^2 + |yz|^2 - |zx|^2}{2|xy||yz|}.$$

Пусть $\gamma : [0, \varepsilon) \to X$, $\gamma' : [0, \varepsilon) \to X$ — пути в пространстве (X, ρ_l), исходящие из одной точки $p = \gamma(0) = \gamma'(0)$. *Верхний угол* $\measuredangle_{super}(\gamma, \gamma')$ между γ и γ' определяется равенством

$$\measuredangle_{super}(\gamma, \gamma') = \limsup_{s,t \to 0} \tilde{\measuredangle}(\gamma(s), p, \gamma'(t)),$$

а *угол* $\measuredangle(\gamma, \gamma')$ между γ и γ' определяется равенством

$$\measuredangle(\gamma, \gamma') = \lim_{s,t \to 0} \tilde{\measuredangle}(\gamma(s), p, \gamma'(t)),$$

если только этот предел существует.

Доказательства следующих утверждений можно найти в [8], [2].

Л.15.1
(i) Каждая кратчайшая образует нулевой угол сама с собой;
(ii) если две кратчайшие $[x, y]$, $[y, z]$ таковы, что их произведение есть кратчайшая $[x, z]$, то угол между $[y, x]$ и $[y, z]$ равен π.

Т.15.1. *Пусть три кривые γ_1, γ_2 и γ_3 исходят из одной точки p. Тогда*

(i) если существуют углы $\alpha_1 = \measuredangle(\gamma_2, \gamma_3)$, $\alpha_2 = \measuredangle(\gamma_1, \gamma_3)$, $\alpha_3 = \measuredangle(\gamma_1, \gamma_2)$, то они удовлетворяют следующему неравенству треугольника $\alpha_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2$;
(ii) верно неравенство $\measuredangle_{super}(\gamma_1, \gamma_2) \leq \measuredangle_{super}(\gamma_2, \gamma_3) + \measuredangle_{super}(\gamma_1, \gamma_3)$;
(iii) если z — внутренняя точка кратчайшей $[x, y]$ и углы $\measuredangle uzx$, $\measuredangle uzy$ существуют, то их сумма не меньше, чем π.

Говорят, что кривая γ (с началом в p) *имеет направление* в точке p, если $\measuredangle_{super}(\gamma, \gamma) = 0$. Две кривые γ_1, γ_2 *имеют одинаковое направление* в точке p, если угол $\measuredangle_{super}(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ (заметим, что в силу (ii) теоремы 15.1, в этом случае кривые γ_1, γ_2 имеют в точке p направление).

Две кривые из множества всех, имеющих направление в точке p, назовем эквивалентными, если они имеют одинаковое направление. Нетрудно проверить, что это действительно отношение эквивалентности на данном множестве. Класс эквивалентных кривых называется *направлением.*

T.15.2 *Множество направлений в данной точке образует метрическое пространство, в котором расстояние между двумя направлениями определяется верхним углом между ними.*

Конус $Con(X)$ над метрическим пространством (X, ρ) — это результат склеивания в одну точку всех точек слоя $X \times \{0\}$ в прямом произведении $X \times [0, \infty)$. Эта точка называется *вершиной конуса.*

Расстояние $\rho_c(a, b)$ между точками $a = (x, t)$, $b = (y, s)$ на конусе $Con(X)$ задается следующим образом

$$\rho_c(a, b) = \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts\cos(|xy|)}$$

при $|xy| \leq \pi$,

$$\rho_c(a, b) = t + s$$

при $|xy| \geq \pi$.

T.15.3
(i) $(Con(X), \rho_c)$ — метрическое пространство.
(ii) Метрика ρ_c на $Con(X)$ — внутренняя (строго внутренняя) тогда и только тогда, когда метрика ρ — внутренняя (строго внутренняя) на расстояниях меньших, чем π. Последнее значит, что для любых x, $y \in X$ таких, что $|xy| < \pi$, найдется кривая в X, соединяющая x и y такая, что ее длина сколь угодно близка (равна) $|xy|$.

0.16 β-непрерывность многозначного отображения метрических пространств. Метрическая δ-проекция. Множество существования и чебышевское множество. Аппроксимативная компактность

Отображение $f : (X, \rho) \to (B(Y), d)$ называется *β-непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для каждой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to\infty} \beta(f(x_n), f(x)) = 0.$$

β-непрерывное в каждой точке области определения отображение называется *β-непрерывным* отображением. При замене в этом определении β на α, мы получим определение непрерывности этого отображения относительно псевдометрики α Хаусдорфа.

Л.16.1 *β-непрерывное в каждой точке отображение*
$f : (X, \rho) \to (B(Y), d)$ является β-непрерывным на любом компакте $M \subset X$, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, M) > 0$, что $\beta(f(W), f(M)) \leq \varepsilon$ для каждого $W \subset B(M, \delta)$.

$\odot$ По определению β-непрерывности в произвольной точке $x \in X$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, что $\beta(f(x'), f(x)) < \varepsilon$ для каждого $x' \subset B(x, \delta)$. Из покрытия M такими $\delta(\varepsilon, x)$-шарами выбираем конечное покрытие

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta(\varepsilon, x_i)),$$

где $x_i \in M$ для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Множество G — открыто, следовательно, множество $X \backslash G$ — замкнуто, причем $\rho(M, X\backslash G) > 0$. Пусть $\delta(\varepsilon, M) = \rho(M, X\backslash G)$ и $W \subset B(M, \delta(\varepsilon, M)) \subset G$ — произвольное подмножество. Тогда по свойствам отклонения Хаусдорфа

$$\beta(f(W), f(M)) \leq \sup\{\inf\{\beta(f(y), f(x)) : x \in M\} : y \in W\} \leq$$

$$\sup\{\min\{\beta(f(y), f(x_i)) : i \in \{1, \ldots, n\}\} : y \in W\} \leq \varepsilon. \odot$$

С.16.1 *Суперпозиция двух β-непрерывных отображений, в первом из которых любой точке отвечает бикомпакт, является β-непрерывным отображением.*

Пусть $\delta \geq 0$, $x \in X$, $M \subset X$, $M \neq \emptyset$.

$$x_M^\delta = \{y \in M : |xy| \leq |xM| + \delta\}\,(x_M = x_M^0)$$

— *метрическая δ-проекция* (*метрическая проекция*) точки x на множество M.

$$P : X \times 2^X \times \mathbb{R}_+ \to 2^X,\ P(x, M, \delta) = x_M^\delta$$

— *оператор метрического δ-проектирования* (*оператор метрического проектирования*, если $\delta \equiv 0$). Мы будем использовать также следующие обозначения:

$$P_M(x) = P(M, x) = x_M.$$

Множество $M \subset X$ называется *множеством существования* (*чебышевским множеством*), если для каждого $x \in X$ $x_M \neq \emptyset$ (x_M — одноточечно). Чебышевское множество M называется *сильно чебышевским*, если отображение P_M — непрерывно.

Последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в множестве $M \subset X$ называется *минимизирующей последовательностью* для точки $x \in X$, если

$$\lim_{n\to\infty} |xy_n| = |xM|.$$

Множество $M \subset X$ называется *аппроксимативно компактным*, если для каждой точки $x \in X$ любая минимизирующая последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ имеет подпоследовательность, сходящуюся к элементу из M.

Л.16.2
(i) Если M — множество существования, то $M \neq \oslash$ — замкнутое множество и для каждого $x \in X$ x_M — замкнутое множество.
(ii) Если M — аппроксимативно компактное множество, то M — множество существования и для каждого $x \in X$ x_M — компактное множество.
(iii) Если M — аппроксимативно компактное множество, то метрическая проекция $P_M : X \to 2^X$ является β-непрерывным отображением.

$\odot$ (i) Пусть $x \in \overline{M}$ и $y \in x_M$. Тогда $|xy| = |xM| = 0$. Следовательно, $\overline{M} = M$. Пусть $x \in X$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность в x_M, сходящаяся к точке $y \in X$. Тогда

$$|xy| = \lim_{n\to\infty} |xy_n| = |xM|$$

и $y \in \overline{M} = M$. Таким образом, $y \in x_M$ и x_M — замкнутое множество.
(ii) Пусть $x \in X$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — минимизирующая последовательность для точки $x \in X$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} |xy_n| = |xM|.$$

Тогда найдется подпоследовательность такая $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ последовательности $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что

$$\lim_{m\to\infty} y_m = y \in M.$$

Кроме того,

$$|xy| = \lim_{m\to\infty} |xy_m| = |xM|.$$

Следовательно, $y \in x_M$ и M — множество существования. В силу доказанного утверждения (i), множества M, x_M замкнуты. Следовательно, x_M — компактное множество.
(iii) Докажем методом от противного. Пусть последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $x \in X$, но

$$\beta(P_M(x_n), P_M(x))$$

не сходится к нулю. Тогда найдутся число $a > 0$, подпоследовательность $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, точка $z_m \in P_M(x_m)$ для каждого $m \in \mathbb{N}$ такие, что начиная с некоторого номера $m_0 \in \mathbb{N}$ $|z_m P_M(x)| > a$. Докажем, что последовательность $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ минимизирующая для точки x. Переходя в неравенствах

$$|xM| \le |xz_m| \le |xx_m| + |x_m z_m| = |xx_m| + |x_m M| \le 2|xx_m| + |xM|$$

к пределу при $m \to \infty$, получим, что

$$\lim_{m\to\infty} |xz_m| = |xM|.$$

В силу аппроксимативной компактности множества M, найдется подпоследовательность $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (z_m)_{m\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторой точке $z \in P_M(x)$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} |z_k P_M(x)| \le \lim_{k\to\infty} |z_k z| = 0.$$

Получили противоречие. $\odot$

C.16.2 *Метрическая проекция на аппроксимативно компактное чебышевское множество непрерывна.*

З.16.1 *Пусть M — непустое замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве $(X, ||\cdot||)$. Тогда метрическая проекция произвольной точки $x \in X$ на множество M состоит не более чем из одной точки.*

З.16.2 *Используя задачу 1.1, докажите, что непустое замкнутое выпуклое множество M в гильбертовом пространстве $(X, ||\cdot||)$ является чебышевским множеством.*

0.17 Непрерывность метрической δ-проекции и β-непрерывность обратного отображения

Установим сначала факт непрерывности метрической δ-проекции.

Л.17.1 *Пусть $x \in (X, \rho)$, $M \subset X$ — компактно,*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n x| = 0,\ \lim_{n\to\infty} \alpha(M_n, M) = 0,\ \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0,$$

где для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\delta_n \geq 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \beta(P_n(x_n, M_n, \delta_n), P(x, M)) = 0.$$

В случае, когда $\delta_n \equiv 0$ считается, что для каждого

$$n \in \mathbb{N} \quad P_n(x_n, M_n, \delta_n) \neq \emptyset.$$

$\odot$ Докажем методом от противного. Пусть утверждение неверно. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что для бесконечной последовательности индексов n (можно считать, для всех индексов) найдутся такие

$$q_n \in P_n(x_n, M_n, \delta_n) \cap (X \backslash B(P(x, M), \varepsilon)),$$

что множество предельных точек последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не пересекается с открытым шаром $B(P(x, M), \varepsilon)$. С другой стороны, для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $z_n \in M$, что $|z_n q_n| \leq 2\alpha(M_n, M)$. Следовательно, множество предельных точек последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ совпадает с непустым множеством предельных точек последовательности $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$q_n \in B[x_n, |x_n M_n| + \delta_n] \subset B[x_n, |xM| + \alpha(M_n, M) + |xx_n| + \delta_n]$$

$$\subset B[x, |xM| + \alpha(M_n, M) + 2|xx_n| + \delta_n].$$

Тогда непустое множество предельных точек последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ принадлежит шару $B[x, |xM|]$, а следовательно и множеству

$$P(x, M) = M \cap B[x, |xM|].$$

Получили противоречие. $\odot$

Пр.17.1 При выполнении условий леммы 2.1 сходимость по Хаусдорфу может отсутствовать. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ $M_n = M$, $\delta_n \equiv 0$,

$$X = \mathbb{R}^2, \; M = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, \; x \leq 0\},$$

$x_0 = (0; 0)$, $x_n = (1/n; 0)$. Тогда

$$P(x_n, M) = \{(0; 1), (0; -1)\}, \; P(x_0, M) = M$$

и для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\beta(P(x_n, M), P(x, M)) = \beta(\{(0; 1), (0; -1)\}, M) = 0$,

$$\alpha(P(x_n, M), P(x, M)) = \beta(M, P(x_n, M)) = \sqrt{2}.$$

В случае, когда X — линейное нормированное пространство, приведем без доказательства один из результатов А. В. Маринова о непрерывности метрической δ-проекции. Для геодезических пространств специального типа существуют аналогичные результаты, но их описание выходит за рамки этого пособия.

Т.17.1 *Пусть M — выпуклое множество линейного нормированного пространства X, $x, y \in X$, $N \subset X$, ε, $\delta > 0$. Тогда выполняется неравенство :*

$$\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq (\frac{2|xM|\}}{\varepsilon} + 1)(|\varepsilon - \delta| + 2|xy| + 3\alpha(M, N)).$$

Если оба множества M, N выпуклы, ε, $\delta \geq 0$, $\mu = \max(\varepsilon, \delta) > 0$, то

$$\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq (\frac{2\min\{|xM|, |yN|\}}{\mu} + 1)(|\varepsilon - \delta| + 2|xy| + 3\alpha(M, N)).$$

В следующей лемме рассмотрена β-непрерывность обратного отображения.

Л.17.2 *Пусть $A : (X\rho) \to (Y, d)$ — замкнутый оператор с областью определения $D(A)$, $\hat{M} \subset X$ компакт, $M = D(A) \cap \hat{M} \neq \oslash$, $y \in A(M)$,*

$$\lim_{n\to\infty} |y_n y| = 0, \; \lim_{n\to\infty} \beta(M_n, M) = 0,$$

где для каждого $n \in \mathbb{N}$ $M_n \subset D(A)$ и $y_n \in A(M_n)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \beta(B_n(y_n), B(y)) = 0,$$

где $B : A(M) \to M$, $B_n : A(M_n) \to M_n$ — обратные отображения для A и $A|_{M_n}$ соответственно.

$\odot$ Докажем методом от противного. Пусть утверждение неверно. Тогда найдутся такие $y \in A(M)$, $\varepsilon > 0$ и бесконечные последовательности объектов, удовлетворяющих условиям леммы 17.2, для которых

$$B_n(y_n) \cap (X \backslash B(B(y), \varepsilon)) \neq \emptyset$$

при $n \geq 1$. Взяв прообразы при $n \geq 1$

$$x_n \in B_n(y_n) \backslash B(B(y), \varepsilon),$$

убеждаемся, что множество предельных точек последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не принадлежит шару $B(B(y), \varepsilon)$. С другой стороны, $x_n \in M_n \subset B(M, 2\beta(M_n, M))$. Следовательно, можно найти $z_n \in M \cap B(x_n, 2\beta(M_n, M)) \subset \hat{M}$. В силу компактности $\hat{M}$, множество предельных точек последовательности $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ непусто. Тогда непусто и множество предельных точек последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \beta(M_n, M) = 0$. Пусть x — предельная точка последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Упрощая обозначения, можно считать, что

$$\lim_{n\to\infty} |x_n x| = 0, \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A).$$

Тогда $A(x_n) = y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Но оператор A замкнут, следовательно, $x \in D(A)$ и $x \in M$. Таким образом, $A(x) = y$ и $x \in B(y)$. Получили противоречие. $\odot$

С.17.1 *Если оператор A биективен на M, то при выполнении остальных условий леммы 17.2*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(B_n(y_n), B(y)) = 0.$$

Если же оператор A биективен на X, то имеет место обычная сходимость.

0.18 Метрическая δ-проекция и ε-квазирешение операторного уравнения первого рода

Операторным уравнением первого рода называется уравнение вида $Ax = y$, $x \in X$, $y \in (Y, d)$, где X — топологическое пространство. Требуется по заданному элементу y найти решение — элемент x.

Если обратный оператор A^{-1} неограничен, то решение x неустойчиво относительно погрешности задания элемента y, т.е. малые изменения правой части приводят к большим изменениям решения.

Пусть $M \subset X$. Элемент $x' \in M$ назавается *ε-квазирешением* операторного уравнения первого рода на множестве $M \subset X$ при $\varepsilon \geq 0$, если

$$d(Ax', y) \leq \inf\{d(Au, y) + \varepsilon : u \in M\}.$$

Если $\varepsilon = 0$, то ε-квазирешение называется *квазирешением или обобщенным решением*, при этом неравенство можно заменить равенством. Другими словами, элемент x' минимизирует *невязку* $d(Au, y)$ уравнения первого рода на множестве M с погрешностью, не превосходящей заданного $\varepsilon \geq 0$. Совокупность всех ε-квазирешений уравнения первого рода на множестве M обозначается $Q(y, A, M, \varepsilon)$. Найдем связь между совокупностью всех ε-квазирешений уравнения первого рода, метрической ε-проекцией и обратным оператором.

Л.18.1 *Пусть $Ax = y$ — операторное уравнение первого рода, где $x \in X$, $y \in (Y, d)$ и X — топологическое пространство. Тогда для всех $\emptyset \neq M \subset X$, $\varepsilon \geq 0$ имеет место равенство*

$$Q(y, A, M, \varepsilon) = R_M \circ P(y, A(M), \varepsilon),$$

где $R_M : A(M) \to 2^M$, $R_M = M \cap A^{-1}(y)$. В частности, при $X = (Y, d)$

$$Q(x, id, M, \varepsilon) = P(x, M, \varepsilon).$$

$\odot$ Утверждение следует из следующих импликаций

$$z \in Q(y, A, M, \varepsilon) \Leftrightarrow z \in M,\ d(Az, y) \leq \inf\{d(Au, y) + \varepsilon : u \in M\} \Leftrightarrow$$

$$Az \in B[y, \inf\{d(Au, y) + \varepsilon : u \in M\}] \cap A(M) \Leftrightarrow z \in R_M \circ P(y, A(M), \varepsilon).\odot$$

Замечание 18.1 *Преимуществом ε-квазирешений является их существование и эффективная вычислимость.*

Пусть каждому элементу $y \in (Y, d)$ отвечает единственное решение $x = R_M(y) = M \cap A^{-1}(y)$. Задача определения решения $x = R_M(y)$ из X по исходным данным $y \in Y$ называется *устойчивой на пространствах* (X, ρ), (Y, d), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $|x_1 x_2| \le \varepsilon$ при $d(y_1, y_2) \le \delta$, где $x_i = R_M(y_i)$, $y_i \in Y$, $x_i \in X$, $i = 1, 2$. Эта задача называется *корректно поставленной по Адамару на паре метрических пространств* $((X, \rho), (Y, d))$, если удовлетворяются требования :

(i) для каждого $y \in Y$ существует единственное решение $x \in X$, т.е. $Ax = y$;

(ii) задача устойчива на пространствах (X, Y).

Если одно из этих условий не выполнено, то задача называется некорректно поставленной.

Эта же задача называется *корректной по Тихонову*, если

(i) известно, что для точного значения $y = y_T$ существует единственное решение x_T уравнения $Ax_T = y_T$, принадлежащее заданному компакту $M \subset X$ (т.е. $x_T \in M$);

(ii) и если вместо элемента y_T известен такой элемент y_δ, что $d(y_T, y_\delta) \le \delta$ и $y_\delta \in A(M)$ при $\delta \ge 0$, то в качестве приближенного решения операторного уравнения с правой частью $y = y_\delta$ можно взять $x_\delta = A^{-1}(y_\delta)$ (т.е. при $\delta \to 0$ $y_\delta \in A(M)$ и $x_\delta \to x_T$).

Т.18.1 *Если уравнение $Ax = y$ может иметь на компакте M не более одного решения и проекция каждого элемента $y \in Y$ на множество $A(M)$ единственна, то квазирешение этого уравнения единственно и непрерывно зависит от правой части y.*

$\odot$ Пусть $\hat{x}$ — квазирешение и $\hat{y} = A\hat{x}$. Тогда

$$d(A\hat{x}, y) \le \inf\{d(Au, y) : u \in M\}.$$

Следовательно, $\hat{y} = y_{A(M)}$. В силу биективности $A : M \to A(M)$, квазирешение $\hat{x} = A^{-1}\hat{y} = A^{-1}y_{A(M)}$ единственно. Кроме того, оператор A^{-1} непрерывен на $A(M)$ и оператор проектирования P непрерывен на Y. Следовательно, оператор $A^{-1} \circ P$ непрерывен на Y и квазирешение $\hat{x}$ непрерывно зависит от правой части y $\odot$

Замечание 18.2 *Теорему 18.1 можно доказать без условия единственности, если понимать непрерывность множества квазирешений в смысле непрерывности многозначных отображений.*

Пусть $m \in (X, \rho)$. Для заданных на m операторов
A_1, $A_2 : (X, \rho) \to (Y, d)$ определим расстояние

$$\rho_m(A_1, A_2) = \sup\{\frac{d(A_1 x, A_2 x)}{|x\theta|} : x \in m\},$$

где $\theta \in X$ фиксированный элемент. Наряду с точным уравнением $Ax = y$, $y \in Y$ и множеством его квазирешений $Q = Q(y, A, M)$ на $M \subset X$, рассмотрим приближенные уравнения $A_n x = y_n$, $y_n \in Y$, $n \geq 1$ и $Q(y_n, A_n, M_n)$ на $M_n \subset X$, $n \geq 1$. Операторы A, A_n определены на

$$m = \bigcup_{n \geq 1} M_n \bigcup M$$

и действуют в пространство (Y, d).

Т.18.2 *Пусть $M \in (X, \rho)$ — компакт, оператор $A : X \to (Y, d)$ непрерывен на множестве*

$$m = \bigcup_{n \geq 1} M_n \bigcup M, \ \lim_{n \to \infty} y_n = y, \ \lim_{n \to \infty} \rho_m(A_n, A) = 0, \ \lim_{n \to \infty} \alpha(M_n, M) = 0.$$

Тогда при непустых $Q_n = Q(y_n, A_n, M_n)$ $(n \geq 1)$

$$\lim_{n \to \infty} \beta(Q_n, Q) = 0.$$

$\odot$ $A(M)$ — компакт, т.к. M — компакт и оператор A непрерывен. Тогда $P(y, A(M)) \neq \oslash$ — компакт и существует квазирешение операторного уравнения. Пусть $x_n \in Q_n$ приближенное квазирешение при $n \geq 1$. Тогда $d(y_n, A_n(M_n)) = d(y_n, A_n x_n)$. Кроме того, при $n \geq 1$

$$d(y_n, Ax_n) \leq d(y_n, A_n x_n) + d(Ax_n, A_n x_n) = d(y_n, A_n(M_n)) + d(Ax_n, A_n x_n) \leq$$

$$d(y_n, A(M_n)) + \beta(A(M_n), A_n(M_n)) + d(Ax_n, A_n x_n).$$

Следовательно, $Ax_n \in P(y_n, A(M_n), \eta_n)$, где

$$\eta_n = d(Ax_n, A_n x_n) + \beta(A(M_n), A_n(M_n)), \ n \geq 1.$$

Множество m можно считать ограниченным, поскольку M — компакт и

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(M_n, M) = 0.$$

Тогда найдется такая константа $R > 0$, что для каждого $x \in m$ $|x\theta| \leq R$ и для каждого $n \geq 1$ $d(Ax_n, A_n x_n) \leq r_n R$, где $r_n = \rho_m(A_n, A)$. Теперь для каждого $n \geq 1$ нетрудно получить, что $\beta(A(M_n), A_n(M_n)) \leq r_n R$ и $\eta_n \leq 2r_n R$. Тем самым доказано, что для каждого $n \geq 1$

$$A(Q_n) \subset P(y_n, A(M_n), 2r_n R).$$

Применяя к этому включению обратный оператор $B : A(M_n) \to M_n$, получим для каждого $n \geq 1$ включение $Q_n \subset B \circ P(y_n, A(M_n), 2r_n R)$. Из леммы 1.1, непрерывности оператора A и условия

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(M_n, M) = 0$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \beta(A(M_n), A(M)) = 0.$$

Теперь, применяя лемму 18.1 и следствие 18.1, получим

$$\lim_{n\to\infty} \beta(B \circ P(y_n, A(M_n), 2r_n R), B \circ P(y, A(M))) = 0,$$

где $B : A(M) \to M$ — обратный оператор. Это тем более справедливо для меньших множеств Q_n, $n \geq 1$. $\odot$

0.19 Наилучшее аппроксимирующее множество. Относительные чебышевский центр и чебышевский радиус. Множество диаметральных точек непустого ограниченного множества метрического пространства

Пусть Σ — семейство непустых подмножеств в пространстве (X, ρ). Множество $S^* \in \Sigma$ называется *наилучшим аппроксимирующим множеством* из семейства Σ для множества $M \in B(X)$, если

$\beta(M, S^*) = R_\Sigma(M)$, где $R_\Sigma(M) = \inf\{\beta(M, S) : S \in \Sigma\}$.

Пусть $N \in \mathbb{N}$. Назовем число

$$R_{NW}(M) = \inf\{\beta(M,S) : \ S \subset W, \ 1 \leq \mathrm{card}\,(S) \leq N\}$$

относительным N-радиусом множества $M \in B(X)$ относительно непустого множества $W \subset X$. При $N = 1$ говорят об *относительном чебышевском радиусе множества* и обозначают его

$$R_W(M) = \inf\{\beta(M,x) : x \in W\}.$$

Если $W = X$, то $R_{NX}(M)$ — *наилучший радиус аппроксимации* множества $M \in B(X)$ N-сетями пространства X. При $N = 1$ говорят о *чебышевский радиусе множества* $M \in B(X)$ и обозначают его $R(M) = R_X(M)$.

Наилучшей N-сетью множества $M \in B(X)$ называется такое множество $S^*_{NX}(M) \subset X$, что

$$1 \leq \mathrm{card}\,(S^*_{NX}(M)) \leq N \quad \text{и} \quad \beta(M, S^*_{NX}(M)) = R_{NX}(M).$$

При $N = 1$ говорят о *чебышевский центре множества* $M \in B(X)$.

$Z_W(M) = \{x \in W : \beta(M,x) = R_W(M)\}$ — *множество всех относительных чебышевских центров множества* M.

$Z(M) = Z_X(M)$ — *множество всех чебышевских центров* множества M.

$H(M) = \{x \in M : \beta(M,x) = D(M)\}$ — *множество диаметральных точек множества* M.

Кроме того, используем обозначениия $R_0(M) = R_M(M)$, $Z_0(M) = Z_M(M)$.

Оценим сверху разность между относительными N-радиусами двух ограниченных множеств с помощью отклонений между рассматриваемыми множествами. Тогда в качестве следствия получим оценку этой разности с помощью расстояний по Хаусдорфу между рассматриваемыми множествами.

Т.19.1 *Пусть M, W, A, $B \in B(X)$. Тогда*

(i) $|R_{NW}(M) - R_{NB}(A)| \leq \max\{\beta(M,A) + \beta(B,W), \beta(A,M) + \beta(W,B)\}$

для каждого $N \in \mathbb{N}$;

(ii) $R_W(M) \leq R(M) + |Z(M)W|$ *при* $Z(M) \neq \oslash$*;*

(iii) $R_W(M) \leq R_0(M) + |Z_0(M)W|$ *при* $Z_0(M) \neq \oslash$*;*

(iv) $|R_\Sigma(M) - R_\Sigma(W)| \leq \alpha(M, W)$.

$\odot$ (i) Выберем произвольно $S_B \subset B$, где $1 \leq \operatorname{card}(S_B) \leq N$ и запишем неравенство треугольника для отклонения Хаусдорфа

$$\beta(M, S_B) \leq \beta(M, A) + \beta(A, S_B).$$

Взяв инфимум по всем $S_B \subset B$ $(1 \leq \operatorname{card}(S_B) \leq N)$ сначала в левой части, а затем в правой части этого неравенства, получим следующее неравенство

$$R_{NB}(M) \leq \beta(M, A) + R_{NB}(A). \tag{$*$}$$

Докажем вспомогательное равенство

$$\beta(S_B, W) = \inf\{\beta(S_B, S) :\ S \subset W,\ 1 \leq \operatorname{card}(S) \leq N\}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Для каждого $y \in S_B$ найдется такой элемент $w_y \in W$, что

$$|yw_y| < |yW| + \varepsilon.$$

Тогда $1 \leq \operatorname{card}(S_W) \leq N$, где $S_W = \{w_y :\ y \in S_B\}$. Кроме того, для каждого $y \in S_B$

$$|yS_W| \leq |yw_y| < |yW| + \varepsilon \leq \beta(S_B, W) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\beta(S_B, S_W) \leq \beta(S_B, W) + \varepsilon.$$

Требуемое равенство можно теперь получить, если в следующих неравенствах

$$\beta(S_B, W) \leq \inf\{\beta(S_B, S) :\ S \subset W,\ 1 \leq \operatorname{card}(S) \leq N\} \leq$$

$$\beta(S_B, S_W) \leq \beta(S_B, W) + \varepsilon$$

перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. Используем полученное равенство для доказательства еще одного вспомогательного неравенства

$$R_{NW}(M) \leq \beta(B, W) + R_{NB}(M). \tag{$**$}$$

Действительно, если в правой части неравенств

$$R_{NW}(M) = \inf\{\beta(M, S) :\ S \subset W,\ 1 \leq \operatorname{card}(S) \leq N\} \leq$$

$$\beta(M, S_B) + \inf\{\beta(S_B, S) :\ S \subset W,\ 1 \leq \operatorname{card}(S) \leq N\} =$$

$$\beta(M,S_B)+\beta(S_B,W)\le\beta(M,S_B)+\beta(B,W)$$

взять инфимум по всем $S_B\subset B$ ($1\le\operatorname{card}(S_B)\le N$), то получим неравенство $(**)$. Используя доказанные неравенства $(*)$ и $(**)$, получим

$$R_{NW}(M)-R_{NB}(A)\le R_{NW}(M)-R_{NB}(M)+R_{NB}(M)-R_{NB}(A)\le$$

$$\beta(B,W)+\beta(M,A),$$

Из полученного неравенства и произвольности M, W, A, $B\in B(X)$ следует требуемое неравенство (i).
(ii) Для любых $y\in Z(M)$, $x\in W$ верно неравенство
$\beta(M,x)\le\beta(M,y)+|yx|$. Тогда из этого неравенства и определений $R(M)$, $Z(M)$ следует, что
$R_W(M)\le\beta(M,y)+|yW|=R(M)+|Z(M)W|$.
(iii) Для любых $y\in Z_0(M)$, $x\in W$ верно неравенство
$\beta(M,x)\le\beta(M,y)+|yx|$. Тогда из этого неравенства и определений $R_0(M)$, $Z_0(M)$ следует, что
$R_W(M)\le\beta(M,y)+|yW|=R_0(M)+|Z_0(M)W|$.
(iv) Пусть $x\in M$ и $\tau>0$. Тогда найдется точка $z\in W$ такая, что $|xz|\le|xW|+\tau$. Кроме того, получим неравенства
$|xS|\le|xz|+|zS|\le|xW|+|zS|+\tau\le$

$$\sup_{x\in M}|xW|+\sup_{z\in W}|zS|+\tau\le\alpha(M,W)+\sup_{z\in W}|zS|+\tau$$

для $S\in\Sigma$. Отсюда следует, что

$$\inf_{S\in\Sigma}\sup_{x\in M}|xS|\le\alpha(M,W)+\sup_{z\in W}|zS|+\tau.$$

Переходя к точной нижней грани в правой части и используя произвольность выбора $\tau>0$, получим

$$R_\Sigma(M)=\inf_{S\in\Sigma}\sup_{x\in M}|xS|\le\alpha(M,W)+\inf_{S\in\Sigma}\sup_{z\in W}|zS|=\alpha(M,W)+R_\Sigma(W).$$

Неравенство $R_\Sigma(W)\le\alpha(M,W)+R_\Sigma(M)$ получается аналогично. $\odot$

C.19.1 *Пусть* M, W, A, $B\in B(X)$. *Тогда*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}|R_{NW}(M)-R_{NB}(A)|\le\alpha(M,A)+\alpha(W,B);$$

$$|R_0(M)-R_0(A)|\le\beta(M,A)+\beta(A,M)\le2\alpha(M,A).$$

З.19.1 *Если $M \in B(X)$, то условие а) $H(M) = M$ равносильно условию б) $Z_0(M) = M$. Из этих условий следует, что в) $R_0(M) = D(M)$. Если M — компакт, то условия а), б), в) равносильны.*

З.19.2 *Пусть $M \in B(X)$. Если $M \cap Z(M) \neq \emptyset$, то $Z_0(M) = M \cap Z(M)$, $R_0(M) = R(M)$.*

З.19.3 *Пусть M, W, $T \in B(X)$. Тогда $R_W(M) \leq R_T(M) + R_W(T)$ и $\theta : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}_+$, $\theta(M, W) = \max\{R_W(M), R_M(W)\}$ — функция, удовлетворяющая неравенству треугольника, а также неравенствам $\alpha(M, W) \leq \theta(M, W) \leq D(M, W) = \sup\{|xy| : x \in M,\ y \in W\}$.*

З.19.4 *Для любых $M, W \in B[X]$ множество $Z_W(M)$ ($H(M)$) замкнуто в множестве W (M) с индуцированной метрикой.*

0.20 Наилучшая N-сеть непустого ограниченного множества сопряженного пространства

N-сетью пространства X называется непустое множество, состоящее не более чем из N точек. Обозначим через Σ_N множество всех N-сетей пространства (X, ρ). *Радиусом покрытия множества $M \in B(X)$*
N-сетью $S \in \Sigma_N$ называется число $\beta(M, S)$. При $\Sigma = \Sigma_N$, $M \in B(X)$ используем обозначение $R_N(M) = \inf\{\beta(M, S) : S \in \Sigma_N\}$. Наиболее общая теорема, в которой устанавливаются достаточные условия для существования наилучшей N-сети непустого ограниченного множества сопряженного пространства доказана Гаркави А. Л. (в случае метрического пространства такие условия пока (2008 г.) не известны).

Т.20.1 *Если пространство $(X, ||\cdot||)$ является сопряженным к некоторому нормированному пространству $\hat{X}$, то для каждого $M \in B(X)$ найдется наилучшая N-сеть.*

$\odot$ Для последовательности положительных вещественных чисел $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем такую N-сеть $S^n = \{y_1^n, \ldots, y_N^n\}$, что

$$\beta(M, S^n) \leq R_N(M) + \varepsilon_n.$$

При этом для всех $k \in \{1, \ldots, N\}$, $n \in \mathbb{N}$ нормы элементов $||y_k^n||$ ограничены некоторой константой $A > 0 : ||y_k^n|| \leq A$. Пусть

$B^{(1)}[0,A],\ldots,B^{(N)}[0,A]$ — N экземпляров замкнутого шара пространства X. В произвольном шаре из этого набора зададим окрестность точки x_0 неравенствами $|f_m(x-x_0)|<\varepsilon$, где m принадлежит конечному подмножеству множества $\mathbb{N}$, $f_m\in\hat{X}$ и $f_m(x)=x(f_m)$. Тем самым, в этом шаре индуцируется слабая топология, относительно которой он компактен по теореме Банаха-Алаоглу. Следовательно, множество

$$Q=B^{(1)}[0,A]\times\ldots\times B^{(N)}[0,A]$$

компактно по теореме Тихонова и для последовательности $(u_n)=((y_1^n,\ldots,y_N^n))$ найдется предельная точка $u^*=(y_1^*,\ldots,y_N^*)\in Q$. Кроме того, для каждого $x\in M$

$$||x-y_{k_n}^n||\le R_N(M)+\varepsilon_n,$$

где $k_n=k_n(x)\in\{1,\ldots,N\}$. Предположим, что N-сеть $S^*=\{y_1^*,\ldots,y_N^*\}$ не является наилучшей. Тогда найдутся такие точка $x\in M$ и число $\alpha>0$, что для всех $k\in\{1,\ldots,N\}$

$$||x-y_k^*||>R_N(M)+\alpha.$$

Кроме того, найдутся такие элементы $f_1,\ldots,f_N\in\hat{X}$, что для всех $k\in\{1,\ldots,N\}$

$$||f_k||=1,\ |f_k(x)-f_k(y_k^*|>R_N(M)+\alpha.$$

С другой стороны, найдется такое $m\in\mathbb{N}$, что для всех $n>m$

$$|f_k(x)-f_k(y_k^*|\le|f_k(x)-f_k(y_{k_n}^n)|+|f_k(y_{k_n}^n)-f_k(y_k^*)|\le$$

$$||x-y_{k_n}^n||+|f_k(y_{k_n}^n)-f_k(y_k^*)|\le R_N(M)+\varepsilon_n+|f_k(y_{k_n}^n)-f_k(y_k^*)|.$$

Зададим окрестность $O(u^*)$ точки u^* неравенствами $|f_k(y)-f_k(y_k^*)|<\alpha/2$ при $k=1,\ldots,N$. В силу того, что u^* — предельная точка последовательности (u_n), найдется такое $n_0>m$, что $u_{n_0}\in O(u^*)$, т.е.

$$|f_k(y_k^{n_0})-f_k(y_k^*)|<\alpha/2$$

при $k=1,\ldots,N$. Тогда, полагая $k_{n_0}=k_0\in\{1,\ldots,N\}$, получим

$$|f_{k_0}(x)-f_{k_0}(y_{k_0}^*|\le|f_{k_0}(x)-f_{k_0}(y_{k_0}^{n_0})|+|f_{k_0}(y_{k_0}^{n_0})-f_{k_0}(y_{k_0}^*)|\le R_N(M)+\alpha.$$

Получили противоречие. $\odot$

З.20.1 *Найти наилучшую N-сеть для круга евклидовой плоскости.*

З.20.2 *Найти $Z_0(S)$, где S — 3-сеть евклидовой плоскости.*

З.20.3 *Найти наилучшую 2-сеть для эллипса евклидовой плоскости.*

З.20.4 *Найти наилучшую 2-сеть для прямоугольника евклидовой плоскости.*

0.21 Достаточные условия существования и единственности чебышевского центра непустого ограниченного множества

Для формулировки достаточных условий существования и единственности чебышевского центра непустого ограниченного множества введем несколько условий.

A. Для любых x, $y \in (X, \rho)$ существует единственная точка $\omega(x, y) \in X$ такая, что

$$|x\omega(x, y)| = |y\omega(x, y)| = |xy|/2.$$

B_1. Для всех p, x, $y \in (X, \rho)$ верно неравенство

$$|p\omega(x, y)| \leq \max\{|px|, |py|\}.$$

B_2. Отображение $\omega : X \times X \to X$ равномерно непрерывно на каждом множестве $B \times B$, где B — произвольный замкнутый шар пространства (X, ρ).

C_1. Для каждого $r > 0$ и для любых ограниченных последовательностей (p_n), (x_n), (y_n) в пространстве (X, ρ) таких, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$|p_n x_n| \leq r, \quad |p_n y_n| \leq r, \quad \lim_{n\to\infty} |p_n \omega(x_n, y_n)| = r$$

верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n y_n| = 0$.

C_2. Для каждого $r > 0$, для каждой сходящейся к нулю последовательности неотрицательных вещественных чисел (ε_n) и для любых ограниченных последовательностей (p_n), (x_n), (y_n) в пространстве (X, ρ) таких, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$|p_n x_n| \leq r + \varepsilon_n, \quad |p_n y_n| \leq r + \varepsilon_n, \quad \lim_{n\to\infty} |p_n \omega(x_n, y_n)| = r$$

верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty}|x_ny_n| = 0$.

Примерами полных метрических пространств, в которых выполнены условия (A), (B_1), (B_2), (C_2), являются равномерно выпуклое банахово пространство и пространство Адамара (в частности, пространство Лобачевского). Напомним, что полное метрическое пространство (X, ρ) называется *пространством Адамара*, если для любых x, $y \in X$ найдется такое $m \in X$, что для любого $z \in X$

$$|xy|^2 + 4|zm|^2 \leq 2(|xz|^2 + |yz|^2).$$

Т.21.1 *Для каждого непустого ограниченного множества метрического пространства, удовлетворяющего условиям* (A), (B_1), (C_1), *существует не более одного чебышевского центра.*

$\odot$ Пусть x, y чебышевские центры множества $M \in B(X)$. Тогда из определения чебышевского центра и условий (A), (B_1) следует, что верны неравенства

$$\sup_{u\in M}|\omega(x,y)u| \leq \sup_{u\in M}\max\{|xu|, |yu|\} \leq R(M).$$

Тогда $\omega(x, y)$ — чебышевский центр множества M и из определения чебышевского центра следует, что в множестве M найдется такая последовательность (p_n), что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}|p_n\omega(x,y)| = R(M),\ |p_nx| \leq R(M),\ |p_ny| \leq R(M).$$

В силу условия (C_1), получим $x = y$. $\odot$

Т.21.2 *Для каждого непустого ограниченного множества полного метрического пространства, удовлетворяющего условиям* (A), (B_1), (C_2), *существует единственный чебышевского центр.*

$\odot$ Для множества $M \in B(X)$ рассмотрим семейство непустых замкнутых множеств

$$K_\varepsilon(M) = \{y \in X : \beta(M, y) \leq R(M) + \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$.

Это семейство обладает следующими элементарными свойствами :

а) если $\alpha \leq \varepsilon$, то $K_\alpha(M) \subset K_\varepsilon(M)$;

b) $\cap\{K_\varepsilon(M) : \varepsilon > 0\}$ есть множество всех чебышевских центров множества M.

По теореме 21.1 существует не более одного чебышевского центра множества M. Выберем сходящуюся к нулю последовательность положительных веществeных чисел (ε_n) и для каждого $n \in \mathbb{N}$ такие точки x_n, $y_n \in K_{\varepsilon_n}(M)$, что

$$diam(K_{\varepsilon_n}(M)) \leq |x_n y_n| + \varepsilon_n.$$

В силу условий (A), (B_1), определения чебышевского радиуса и множества $K_\varepsilon(M)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ получим

$$R(M) \leq \sup_{z \in M} |z\omega(x_n, y_n)| \leq \sup_{z \in M} \max\{|zx_n|, |zy_n|\} \leq R(M) + \varepsilon_n. \quad (1)$$

Следовательно, в множестве M найдется такая последовательность (z_n), что

$$\lim_{n \to \infty} |z_n \omega(x_n, y_n)| = R(M). \quad (2)$$

Теперь, в силу условия (C_2), получим $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n y_n| = 0$. Тогда по теореме Кантора множество $\cap\{K_\varepsilon(M) : \varepsilon > 0\}$ состоит из одной точки. ⊙

Т.21.3 *Для каждого непустого ограниченного множества полного метрического пространства, удовлетворяющего условиям* (A), (B_1), (B_2), (C_1), *существует единственный чебышевский центр.*

⊙ Начало доказательства этой теоремы совпадает с доказательством теоремы 6.2 за исключением последнего равенства. Рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{N}$ такие точки u_n, v_n в сегментах $[z_n, x_n]$, $[z_n, y_n]$, что

$$|u_n x_n| = \mu_n |z_n x_n|, \; |v_n y_n| = \mu_n |z_n y_n|,$$

где

$$\mu_n = \frac{\varepsilon_n}{R(M) + \varepsilon_n}.$$

Используя эти равенства и неравенства (1) получим для каждого $n \in \mathbb{N}$ вспомогательные неравенства

$$|u_n x_n| \leq \varepsilon_n, \; |y_n v_n| \leq \varepsilon_n, \; |z_n u_n| \leq R(M), \; |z_n v_n| \leq R(M).$$

В свою очередь, из этих неравенств, определений точек u_n, v_n, равенства (2) и условия (B_2), получим

$$\lim_{n \to \infty} |z_n \omega(u_n, v_n)| = R(M).$$

Следовательно, в силу условия (C_1),

$$\lim_{n\to\infty} |u_n v_n| = 0.$$

Из этого равенства и неравенств

$$|x_n y_n| \le |x_n u_n| + |u_n v_n| + |v_n y_n| \le 2\varepsilon_n + |u_n v_n|$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$ получим $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n y_n| = 0$. Тогда по теореме Кантора множество $\cap\{K_\varepsilon(M) : \varepsilon > 0\}$ состоит из одной точки. $\odot$

З.21.1 *Найти чебышевский центр для треугольника и четырехугольника евклидовой плоскости.*

0.22 Наилучшие аппроксимирующие компакты и чебышевские центры выпуклых множеств специальных геодезических пространств

Т.22.1 *Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (A), (B_1), (B_2), (C_1). Тогда каждое выпуклое замкнутое множество является аппроксимативно компактным, сильно чебышевским множеством.*

$\odot$ Докажем аппроксимативную компактность множества M. Пусть $p \in X\backslash M$, (x_n) — минимизирующая последовательность в множестве M и $y_n = [p, x_n] \cap S(p, pM)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} |x_n y_n| = \lim_{n\to\infty} (|x_n p| - |p y_n|) = \lim_{n\to\infty} (|x_n p| - |pM|) = 0.$$

Из условия (B_2) следует, что $|\omega(x_n, x_m)\omega(y_n, y_m)| \to 0$ при $n \to \infty$, $m \to \infty$. Кроме того, $\omega(y_n, y_m) \in B[p, pM]$, $\omega(x_n, x_m) \in M$ для всех n, $m \in \mathbb{N}$, поскольку M, $B[p, pM]$ — выпуклые множества. Пусть для всех n, $m \in \mathbb{N}$

$$a_{nm} \in S(p, pM) \cap [\omega(x_n, x_m), \omega(y_n, y_m)].$$

Тогда

$$|pM| - |\omega(y_n, y_m) a_{nm}| = |p a_{nm}| - |\omega(y_n, y_m) a_{nm}| \le |p\omega(y_n, y_m)| \le |pM|$$

и значит, $|p\omega(y_n, y_m)| \to |pM|$ при $n \to \infty$, $m \to \infty$.
Из условия (C_1) получим $|y_n y_m| \to 0$ при $n \to \infty$, $m \to \infty$. Но пространство X — полное, поэтому найдется такая точка $y \in S(p, |pM|)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Из неравенства $|yx_n| \leq |x_n y_n| + |yy_n|$ следует теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y \in M \cap S(p, |pM|).$$

Значит, множество M — аппроксимативно компактно. Пересечение $M \cap S(p, |pM|)$ содержит не более одной точки. Действительно, в противном случае сфера содержала бы невырожденный отрезок, поскольку множества M, $B[p, |pM|]$ выпуклые. Тогда в силу условия (C_1) мы получили бы противоречие. Следовательно, множество M чебышевское. Осталось использовать следствие 1.2. $\odot$

В дальнейшем вместо $\bigcup\limits_{x\in W} P_M(x)$ будем писать $P_M(W)$, где $\oslash \neq W \subset X$. Нам понадобится еще одно условие на пространство (X, ρ)

(D) *Для каждого* $x \in (X, \rho)$ *и для любой точки* p *из произвольного сегмента* $[u, v] \subset X$ *верно неравенство* $|pP_{[u,v]}(x)| \leq |px|$.

Л.22.1 *Пусть* X *— полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям* (A), (B_1), (B_2), (C_1), (D), W *— непустое множество в* X, M *— непустое замкнутое ограниченное выпуклое множество в* X. *Тогда имеют место неравенства :*
(i) $|xP_M(W)| \leq |xW|$ *для каждого* $x \in M$;
(ii) $\beta(M, P_M(W)) \leq \beta(M, W)$.

$\odot$ (i) Из теоремы 7.1 и условий леммы 7.1 следует, что оператор P_M является однозначным и непрерывным в пространстве X. Выберем произвольно $x \in M$, $y \in W$. Тогда найдется единственная точка $y_1 = P_M(y)$. В силу выпуклости множества M, $[x, y_1] \subset M$. Тогда, используя условие (D), получим, что

$$|xP_M(y)| = |xP_{[x,y_1]}(y)| \leq |xy|.$$

Следовательно, $|xP_M(W)| \leq |xy|$ и $|xP_M(W)| \leq |xW|$.
(ii) Неравенство (ii) доказывается переходом к точной верхней грани по всем $x \in M$ сначала в правой части неравенства (i), а затем в левой части полученного неравенства. $\odot$

С.22.1 *Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (A), (B_1), (B_2), (C_1), (D), Z — наилучшее аппроксимирующее множество из семейства Σ для непустого замкнутого ограниченного выпуклого множества $M \subset X$ и $P_M(Z) \in \Sigma$. Тогда $P_M(Z)$ — наилучшее аппроксимирующее множество для множества M.*

Л.22.2 *Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (A), (B_1), (B_2), (C_1), (D), $M \in B(X)$. Тогда существует единственный чебышевский центр множества M, принадлежащий замыканию выпуклой оболочки множества M, совпадающий с чебышевскими центрами замыкания выпуклой оболочки множества M и выпуклой оболочки множества M.*

$\odot$ Существование и единственность чебышевского центра $Cheb(M)$ непустого ограниченного множества M следует из теоремы 22.3, а из условий (A), (B_1) следует, что замкнутые шары пространства X выпуклые. Тогда

$$M \subset C(M) \subset \overline{C(M)} \subset B[Cheb(M), R(M)] \Rightarrow$$
$$R(M) = R(C(M)) = R(\overline{C(M)}).$$

Из Следствия 22.1 и единственности чебышевского центра следует, что

$$Cheb(M) \subset \overline{C(M)},\ Cheb(M) = Cheb(C(M)) = Cheb(\overline{C(M)}).\odot$$

З.22.1 *Пространство Адамара удовлетворяет условиям (A), (B_1), (B_2), (C_1), (D).*

0.23 Непрерывность метрической проекции. Свойства близкие к β-непрерывности множества всех относительных чебышевских центров, множества диаметральных точек и наилучших аппроксимирующих компактов

Л.23.1 *Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (A), (B_1), (B_2), (C_1), (D), M — непустое ограниченное замкнутое выпуклое множество пространства X, (W_n) — последовательность непустых ограниченных замкнутых множеств пространства X,* *сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторому компакту $W \subset X$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(P_M(W_n), P_M(W)) = 0.$$

$\odot$ Из теоремы 22.1 и условий леммы 23.1 следует, что M является аппроксимативно компактным, сильно чебышевским множеством. Кроме того, в силу утверждения (iii) леммы 16.2, оператор P_M является β-непрерывным на компакте $W \subset X$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \beta(P_M(W_n), P_M(W)) = 0.$$

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \beta(P_M(W), P_M(W_n)) = 0$$

методом от противного. Пусть это утверждение неверно, тогда найдутся константа $c > 0$ и подпоследовательность $(W_m) \subset (W_n)$ такие, что $\beta(P_M(W), P_M(W_m)) > c$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, найдется последовательность $(z_m) \subset W$ такая, что $|P_M(z_m)P_M(W_m)| > c$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, найдется подпоследовательность $(z_k) \subset (z_m)$, сходящаяся к некоторой точке $z \in W$, так как W — компактно. Но оператор P_M является непрерывным, поэтому найдется такое число $k_0 \in \mathbb{N}$, что $|P_M(z)P_M(W_k)| > c$ для каждого $k > k_0$. Из условия

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(W_k, W) = 0$$

следует, что найдется последовательность (y_k), $y_k \in W_k$, сходящаяся к точке z. Но тогда

$$\lim_{k\to\infty} |P_M(z)P_M(W_k)| \leq \lim_{k\to\infty} |P_M(z)P_M(y_k)| = 0.$$

Получили противоречие. $\odot$

T.23.1 *Пусть X — метрическое пространство, M, $M_n \in K(X)$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(M_n, M) = 0.$$

Тогда найдется такая подпоследовательность $(M_k) \subset (M_n)$, что

$$(i)\ \lim_{k\to\infty} \beta(Z_0(M_k), Z_0(M)) = 0;$$

$$(ii)\ \lim_{k\to\infty} \beta(H(M_k), H(M)) = 0.$$

$\odot$ Из задачи 19.4 и компактности множеств M, M_n следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такой элемент $z_n \in Z_0(M_n)$ ($z_n \in H(M_n)$), что

$$|z_n Z_0(M)| = \beta(Z_0(M_n), Z_0(M)) \quad (|z_n H(M)| = \beta(H(M_n), H(M))).$$

(i) Тогда $\alpha(M_n, z_n) = \beta(M_n, z_n) = R_0(M_n)$. Используя условия теоремы, найдем такие подпоследовательность $(z_k) \subset (z_n)$ и элемент $z \in M$, что

$$\lim_{k\to\infty} |z_k z| = 0.$$

Тогда, в силу следствия 19.1 и непрерывности метрики α, получим $\beta(M, z) = \alpha(M, z) = R_0(M)$. Следовательно, $z \in Z_0(M)$ и

$$\lim_{k\to\infty} \beta(Z_0(M_k), Z_0(M)) = \lim_{k\to\infty} |z_k Z_0(M)| = 0.$$

(ii) Тогда $\alpha(M_n, z_n) = \beta(M_n, z_n) = D(M_n)$. Используя условия теоремы, найдем такие подпоследовательность $(z_k) \subset (z_n)$ и элемент $z \in M$, что

$$\lim_{k\to\infty} |z_k z| = 0.$$

Тогда, в силу утверждения (v) теоремы 4.1 и непрерывности метрики α, получим $\beta(M, z) = \alpha(M, z) = D(M)$. Следовательно, $z \in H(M)$ и

$$\lim_{k\to\infty} \beta(H(M_k), H(M)) = \lim_{k\to\infty} |z_k H(M)| = 0.\odot$$

Пр.23.1. Рассмотрим в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ 3-сети

$$S = \{O(0;0), A(1/2;\sqrt{3}/2), B(-1/2;\sqrt{3}/2)\},$$

$$S_n = \{C_n(0;1/n), A(1/2;\sqrt{3}/2), B(-1/2;\sqrt{3}/2)\},$$

где $n \in \{2, 3, \dots\}$. Тогда нетрудно проверить, что при $n \in \{2, 3, \dots\}$

$$\alpha(S_n, S) = 1/n, \quad Z_0(S) = H(S) = S, \quad Z_0(S_n) = \{C_n\}, \quad H(S_n) = \{A, B\},$$

$$\alpha(Z_0(S_n), Z_0(S)) = |BC_n|, \quad \alpha(H(S_n), H(S)) = 1.$$

Таким образом, в теореме 23.1, в общем случае, нельзя заменить отклонение β на метрику Хаусдорфа.

Л.23.2 *Пусть X — равномерно выпуклое банахово пространство и множества M, $W \in B(X)$ такие, что* $\mathrm{Cheb}(M) \in \overline{C(M)}$,

$$\mathrm{Cheb}(W) \in \overline{C(W)}, \quad B(\mathrm{Cheb}(M), R(M)) \cap B(\mathrm{Cheb}(W), R(W)) = \oslash.$$

Тогда

$$|\mathrm{Cheb}(M)\mathrm{Cheb}(W)| \le 2\alpha(M,W).$$

$\odot$ Отметим, что условие $\mathrm{Cheb}(M) \in \overline{C(M)}$ для $M \in B(X)$ автоматичеси выполнено для вещественного гильбертова пространства, в силу леммы 7.2, или двумерного равномерно выпуклого банахова пространства X. Пусть для определенности $R(W) \le R(M)$. Тогда

$$|\mathrm{Cheb}(M)\mathrm{Cheb}(W)| = |\mathrm{Cheb}(M)B[\mathrm{Cheb}(W),R(W)]| + R(W) \le$$

$$\sup\{|xB[\mathrm{Cheb}(W),R(W)]| : x \in \overline{C(M)}\} + R(W) =$$

$$\sup\{|xB[\mathrm{Cheb}(W),R(W)]| : x \in \overline{M}\} + R(W) \le 2\alpha(M,W).\odot$$

Но отображение Cheb в общем случае не является липшицевым.

Л.23.3 *Пусть* $N > 2$*,* X *— евклидово пространство (пространство Лобачевского) размерности больше единицы и* U *— окрестность* $\Sigma_2(X)$ *в пространстве* $(\Sigma_N(X),\alpha)$*. Тогда*
(i) *отображение* $\mathrm{cheb} : (U,\alpha) \to X$ *не является липшицевым;*
(ii) *в евклидовом случае отображение* $\mathrm{cheb} : (\Sigma_N(X),\alpha) \to X$ *не является равномерно непрерывным.*

$\odot$ Нетрудно понять, что доказательство достаточно изложить в случае плоскости при $N = 3$. Пусть x, y — две различные точки в евклидовой плоскости (плоскости Лобачевского) и S_+ — половина окружности, построенная на отрезке $[x,y]$ как на диаметре. Определим переменную точку $z \in S_+$ такую, что $|yz| \in (0,|xy|/2)$. Затем найдем точку u, удовлетворяющую условиям : a) $z \in [x,u]$; b) точка y принадлежит окружности, построенной на отрезке $[x,u]$ как на диаметре. Рассмотрим 3-сети $M = \{x,y,z\}$, $Z = \{x,y,u\} \in \Sigma_3(X)\backslash\Sigma_2(X)$ в евклидовой плоскости (плоскости Лобачевского). Тогда, очевидно, $v = \mathrm{cheb}(M) = \omega(x,y)$, $w = \mathrm{cheb}(Z) = \omega(x,u)$ и $|uz| = \alpha(M,Z)$. В евклидовой плоскости для каждой константы $L > 0$ уточним положение точки $z \in S_+$, подчинив ее дополнительному условию $2L|yz| < |xy|$. Тогда нетрудно получить $|\mathrm{cheb}(M)\mathrm{cheb}(Z)| = |vw| = (|xy|)(|uz|)/(2|zy|) > L|uz| = L\alpha(M,Z)$. Отсюда следует верность леммы 23.3 в случае евклидового пространства. Пусть p — основание перпендикуляра, проведенного из точки v к отрезку $[x,w]$, и ψ — угол при вершине w треугольника $\triangle xvw$ в плоскости Лобачевского. По построению треугольники $\triangle xvw$, $\triangle wpv$ — прямоугольные. Следовательно, имеют место формулы $\tanh|pv| = \sinh|pw|\tan\psi$, $\tanh|vx| = \sinh|vw|\tan\psi$.

Тогда отношение $\sinh|vw|/\sinh|pw| = \tanh|vx|/\tanh|pv|$ стремится к ∞ при $(|pv| \to 0)$. Но тогда отношение $|\mathrm{cheb}(M)\mathrm{cheb}(Z)|/\alpha(M,Z) = |vw|/(2|pw|)$ также стремится к ∞ при $(|pv| \to 0)$. Отсюда следует верность леммы 23.3 и в случае пространства Лобачевского. $\odot$

Т.23.2 *Пусть (M_n) — последовательность непустых ограниченных замкнутых множеств пространства (X,ρ). Тогда*

A. Если $M \in \Sigma$,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(M_n, M) = 0,$$

$(K_n) \subset \Sigma$ — последовательность наилучших аппроксимирующих множеств для последовательности (M_n) такая, что для каждого натурального n $K_n \subset M_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(K_n, M) = 0;$$

B. Если M — компакт в X,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(M_n, M) = 0,$$

(S_N^n) – последовательность наилучших N-сетей для последовательности (M_n) такая, что для каждого натурального n $S_N^n \subset M_n$, то найдется подпоследовательность последовательности (S_N^n), сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторой наилучшей N-сети множества M.

$\odot$ *A*. Из условий теоремы 23.2 и утверждения (iv) теоремы 19.1 нетрудно получить :

$$\beta(K_n, M) \le \beta(M_n, M) \le \alpha(M_n, M),$$

$$\beta(M, K_n) \le \beta(M, M_n) + \beta(M_n, K_n) = \beta(M, M_n) + R_\Sigma(M_n) \le 2\alpha(M, M_n)$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(K_n, M) = 0.$$

B. Из условий теоремы 23.2 следует, что найдется такая подпоследовательность

$$(S_N^m = \{y_1^m, \dots y_N^m\}) \subset (S_N^n),$$

что существуют пределы

$$y_i^* = \lim_{m\to\infty} y_i^m \quad (1 \le i \le N).$$

Пусть $S_N^* = \{y_1^*, \dots y_N^*\}$. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$\beta(M, S_N^*) \leq \beta(M, M_m) + \beta(M_m, S_N^m) + \beta(S_N^m, S_N^*) \leq$$

$$\alpha(M, M_m) + R_N(M_m) + \beta(S_N^m, S_N^*).$$

Из условия теоремы, утверждения (iv) теоремы 19.1 и определения N-сети S_N^* следует, что правая часть полученного неравенства стремится к $R_N(M)$ при $(m \to \infty)$. Следовательно, S_N^* является наилучшей N–сетью для множества M. $\odot$

Следствие 23.1 (**теоремы 23.2 и следствия 22.1**) *Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (A), (B_1), (B_2), (C_1), (D), (M_n) — последовательность непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств пространства X, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторому компакту $M \subset X$. Тогда*
A. Если (K_n) — последовательность наилучших аппроксимирующих компактов для последовательности (M_n), то найдется подпоследовательность $(M_m) \subset (M_n)$, для которой найдется последовательность $(\hat{K}_m)$ наилучших аппроксимирующих компактов, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к множеству M;
B. Если (S_N^n) — последовательность наилучших N-сетей для последовательности (M_n), то найдется подпоследовательность $(M_m) \subset (M_n)$, для которой найдется последовательность $(\hat{S}_N^m)$ наилучших N-сетей, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторой наилучшей N-сети множества M.

Литература

1. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. - Москва–Ленинград: Гостехиздат. - 1948. - 387 с.

2. Александров А. Д., Залгаллер В. А. Двумерные многообразия ограниченной кривизны.(Основы внутренней геометрии поверхностей). - Тр. матем. ин-та им. Стеклова. LXIII. - Москва–Ленинград: Изд-во АН СССР. - 1962. - 263 с.

3. Буземан Г. Геометрия геодезических. - М.: Физматгиз. - 1962. - 503 с.

4. Busemann H., Phadke B. B. Spaces with Distinguished Geodesics. - New York - Basel - Marsel Dekker Inc. - 1987. - 159 p.

5. Ballman W. Lectures on spaces of nonpositive Curvature. DMV Seminar 25. Birkhauser. -1995. - 112 p.

6. Bridson M. R., Haeffliger A. Metric spaces of non-positive curvature. Ser. A Series of Comprehensive Stadies in Mathematics. Vol. 319. - Berlin: Springer-Verlag. - 1999. - 643 p.

7. Gromov M. Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Progress in Mathematics 152. Birkhauser. Boston. -1999. - 578 p.

8. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. - Москва–Ижевск: Институт компьютерных иследований. - 2004. - 496 с.

9. Papadopoulos A. Metric spaces convexity and nonpositive curvature. - Zurich: European Math. Society. - 2005. - 287 p.

10. Куратовский К. Топология. – М.: Мир, 1966. - Т. 1. - 594 с.

11. Белобров П.К. О чебышевской точке системы множеств // Изв. вузов. Математика. - 1966. - No. 6. - С. 18 - 24.

12. Власов Л.П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Успехи матем. наук. - 1973. - Т.28. - Вып.6 (174). - С.3-66.

13. Гаркави А.Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи матем. наук. - 1964. - Т. 19. - Вып. 6. - С. 139 - 145.

14. Гаркави А. Л. О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве // Изв. АН СССР. Серия матем. - 1962. - Т. 26. - No. 1. - С. 87 - 106.

15. Diestel J. Geometry of Banach Spaces. LNM485. Springer-Verlag, 1975.

16. Engelking R., General topology, Moscow, "Mir"Publishing House, 1986. (Russian)

17. Лисковец О.А. Некорректные задачи и устойчивость квазирешений // Сиб. мат. ж. - 1969. - Т.10. - No.2. - С.373 - 385.

18. Маринов А.В. Устойчивость ε-квазирешений операторных уравнений 1 рода // Приближение функций полиномами и сплайнами : Сб. статей / АН СССР. УНЦ. - Свердловск : УНЦ АН СССР. - 1985. - С. 105 - 117.

19. Сосов Е.Н. Об аппроксимативных свойствах множеств в специальном метрическом пространстве // Известия вузов. Математика. - 1999. - No. 6. - С. 81 - 84.

20. Sosov E.N. On existence and uniqueness of Chebyshev center of a bounded set in a special geodesic space // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2000. - Vol. 7. - P. 43 - 46.

21. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. - М.: Изд-во Московского ун-та. - 1976.