Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского

Том 52

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

ТОМ 52

ЛОБАЧЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2015

Материалы Четырнадцатой
Всероссийской молодежной
школы-конференции
(Казань, 22 – 27 октября 2015 г.)

Казанское математическое общество
2015

РФФИ

Российский фонд фундаментальных исследований

Издание осуществлено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-31-10441 мол_г)

УДК 51+533
ББК 22.1 – 22.1
Т78

Печатается по рекомендации Редакционно-издательского совета Казанского математического общества

Составитель – Р. К. Губайдуллина

Т78 Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 52 / Казанское математическое общество. «Лобачевские чтения – 2015» // *Материалы Четырнадцатой Всероссийской молодежной научной школы-конференции* / под общ. ред. проф. С. Р. Насырова. – Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2015. – Т. 52. – 180 с.

ISBN 978-5-9690-0268-5

Сборник содержит материалы Четырнадцатой Всероссийской молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2015», организованной на базе Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета. Школа-конференция проведена в Казани с 22 по 27 октября 2015 года при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях математики, механики и их приложений.

УДК 51+533
ББК 22.1 – 22.1

ISBN 978-5-9690-0268-5

ЛИТЕРАТУРА

1. Савенкова А. Е. *Обратная задача с интегральным условием переопределения для гиперболического уравнения* // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2014. – № 3(114). – С. 83–92.

А. А. Саламатин, К. Г. Корнев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

Clemson University,

arthouse131@rambler.ru, kkornev@clemson.edu

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ ДВУУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ: АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

В работе моделируется течение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрическом канале (со свободной поверхностью) и трубе (без свободной поверхности) под действием постоянного градиента давления. Сечение столба жидкости (область Ω) изображено на Рис. 1 и представляет собой двуугольник, являющийся результатом разности, пересечения или объединения двух кругов (пунктирные кривые 1, 2 и 3 соответственно).

Квазистационарное приближение течения сводится к двумерному уравнению Пуассона относительно продольной компоненты v вектора скорости, безразмерный вид которого

$$\Delta v(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Форма области Ω полностью определяется тремя параметрами: углом $\theta \in (0; 2\pi)$ двуугольника и радиусами образующих кругов.

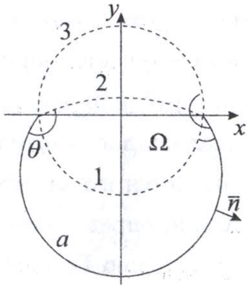

Рис. 1. Область течения Ω. Дугами малого радиуса отмечен угол θ; $\overline{n}$ – вектор внешней единичной нормали к границе Ω.

Рассматриваемые классы течений отличаются заданием граничного условия на верхнем ребре (кривые 1–3) двуугольника Ω: жидкость в канале обладает свободной поверхностью, на которой задается условие отсутствия трения $(\partial v/\partial n = 0)$, а для жидкости в трубе на том же ребре ставится условие прилипания $(v = 0)$. На втором ребре (кривая a) всегда задается условие прилипания.

Для каждого типа течения на основе известных формул Пуассона и Дини для задач Дирихле и Неймана на полуплоскости построено аналитическое решение $v(x, y)$. Для этого осуществлен переход от исходной задачи к эквивалентному уравнению Лапласа с неоднородным граничным условием на кривых 1–3 и построено конформное отображение $\xi + i\eta = f(x + iy)$ исходной области Ω на квадрант $\{\xi > 0, \eta > 0\}$. Задача в квадранте допускает продолжение на всю верхнюю полуплоскость $\eta > 0$, что окончательно приводит к задаче Дирихле (течение в трубе) или Неймана (течение в канале) на полуплоскости. Таким образом, решение имеет вид суммы двух интегралов типа Коши по действительной оси.

Аналитическое представление скорости $v(x, y)$ позволяет исследовать напряжения $\partial v/\partial n$, возникающие на стенках канала или трубы в результате течения жидкости. Для этого при $\theta < \pi/2$ (случай тонких труб или жидкости, хорошо смачивающей канал) потребовалась дополнительная регуляризация решения. Причина заключается в том, что производная плотности интеграла типа Коши, определяющего решение, не удовлетворяет при $\theta < \pi/2$ условию Гельдера. В результате для течения трубе было показано, что при $\pi < \theta < 2\pi$ (объединение двух кругов) напряжения в углах имеют интегрируемую особенность, а при $\theta \leqslant \pi$ напряжения ограничены.

А. А. Самсонов, П. С. Соловьёв, С. И. Соловьёв

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

sergei.solovyev@kpfu.ru

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НАГРУЖЕННОЙ ПЛАСТИНЫ

Пусть Ω – область, занимаемая срединной поверхностью пластины, Γ – граница области Ω, $\rho = \rho(x)$ – плотность материала, $D = D(x) = Ed^3/12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость пластины, $E = E(x)$ – модуль Юнга, $\nu = \nu(x)$ – коэффициент Пуассона, $d = d(x)$ – толщина пластины в точке $x \in \Omega$. Предположим, что в точках пластины $x^{(ij)} \in \Omega$ упруго присоединены массы M_{ij} с коэффициентами жесткости подвески K_{ij}, $\sigma_{ij} = K_{ij}/M_{ij}$, $\sigma_i = \sigma_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, r_i$, $r_i \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $m \geqslant 1$, $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_m < \infty$.

Обозначим через $w(x, t)$ нормальные перемещения точки $x \in \Omega$ срединной поверхности пластины в момент времени t,

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ