Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

СЕКАЕВА Л.Р., ТЮЛЕНЕВА О.Н., ШИРОКОВА Е.А.

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ-ГЕОЛОГОВ

Учебное пособие

Казань
2014

УДК 517

Печатается по решению учебно-методической комиссии ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Протокол № 9 от 16 июня 2014 г.

Заседания кафедры общей математики КФУ Протокол № 8 от 22 мая 2014 г.

Авторы-составители:
канд. физ.- мат. наук, доц. Л.Р. Секаева
канд. физ.- мат. наук, доц. О.Н. Тюленева
доктор физ.- мат. наук, доц. Е.А. Широкова

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, проф. КФУ Н.Г. Гурьянов,
канд. техн. наук, доц. КГАСУ Н.А. Иваньшин

Курс лекций по математике для бакалавров-геологов: Учебное пособие / Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева, Е.А. Широкова. – Казань: Казанский федеральный университет, 2014. – 251 с.

Учебное пособие представляет собой конспект лекций по математике для студентов 1-го и 2-го курсов Института геологии и нефтегазовых технологий для направления «05.03.01 Геология». Оно содержит основные понятия и методы линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, дифференциальных уравнений. Помимо удачно проиллюстрированного теоретического материала пособие содержит много примеров, которые помогают усвоению математических понятий и схем, сложный материал преподнесен понятно, логично. Следует заметить, что наряду с аналитическими способами решения поставленных математических задач приведены также способы решения тех же задач в пакетах программы MAXIMA. Такое изложение указанных математических разделов делает курс современным и способствует выработке у студентов привычки применения математических методов в практической деятельности.

Пособие полностью соответствует программе курса математики для студентов-геологов, а также может быть использовано студентами и других естественных факультетов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

СЕМЕСТР I 9

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ 9

Определитель (Детерминант) 9

Свойства определителей 13

Матрицы 15

Действия над матрицами 18

Элементарные преобразования матриц 20

Произведение матриц 21

Обратная матрица 25

Ранг матрицы 26

Действия с матрицами в MAXIMA 27

Системы линейных алгебраических уравнений 30

Решение системы методом Гаусса 32

Матричный метод решения системы линейных алгебраических уравнений 35

Метод Крамера решения системы линейных алгебраических уравнений 36

КООРДИНАТЫ ТОЧКИ 41

Точка на прямой 41

Точка на плоскости 42

Точка в пространстве 43

Расстояние между двумя точками 45

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА 46

Линейные преобразования векторов 46

Проекция вектора 47

Базис 48

Скалярное произведение векторов 49

Векторное произведение 51

Смешанное произведение векторов 53
Векторы произвольной размерности 55
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ 56
Прямая 56
Взаимное расположение двух прямых на плоскости 57
Кривые второго порядка 59
Эллипс 60
Гипербола 62
Парабола 63
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ 66
Прямая в пространстве 66
Плоскость 67
Взаимное расположение прямой и плоскости 68
Расстояние от точки до плоскости 69
Взаимное расположение двух плоскостей 70
Взаимное расположение трех плоскостей 71
Поверхности второго порядка 72
Цилиндрические поверхности 72
Конические поверхности 73
Поверхности вращения 74
Поверхности с эллиптическими сечениями 76
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 78
Переменные и постоянные величины 78
Аксиоматика действительных чисел 78
Функция. Способы ее задания 81
Последовательности 83
Предел числовой последовательности 84
Предел функции. Свойства пределов 85
Бесконечно малые и бесконечно большие функции 89

Свойства пределов функций 90
Первый замечательный предел 91
Второй замечательный предел и его следствия 92
Непрерывность функции 93
Свойства непрерывных функций 94
Точки разрыва функции 94
Вычисление пределов 97
Правила вычисления предела 98
Производная. Дифференциал функции 100
Правила дифференцирования 103
Производная обратной функции 104
Производная параметрически заданной функции 104
Таблица производных 105
Примеры вычисления производных 106
Дифференцирование неявно заданных функций 107
Дифференцирование функций, заданных параметрически 107
«Логарифмическое» дифференцирование 107
Теоремы о дифференцируемых функциях 108
Производные и дифференциалы высших порядков 109
Формула Тейлора 110
Примеры разложений элементарных функций по формуле Маклорена 112
Приложения производной функции 115
Правило Лопиталя (Правило раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$) 115
Теорема о возрастании (убывании) функции $y = f(x)$ на интервале 115
Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке 118

Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба 119
Асимптоты кривой 121
Исследование функции, построение ее графика 123
СЕМЕСТР II 128
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ 128
Первообразная, основное свойство первообразных 128
Свойства неопределенного интеграла (НИ) 128
Таблица интегралов 130
Приемы интегрирования 132
Некоторые классы интегрируемых функций 138
Интегрирование простейших дробно-рациональных функций 138
II. Дробно-рациональные функции, их интегрирование 142
III. Интегрирование тригонометрические функции 149
IV. Интегрирование показательных функций 154
V. Интегрирование иррациональных выражений 154
ИНТЕГРАЛ РИМАНА 157
Площадь криволинейной трапеции 157
Свойства интеграла Римана 159
Формула Ньютона-Лейбница 160
Приложения интеграла Римана 161
Приближенное вычисление интеграла Римана 166
НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 168
Интегралы с бесконечными пределами 168
Интегралы от неотрицательных функций 170
Интегралы от неограниченных функций 173
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ 174
Функции двух переменных 175
Предел функции 176

Непрерывность функции двух переменных 178
Производные и дифференциалы функции нескольких переменных 179
Многомерные пространства 185
Дифференцируемость функции многих переменных 186
Дифференцируемость вектор-функции многих переменных 188
Производная матрица суперпозиции вектор-функций 189
Якобиан 190
Приложения частных производных 191
ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ 203
СЕМЕСТР III 205
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ 205
Аксиоматика операций над множествами 206
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ 209
РЯДЫ 211
Числовые ряды 211
Свойства числовых рядов 213
Ряды с положительными членами 213
Знакопеременные ряды 216
Функциональные ряды 217
Степенные ряды 218
Способы определения радиуса сходимости степенного ряда 219
Связь между коэффициентами степенного ряда и его суммой 220
Примеры разложения функций в ряды Тейлора 221
Примеры приложений рядов Тейлора 223
Тригонометрические ряды Фурье 225
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 229
Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными 230

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка 232
Уравнение в полных дифференциалах и приводимое к нему 233
Линейное дифференциальное уравнение первого порядка... 234
Уравнение Бернулли 235
Понижение порядка дифференциального уравнения 236
Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами 238
Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 243
Приближенное решение дифференциальных уравнений 244
Дифференциальные уравнения с частными производными 249
ЛИТЕРАТУРА 251
ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ 251

СЕМЕСТР I

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Основная задача этого раздела научится решать большие системы уравнений, в которых не всегда бывает единственное решение, не всегда число уравнений совпадает с числом неизвестных. Введем новые понятия, необходимые нам для дальнейшей работы.

Определитель (Детерминант)

Определение. Под **определителем (детерминантом) первого порядка** понимается число $\Delta = a_1$.

Определение. Под **определителем (детерминантом) второго порядка** понимается число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Числа a_{ij} $(i=1,\ 2\ ;\quad j=1,\ 2)$ называются элементами определителя, они расположены в двух строках и двух столбцах его (ряды определителя).

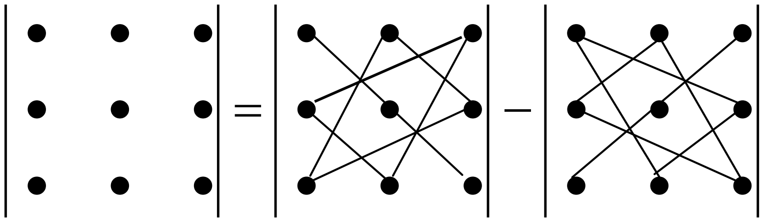
Определение. Под **определителем (детерминантом) третьего порядка** понимается число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Числа a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2, 3)$ – элементы определителя, они расположены в трех строках и трех столбцах его (ряды определителя). Первый индекс (i) указывает номер строки, а второй (j) – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Схематично правило вычисления определителя третьего порядка (правило треугольника) можно представить в виде



Определение. Под **минором некоторого** элемента a_{ij} определителя N порядка понимается определитель N-1 порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит выбранный элемент.

Обозначение: M_{ij}.

Примеры.

1. Для определителя третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

минором элемента a_{21} является следующий определитель второго порядка

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Для определителя второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

минором элемента a_{22} является определитель первого порядка (т.е. число)

$$M_{22} = a_{11}.$$

Определение. Элемент определителя занимает **четное место,** если сумма номеров его строки и столбца есть четное число, и **нечетное место**, если эта сумма есть нечетное число.

Определение. **Алгебраическим дополнением** (минором со знаком) элемента a_{ij} определителя называется минор этого элемента, взятый со знаком плюс, если элемент занимает четное место, и со знаком минус, если его место нечетное, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Примеры.

1. Для определителя третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

алгебраическим дополнением элемента a_{21} является

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Для определителя второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

минором элемента a_{22} является определитель первого порядка (т.е. число)

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = a_{11}.$$

Знаки алгебраических дополнений элементов определителей второго, третьего и четвертого порядка можно задать следующими таблицами:

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Теорема разложения определителя по элементам некоторого ряда. Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения, т.е. для определителя третьего порядка имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$
$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} =$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \quad \text{и т.д.}$$

Доказательство. Проиллюстрируем эту теорему на примере определителя третьего порядка. В этом случае для первой строки имеем:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$
$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta.$$

(по определению)

Для второго столбца

$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} =$$
$$a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{22}\left(+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{32}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{33} \end{vmatrix}\right) =$$
$$= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta.$$

(по определению)

Пример.

$$\text{Вычислить } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разложим определитель по первой строке

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 - 6 + 0 - 4 + 0 - 12 = -14,$$

Разложим определитель по первому столбцу

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 - 0 - 4 - 12 = -14.$$

С помощью теоремы разложения определителя по элементам некоторого ряда можно вычислить определитель любого порядка. Значит, чтобы вычислить определитель n порядка, необходимо элементы некоторого ряда умножить на соответствующие ему алгебраические дополнения, т.е. надо вычислить n определителей (n -1)-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Это очень трудоемкий процесс, поэтому лучше использовать пакет программ MAXIMA.

Пример. Вычислить определитель 4-го порядка.

Решение.

```
(%i1) determinant(matrix([-2,5,6,1],[9,11,-7,8],
                         [7,4,-3,10],[-13,14,65,87]));
(%o1) -16646
```

Свойства определителей

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков, но доказывать и иллюстрировать их будем на примере определителей третьего порядка.

1. Равноправность строк и столбцов. Определитель не меняет своего значения при замене всех его строк соответствующими столбцами, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановке двух параллельных рядов определителя его абсолютная величина сохраняет прежнее значение, а знак меняется на обратный.

Доказательство. Пусть, например, в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

переставлены первая и вторая строки, тогда получим определитель:

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Разложим второй определитель по элементам второй строки

$$\tilde{\Delta} = a_{11} \cdot \left(-\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{12} \cdot \left(+\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} \cdot \left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) =$$

$$-\left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) = -D.$$

Ч.Т.Д.

3. Определитель, у которого два параллельных ряда одинаковых, равен нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно выносить за знак определителя, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Если элементы какого-либо ряда определителя пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то определитель равен нулю, т.е.
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей, т.е.
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

8. Элементарные преобразования определителя. Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо ряда его прибавить (или отнять) числа, пропорциональные соответствующим элементам параллельного ряда с одним и тем же коэффициентом пропорциональности.
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \pm ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \pm ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \pm ka_{31} \end{vmatrix}$$

Матрицы

В отличие от определителей, значения которых можно вычислить, матрицы – это таблицы, содержащие некоторую информацию.

Определение. **Матрицей** называется система $m \times n$ чисел, расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где числа a_{ij} $(i=1,\ m\ ;\quad j=1,\ n)$ называются элементами матрицы.

Обозначения. Коротко матрицу обозначают так:

$$A=\left(a_{ij}\right),\text{ где } i=\overline{1,\ m},\ j=\overline{1,\ n}.$$

или

$A_{m\times n}$ – здесь индекс внизу обозначает **размер матрицы** $m\times n$ (т.е. число строк равно *m*, а число столбцов *n*), и говорят *A* матрица размера $m\times n$.

Определение. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего угла, образуют **главную диагональ.**

Определение. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной матрицей,** т.е.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется **единичной**. Обозначается буквой *E*.

Пример.

$E_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка,

$E_{n\times n}=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица *n*-го порядка.

Определение. Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, т.е.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & & & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой.** Обозначается буквой O.

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Определение. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектор-столбец** или **вектор-строка** соответственно. Их вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т.е. $(5)_{1\times1}$ есть 5.

Определение. Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется **матрицей транспонированной к данной.**

Обозначение: A^T.

Примеры.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $\quad A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, $\quad A^T=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$.

Свойство транспонированной матрицы: $\left(A^T\right)^T=A$.

Определение. Матрицы **равны** между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е.

$$A=B,\quad \text{если}\quad a_{ij}=b_{ij},\quad \text{где}\ i=\overline{1,\ m},\quad j=\overline{1,\ n}.$$

Т.е. сравнивать мы можем только те матрицы, у которых равны размеры.

Действия над матрицами

Матрицы – это таблицы, содержащие некоторую информацию, а свойства матриц определяются ситуацией, в которой они используются.

Наибольшее распространение матрицы получили в линейной алгебре, в частности, при решении систем линейных алгебраических уравнений, упрощении квадратичных форм и т.д. Поэтому большинство свойств матриц приспособлено к решению этих задач.

УМНОЖЕНИЕ НА ЧИСЛО

Определение. **Произведением матрицы** $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ **на число** $\boldsymbol{k}$ называется матрица $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ такая, что

$$b_{ij}=k\cdot a_{ij},\quad \left(i=\overline{1,\ m},\quad j=\overline{1,\ n}\right).$$

Пример.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\quad k=2,\qquad A\cdot k=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица $-A=(-1)A$ называется **противоположной** матрице A.

Разность матриц A-B можно определить еще так

$$A-B=A+(-B).$$

СЛОЖЕНИЕ

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Определение. **Суммой двух матриц** $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$, $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)$ такая, что

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\quad \left(i=\overline{1,\ m},\quad j=\overline{1,\ n}\right).$$

Пример.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 2 & 5 & 12\end{pmatrix}.$$

Свойства операции сложения матриц и умножения матрицы на число

1. Свойство переместительности
$$A+B=B+A;$$
2. Свойство сочетательности (слагаемые можно группировать как угодно)
$$A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C;$$
3. $A+O=A$;
4. $A-A=O$;
5. $1\cdot A=A$
6. Свойство распределительности по отношению к матрицам

$$\alpha \cdot (A+B) = \alpha A + \alpha B;$$

7. Свойство распределительности по отношению к числовому множителю
$$(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha A + \beta A;$$
8. Свойство сочетательности
$$\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta)\cdot A,$$

где A, B, C - матрицы, α, β - числа.

9. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- Перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- Умножение всех элементов матрицы на число, отличное от нуля;
- Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Определение. Две матрицы называются **эквивалентным,** если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Обозначение: *A~B*.

Это важное свойство матриц связано с решением систем линейных алгебраических уравнений (ЛАУ). Рассматривая матрицу коэффициентов некоторой системы ЛАУ, отметим, что если умножить некоторую строку на какое-то число и прибавить ее к другой строке матрицы, то получаем эквивалентную матрицу, то есть матрицу коэффициентов системы ЛАУ, имеющей то же решение, что и предыдущая. Это свойство следует из того, что аналогичную процедуру можно производить с системами линейных алгебраических уравнений.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют **канонической,** например

$$E_{n\times n}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Пример. Привести к каноническому виду матрицу

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&2&-1&1\\4&0&5&1\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&2&-1&1\\4&0&5&1\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}-5\\1\\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&3&2&2\\-1&2&0&1\\5&0&4&1\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}&-3&-2&-2\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&3&2&2\\0&5&2&3\\0&-15&-6&-9\end{pmatrix}\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&5&2&3\\0&-15&-6&-9\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}&\div 5&\div 2&\div 3\end{array}\end{array}\sim\begin{array}{c}\\3\\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&-3&-3&-3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}&-1&&\end{array}\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Произведение матриц

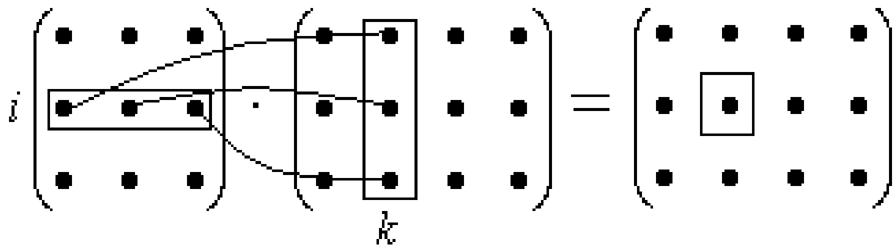
Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Определение. **Произведением матрицы** $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ **на матрицу** $B_{n\times p}=\left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times p}=\left(c_{ij}\right)$, такая, что

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}, \text{ где } \quad i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,p},$$

т.е. элемент i-ой строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Получение элемента c_{ik} схематично изображается так



Примеры.

1. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Итак, мы перемножили матрицы размерами 3×3, 3×2 и получили матрицу - произведение размером 3×2.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} \end{pmatrix}.$

В результате получаем вектор-столбец.

Свойства умножения матриц

1) $A \cdot B \neq B \cdot A$ (переместительного свойства нет).

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$. Найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ -15 & 13 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ 9 & 26 \end{pmatrix}.$$

Более того, если матрица $A \cdot B$ существует, то матрица $B \cdot A$ может не существовать. Поэтому принято говорить «умножим матрицу A справа на B», тогда получим AB. При умножении матрицы A «слева на B» имеем $B \cdot A$.

Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ всегда существуют. Матрицы A и B называются **перестановочными**, если $A \cdot B = B \cdot A$.

2) Произведение квадратной матрицы на единичную матрицу того же порядка равно самой матрице, т.е.

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$ Итак,

$A \cdot E = A$. Нетрудно показать, что $E \cdot A = A$.

Ч.Т.Д.

3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Доказательство.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

Тогда

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

В то же время

$$\left(A \cdot B\right)^T = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}\, b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}\, b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}\, b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}\, b_{22} \end{pmatrix}.$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}\, b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}\, b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}\, b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}\, b_{22} \end{pmatrix} = \left(A \cdot B\right)^T .$$

Ч.Т.Д.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для суммы и произведения матриц справедливы следующие свойства:

4) $\left(A + B\right)^T = A^T + B^T$,

5) $A\left(BC\right) = \left(AB\right)C$ (свойство сочетательности),

6) $A\left(B + C\right) = AB + AC$ (свойство распределительности),

7) $\left(A + B\right)C = AC + BC$ (свойство распределительности),

8) $\alpha\left(AB\right) = \left(\alpha A\right)B$ (свойство распределительности).

Определение: Матрицы, у которых число строк равно числу столбцов, называется квадратной.

Для квадратных матриц существует числовая характеристика, которая называется определителем.

Пример. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & 10 \\ 12 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & 10 \\ 12 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 1044.$$

Обратная матрица

Определение. Квадратная матрица называется **невырожденной**, если ее определитель $\Delta \neq 0$.

Определение. **Обратной** матрицей квадратной матрицы *A* называют матрицу A^{-1}, для которой выполняется соотношение

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E .$$

Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

где Δ – определитель матрицы *A*, $A_{i\,j}$ – алгебраические дополнения элементов матрицы *A*.

Эта формула легко доказывается перемножением $A \cdot A^{-1} = E$.

Очевидно, обратная матрица существует только для невырожденных матриц, то есть матриц, определитель которых не равен нулю. Вырожденная матрица (ее определитель равен нулю) обратной матрицы не имеет.

Свойства обратной матрицы

1. Пусть определитель матрицы A равен $\det A$, определитель матрицы A^{-1} равен $\det\left(A^{-1}\right)$, тогда $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$,

2. $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

4. $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

Ранг матрицы

Определение. **Рангом** матрицы называют порядок наибольшего не равного нулю определителя, составленного из ее элементов.

Пояснение. Рассмотрим матрицу размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots & a_{1n} \\ \cdots & a_{2n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{mn} \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k порядка. Все эти определители называются **минорами** матрицы A. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля и является рангом матрицы.

Далее будет показано, как ранг матрицы коэффициентов ЛАУ влияет на ее решение.

Свойства ранга матрицы

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали. На этом основан один из способов вычисления ранга матрицы

Действия с матрицами в MAXIMA

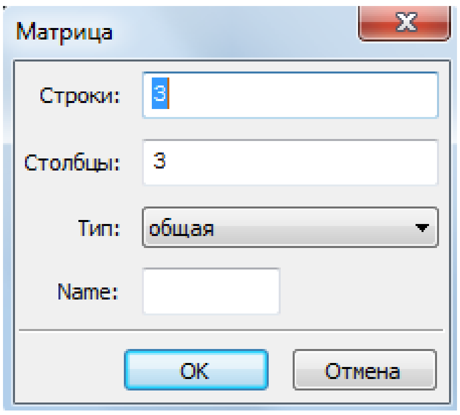
Для задания матрицы используется функция **matrix**:

```
(%i1) matrix([15,2],[-7,10]);
```

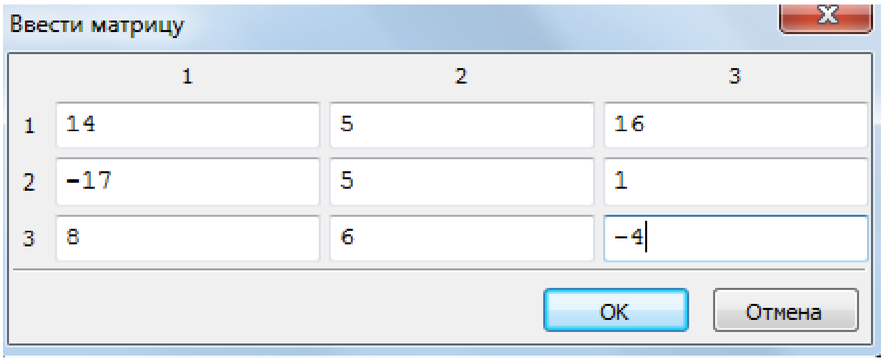
$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 15 & 2 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}$$

Командой (%i1) записывается матрица $\begin{bmatrix} 15 & 2 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}$ и в строке (%o1) записан ответ $\begin{bmatrix} 15 & 2 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}$.

Интерфейс *WXMAXIMA* достаточно удобен и не требует умения запоминать и безошибочно вводить длинный текст для вызова функции **matrix**. Достаточно лишь заполнить вспомогательные формы. Используя меню, щелкнуть по кнопкам «Алгебра → Enter Matrix…». При этом появится окно, которое необходимо заполнить, щелкнуть по команде «OK»,



далее появится следующее окно, которое нужно заполнить и по команде «OK» получим результат



(%i2) matrix([14,5,16],[-17,5,1],[8,6,-4]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 14 & 5 & 16 \\ -17 & 5 & 1 \\ 8 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

В этих примерах были определены две квадратные матрицы: второго и третьего порядка.

Рассмотрим основные действия с матрицами на примере. Для этого зададим две матрицы: A и B.

(%i3) A: matrix([15,2],[-7,10]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 15 & 2 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}$

(%i4) B: matrix([-6,4],[5,13]);

(%o4) $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$

Поэлементное сложение, вычитание, умножение матриц на число.

(%i5) A+B;

(%o5) $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ -2 & 23 \end{bmatrix}$

(%i6) A-B;

(%o6) $\begin{bmatrix} 21 & -2 \\ -12 & -3 \end{bmatrix}$

```
(%i7) k.A;
```

$$(\%o7)\quad k\ .\ \begin{bmatrix} 15 & 2 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}$$

Умножение матриц

```
(%i8) A.B;
```

$$(\%o8)\quad \begin{bmatrix} -80 & 86 \\ 92 & 102 \end{bmatrix}$$

Вычисление матрицы, обратной данной

```
(%i9) A^^-1;
```

$$(\%o9)\quad \begin{bmatrix} \frac{5}{82} & -\frac{1}{82} \\ \frac{7}{164} & \frac{15}{164} \end{bmatrix}$$

Так же обратную матрицу можно получить с помощью функции invert

```
(%i10) invert(matrix([15,2],[-7,10]));
```

$$(\%o10)\quad \begin{bmatrix} \frac{5}{82} & -\frac{1}{82} \\ \frac{7}{164} & \frac{15}{164} \end{bmatrix}$$

determinant – находит определителя матрицы

```
(%i11) determinant(matrix([15,2],[-7,10]));
(%o11) 164
```

minor – определяет минор матрицы. Первый аргумент – матрица, второй и третий – индексы строки и столбца соответственно

```
(%i13) minor(matrix([15,2],[-7,10]),1,1);
```

$$(\%o13)\quad \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}$$

rank – определяет ранг матрицы

```
(%i14) rank(matrix([15,2],[-7,10]));
(%o14) 2
```

submatrix – возвращает матрицу, полученную из исходной удалением соответствующих строк и (или) столбцов. В качестве параметров следуют номера удаляемых строк, исходная матрица, номера удаляемых столбцов.

```
(%i15) M: matrix([2,6,7,9],[a,d,s,r],[4,8,3,5]);
```

$$(\%o15)\quad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 & 9 \\ a & d & s & r \\ 4 & 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

```
(%i16) submatrix(1,2,M);
```

$$(\%o16)\quad \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

transpose – транспонирование матрицы

```
(%i17) transpose(matrix([15,2],[-7,10]));
```

$$(\%o17)\quad \begin{bmatrix} 15 & -7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Системы линейных алгебраических уравнений

Определение. **Системой линейных алгебраических уравнений**, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \ , \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \ \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \ , \end{cases}$$

где числа a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ называются **коэффициентами системы**, числа b_{ij} – **свободными членами системы**. Подлежат нахождению числа x_n.

Обозначим

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что в матричном виде система будет выглядеть следующим образом

$$A\cdot X=B.$$

Решить систему уравнений значит найти такие числа x_i $(i=\overline{1,n})$, что при подстановке в исходную систему уравнений каждое уравнение системы обратится в тождество. Необязательно решение будет единственным.

Определение. Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Определение. Совместная система называется **определенной,** если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется **частным решением** системы. Совокупность всех частных решений называется **общим решением.**

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Определение. Две системы называются **эквивалентными** (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение.

Определение. Система уравнений называется **однородной,** если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\dots+a_{2n}x_n=0, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\dots+a_{3n}x_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\dots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, т.к. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется **нулевым** или **тривиальным.**

В *MAXIMA* решение алгебраических уравнений и их систем осуществляется функцией **solve**, в качестве параметров в первых квадратных скобках указывается список уравнений через запятую, во-вторых – список переменных, через запятую.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=3. \end{cases}$

```
(%i1) solve([x+y=0, x-y=3], [x,y]);
```

(%o1) $[[x=\frac{3}{2}, y=-\frac{3}{2}]]$

Решение системы методом Гаусса

Процесс решения системы по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду (в частности, к треугольному), т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 , \\ \qquad \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 + \cdots + \tilde{a}_{2k}x_k + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 , \\ \qquad\qquad \tilde{a}_{33}x_3 + \cdots + \tilde{a}_{3k}x_k + \cdots + \tilde{a}_{3n}x_n = \tilde{b}_3 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad \tilde{a}_{kk}x_k + \cdots + \tilde{a}_{kn}x_n = \tilde{b}_k , \end{cases}$$

где $k \le n, \quad a_{11}, \tilde{a}_{ii} \ne 0, \quad i = \overline{1, \ k}$.

Пояснение:

$k = n$, если все уравнения в системе разные.

$k < n$, если в исходной системе уравнений есть уравнения, являющиеся линейной комбинацией других уравнений системы. Эти уравнения отбрасываются.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Итак, решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса реализуется построением треугольной матрицы, эквивалентной исходной.

Расширенная матрица этой системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

содержит все параметры системы.

Запишем эквивалентную ей матрицу, у которой ниже главной диагонали стоят одни нули. Для этого умножим первую строку на (-2) и прибавим ко второй, затем первую строку умножаем на (-3) и суммируем с третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 28 & -98 & -84 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -58 & -116 \end{array}\right)$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6\ , \\ \qquad 7x_2 - 10x_3 = 8\,, \\ \qquad\quad -58x_3 = -116. \end{cases}$$

эквивалентной исходной, то есть имеющей то же решение. Таким образом,

$$x_3 = 2\,,\ x_2 = \frac{8 + 10 \cdot 2}{7} = 4\,,\ x_1 = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 6 = 8\,.$$

Отметим, что это не единственный вариант решения, который можно получить методом Гаусса. В последней строке могут быть три первых нуля и не нуль последний элемент. Легко установить, что система в этом случае несовместна. Может случиться и так, что вся последняя строка состоит из нулей. Тогда следует рассмотреть вторую строку. Если она также состоит только из нулей, то остается одно уравнение относительно трех неизвестных, и мы имеем бесчисленное множество решений, когда одна из неизвестных выражается через две другие, которые могут задаваться произвольно. Если во второй строке нулем является только первый элемент, то имеем также бесчисленное множество решений, когда две неизвестные выражаются через одну, задаваемую произвольно. Наконец, во второй строке не равен нулю только последний элемент, тогда система несовместна.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Расширенная матрица этой системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы пришли к системе двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ -3x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_2 - 1 \\ x_1 = 2x_2 - 3. \end{cases}$$

Ее решение имеет вид двух формул для вычисления неизвестных x_1, x_3 при любом заданном x_2.

Матричный метод решения системы линейных алгебраических уравнений

Решаем систему n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\ , \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n\ , \end{cases}$$

В матричном виде система имеет вид:

$$A \cdot X = B.$$

Умножаем уравнение слева на матрицу A^{-1}. Ясно, что она должна существовать, то есть определитель матрицы A должен быть не равным нулю. Это означает, что данный метод пригоден только для случая единственного решения системы уравнений. Итак,

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow\ E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow\ X = A^{-1} \cdot B.$$

Решение получено, остается его реализовать.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 2\ x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28, \\ 7\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ 7\ x_1 + 9x_2 - 9x_3 = \ 5. \end{cases}$$

Решение.

Очевидно

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 28 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Основной определитель этой системы уравнений совпадает с определителем матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 2\cdot 27 - 4\cdot 21 + 9\cdot 42 = 348.$$

Подсчитаем алгебраические дополнения элементов определителя:

$$A_{11} = 27;\ A_{12} = 21;\ A_{13} = 42;\ A_{21} = 45;\ A_{22} = -81;$$

$$A_{23} = -46;\ A_{31} = -3;\ A_{32} = 75;\ A_{33} = 34.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{348}\begin{pmatrix} 27 & 45 & -3 \\ 21 & -81 & 75 \\ 42 & -46 & 34 \end{pmatrix}$$

и

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{348}\begin{pmatrix} 27\cdot 28 + 45\cdot(-1) - 3\cdot 5 \\ 21\cdot 28 + 81\cdot 1 + 75\cdot 5 \\ 42\cdot 28 + 46\cdot 1 + 34\cdot 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{348}\begin{pmatrix} 696 \\ 1044 \\ 1392 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

отсюда $x_1 = 2$, $x_3 = 3$, $x_3 = 4$.

Метод Крамера решения системы линейных алгебраических уравнений

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Рассмотрим

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Для нахождения решений системы применим метод **исключения**. Для этого умножим первое уравнение системы на a_{22}, а второе на $(-a_{12})$ и сложим их, тогда получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \qquad (1)$$

Аналогично, умножая первое уравнение системы на $(-a_{21})$, а второе – на a_{11} и складывая, получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,y = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \qquad (2)$$

В полученных уравнениях в левой части стоят одинаковые выражения, а в правой стоят выражения по структуре похожие на выражение в левой части.

Введем обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Δ – называется определителем системы.

Введем дополнительные определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1.$$

Мы получили выражения стоящие в правых частях уравнений (1) и (2). Заметим, что дополнительные определители Δ_x и Δ_y получаются из определителя системы Δ путем замены коэффициентов при указанном неизвестном на соответствующие свободные члены.

Уравнения (1), (2) принимают вид:

$$\Delta \cdot x = \Delta_x, \qquad \Delta \cdot y = \Delta_y.$$

Возможны два варианта:

1) Если $\Delta \neq 0$, то отсюда получаем, что исходная система уравнений имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$ (формулы Крамера).

То, что *x*, *y* являются решением системы можно проверить подстановкой их в систему.

2) Если $\Delta = 0$:

- Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_x или $\Delta_y \neq 0$, то **система не имеет решений** (т.е. несовместна).
- Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет **бесчисленное множество решений** (т.е. система неопределенная).

Доказательство.

- Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_x или $\Delta_y \neq 0$ (пусть $\Delta_x \neq 0$), из первого уравнения системы (1), получаем

$$\underline{\Delta \cdot x = 0 = \Delta_x \neq 0} \text{ противоречие.}$$

Значит, система уравнений не имеет решений.

- Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то из системы (1)

$$\Delta \cdot x = 0 = \Delta_x = 0, \quad \Delta \cdot y = 0 = \Delta_y = 0,$$

тождественные равенства.

Примеры.

1. $\begin{cases} 3x + 6y = 3, \\ 4x + 8y = 2. \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2\cdot 3 \\ 4 & 2\cdot 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ Решений нет. Действительно, сократим первое уравнение на 3, а второе на 4, получим

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x + 2y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Нельзя найти такие x, y, которые бы обращали в тождество оба уравнения системы.

2. $\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 4x + 6y = 16. \end{cases}$

Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 0$.

Одно из уравнений является следствием другого (например, второе получается из первого умножением на 2). Система сводится к одному уравнению и имеет бесчисленное множество решений, содержащихся в формуле:

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}.$$

3. $\begin{cases} 2x+3y=8\,, \\ 7x-5y=-3. \end{cases}$

Здесь

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}=-31,\ \ \Delta_x=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}=-31\,,\ \ \Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}=-62$$

Система имеет единственное решение

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1\,,\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=2.$$

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\,, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\ . \end{cases}$$

Введем определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а также дополнительные определители

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Возможны два варианта:

1) $\Delta\neq 0$, тогда решение исходной системы уравнений существует и оно единственное.

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}\ \text{(формулы Крамера)}\qquad (3)$$

2) $\Delta=0$

- Если $\Delta=0$ и хотя бы один из определителей Δ_x или Δ_y или $\Delta_z\neq 0$, то хотя бы одно из равенств (3) невозможно, т.е. система **не имеет решений** (т.е. несовместна).
- Если $\Delta=0$ и $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, то система имеет либо **бесчисленное множество решений** (т.е. система неопределенная) либо **не имеет решений** (т.е. система несовместна).

Примеры.

1. $\begin{cases} x+y+z=2,\\ 3x+2y+2z=1,\\ 4x+3y+3z=4. \end{cases}$

Не имеет решений, т.к. $\Delta=0,\quad \Delta_y=1\neq 0$.

2. $\begin{cases} x+y+z=1,\\ 2x+y+z=2,\\ 3x+2y+2z=3. \end{cases}$

Имеет бесчисленное множество решений.

$$\Delta=0,\quad \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0.$$

Ищем минор отличный от нуля $M_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1$, возьмем первые два уравнения системы и запишем их в виде

$$\begin{cases} x+y=1-z,\\ 2x+y=2-z. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\tilde{\Delta}=M_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$.

Воспользуемся формулами Крамера

$$\tilde{\Delta}_x=\begin{vmatrix}1-z&1\\2-z&1\end{vmatrix}=1-z-2+z=-1,$$

$$\tilde{\Delta}_y=\begin{vmatrix}1&1-z\\2&2-z\end{vmatrix}=2-z-2+2z=z,$$

Тогда решение этой системы запишется в виде

$$x=\frac{\tilde{\Delta}_x}{\tilde{\Delta}}=\frac{-1}{-1}=1, \quad y=\frac{\tilde{\Delta}_y}{\tilde{\Delta}}=\frac{z}{-1}=-z.$$

Если возьмем $z=-t$, то решение системы запишется в виде

$$x=1,\ y=t,\ z=-t$$

3. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+2y+2z=3, \\ 3x+3y+3z=4. \end{cases}$

Не имеет решений, т.к. $\Delta=0, \quad \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, но уже первые два ее уравнения не совместны, т.к. если умножить первое из них на 2 и вычесть из второго, то получим невозможное равенство 0=1.

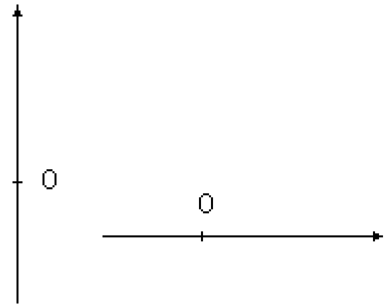
4. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+2y+2z=2, \\ 3x+3y+3z=3. \end{cases}$

Имеет бесчисленное множество решений. Здесь $\Delta=0, \quad \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ и все миноры равны нулю и пропорциональны свободные члены, т.е. второе и третье уравнения являются следствием первого. Значит, имеем одно уравнение с тремя неизвестными, которое, естественно, имеет бесчисленное множество решений.

КООРДИНАТЫ ТОЧКИ

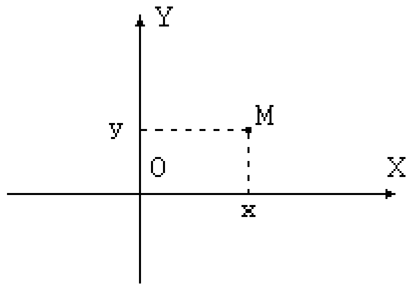
Точка на прямой

Точка M на прямой (шкале) задается одним числом (координатой), указывающим, на сколько единиц длины точка M удалена от начальной точки O. На шкале должно быть задано положительное направление движения. Если точка M удалена в положительном направлении от O, то координата берется со знаком +, если в направлении, противоположном положительному направлению, то координата берется со знаком –. Примером является **шкала температур**, где температуры определяются с определенном знаком.



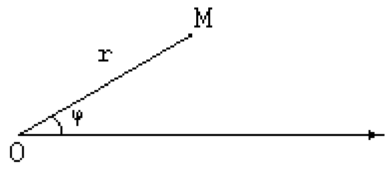
Точка на плоскости

Для задания точки на плоскости приходится использовать две шкалы, называемые координатными осями (ось абсцисс и ось ординат), пересекающимися в точке О, называемой началом координат. Традиционно изображают взаимно перпендикулярные оси координат ОX и OY, причем ось ОX изображают горизонтально, а ось OY вертикально. Обычно принято задавать такие направления положительных движений по осям, что положительное направление оси ОX после поворота на 90^0 против часовой стрелки совпадает с положительным направлением оси OY. Хотя могут быть и другие варианты.



Произвольная точка М на плоскости задается координатами (x, y) ее проекций на координатные оси. Каждая проекция получается проведением через М прямой, параллельной оси, до пересечения с другой осью. Такая система координат называется **декартовой** (по имени знаменитого математика и философа Рене Декарта, жившего в 17 веке).

Другим способом задания точки на плоскости является задание точки в **полярной** системе координат. Для задания такой системы координат следует задать направленный луч (называемый **полярной осью)**, который обычно изображают горизонтальным, направленным вправо. Начало луча называют **полюсом**. Положение точки М на плоскости задают расстоянием до полюса (полярный радиус точки r) и углом, на который следует повернуть луч, чтобы точка оказалась на нем (полярный угол точки φ).



Полярные координаты точки M (r,φ) имеют следующие особенности: первая координата неотрицательна, а вторая координата неоднозначна, так как вместо угла φ можно взять угол $\varphi+2\pi k$ при любом целом k.

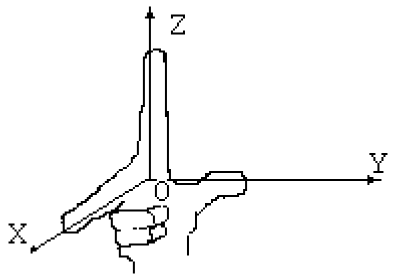
Связь между декартовыми координатами с началом координат в полюсе и полярными координатами осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi, \\ y = r\cdot\sin\varphi. \end{cases}$$

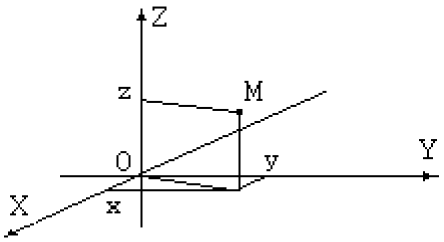
Точка в пространстве

Для задания точки в пространстве требуется уже 3 координаты.

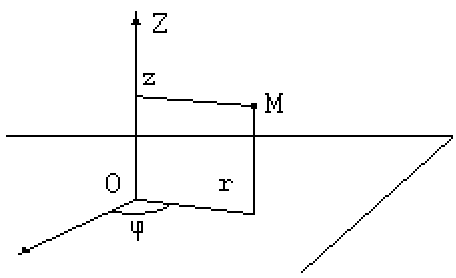
В случае **декартовой** системы координат мы строим 3 оси координат, традиционно взаимно перпендикулярные. Кроме того, обычно задают координатные оси OX, OY и OZ, составляющие **правую тройку.** Это означает, что если средний и большой пальцы правой руки, направить, соответственно, вдоль осей OX и OY в положительном направлении, то указательный палец правой руки укажет положительное направление оси OZ.



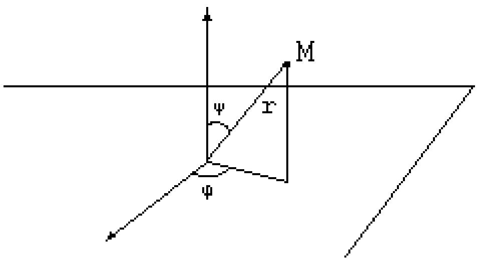
Координаты точки М (x, y, z) в пространстве определяется проекциями точки на соответствующие оси, причем проекции получаются проведением через М плоскостей, параллельных координатным плоскостям, до пересечения с координатными осями.



Другой координатной системой является **цилиндрическая** система координат. При такой системе координат задается координатная плоскость и перпендикулярная ей координатная ось. На плоскости задаются полярные координаты, причем начало полярной оси находится в точке О пересечения заданной координатной оси с заданной координатной плоскостью. Проекция точки на плоскость задается полярными координатами. Проекция точки на заданную ось определяет третью координату. Таким образом, точка М задается координатами (r, φ, z). Связь между цилиндрическими координатами и декартовыми координатами следующая: аппликата z в декартовых и в цилиндрических координатах одна и та же, а координаты r и φ связаны с координатами x и y так же, как связаны декартовы и полярные координаты на плоскости.



Еще одна координатная система в пространстве – **сферическая** система координат. Здесь также задаются плоскость и перпендикулярная ей ось. В точке их пересечения ставится точка О. Из точки О в заданной плоскости проводится полярная ось. Точка М в пространстве задается расстоянием r до точки О (выбор радиуса сферы), углом ψ, который отрезок, соединяющий точку О с точкой М, образуют с заданной осью (выбор меридиана), а также углом, который образует проекция отрезка ОМ на заданную плоскость с полярной осью (выбор параллели).



Связь между сферическими и декартовыми координатами осуществляется по формулам $\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\psi, \\ y = r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\psi, \\ z = r\cdot\cos\psi, \end{cases}$ $\varphi\in[0,2\pi],\ \psi\in[0,\pi].$

Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками проще всего измерять с помощью декартовых координат в прямоугольной системе благодаря теореме Пифагора.

Если точки M_1 и M_2 с координатами, соответственно, x_1 и x_2 расположены на прямой, то расстояние между ними равно $|x_1 - x_2|$.

Если точки M_1 и M_2 с координатами, соответственно, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) расположены на плоскости, то расстояние между ними равно $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

Если точки M_1 и M_2 с координатами, соответственно, (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) расположены в пространстве, то расстояние между ними равно $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

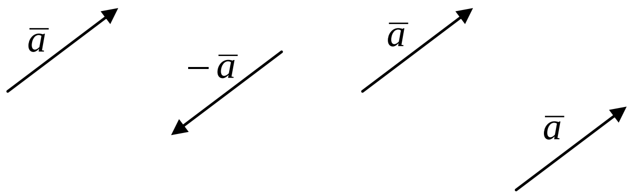
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Известно, что скалярная величина (скаляр) определяется одним параметром – величиной, например, 3, -5, 3.14 и так далее. В дальнейшем скаляры будем обозначать буквами a, b, x, y и так далее.

Определение. **Вектор** – это направленный отрезок, характеризуемый двумя параметрами – длиной и направлением. Чтобы отличать векторы от скаляров, их будем задавать следующим образом $\overline{a}$, $\overline{AB}$, в последнем случае A – начальная, B – конечная точки вектора. Иногда их обозначают жирным шрифтом $\boldsymbol{a}$.

Определение. Векторы, расположенные на параллельных прямых называются **коллинеарными.**

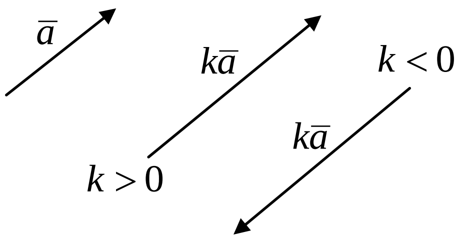
Определение. Векторы, расположенные на параллельных прямых и направленные в одну сторону называются **сонаправленными.**



Исторически сложилось, что геометрия оперирует со свободными векторами. Это означает, что два вектора считаются **равными**, если одинаковы их длины и они сонаправлены. Другими словами, действие вектора на объект не зависит от точки его приложения.

Определение. Векторы, параллельные некоторой плоскости, называются **компланарными,** их можно перенести на эту плоскость.

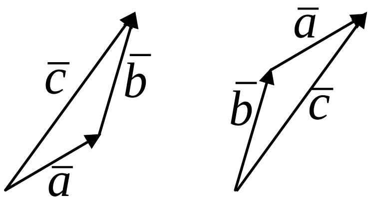
Линейные преобразования векторов



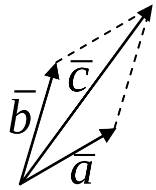
Умножение вектора на число. Умножение вектора на положительное число $k>0$ означает умножение длины вектора на это число при сохранении направления вектора. Умножение вектора на отрицательное число $k<0$ означает умножение длины вектора на число $|k|$ и замена направления вектора на противоположное.

Сложение векторов. Вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ может быть получен одним из следующих способов.

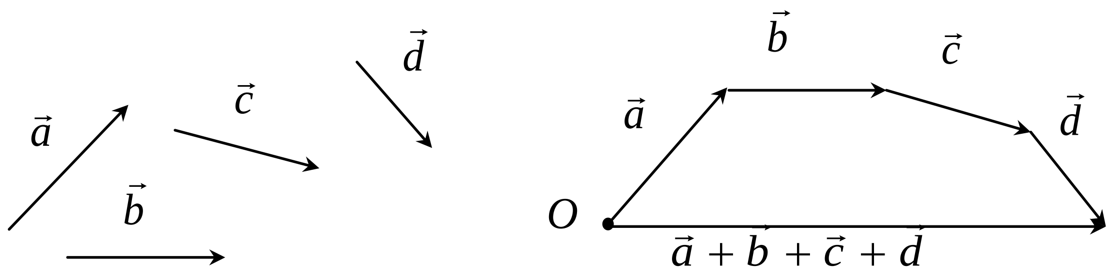
А) **Правило треугольника**. Приставим начало вектора $\bar{b}$ к концу вектора $\bar{a}$, а затем соединим начало вектора $\bar{a}$ с концом вектора $\bar{b}$. Полученный вектор, конец которого совпадает с концом вектора $\bar{b}$ и является вектором $\bar{c}$. Очевидно, что результат суммирования не зависит от перестановки слагаемых $\bar{a}$ и $\bar{b}$.



Б) **Правило параллелограмма**. Поместим начала векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в одну точку. Если считать эти векторы сторонами параллелограмма, то вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ будет диагональю того же параллелограмма, причем начало вектора будут находиться в точке, совпадающей с началами векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.



В) **Правило многоугольника**.

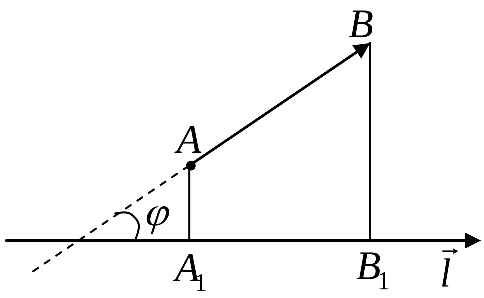


Проекция вектора

Определение. **Проекцией вектора** $\overline{AB}$ на направление $\bar{l}$, называется скалярная величина A_1B_1, равная

$$A_1B_1 = np_l\,\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cos\varphi,$$

следовательно, если угол между векторами $\overline{AB}$ и $\bar{l}$ острый, $A_1B_1 > 0$, в противном случае проекция отрицательна.



Определение. Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным вектором** или **ортом**. Обозначим $|\bar{a}|$ длину, или модуль вектора $\bar{a}$, тогда единичный вектор $\bar{a}^0 = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$.

Кроме того, имеет смысл ввести **нулевой вектор** $\vec{0}$ – вектор, имеющий нулевую длину и не имеющий направления.

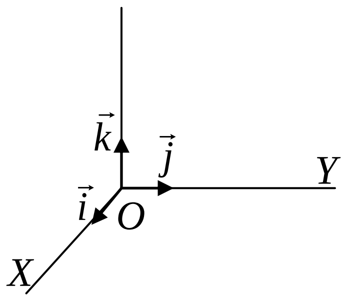
Базис

Для упрощения совершения операций с векторами введем понятие базиса. Тогда работа с векторами, как геометрическими объектами, заменяется операциями с его проекциями, то есть числами.

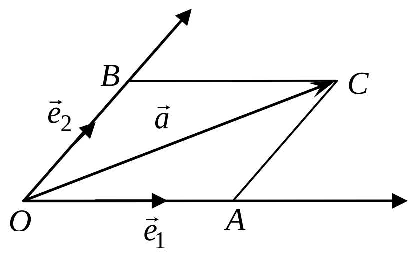
Определение. Любые два неколлинеарных вектора могут быть выбраны в качестве базиса на плоскости.

Определение. Любые три некомпланарных вектора могут быть выбраны в качестве базиса в трехмерном пространстве.

Базис называется ортогональным, если углы между базисными векторами прямые. Базис называется нормированным, если базисные векторы единичные. Базис называется ортонормированным, если он ортогональный и нормированный. Векторы ортонормированного базиса в соответствии с существующими традициями обозначаются $\bar{i}$, $\bar{j}$, k.



Теорема. Любой вектор $\bar{a}$ плоскости может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$: $\bar{a} = \alpha\,\bar{e}_1 + \beta\,\bar{e}_2$.



Доказательство теоремы следует из правила параллелограмма сложения векторов и правила умножения вектора на число.

Теорема. Любой вектор трехмерного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов.

Для ортонормированного базиса: $\bar{a} = a_1\,\bar{i} + a_2\,\bar{j} + a_3\,\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\,\bar{i} + b_2\,\bar{j} + b_3\,\bar{k}$.

Теперь вместо суммирования векторов с помощью правил параллелограмма или многоугольника, то есть построением, достаточно ограничиться суммированием их проекций.

Сумма и разность векторов.

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1)\,\bar{i} + (a_2 + b_2)\,\bar{j} + (a_3 + b_3)\,\bar{k},$$
$$\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1)\,\bar{i} + (a_2 - b_2)\,\bar{j} + (a_3 - b_3)\,\bar{k}.$$

Умножение вектора на скаляр λ.

$$\lambda\,\bar{a} = \lambda\,a_1\,\bar{i} + \lambda\,a_2\,\bar{j} + \lambda\,a_3\,\bar{k}.$$

Примечание. Если вектор $\overline{AB}$ задан координатами его начальной и конечной точек $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\,\bar{i} + (y_2 - y_1)\,\bar{j} + (z_2 - z_1)\,\bar{k}.$$

А длина вектора (расстояние между точками *A* и *B*) равна:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Примеры.

1. Определить сумму векторов

$\bar{a} = 3\,\bar{i} + 5\,\bar{j} - 2\,\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 4\,\bar{j} + 7\,\bar{k}$, $\bar{c} = 3\,\bar{i} + \bar{j} + 2\,\bar{k}$, $\bar{d} = 2\,\bar{i} + 6\,\bar{j} + 5\,\bar{k}$.

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} = (3 + 1 + 3 + 2)\,\bar{i} + (5 - 4 + 1 + 6)\,\bar{j} + (-2 + 7 + 2 + 5)\,\bar{k}.$$

Очевидно, $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} = 9\,\bar{i} + 8\,\bar{j} + 12\,\bar{k}$.

2. Вычислить для этих же векторов $\bar{a} - 2\bar{b} + 5\bar{c} + \bar{d}$.

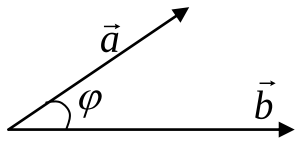
$$\bar{a} - 2\bar{b} + 5\bar{c} + \bar{d} = (3 - 2\cdot 1 + 5\cdot 3 + 2)\,\bar{i} + (5 + 2\cdot 4 + 5\cdot 1 + 6)\,\bar{j} + (-2 - 2\cdot 7 + 5\cdot 2 + 5)\,\bar{k}$$

Итак, $\bar{a} - 2\bar{b} + 5\bar{c} + \bar{d} = 18\,\bar{i} + 24\,\bar{j} - \bar{k}$.

Скалярное произведение векторов

Определение. **Скалярным произведением** двух векторов $\bar{a} \cdot \bar{b}$ называется **число**, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi.$$



Свойства скалярного произведения

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$.
2. $m(\overline{a}\cdot\overline{b})=m\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot m\overline{b}$, если $m-$скаляр.
3. $(\overline{a}+\overline{c})\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{c}\cdot\overline{b}$.
4. $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, тогда и только тогда, когда $\overline{a}\perp\overline{b}$.
5. $\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}|^2$.

Заметим, что в силу взаимной перпендикулярности скалярное произведение двух разных ортов равно нулю, а скалярный квадрат орта равен 1, например, $\bar{i}\cdot\bar{j}=0$, $\bar{i}\cdot\bar{i}=|\bar{i}|^2=1$.

Найдем выражение скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе. Пусть даны векторы:

$$\overline{a}=a_1\,\bar{i}+a_2\,\vec{j}+a_3\overline{k}\,,\quad \overline{b}=b_1\,\bar{i}+b_2\,\vec{j}+b_3\overline{k}\,,$$

Тогда, используя свойства скалярного произведения, получим

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left(a_1\,\bar{i}+a_2\,\bar{j}+a_3\overline{k}\right)\cdot\left(b_1\,\bar{i}+b_2\,\bar{j}+b_3\overline{k}\right)=$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

В силу свойства 5 модуль (длина) вектора равна:

$$|\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}\cdot\overline{a}}=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}\,.$$

Используя скалярное произведение двух векторов, легко найти угол между этими векторами. В соответствии с определением скалярного произведения $\cos\varphi=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$, следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\,.$$

Пример.

Задан треугольник с вершинами $A(2,-1,4), B(-3,1,0), C(1,5,2)$. Определить длину стороны AC и угол при вершине C.

Решение. Длину стороны определяем как расстояние между вершинами, тогда

$$AC=\sqrt{(1-2)^2+(5+1)^2+(2-4)^2}=\sqrt{1+36+4}=\sqrt{41}.$$

Определим векторы $\overline{CA}=(2-1)\bar{i}+(-1-5)\bar{j}+(4-2)\bar{k}=\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}$,

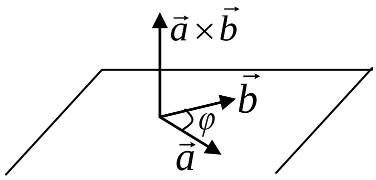
$\overline{CB}=(-3-1)\bar{i}+(1-5)\bar{j}+(0-2)\bar{k}=-4\bar{i}-4\bar{j}-2\bar{k}$.

Угол между этими векторами есть угол при вершине C. Тогда

$$\cos(\angle ACB)=\frac{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}{\left|\overline{CB}\right|\left|\overline{CB}\right|}\frac{1(-4)+(-6)(-4)+2(-2)}{\sqrt{41}\sqrt{16+16+4}}=\frac{16}{\sqrt{41}\sqrt{36}}=\frac{8}{3\sqrt{41}}.$$

Векторное произведение

Определение. **Векторным произведением** двух векторов $\bar{a}\times\bar{b}$ называется **вектор**, длина которого равна произведению длин перемножаемых векторов на синус угла между ними $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|=|\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|\sin\varphi$, направлен это вектор перпендикулярно плоскости, в которой расположены перемножаемые вектора, причем так, что с его конца кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден протии часовой стрелки. То есть векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{a}\times\bar{b}$ образуют правую тройку.



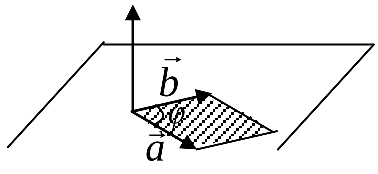
Алгебраические свойства векторного произведения

1. $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$.
2. $m(\bar{a}\times\bar{b})=m\bar{a}\times\bar{b}=\bar{a}\times m\bar{b}$, если $m-$скаляр.
3. $(\bar{a}+\bar{c})\times\bar{b}=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{c}\times\bar{b}$.

Геометрические свойства

1. Модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на множителях.

Доказательство следует из определения векторного произведения.



2. $\bar{a} \times \bar{b} = 0$, тогда и только тогда, когда $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

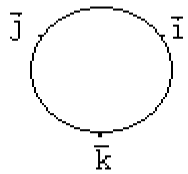
Нетрудно заметить, что

$$\bar{i} \times \bar{j} = -\bar{j} \times \bar{i} = \bar{k},$$

$$\bar{j} \times \bar{k} = -\bar{k} \times \bar{j} = \bar{i},$$

$$\bar{k} \times \bar{i} = -\bar{i} \times \bar{k} = \bar{j}.$$

Запомнить, какой орт получается как векторное произведение двух других ортов, легко, если пользоваться следующей схемой.



Если при движении от первого в векторном произведении вектора ко второму мы движемся против часовой стрелки, результатом векторного произведения будет третий вектор со знаком +, если по часовой стрелке, то третий вектор со знаком –.

Векторное произведение векторов в ортонормированном базисе

Если $\bar{a} = a_1 \bar{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \bar{k}$, $\bar{b} = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k}$, то

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i} \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right) - \bar{j} \left(a_1 b_3 - a_3 b_1\right) + \bar{k} \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right).$$

Примечание. В этой формуле используется разложение определителя третьего порядка по элементам его первой строки, затем вычисляются определители второго порядка.

Пример. Определить площадь треугольника, заданного вершинами $A(-2, 1, 6)$, $B(3, -1, 1)$, $C(4, 5, 3)$.

Решение.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}$, равна $\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right| \sin(\angle A)$, то есть модулю векторного произведения этих векторов, а площадь заданного треугольника равна половине площади параллелограмма, то $S_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AC}$.

Вычислим

$$\overline{AB} = (3+2)\,\bar{i} + (-1-1)\,\bar{j} + (1-6)\,\bar{k} = 5\,i - 2\,\bar{j} - 5\,\bar{k}, \quad \overline{AC} = 6\,\bar{i} + 4\,\bar{j} - 3\,\bar{k}.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -2 & -5 \\ 6 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (6+20)\,\bar{i} - (-15+30)\,\bar{j} + (20+12)\,\bar{k} = 26\,\bar{i} - 15\,\bar{j} + 32\,\bar{k}$$

В итоге $S_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{26^2 + 15^2 + 32^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1925}$.

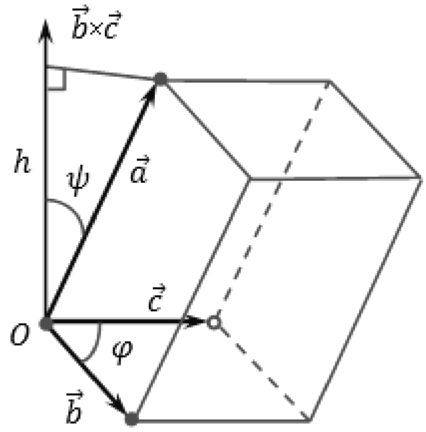
Смешанное произведение векторов

Определение. **Смешанным произведением трех векторов** называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a}$ на векторное произведение векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$ и обозначается $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

Иногда смешанное произведение называют векторно-скалярным.

Геометрические свойства векторного произведения

1. Модуль смешанного произведения некомпланарных векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Произведение $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ положительно, если тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — правая, и отрицательно, если тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — левая, и наоборот.



Доказательство. Найдем по определению смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Пусть ψ — угол между векторами $\bar{a}$ и

$\bar{b}\times\bar{c}$. Модуль векторного произведения $|\bar{b}\times\bar{c}|$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\bar{b}$ и c. Поэтому

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = S\cdot|\bar{a}|\cdot\cos\psi .$$

причем $|\bar{a}|\cdot\cos\psi$ является проекцией вектора $\bar{a}$ на ось, задаваемую вектором $\bar{b}\times\bar{c}$. Очевидно, что $|\bar{a}|\cdot\cos\psi>0$, если $\psi<\dfrac{\pi}{2}$ (в этом случае векторы $\bar{a},\vec{b},\vec{c}$ составляют правую тройку) и $|\bar{a}|\cdot\cos\psi<0$, если $\psi>\dfrac{\pi}{2}$ (в этом случае векторы $\bar{a},\vec{b},\vec{c}$ составляют левую тройку). А модуль этой величины равен высоте $h=|\bar{a}|\cdot|\cos\psi|$ параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$. Значит,

$$|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})| = S\cdot h .$$

Поэтому модуль смешанного произведения равен объему этого параллелепипеда, а знак смешанного произведения зависит от ориентации тройки векторов.

2. Смешанное произведение $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны.

Алгебраические свойства смешанного произведения

1. При перестановке двух множителей смешанное произведение изменяет знак на противоположный:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = -(\bar{b},\bar{a},\bar{c}) = -(\bar{a},\bar{c},\bar{b}) = -(\bar{c},\bar{b},\bar{a})$$

2. При циклической (круговой) перестановке множителей смешанное произведение не изменяется:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = (\bar{b},\bar{c},\bar{a}) = (\bar{c},\bar{a},\bar{b})$$

3. Смешанное произведение линейно по любому множителю: d

$$(\alpha\,\bar{a}+\beta\,\bar{b},\bar{c},\bar{d}) = \alpha(\bar{a},\bar{c},\bar{d})+\beta(\bar{b},\bar{c},\bar{d}) .$$

Смешанное произведение векторов в ортонормированном базисе

Если координаты векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равны, соответственно,

$$\bar{a} = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}, \quad \bar{b} = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k}, \quad \bar{c} = c_1 \bar{i} + c_2 \bar{j} + c_3 \bar{k},$$

то смешанное произведение вычисляется с помощью определителя третьего порядка: $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Векторы произвольной размерности

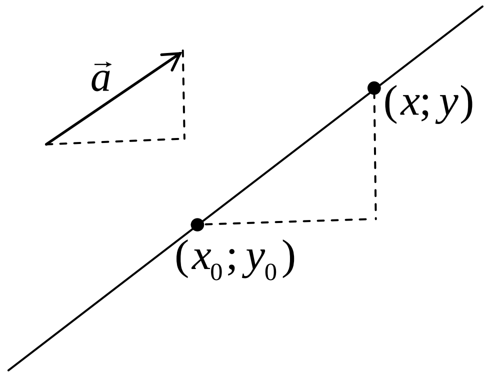
По аналогии с двумерными и трехмерными векторными пространствами рассматривают векторные пространства X размерности n, где n – произвольное натуральное число. Такой вектор уже не изобразишь графически, и представляет он собой упорядоченный набор из n координат: $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$. При записи многомерного вектора верхнюю стрелку над буквой не изображают.

n-мерные векторы можно умножать на число: $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x^1, \alpha \cdot x^2, ..., \alpha \cdot x^n)$, складывать: $x + y = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, ..., x^n + y^n)$ и скалярно умножать друг на друга: $x \cdot y = x^1 \cdot y^1 + x^2 \cdot y^2 + ... + x^n \cdot y^n$. Длина вектора вычисляется следующим образом: $\|x\| = \sqrt{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + ... + \left(x^n\right)^2}$.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Прямая

Простейшей плоской кривой является прямая – геометрическое место точек, соединив любые две из которых, мы получим отрезок, параллельный заданному вектору.



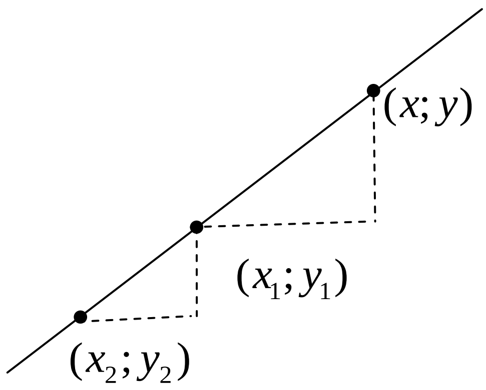
Рассмотрим прямую в плоскости XOY. Фиксировать прямую, параллельную данному вектору $\bar{a}$ с координатами (α,β) мы сможем, задав одну точку с координатами (x_0,y_0), через которую прямая проходит. Выберем на прямой произвольную точку с координатами (x,y). Тогда из подобия соответствующих треугольников имеем

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}. \qquad (1)$$

Соотношение (1) является основой для получения разных видов уравнения прямой на плоскости. Приравнивая обе части (1) переменной t, $-\infty\le t\le+\infty$, мы получим **параметрическое уравнение прямой**: $\begin{cases} x=x_0+\alpha\cdot t, \\ y=y_0+\beta\cdot t. \end{cases}$ Вводя угловой коэффициент прямой $k=\dfrac{\beta}{\alpha}$ (тангенс угла, образуемого прямой с положительным направлением OX), мы получим из (1) **уравнение прямой с угловым коэффициентом**: $y=y_0+k\cdot(x-x_0)$.

Приравнивая нулю координаты направляющего вектора α и β, получим **прямые, параллельные координатным осям**: $x=x_0$ и $y=y_0$.

Прямая на плоскости может задаваться не только точкой и направляющим вектором, но и двумя различными точками.



Составляя пропорции сторон подобных треугольников, получим соотношение $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Это линейное соотношение представляет собой **уравнение прямой, проходящей через две различные точки**.

Определение. Любая прямая на плоскости XOY представляется линейным уравнением вида $A\cdot x+B\cdot y+C=0$. И наоборот, любое линейное уравнение вида $A\cdot x+B\cdot y+C=0$ описывает прямую на плоскости XOY.

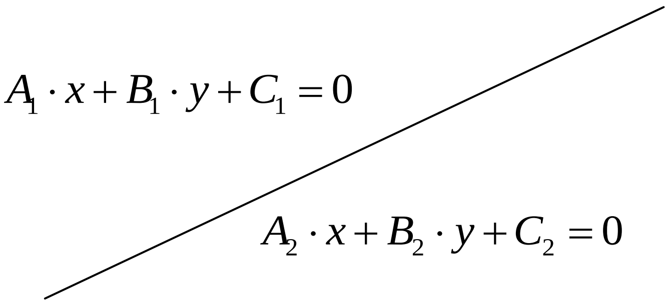
Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Рассмотрим две прямые, задаваемы уравнениями $A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1=0$ и $A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2=0$.

Возможны следующие случаи взаимного расположения этих прямых:

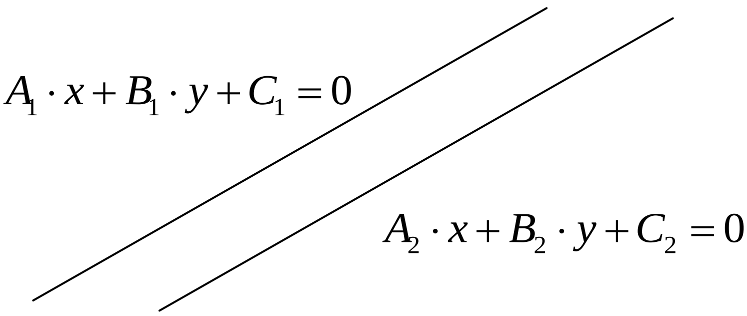
1) прямые совпадают, 2) прямые параллельны, 3) прямые пересекаются в одной точке. Исследуем соотношение между коэффициентами уравнений прямых в каждом из перечисленных случаев.

В случае 1) оба уравнения, описывающие одну и ту же прямую, должны совпадать или отличаться коэффициентом, на который можно сократить.



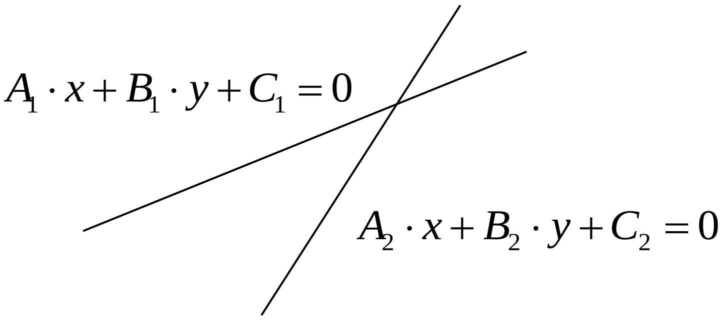
Таким образом, в данном случае $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

В случае 2) угловые коэффициенты обеих прямых одинаковы. То есть,



$k = -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$. Отсюда получим условие параллельности: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

В случае 3) угловые коэффициенты прямых разные, то есть, $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, и



следовательно, прямые пересекаются в одной точке.

На практике задача поиска точек пересечения прямых сводится к решению системы уравнений. Пусть заданы две прямые

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0,\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0.$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y = -C_1, \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y = -C_2. \end{cases}$$

Из раздела «Элементы линейной алгебры» известно, что система имеет единственное решение, если определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Это выполняется при условии $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ (свойства определителя). В этом случае прямые имеют одну точку пересечения.

Если определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, то прямые либо параллельны $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, либо совпадают $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Кривые второго порядка

Определение. **Кривой второго порядка** называется кривая, описываемая уравнением второй степени, то есть уравнением, в которое переменные x и y входят с суммарной степенью не более 2.

Таким образом, кривая второго порядка задается уравнением вида $A\cdot x^2+B\cdot x\cdot y+C\cdot y^2+D\cdot x+E\cdot y+F=0$. Обратное неверно: не любое уравнение второй степени задает реальную кривую. Так, если в уравнении

$$x^2+4y^2-2x-4y+3=0$$

выделить полные квадраты, мы получим уравнение $(x-1)^2+(2y-1)^2=-1$, которому не может удовлетворить никакая точка из плоскости XOY с координатами (x,y).

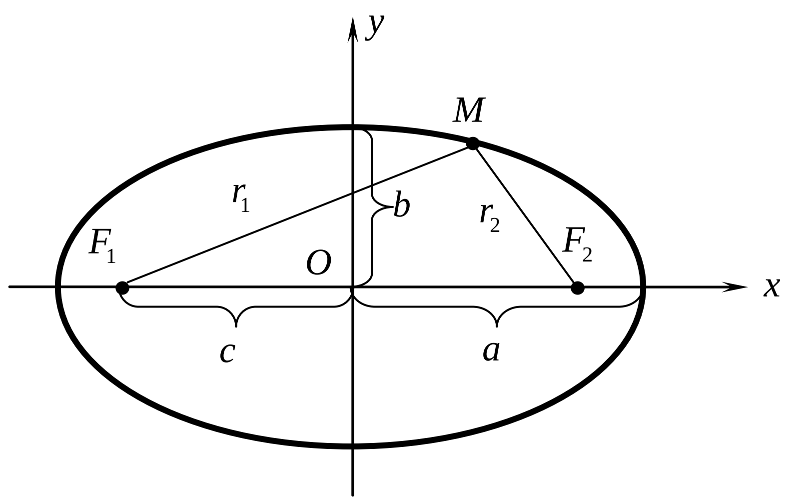
Существуют три основных уравнения второй степени, задающие (с точностью до сдвига и поворота координатных осей) три основные кривые второго порядка: **эллипс, гиперболу и параболу**.

Эллипс

Определение. **Эллипсом** называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемая фокусами, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами.

Фокусы эллипса обозначают буквами F_1 и F_2, расстояние между ними $|F_1F_2|$ – через $2c$.

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка эллипса. Сумму расстояний от точки M до фокусов обозначают через $2a$.



Так как, по определению, $|F_1M|+|F_2M|>|F_1F_2|$, то $2a>2c$ и $a>c$.

Через r_1 и r_2 обозначают расстояние от точки M до фокусов ($r_1 = |F_1M|, r_2 = |F_2M|$). Числа r_1, r_2 называются **фокальными радиусами** точки M.

Из определения эллипса ясно, что $r_1 + r_2 = 2a$. Так как

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,,\ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,,$$

тогда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

Возводя в квадрат обе части последнего равенства и приводя подобные слагаемые, получим

$$a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

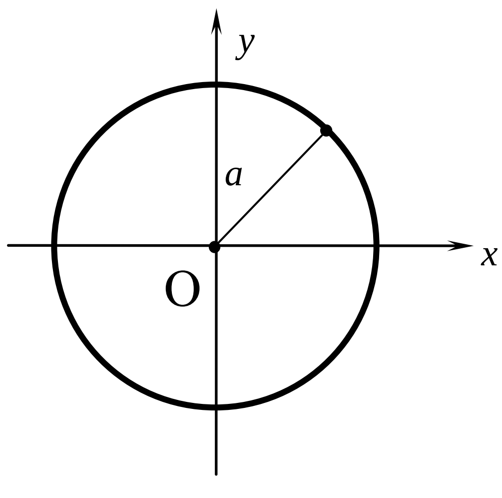
Еще раз возведем в квадрат обе части и, введя обозначение $b^2 = a^2 - c^2$, получим каноническое (простейшее) уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Числа a и b называются **полуосями эллипса**. Отношение $\dfrac{c}{a} = \varepsilon < 1$ называется **эксцентриситетом эллипса**. Фокальные радиусы определяются формулами $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$.

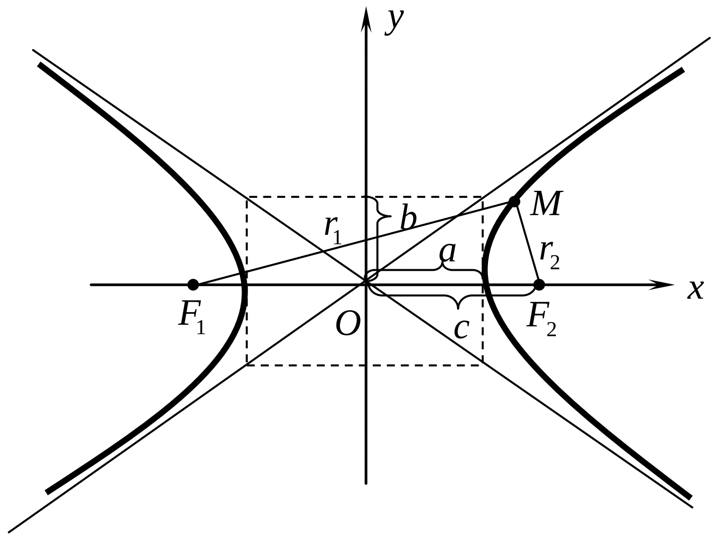
Параметрическое задание эллипса: $\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = b \cdot \sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

Частным случаем эллипса является **окружность**. Если $a = b$, то из канонического уравнения эллипса получаем уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$.



Гипербола

Определение. **Гиперболой** называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояний между фокусами.



Фокусы гиперболы обозначают буквами F_1 и F_2, расстояние между ними $|F_1F_2|$ – через $2c$.

Пусть M – произвольная точка гиперболы. Модуль разности расстояний от точки M до фокусов обозначают через $2a$.

Так как, по определению, $\big||F_1M|-|F_2M|\big|<|F_1F_2|$, то $2a<2c$ или $a<c$. Числа $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называют **фокальными радиусами** точки M и обозначают через r_1 и r_2.

Из определения гиперболы ясно, что $|r_1-r_2|=2a$ или $r_1-r_2=\pm 2a$. Так как

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

тогда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возводя в квадрат обе части последнего равенства и приводя подобные слагаемые, получим

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

Еще раз возведем в квадрат обе части и, введя обозначение $b^2 = c^2 - a^2$, получим каноническое (простейшее) уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Число a называется **действительной,** а число b – **мнимой** полуосями гиперболы. Отношение $\dfrac{c}{a} = \varepsilon > 1$ называется **эксцентриситетом гиперболы**. Фокальные радиусы определяются формулами $r_1 = |\varepsilon x + a|$, $r_2 = |\varepsilon x - a|$. Прямые $y = \pm \dfrac{b}{a} x$ называются **асимптотами гиперболы**.

Гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ называются **сопряженными**.

Параметрическое задание гиперболы, пересекающей ось OX:

$$\begin{cases} x = \pm a \cdot \operatorname{ch} t, \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

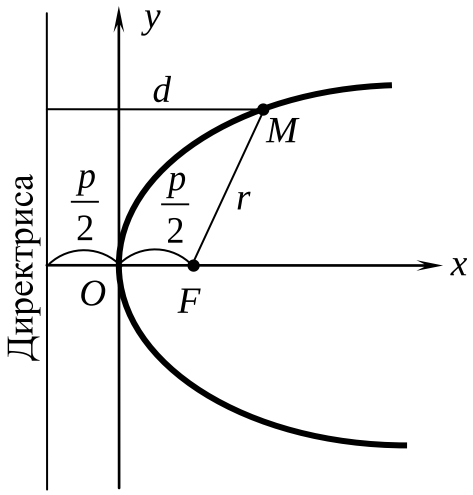
Параметрическое задание гиперболы, пересекающей ось OY:

$$\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{sh} t, \\ y = \pm b \cdot \operatorname{ch} t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Здесь функции $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{ch} t$ – гиперболические синус и косинус, соответственно, имеющие представление $\operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, и удовлетворяющие соотношению $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.

Парабола

Определение. **Параболой** называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.



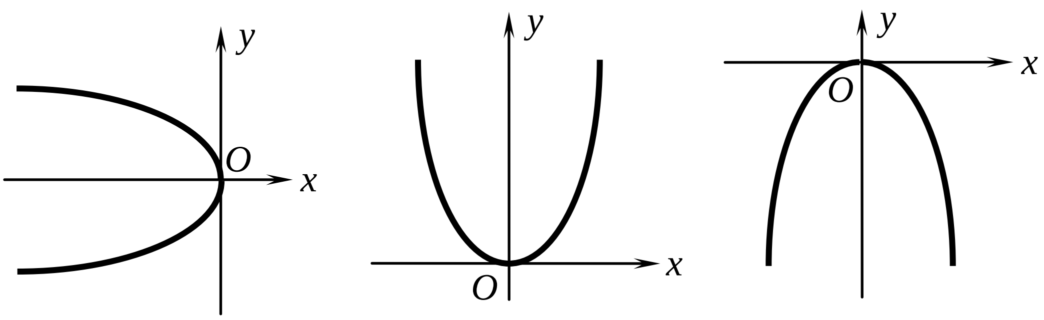
Пусть M – произвольная точка параболы. Фокус параболы обозначают буквой F, а через r – расстояние от точки M до фокуса $(r=|FM|)$, через d – расстояние от точки M до директрисы, а через p – расстояние от фокуса до директрисы (рис. 14). Величину p называют **параметром параболы**.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Парабола имеет фокус $F(p/2;0)$ и директрису $x=-\dfrac{p}{2}$; фокальный радиус $r = x+\dfrac{p}{2}$. Симметрична относительно оси Ox. Вершина параболы находится в начале координат.

Парабола, уравнение которой $y^2 = -2px$, $p>0$, расположена слева от оси ординат (рис. а). Вершина этой параболы совпадает с началом координат, осью симметрии является ось Ox.



а) б) в)

Уравнение $x^2 = 2py$, $p > 0$, является уравнением параболы, вершина которой совпадает с началом координат, а осью симметрии является ось Oy (рис. б). Эта парабола лежит выше оси абсцисс. Уравнение $x^2 = -2py$, $p > 0$, определяет параболу, лежащую ниже оси Ox, с вершиной в начале координат (рис. в).

В качестве **параметрического задания** можно взять $\begin{cases} x = t, \\ y = A \cdot t^2, \end{cases}$ $t \in (-\infty, +\infty)$, в первом случае и $\begin{cases} x = B \cdot t^2, \\ y = t, \end{cases}$ $t \in (-\infty, +\infty)$, во втором случае. То есть роль параметра играет одна из декартовых координат.

Любое уравнение вида $A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$, если оно имеет смысл, приводится путем линейной замены переменных вида $\begin{cases} x = \alpha \cdot \tilde{x} + \beta \cdot \tilde{y} + \chi, \\ y = \gamma \cdot \tilde{x} + \delta \cdot \tilde{y} + \kappa, \end{cases}$ к уравнению одного из трех перечисленных типов относительно $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$. Указанная линейная замена переменных означает сдвиг, растяжение и поворот новых декартовых координатных осей относительно старых.

Пример. Построить кривую $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y - 6 = 0$.

Решение.

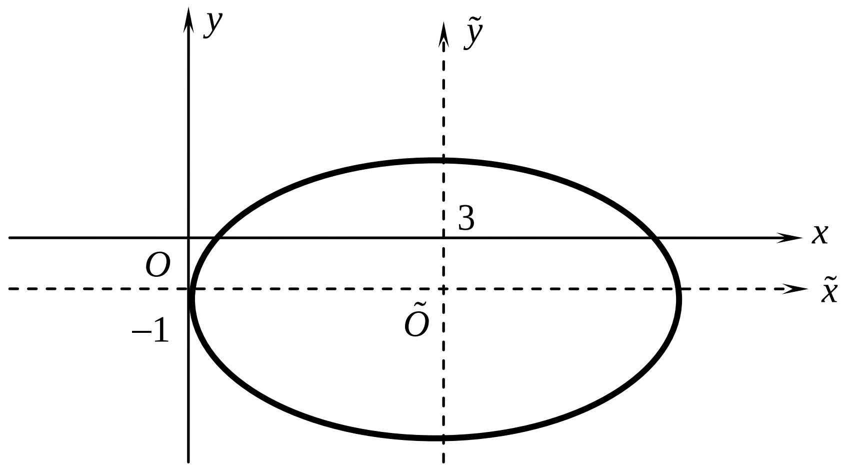
Выделив полные квадраты

$$5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 = 45$$

и разделив обе части равенства на 45, получим

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1.$$

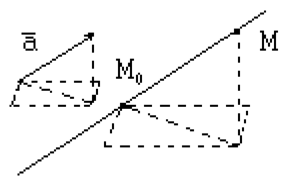
Введем новую систему координат $\tilde{x} = x - 3,\ \tilde{y} = y + 1$, тогда $\frac{\tilde{x}^2}{9} + \frac{\tilde{y}^2}{5} = 1$ - каноническое уравнение эллипса.



АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая в пространстве

Определение прямой как геометрического места таких точек, что отрезок, соединяющий любые две из них, параллелен заданному вектору, сохраняется и для случая пространственных прямых. Единственная разница в том, что заданный вектор $\bar{a}$ имеет уже три координаты (α, β, γ), заданная точка прямой M_0 имеет три координаты (x_0, y_0, z_0), и переменная точка прямой M также имеет три координаты (x, y, z).



Поэтому, используя подобие соответствующих треугольников, мы вместо соотношения (1) получим двойное равенство

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}. \qquad (2)$$

Приравнивая все части (2) переменной t, $-\infty \le t \le +\infty$, мы получим **параметрическое уравнение пространственной прямой**:

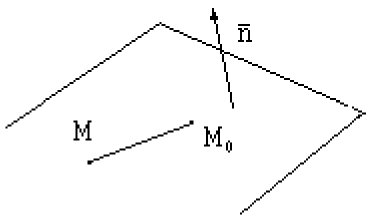
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot t, \\ y = y_0 + \beta \cdot t, \\ z = z_0 + \gamma \cdot t. \end{cases}$$

Второй способ задания пространственной прямой – как геометрическое место точек пересечения двух плоскостей – мы сможем использовать после знакомства с плоскостями.

Плоскость

Простейшей из пространственных поверхностей является плоскость – геометрическое место таких точек, что отрезок, соединяющий любые две из них, перпендикулярен данному вектору, называемому **нормалью к плоскости**.

Зададим плоскость с данной нормалью $\bar{n}$ (A, B, C) с помощью точки M_0 с координатами (x_0, y_0, z_0), лежащей в этой плоскости.

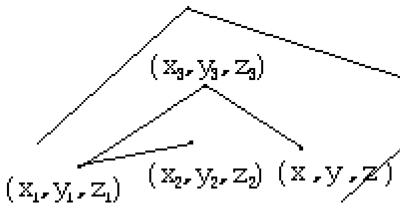


Если взять произвольную, отличную от M_0, точку M с координатами (x, y, z) в данной плоскости, то согласно определению и условию взаимной перпендикулярности двух векторов имеем $\overline{MM_0} \cdot \bar{n} = 0$. Используя координаты этих векторов, получим условие взаимной перпендикулярности в виде $A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$.

Последнее уравнение и есть **уравнение плоскости, проходящей через данную точку**. В частности, уравнения плоскостей, параллельных координатным плоскостям, имеют вид $x = x_0$, $y = y_0$ или $z = z_0$.

В случае, когда какой-то из коэффициентов уравнения плоскости отличен от нуля, можно выразить соответствующую координату через две другие координаты, например, $z = z_0 - \frac{A}{C} \cdot (x - x_0) - \frac{B}{C} \cdot (y - y_0)$ при $C \neq 0$. Такое уравнение может считаться **параметрическим заданием** плоскости, где в качестве двух независимых параметров выступают две из координат, а третья линейно выражается через два параметра.

Плоскость в пространстве может задаваться не только нормалью и одной точкой, но и тремя различными точками, с координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3), через которые она проходит.



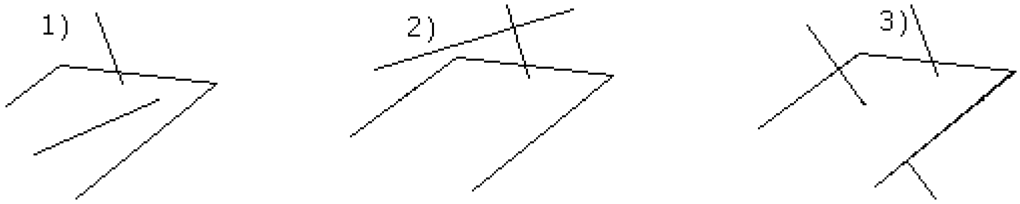
Рассматривая три вектора, лежащие в одной плоскости, получим в соответствии со свойством смешанного произведения соотношение $\begin{vmatrix} (x - x_1) & (y - y_1) & (z - z_1) \\ (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \end{vmatrix} = 0$. Если раскрыть определитель по способу, указанному выше, получим линейную комбинацию разностей $(x - x_1)$, $(y - y_1)$ и $(z - z_1)$, то есть линейное уравнение относительно координат переменной точки плоскости x, y и z.

Любая плоскость в пространстве XYZ представляется линейным уравнением вида $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$. И наоборот, любое линейное уравнение $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ задает плоскость.

Взаимное расположение прямой и плоскости

Рассмотрим прямую

$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot t, \\ y = y_0 + \beta \cdot t, -\infty < t < +\infty, \\ z = z_0 + \gamma \cdot t. \end{cases}$ и плоскость $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$. Прямая может 1) лежать в плоскости, 2) быть параллельной плоскости, то есть не пересекать плоскость, 3) пересекать плоскость в единственной точке.



В случае 1) направляющий вектор прямой и нормаль к плоскости взаимно перпендикулярны, то есть, $\alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C = 0$, и существует общая точка у прямой и плоскости (существование одной такой точки обеспечивает принадлежность всех точек прямой данной плоскости);

в случае 2) $\alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C = 0$ и на прямой существует точка, не лежащая в плоскости (существование такой точки обеспечивает то, что все точки прямой не принадлежат данной плоскости);

в случае 3) $\alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C \neq 0$.

Расстояние от точки до плоскости

Рассмотрим плоскость с уравнением $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ и точку с координатами $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Расстоянием от заданной точки до заданной плоскости является длина перпендикулярного к плоскости отрезка с концом в заданной точке. Таким образом, следует провести через заданную точку $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ прямую, перпендикулярную заданной плоскости. Параметрическими уравнениями такой прямой являются уравнения $\begin{cases} x = \tilde{x} + A \cdot t, \\ y = \tilde{y} + B \cdot t, \quad -\infty < t < +\infty. \\ z = \tilde{z} + C \cdot t. \end{cases}$ Найдем то значение параметра t_0, при котором прямая пересекает заданную плоскость. При этом значении параметра точка прямой становится точкой плоскости, то есть, $A \cdot (\tilde{x} + A \cdot t_0) + B \cdot (\tilde{y} + B \cdot t_0) + C \cdot (\tilde{z} + C \cdot t_0) + D = 0$. Выражая t_0 из последнего уравнения, получим $t_0 = -\dfrac{A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{y} + C \cdot \tilde{z} + D}{A^2 + B^2 + C^2}$. Следовательно, основанием перпендикуляра, опущенного из заданной точки $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ на заданную плоскость, является точка с координатами (x_0, y_0, z_0), где

$$x_0=\tilde{x}-\frac{A\cdot(A\cdot\tilde{x}+B\cdot\tilde{y}+C\cdot\tilde{z}+D)}{A^2+B^2+C^2},\quad y_0=\tilde{y}-\frac{B\cdot(A\cdot\tilde{x}+B\cdot\tilde{y}+C\cdot\tilde{z}+D)}{A^2+B^2+C^2},$$

$$z_0=\overline{z}-\frac{C\cdot(A\cdot\tilde{x}+B\cdot\tilde{y}+C\cdot\tilde{z}+D)}{A^2+B^2+C^2}.$$

Осталось найти расстояние между точками $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ и (x_0,y_0,z_0). Оно равно $\dfrac{|A\cdot\tilde{x}+B\cdot\tilde{y}+C\cdot\tilde{z}+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Таким образом, чтобы вычислить расстояние от точки до плоскости, следует взять модуль левой части уравнения плоскости с заданными координатами точки и разделить на корень из суммы квадратов коэффициентов уравнения плоскости при переменных.

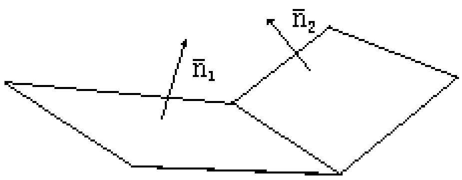
Взаимное расположение двух плоскостей

Две плоскости, представленные уравнениями $A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0$ и $A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0$ могут: 1) совпадать, 2) быть параллельными, 3) пересекаться.

В случае 1) коэффициенты в уравнениях плоскостей могут отличаться только сомножителем, на который можно сократить. Это означает, что должно выполняться соотношение $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.

В случае 2) нормальные векторы обеих плоскостей должны совпадать, или быть параллельными, но уравнения должны оставаться различными за счет свободных членов. Следовательно, должно выполняться соотношение $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.

В случае 3) нормальные векторы плоскостей не должны быть параллельными. Это значит, что $\overline{n}_1\times\overline{n}_2\neq 0$.

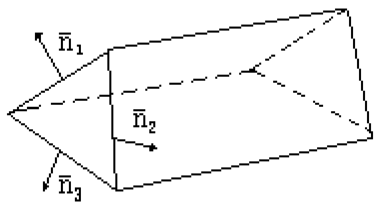


Геометрическим местом точек пересечения плоскостей является прямая с направляющим вектором $\overline{a}=\overline{n}_1\times\overline{n}_2$.

Взаимное расположение трех плоскостей

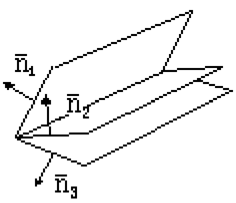
Вариантов взаимного расположения трех плоскостей значительно больше, чем двух. Мы рассмотрим случаи, когда любые две плоскости из трех не являются ни параллельными, ни, тем более, совпадающими. Это значит, что каждые две плоскости пересекаются вдоль прямой. Выберем какие-то две плоскости и рассмотрим случаи, когда 1) их общая прямая не пересекается с третьей плоскостью, 2) у трех плоскостей общая прямая пересечения, 3) их общая прямая пересекается с третьей плоскостью.

В случае 1) все три прямые, получаемые попарным пересечением плоскостей, параллельны.

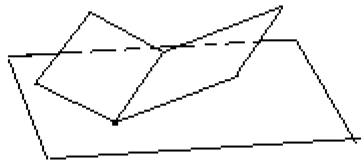


Это значит, что все три вектора нормалей к плоскостям можно расположить в одной плоскости, перпендикулярной к трем параллельным прямым, и, следовательно, $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3 = 0$. Соответствующее соотношение между коэффициентами соответствующих уравнений представляется с помощью определителя 3-го порядка и имеет вид $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$.

В случае 2) все три вектора нормалей также можно расположить в одной плоскости – и тот же определитель из коэффициентов равен нулю.



В случае 3) $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$, и общая прямая двух плоскостей пересекает третью плоскость в единственной точке.



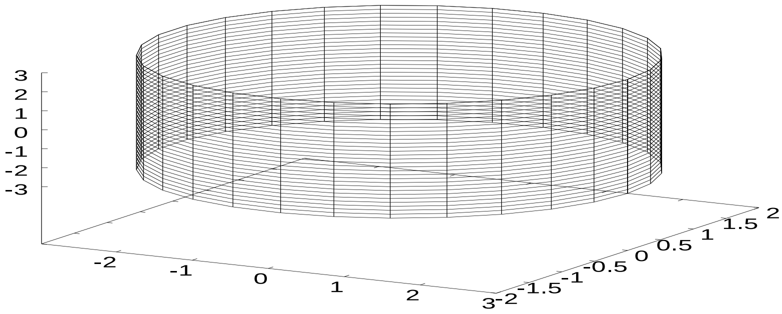
Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называют геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени, то есть уравнению, в котором координаты x, y и z входят в суммарной степени не выше 2. Такое уравнение имеет вид $A\cdot x^2 + B\cdot x\cdot y + C\cdot y^2 + D\cdot x\cdot z + E\cdot y\cdot z + F\cdot z^2 + K\cdot x + L\cdot y + M\cdot z + N = 0$.

Не всякое уравнение определяет реальную поверхность, а случаев, когда реальная поверхность существует, очень много. Мы рассмотрим несколько типов поверхностей.

Цилиндрические поверхности

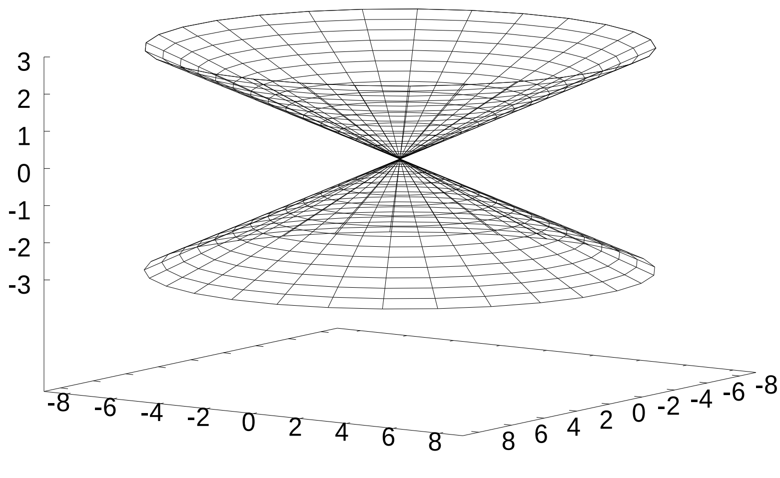
Уравнение второй степени, не содержащее одной из переменных, задает цилиндрическую поверхность. Например, уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ задает связь между координатами x и y, но не накладывает ограничений на координату z. В итоге получается поверхность, «вырастающая» из соответствующего эллипса, расположенного в плоскости *XOY*. Из каждой точки эллипса перпендикулярно плоскости *XOY* выходит прямая, называемая **образующей** данной цилиндрической поверхности. В совокупности эти образующие составляют цилиндрическую поверхность, а сам эллипс называется **направляющей** цилиндрической поверхности.



Аналогичным способом получаются цилиндрические поверхности из кривых второго порядка, лежащих в других координатных плоскостях.

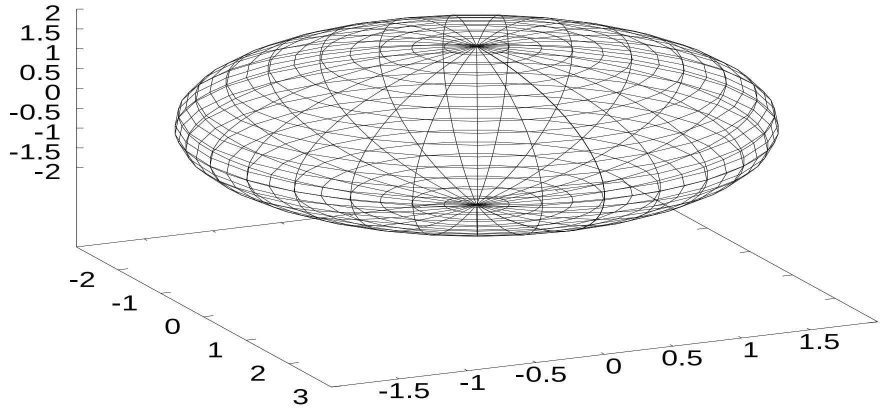
Конические поверхности

Это поверхности, построенные с помощью **образующих**, не параллельных друг другу, как в цилиндрических поверхностях, а проходящих через одну и ту же точку и через точки направляющей. Примером конической поверхности является круговой конус с направляющей – окружностью. **Уравнение кругового конуса** с направляющей, лежащей в плоскости, параллельной плоскости XOY, имеет вид $z^2 = R^2 \cdot (x^2 + y^2)$.



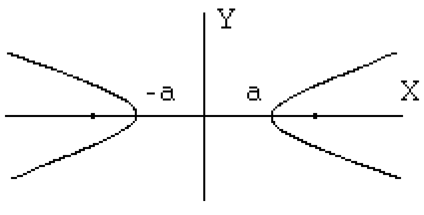
Поверхности вращения

Рассмотрим в плоскости XOY эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Начнем вращать эту кривую относительно оси OX. Кривая опишет поверхность, называемую **эллипсоидом вращения** и имеющую уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

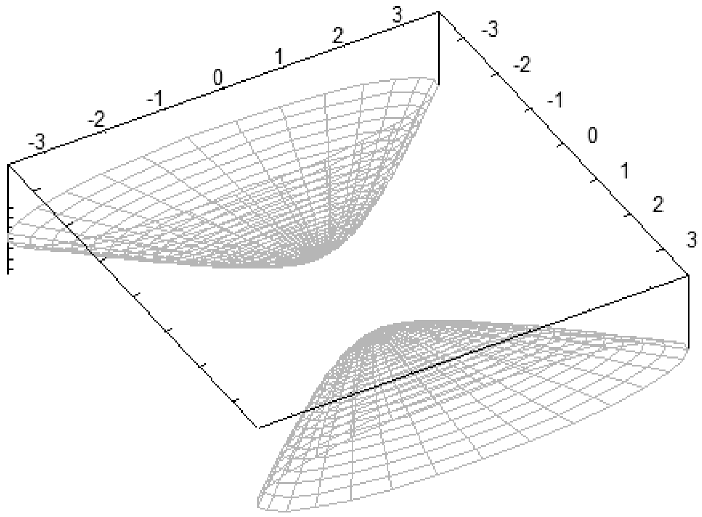


При вращении вокруг оси OX выражение y^2 в уравнении эллипса заменяется на выражение y^2+z^2. Аналогично при вращении вокруг оси OY мы получим эллипсоид вращения с уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$.

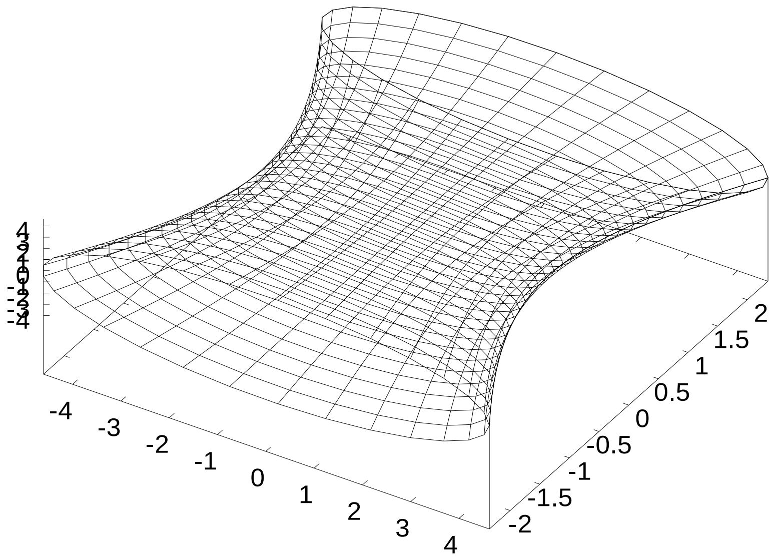
Рассмотрим в плоскости XOY гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.



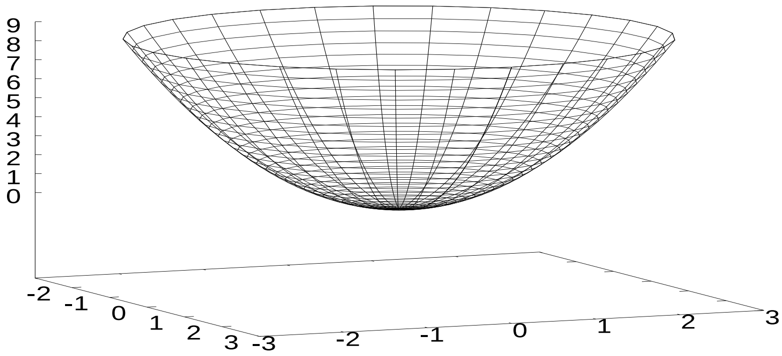
Будем вращать эту кривую вокруг оси OX. Мы получим поверхность, задаваемую уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ и называемую **двуполостным гиперболоидом вращения**.



Будем вращать ту же кривую вокруг оси OY. Мы получим поверхность, задаваемую уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$ и называемую **однополостным гиперболоидом вращения**.



Параболоидом вращения называется поверхность вида $z = A\cdot(x^2 + y^2)$. Эта поверхность получается вращением лежащей в плоскости XOZ параболы $z = A\cdot x^2$ вокруг своей оси.



Поверхности с эллиптическими сечениями

Очевидно, что сечения поверхностей вращения плоскостями, перпендикулярными осям вращения, являются окружностями. В том случае, когда сечениями являются эллипсы, мы имеем поверхности более общего вида, для которых, помимо канонических представлений, приведем параметрические задания поверхностей. Заметим, что в отличие от кривых поверхности задаются при помощи двух параметров.

Эллипсоид. Каноническое уравнение: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Параметрическое задание: $\begin{cases} x = a\cdot\cos u\cdot\sin v, \\ y = b\cdot\sin u\cdot\sin v, \quad u\in[0,2\pi], v\in[0,\pi]. \\ z = c\cdot\cos v, \end{cases}$

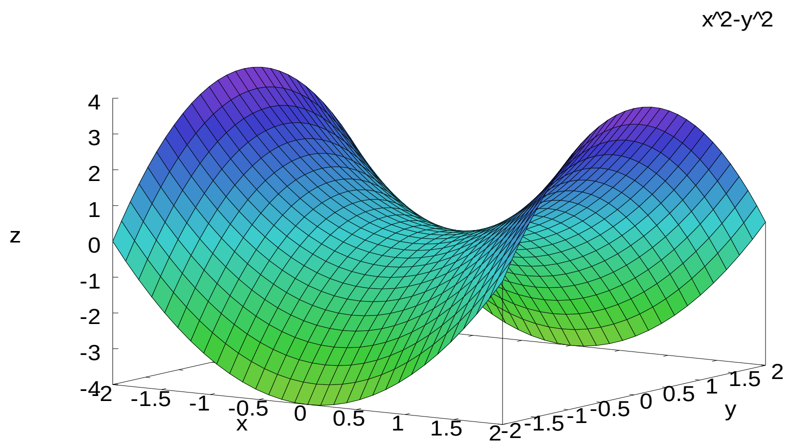
Двуполостный гиперболоид. Каноническое уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Параметрическое задание: $\begin{cases} x = \pm a \cdot \mathrm{ch}\, u, \\ y = b \cdot \mathrm{sh}\, u \cdot \cos v, \; u \in (-\infty, +\infty), \; v \in [0, 2\pi]. \\ z = c \cdot \mathrm{sh}\, u \cdot \sin v, \end{cases}$

Однополостный гиперболоид. Каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Параметрическое задание: $\begin{cases} x = a \cdot \mathrm{ch}\, u \cdot \cos v, \\ y = b \cdot \mathrm{sh}\, u, \quad u \in (-\infty, +\infty), \; v \in [0, 2\pi]. \\ z = c \cdot \mathrm{ch}\, u \cdot \sin v, \end{cases}$

Эллиптический параболоид. Каноническое уравнение $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Параметрическое задание либо с использованием переменных x и y в качестве параметров, либо $\begin{cases} x = a \cdot r \cdot \cos t, \\ y = b \cdot r \cdot \sin t, \; r \in [0, +\infty), \; t \in [0, 2\pi]. \\ z = r^2, \end{cases}$

Гиперболический параболоид (седло). Каноническое уравнение $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Параметрическое задание с использованием переменных x и y в качестве параметров.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Математическим анализом называют раздел математики, в котором функции изучаются методом пределов.

Для описания математических свойств используют два символа, позволяющих сокращать запись: $\forall$ (любой, произвольный, все) и $\exists$ (существует, найдется).

Переменные и постоянные величины

Величины могут быть *переменными и постоянными*, то есть меняющимися или не меняющимися в процессе исследования. Переменные величины могут быть *независимыми и зависимыми* – меняющимися в зависимости от каких-то других величин. Эти понятия также условны. К примеру, время меняется независимо от чего-либо, и его следует считать переменной величиной. Однако, с позиций общей теории относительности Эйнштейна это совсем не так.

Если рассмотреть уравнение окружности $x^2+y^2=4$, в нем участвует две переменные величины x и y. Одной из них можно придавать в некоторой области любые значения, другая находится из приведенного уравнения. Следовательно, одну из них можно считать независимой, другую – зависимой переменной. При этом независимой переменной может считаться любая из них, тогда вторая будет зависимой.

Мы будем работать с действительными (или вещественными) числами. Еще со школы мы знакомы с натуральными числами (N), целыми числами (Z) и рациональными числами (Q). Все эти числа являются действительными числами.

Множеством действительных чисел (R) мы назовем множество, для элементов которого ($x, y, z, \ldots$) определены две операции: сложение ($+$) и умножение ($\cdot$), а также отношение порядка ($\le$), удовлетворяющие следующим аксиомам.

Аксиоматика действительных чисел

1. **Аксиомы сложения**.

1) $\forall x, y \in \mathrm{R}$ справедливо $x+y=y+x$.

2) $\forall x, y, z \in \mathrm{R}$ справедливо $(x+y)+z=x+(y+z)$.

3) $\exists 0 \in \mathrm{R}$ (нейтральный элемент сложения) такой, что $\forall x \in \mathrm{R}$ справедливо $x+0=x$.

4) $\forall x \in \mathrm{R} \, \exists (-x) \in \mathrm{R}$ такой, что $x + (-x) = 0$.

2. **Аксиомы умножения.**

1) $\forall x, y \in \mathrm{R}$ справедливо $x \cdot y = y \cdot x$.

2) $\forall x, y, z \in \mathrm{R}$ справедливо $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

3) $\exists 1 \in \mathrm{R}$ (нейтральный элемент умножения) такой, что $\forall x \in \mathrm{R}$ справедливо $x \cdot 1 = x$.

4) $\forall x \in \mathrm{R} \setminus \{0\} \, \exists \, \frac{1}{x} \in \mathrm{R}$ такой, что $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

3. **Аксиома сложения и умножения.**

1) $\forall x, y, z \in \mathrm{R}$ справедливо $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.

4. **Аксиомы порядка.**

1) $\forall x \in \mathrm{R}$ справедливо $x \le x$.

2) $\forall x, y \in \mathrm{R}$ таких, что $x \ne y$, справедливо одно из двух соотношений: $x \le y$ или $y \le x$.

3) Если выполняются одновременно соотношения $x \le y$ и $y \le z$, то справедливо соотношение $x \le z$.

4) Если выполняются одновременно соотношения $x \le y$ и $y \le x$, то $x = y$.

5. **Аксиомы порядка, связанные с операциями.**

1) Если $x \le y$, то для $\forall z \in \mathrm{R}$ справедливо $x + z \le y + z$.

2) Если выполняются одновременно соотношения $0 \le x$ и $0 \le y$, то $0 \le x \cdot y$.

6. **Аксиома непрерывности.**

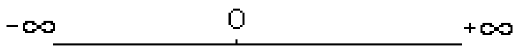
Пусть X и Y – подмножества множества R, причем для $\forall x \in X$ и для $\forall y \in Y$ справедливо $x \le y$. Тогда $\exists z \in \mathrm{R}$ такое, что $x \le z$ и $z \le y$ для $\forall x \in X$ и для $\forall y \in Y$.

Все перечисленные аксиомы обеспечивают те свойства вещественных чисел, которыми мы привычно пользуемся.

Последняя аксиома кажется лишней в перечне аксиом. Однако именно эта последняя аксиома позволяет ввести иррациональные числа в множество действительных чисел.

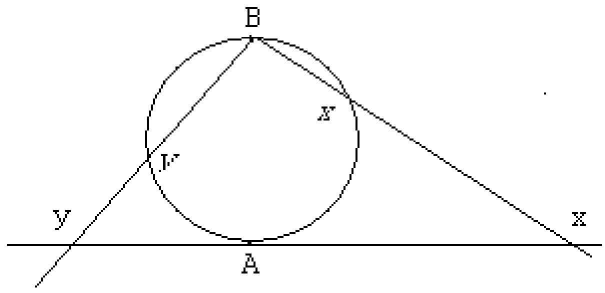
Действительно, первые пять аксиом справедливы и для множества рациональных чисел Q, то есть, чисел, представимых в виде отношения $\frac{p}{q}$, где p – целое число, а q – натуральное число. Однако еще древние греки знали, например, что число, квадрат которого равен 2, не является рациональным. Существование иррациональных чисел во множестве R доказывается именно применением аксиомы непрерывности.

Известной еще древним грекам является **интерпретация** множества R в виде бесконечной прямой, на которую нанесена точка (О), являющаяся началом отсчета как в положительном, так и в отрицательном направлениях. Действительные числа – это точки прямой с расстояниями от точки отсчета, равными величинам чисел. Такой интерпретацией мы активно пользуемся со школы, называя положительной бесконечностью ($+\infty$) условный предел при удалении точки по прямой вправо и отрицательной бесконечностью ($-\infty$) условный предел при удалении точки по прямой влево.



Другой моделью множества R является окружность. Характерной особенностью такой интерпретации является то, что аналогом бесконечности является одна из точек окружности. Покажем, что между точками бесконечной прямой и конечной окружности существует взаимнооднозначное соответствие, позволяющее заменять одну модель на другую.

Представим окружность, касающуюся прямой в точку А, которую мы назовем полюсом. Другим полюсом (В) назовем точку, диаметрально противоположную А. Проводя из В лучи, пересекающие окружность и данную прямую, мы получим взаимнооднозначное соответствие точек окружности и прямой. Полюс А будут соответствовать самому себе. Полюс В будет соответствовать бесконечности. При этом понятия $+\infty$ и $-\infty$ будут означать только направление движения к одной и той же точке В, соответствующей бесконечно удаленной точке.



Функция. Способы ее задания

Вернемся к независимым и зависимым переменным. Независимую переменную часто называют аргументом, зависимую – функцией.

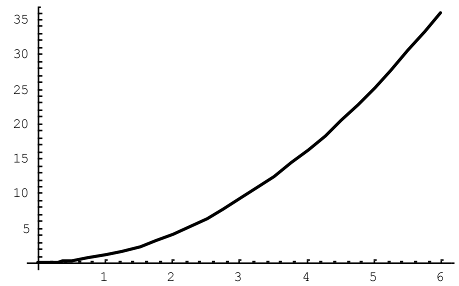
Определение 1. Если каждому элементу некоторого множества $X \subset \mathrm{R}$ ставится в соответствие элемент множества $Y \subset \mathrm{R}$, говорят, что на множестве X задана функция $y = f\left(x\right)$, здесь f определяет закон, с помощью которого осуществляется это соответствие.

Примеры.

1. Показательная функция $y = 2^x$, $x \in \mathrm{R}$.
2. Логарифмическая функция $y = \log_2 x$, $x > 0$.
3. Степенная функция $y = x^5, x \in \mathrm{R}$.

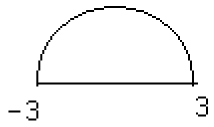
Функция может быть задана в виде таблицы или графика, либо формулой (аналитическое задание). В качестве примера приведена функция, аналитическое задание которой $y = x^2$, а табличное и графическое ее задания приведены ниже.

x	1	1.5	2	2.5	3	4	6
y	1	2.25	4	6.25	9	16	36

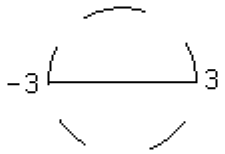


Аналитически функцию можно задать в явном виде $y = f(x)$ (<u>*явное задание функции*</u>), когда из формулы следует, что переменная y зависит от x, то есть является функцией аргумента x.

Можно задать ее <u>*неявно*</u> $F(x, y) = 0$, когда любая из переменных может считаться независимой, тогда другая переменная является функцией. Пример неявного задания функции $x^2 + y^2 = 9$. Нетрудно заметить, что эта формула задает фактически две непрерывные функции $y = \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3,3]$,



и $y = -\sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3,3]$. График первой функции представляет верхнюю полуокружность, график второй – нижнюю ее часть. Если не требовать непрерывности, то из соотношения $x^2 + y^2 = 9$ можно получить бесчисленное множество функций, заданных на отрезке [-3,3].



Кроме того, возможно <u>*параметрическое задание функции*</u> $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, когда вводится дополнительный параметр $t \in [t_0, T]$. Примером является параметрическое уравнение той же, что и выше окружности $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$, в неявном виде записанное как $x^2 + y^2 = 9$.

Определение 2. Множество X называется <u>*областью существования*</u> функции, или областью ее определения.

Определение 3. Множество Y называется <u>*областью значений*</u> функции.

Определение 4. Любое связное подмножество (то есть такое, что от одной произвольной его точки можно дойти до второй произвольной его точки, оставаясь внутри подмножества) числовой оси называется *промежутком*.

Открытый промежуток, не включающий граничных точек, называется *интервалом* и обозначается (a,b) или $a<x<b$. Замкнутый промежуток, содержащий все внутренние и граничные точки, называется *отрезком* и обозначается $[a,b]$ или $a\le x\le b$. Существуют также полуинтервалы $[a,b)$ и $(a,b]$. В первом случае в полуинтервал входит только левая граничная точка, во втором – только правая.

Примеры.

1. У функции $y=\sin x$ область существования вся числовая ось то есть $-\infty<x<\infty$, область значений $[-1,1]$.

2. У функции $y=\sqrt{x}$ область существования $[0,\infty)$ или $0\le x<\infty$, область значений также $[0,\infty)$.

3. У функции $y=\log_a x$ область существования $(0,\infty)$, область значений $(-\infty,\infty)$.

Последовательности

Определение. Функция, заданная на множестве натуральных чисел N, называется последовательностью. Значение функции при n=1, называется первым членом последовательности (x_1), значение при n=2 – вторым членом последовательности (x_2), ….

Последовательности бывают числовыми, если все ее элементы – числа и функциональными, когда ее элементы – функции.

Примеры.

1. $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n\in N}=1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25},.......$ – числовая последовательность,

2. $\left\{\frac{\sin(nx)}{n}\right\}_{n\in N}=\sin x,\frac{\sin(2x)}{2},\frac{\sin(3x)}{3},\frac{\sin(4x)}{4},\frac{\sin(5x)}{5},.....,\ x\in[0,2\pi],$ – функциональная последовательность.

Предел числовой последовательности

Определение. Число a называется пределом числовой последовательности x_n $(a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$, если для $\forall\varepsilon>0$ $\exists N=N(\varepsilon)\in\mathrm{N}$ такое, что при $\forall n>N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $|x_n-a|<\varepsilon$. Произвольность положительного числа ε обеспечивает возможность для членов последовательности x_n с большими номерами n подойти сколь угодно близко к пределу a.

Последовательность, имеющая **конечный предел,** называется **сходящейся** последовательностью. В противном случае последовательность называют расходящейся.

Примеры.

1. Величина $|\frac{1}{n^2}-0|=\frac{1}{n^2}$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточно больших значениях n. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

2. Величина $|\frac{n}{n+1}-1|=\frac{1}{n+1}$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточно больших значениях n. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

3. Последовательность $\left\{n^3\right\}_{n\in\mathrm{N}}=1,8,27,....$ возрастает с ростом n, стремясь к бесконечности. Конечного предела эта последовательность не имеет. Следовательно, эта последовательность расходится.

4. Последовательность $\left(-1\right)^{n+1}=1,-1,1,-1......$ не имеет предела, и значит, расходится.

5. Последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2,\left(\frac{3}{2}\right)^2,\left(\frac{4}{3}\right)^3,......$

является сходящейся, ее предел называется числом Непера и обозначается буквой e, причем $e\approx 2,7182818...$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

Определение. Последовательность x_n называется **бесконечно малой**, если ее предел равен нулю, т.е. для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ такое, что при $\forall n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $|x_n| < \varepsilon$.

Определение. Расходящаяся последовательность называется **бесконечно большой**, если для $\forall M > 0 \ \exists N = N(M) \in \mathrm{N}$ такое, что при $\forall n > N(M)$ справедливо неравенство: $|x_n| > M$. Произвольность числа M позволяет значениям членов последовательности с большими номерами быть сколь угодно большими по абсолютной величине.

Очевидно, что последовательность x_n является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ является бесконечно большой.

Определение. Последовательность $b_n = b_1, b_2, b_3........$ называется подпоследовательностью последовательности $a_n = a_1, a_2, a_3........$, если все ее элементы b_n являются элементами последовательности a_n.

К примеру, последовательность $\left\{\dfrac{1}{3^{2n}}\right\} = \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{3^4}, \dfrac{1}{3^6}, ...$ является подпоследовательностью последовательности $\left\{\dfrac{1}{3^n}\right\} = \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{3^3}, \dfrac{1}{3^4}, \dfrac{1}{3^5}, \dfrac{1}{3^6}, ...$

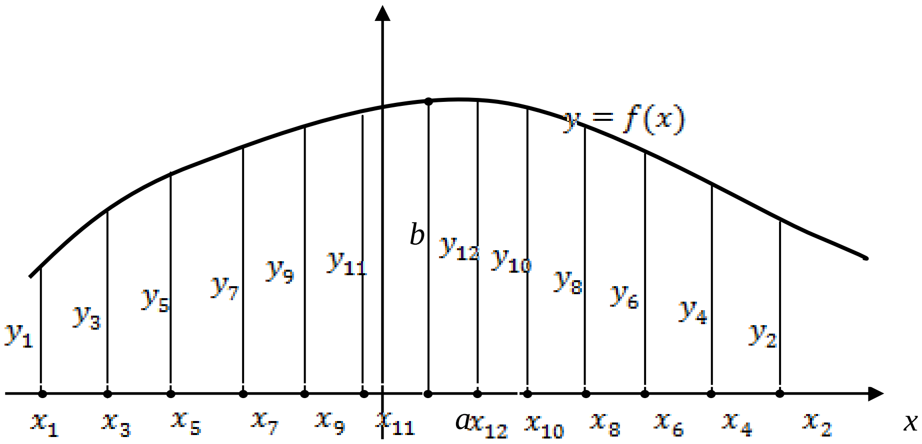
Существует теорема, доказывающая, что если последовательность сходится к некоторому значению, то все ее подпоследовательности сходятся и к тому же значению.

Предел функции. Свойства пределов

Если при вычислении предела последовательности всегда $n \to \infty$, то, вычисляя предел функции $f(x)$, следует оговаривать, к чему стремится ее аргумент. Рассмотрим, в чем различие между пределами последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}$ и функции $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$. Если в последовательности n возрастает, принимая только значения из множества натуральных чисел, то x может возрастать, принимая любые вещественные значения. Пределы последовательности и функции в этом случае равны нулю.

В то же время имеет смысл рассмотреть предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$. Стоящая под знаком предела функция увеличивается с приближением ее аргумента x к нулю, оставаясь положительной, причем, при x сколь угодно близких к нулю, ее значение становится все большим и большим. Ясно, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$. Поскольку при $x=0$ рассматриваемая функция не существует, этот ее предел дает важнейшую информацию – показывает поведение функции в окрестности предельной точки. При подходе к этой точке она уходит в бесконечность.

Определение 1. Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, если для любой последовательности значений аргумента x_k, стремящейся к a, соответствующая ей функциональная последовательность $f(x_k)$ сходится к b.



$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

x_k	x_1	x_3	x_5	x_7	x_9	x_{11}	$\to$	a
$y_k = f(x_k)$	y_1	y_3	y_5	y_7	y_9	y_{11}	$\to$	b

x_k	x_2	x_4	x_6	x_8	x_{10}	x_{12}	$\to$	a
$y_k = f(x_k)$	y_2	y_4	y_6	y_8	y_{10}	y_{12}	$\to$	b

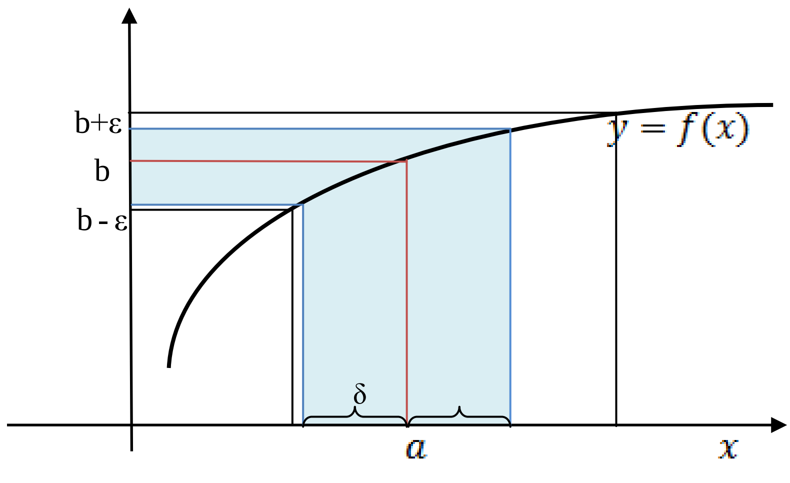
x_k	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	$\to$	a
$y_k = f(x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	$\to$	b

В первой все ее члены больше a, и мы подходим к точке a справа, во второй все элементы меньше предельного значения аргумента, подходим к точке a слева, в третьей элементы последовательности расположены как слева, так и справа от предельного значения a. Соответствующие им функциональные последовательности $y_k = f\left(x_k\right)$ во всех трех случаях стремятся к b. Если для любой другой последовательности z_k, стремящиеся к a, последовательность $y_k = f\left(z_k\right)$ также стремится к b, то предел функции равен этому числу, что видно из рисунка.

Приведенное определение предела функции в точке, связанное с рассмотрением числовых последовательностей, неудобно тем, что реально невозможно изучить все числовые последовательности, сходящиеся к числу a. Поэтому для исследования существования предела пользуются вторым определением, равносильным первому.

Определение 2. Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, |x-a| < \delta(\varepsilon), \left(\left|f(x)-b\right| < \varepsilon\right)$.

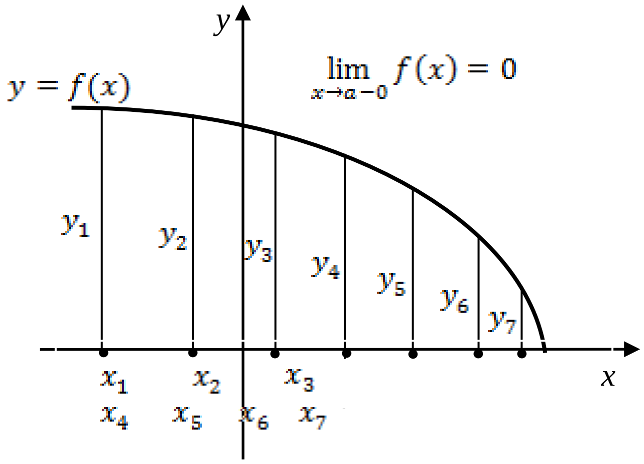
Словесная формулировка приведенной фразы такова: число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого положительного ε существует такое положительное $\delta(\varepsilon)$, что для любого x, для которого выполняется неравенство $|x-a| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$.



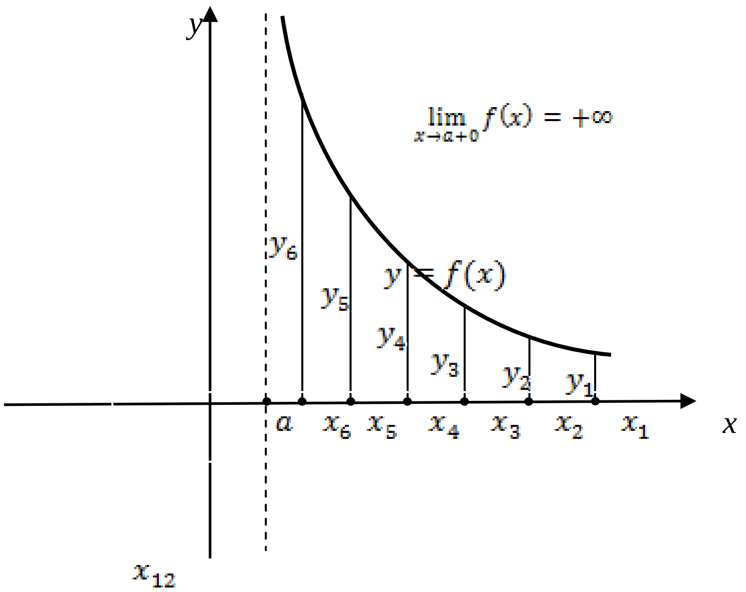
Определение 2a. Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0\, \exists M(\varepsilon) > 0 : \forall x, |x| > M, \left(\left|f(x)-b\right| < \varepsilon\right)$..

Доказана эквивалентность определений *1* и *2*, то есть из *1* следует *2*, и наоборот.

Определение 3. Число b называется левым пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ (пределом слева), если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, стремящейся к a слева $(x_n < a)$ соответствующая ей функциональная последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b. Обозначение $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$.



Определение 4. Число b называется правым пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ (пределом справа), если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, стремящейся к a справа$(x_n > a)$ соответствующая ей функциональная последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b. Обозначение $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$.



Пример. $y=2^{1/(x-1)}$ Вычислим $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{1/(x-1)}$. Поскольку $x<1$, показатель степени отрицательный, следовательно, $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{1/(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1-0} \frac{1}{2^{-\frac{1}{(x-1)}}}$. Теперь показатель степени положительный и при $x\to 1$ стремится к $+\infty$, ясно, что левый предел этой функции при $x\to 1$ равен нулю. В то же время правый предел $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{1/(x-1)} = +\infty$, так как показатель степени положителен и стремится к $+\infty$.

Очевидно, $\lim\limits_{x\to 1} 2^{1/(x-1)}$ не существует, так как при подходе к предельному значению аргумента слева и справа получаем разные значения, и определение 1 не выполняется.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией (бесконечно малой) при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)=0$.

Определение 2. Функция $A(x)$ называется бесконечно большой функцией (бесконечно большой) при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} A(x)=\pm\infty$.

Следствие. Функция $\frac{1}{A(x)}$ при $x\to x_0$ бесконечно малая, а $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая.

Определение 3. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется бесконечно малыми одного порядка малости при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K$, причем $0 < /K/ < \infty$.

Определение 4. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется эквивалентными бесконечно малыми при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Определение 5. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$, при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Известны следующие **свойства** бесконечно малых.

1) Сумма конечного числа бесконечно малых – бесконечно малая.

2) Произведение бесконечно малой и конечной величины – величина бесконечно малая.

3) Произведение бесконечно малых – бесконечно малая.

Теорема о пределе функции. Функция, стоящая под знаком предела отличается от своего предельного значения на бесконечно малую, то есть из $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$ следует $f(x)=b+\alpha(x)$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Доказательство. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$, то согласно определению предела $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall x,|x-x_0|<\delta(\varepsilon)\Big(\big|f(x)-b\big|<\varepsilon\Big)$, теперь если обозначить $f(x)-b=\alpha(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Свойства пределов функций

1) **Предел постоянной равен самой постоянной**. Это свойство следует из определения предела.

2) **Постоянную можно выносить за знак предела**.

В самом деле, пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$, в соответствии с теоремой $f(x)=b+\alpha(x)$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. Очевидно, $K\cdot f(x)=K\cdot b+K\cdot\alpha(x)$, где K постоянная. Но $K\cdot\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$, что следует из свойств бесконечно малых, тогда функция $K\cdot f(x)$ отличается от $K\cdot b$ на бесконечно малую величину, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} K\cdot f(x)=K\cdot b=K\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

3) **Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций, если они существуют.**

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=c$, тогда $f(x)=b+\alpha(x)$ и $g(x)=c+\gamma(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\gamma(x)=0$, тогда

$f(x)+g(x)=b+c+\underline{\alpha(x)+\gamma(x)}$. Но подчеркнутые члены – это бесконечно малая величина, и значит, $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=b+c=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

4) **Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если они существуют** (доказывается аналогично).

5) **Предел отношения двух функций:** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, **если оба предела существуют и** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

6) **Если** $f(x)\le g(x)$, **то** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

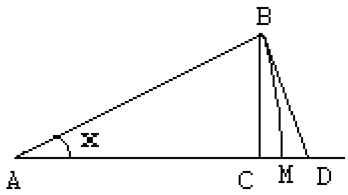
7) **Если** $h(x)\le f(x)\le g(x)$ **и** $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, **то** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$. (**Теорема о двух полицейских**).

Первый замечательный предел

Докажем, что справедлива формула:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Прежде всего, заметим, что вследствие нечетности функции $\sin x$ отношение $\dfrac{\sin x}{x}$ при x, близком к 0, положительно при любом знаке x. Достаточно предположить, что x приближается к 0, оставаясь положительным. В противном случае мы сменим знак x, что не повлияет на результат. Используем геометрическое доказательство. Рассмотрим сектор круга радиуса 1 с углом при вершине, равным x. BM – дуга граничной окружности сектора, A – его вершина, AB = AM = 1. BD – отрезок касательной к дуге BM в точке B. BC – перпендикуляр, опущенный из точки B на отрезок AM.



В силу последовательной вложимости друг в друга треугольника ABM, сектора ABM и треугольника ABD соответствующие соотношения имеют место между площадями этих фигур: $S_{\Delta ABM} < S_{сектABM} < S_{\Delta ABD}$. Имеем $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}\sin x$, $S_{сектABM} = \frac{1}{2}x$, $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Поэтому получаем неравенство $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Если мы поделим все части этого неравенства на $\sin x$, то в силу предположения о знаке x знаки неравенства не изменятся. Поэтому мы имеем $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. А теперь устремим x к нулю и применим теорему о двух полицейских. Мы получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$. Осталось применить свойство 5) пределов для получения предела обратной величины: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел и его следствия

Справедливы следующие формулы, называемые вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e,\ e \approx 2,71...$$

Равносильность этих формул следует из связи переменных: $\alpha = \frac{1}{x}$.

Мы получали число Непера e из подобной формулы, где была последовательность, а не функция. Заметим, что здесь в первой из приведенных формул переменная x может стремиться как к $+\infty$, так и к $-\infty$, а также может просто расти по абсолютной величине, меняя знак произвольно. Приведенная формула имеет следующие следствия.

1. Если мы формально прологарифмируем вторую из приведенных формул, мы получим 1-е следствие второго замечательного предела:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

2. Другим следствие второго замечательного предела является предел, получаемый из предыдущего заменой $z=\ln(1+t)$:

$\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1.$

3. Рассмотрим теперь предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$. Сделаем замену $(1+x)^\alpha=e^z$. При такой замене $x\to 0$ тогда и только тогда, когда $z\to 0$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{e^{z/\alpha}-1}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z/\alpha}{e^{z/\alpha}-1}\cdot\alpha=\alpha$$

Непрерывность функции

Определение 1. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если предел этой функции при $x\to a$ равен значению функции в предельной точке, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Применяя второе определение предела функции в точке, получим

Определение 2. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall x,|x-a|<\delta(\varepsilon),\left(\left|f(x)-f(a)\right|<\varepsilon\right)$.

Определение 3. Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке a, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, где $\Delta x-$приращение аргумента функции ($x=a+\Delta x$), а $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$ – приращение функции, соответствующее приращению ее аргумента Δx.

Доказательство следует из первого определения непрерывной функции

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f(a+\Delta x)-f(a)\right)=\lim_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x)-\lim_{\Delta x\to 0} f(a)=f(a)-f(a)=0.$$

Здесь первый из пределов вычисляется с помощью определения 1, второй – как предел постоянной, поскольку $f(a)$ не зависит от Δx.

Определение 4. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$.

Определение 5. Функция $f(x)$ непрерывна в некоторой области, если она непрерывна во всех точках этой области.

Все степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции непрерывны в областях существования.

Свойства непрерывных функций

1) Сумма непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Действительно, из определения 1 непрерывности следует, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$, то

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a).$$

2) Произведение непрерывных функций есть функция непрерывная.

3) Частное непрерывных функций – функция непрерывная, если знаменатель в предельной точке не равен нулю.

Доказательства второго и третьего свойств также следует из свойств пределов.

4) Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке a, пусть функция $z=g(y)$ непрерывна в точке $b=f(a)$. Тогда функция $z=h(x)=g(f(x))$ непрерывна в точке a.

Очевидно, что $\Delta z=h(a+\Delta x)-h(a)=g(f(a+\Delta x))-g(f(a))=$
$=g(f(a)+f(a+\Delta x)-f(a))-g(f(a))=g(b+\Delta y)-g(b)$.

Так как согласно определению 3 непрерывности $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta z\to 0$ при $\Delta y\to 0$, получим: $\Delta z\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Таким образом, непрерывная функция от непрерывной функции есть функция непрерывная.

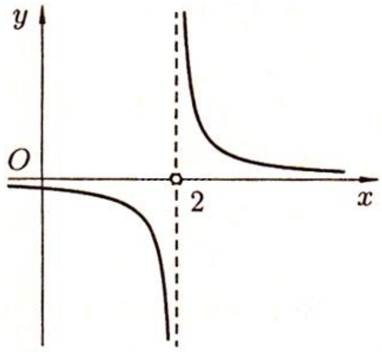
Пример. Функция $z=\sin\left(x^2\right)$ непрерывна во всех точках числовой оси, так как функция $y=x^2$ непрерывна на R, а функция $z=\sin y$ непрерывна на множестве неотрицательных чисел.

Точки разрыва функции

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются **точками разрыва этой функции**. Если $x=x_0$ – точка разрыва функции $y=f(x)$, то в ней не выполняется, по крайней мере, одно из условий первого определения непрерывности функции, а именно:

1. Функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0.

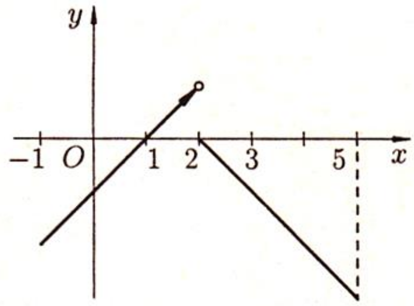
Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ не определена в точке $x_0 = 2$.



2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела $f(x)$ при $x \to x_0$.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x-1, \text{ если } -1 \le x < 2, \\ 2-x, \text{ если } 2 \le x \le 5, \end{cases}$$



определена в точке $x_0 = 2$ ($f(2) = 0$), однако в точке $x_0 = 2$ имеет разрыв, т.к. эта функция не имеет предела при $x \to 2$:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = 1, \text{ а } \lim_{x \to 2+0} f(x) = 0.$$

3. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \ne f(x_0)$.

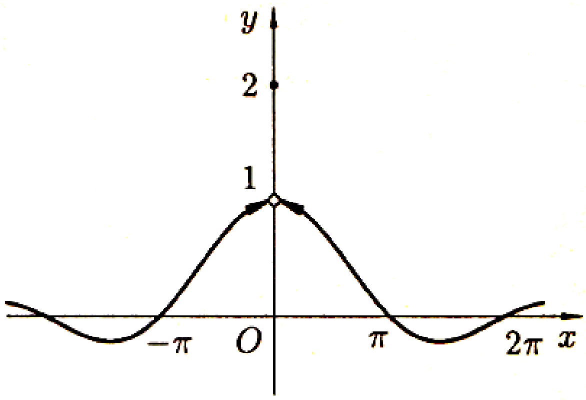
Например, функция

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x \ne 0, \\ 2, \quad \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

Здесь $x_0 = 0$ – точка разрыва:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а $g(x_0) = g(0) = 2$.



Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точки разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции $y = f(x)$, Если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$. При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**;

б) если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется **точкой конечного разрыва**.

Величину $|A_1 - A_2|$ называют **скачком функции** в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $y = f(x)$, если, по крайней мере, один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

1. Обратимся к функциям, рассмотренным выше.

   $y = \dfrac{1}{x-2}$, $x_0 = 2$ – точка разрыва второго рода.

2. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x-1, \text{если } -1 \le x < 2, \\ 2-x, \text{если } 2 \le x \le 5, \end{cases}$$

$x_0 = 2$ является точкой разрыва первого рода, скачок функции равен $|1-0| = 1$.

3. Для функции

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 2, \qquad \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва первого рода. Положив $g(x) = 1$ (вместо $g(x) = 2$) при $x = 0$, разрыв устранится, функция станет непрерывной.

Пример. Дана функция $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$. Найти точки разрыва, выяснить их тип.

Решение.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=3$. Очевидно, $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } x>3, \\ -1 \text{ при } x<3. \end{cases}$ Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=-1$. Поэтому в точке $x=3$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке равен $1-(-1)=2$.

Вычисление пределов

Вначале выясним, в чем смысл вычисления пределов? В точках, где функция $f(x)$определена и непрерывна, соответствующий предел можно получить, вычислив ее значение. Особый подход к вычислению предела необходим, когда желательно знать поведение функции в окрестности особой точки, или установить, как ведет себя функция при стремлении ее аргумента к бесконечности.

Рассмотрим функции $\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$ и $x+1$. Последняя получена в результате формального сокращения числителя и знаменателя первой на множитель $(x-1)$. Это разные функции, так как имеют разные области существования, хотя их значения совпадают повсюду, кроме точки $x=1$. В этой точке первая функция не существует (деление на ноль), вторая равна 2. Теперь вычислим предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$. Рассмотрим последовательность действий $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$ под знаком предела. Здесь мы заменяем одну функцию на другую в той области, где они совпадают, ибо при вычислении предела x стремится к предельной точке 1, не попадая в саму эту точку. Итак, рассматриваемая функция в точке 1 не существует, но стремится к значению 2 при $x\to 1$.

Исследуем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^2-x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}$. Он равен 3, так как $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x^2}$ являются бесконечно малыми при $x\to\infty$. Сокращение на x^2 также законно, поскольку $x\neq\infty$, а только стремится к ней, то есть принимает сколь угодно большие, но конечные значения.

Правила вычисления предела

Чтобы вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, необходимо:

1. Попробовать подставить в функцию, стоящую под знаком предела, $x=a$. Если функция в этой точке непрерывна, в соответствии формулой $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ предел равен числу $f(a)$.

2. Если точка a не входит в область определения функции, то конечный предел может не существовать, и если абсолютная величина функции неограниченно увеличивается при стремлении переменной к a, то пределом является бесконечность.

3. Если в результате подстановки получается неопределенность, то есть выражение вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}$, следует раскрыть эту неопределенность, сделав сокращения, или привести получаемое выражение к замечательному пределу или его следствию.

Примеры.

1. $$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-2)}=\frac{2\left(3+\frac{1}{2}\right)}{1}=7.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=\frac{1}{2}.$$

Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ показывает, что в числителе и знаменателе присутствуют бесконечно большие функции. Чтобы избавиться от них следует вынести самую большую величину в числителе и знаменателе за скобки, произвести сокращение, после чего еще раз применить пункт 1 правил.

Примеры.

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+x-1}{x^3-x^2+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=1.$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^3-x^2+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=0.$$

Неопределенности $\infty-\infty, 0\cdot\infty$ приводятся вначале к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, затем раскрываются одним из перечисленных выше способов.

Примеры.

1. $$\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to3}\frac{x+3-6}{x^2-9}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{(x+3)}=\frac{1}{6}.$$

2. $$\lim_{x\to0}x\operatorname{ctg}x=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{tg}x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\cos x\right)=1.$$

Неопределенность вида 1^∞ раскрывается приведением ко второму замечательному пределу.

Примеры.

1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x^{-1}}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{x^{-2}}{\sin^2 x^{-1}}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^{-1}}{\sin x^{-1}}\right)^2}=e^1=e.$$

2.

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{x^2}}=\left[\lim_{x\to0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Исследование непрерывности функции в точке.

Пример.

Проверить непрерывность функции $y=\begin{cases} x+4, & x\le -1, \\ x^2+2, & -1<x\le 1, \\ 2x, & x>1. \end{cases}$

Поскольку функции $x+4$, x^2+2 и $2x$ непрерывны в областях их задания, достаточно рассмотреть функцию y в точках стыковки этих функций. Итак, для $x=-1$ имеем $\lim\limits_{x\to -1-0} y=\lim\limits_{x\to -1}\left(x+4\right)=3$, $\lim\limits_{x\to -1+0} y=\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+2\right)=3$, $y\left(-1\right)=-1+4=3$.

Функция в этой точке непрерывна согласно определению 4.

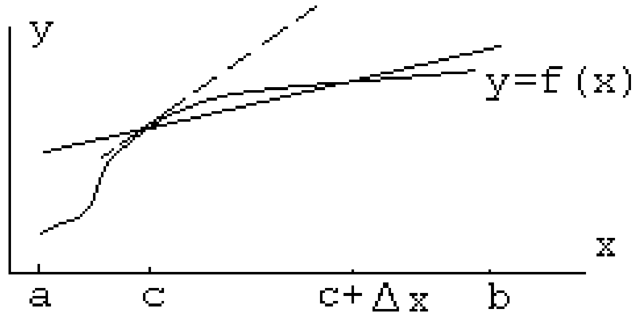
Для $x=1$ имеем $\lim\limits_{x\to 1-0} y=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2\right)=3$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y=\lim\limits_{x\to 1} 2x=2$, $y\left(1\right)=1^2+2=3$. Условие непрерывности в точке $x=1$ не выполняется.

Следовательно, функция y непрерывна на всей числовой оси за исключением точки $x=1$, где она имеет конечный разрыв со скачком (-1).

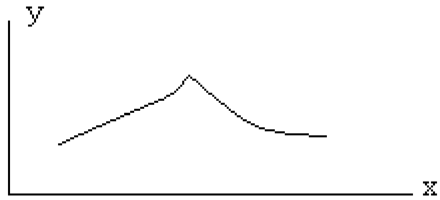
Производная. Дифференциал функции

Задача о проведении касательной к кривой

Пусть заданная кривая является графиком непрерывной функции $y=f(x),\ x\in[a,b]$, и требуется провести касательную к этой кривой в точке $c\in(a,b)$. Заметим, что **касательная** – это прямая, получающаяся в пределе из хорд, проходящих через точки $(c, f(c))$ и $(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$, когда $\Delta x\to 0$. Уравнение хорды – прямой, проходящей через две заданные различные точки, – имеет вид: $\dfrac{x-c}{(c+\Delta x)-c}=\dfrac{y-f(c)}{f(c+\Delta x)-f(c)}$ или $y=f(c)+\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}(x-c)$. Делая предельный переход при $\Delta x\to 0$, получим предельное значение углового коэффициента хорд – угловой коэффициент касательной: $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$. На рисунке касательная представлена пунктиром. Итак, $k=\operatorname{tg}\alpha$, где α – угол, образованный касательной с положительным направлением оси OX .



Очевидно, что существуют непрерывные кривые, в некоторых точках которых провести касательную невозможно.



Возникает вопрос: какое условие нужно наложить на функцию $f(x)$ в окрестности точки c, чтобы в соответствующей точке можно было провести касательную к графику этой функции.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ представимо в виде $\Delta f = A\Delta x + \beta$, причем A – константа, $\beta = o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция, более высокого порядка малости, чем Δx, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\beta}{\Delta x} = 0$.

Установим значение A, для чего вычислим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[A + \frac{\beta}{\Delta x} \right] = A.$$

Назовем число A **производной** функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначим ее $f'(x_0)$, в результате получаем определение производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ и, кроме того,

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Как было сказано выше, второе слагаемое в выражении приращения функции – величина более высокого порядка малости, чем величина Δx, а, следовательно, и чем величина $f'(x_0)\Delta x$. Другими словами, **первое слагаемое в выражении приращения функции**

представляет основную часть приращения функции. Называют его **дифференциалом функции** $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. В целях единообразия и для того, чтобы подчеркнуть, что Δx – бесконечно малая величина, приращение аргумента Δx в этой формуле обозначают dx. Тогда $df = f'(x)dx$, откуда следует второе обозначение производной $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$. Связь между приращением функции и ее дифференциалом изображена на рисунке 1.

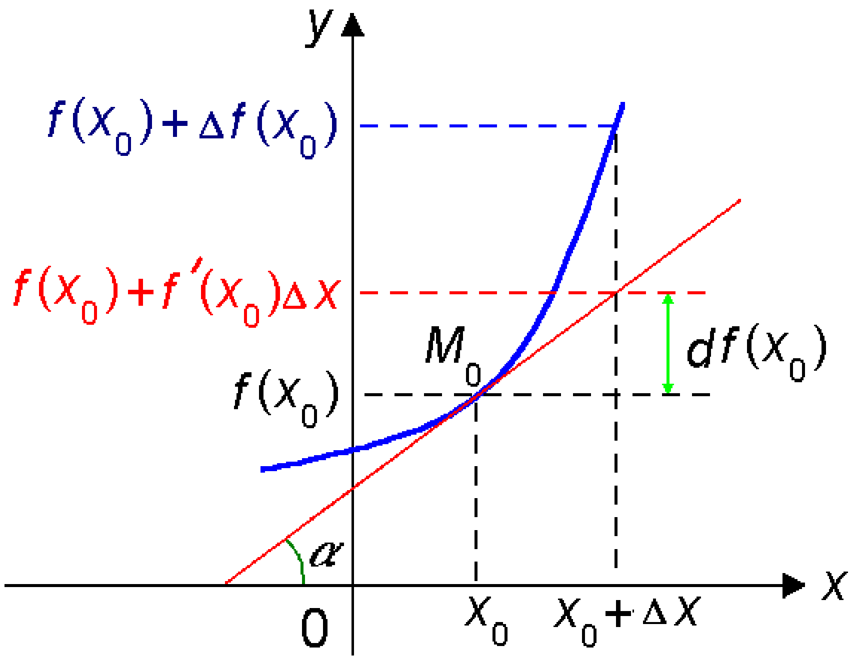


Рис. 1

Замечание. **Геометрическим** смыслом производной $f'(x_0)$ является тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Физическим смыслом производной $f'(x_0)$ является скорость в момент $x = x_0$, когда зависимость длины пути y от скорости x задается функцией $y = f(x)$.

Теорема. Дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в этой точке.

В самом деле, поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \Big(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \Big) = 0,$$

имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то есть условие ее непрерывности в соответствии с определением 3.

Если из условия непрерывности функции следует, что приращение функции Δy бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, то из условия дифференцируемости получается, что Δy бесконечно малая одного порядка малости с Δx.

Вычисление производной называют дифференцированием функции.

Правила дифференцирования

1) Производная суммы функций есть сумма производных этих функций.

Пусть $\Phi(x) = u(x) + v(x)$, тогда

$$\Delta\Phi(x) = \underline{u(x+\Delta x)} + v(x+\Delta x) - \big(\underline{u(x)} + v(x)\big) = \Delta u + \Delta v.$$

Очевидно,

$$(u+v)' = \Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta u + \Delta v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

2) $(uv)' = u'\,v + u\,v'$.

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$.

Свойства 2) и 3) доказываются аналогично свойству 1).

4) Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, $f(x_0) = y_0$. Пусть функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке y_0. Тогда сложная функция $z = g(f(x)) = \Phi(x)$ дифференцируема в точке x_0, причем $\Phi'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Действительно,

$$\Phi'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Производная обратной функции

Даны функция $y = f(x)$ и обратная ей функция $x = g(y)$, т.е. $x = g(f(x))$. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, тогда $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, при этом $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(g(y_0))}$.

Действительно, если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$. Теперь

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{g'(y_0)} = \frac{1}{g'(f(x_0))}.$$

Следовательно,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Производная параметрически заданной функции

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [t_1, t_2]$, причем обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке $t_0 \in (t_1, t_2)$, $\varphi'(t_0) \neq 0$, $\varphi(t_0) = x_0, \psi(t_0) = y_0$.

Вычислим $\dfrac{dy}{dx}$ в точке x_0.

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Итак, $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Таблица производных

1. $(C)'=0$, где $C=\text{const}$

2. $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$

3. $\left(a^{x}\right)'=a^{x}\cdot\ln a;\quad \left(e^{x}\right)'=e^{x}$

4. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x};\qquad (\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

5. $(\sin x)'=\cos x$

6. $(\cos x)'=-\sin x$

7. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

8. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

9. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

12. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Докажем некоторые из этих формул.

1. Если $y=C$, то $\Delta y=0$, и первая формула доказана.

2. Пусть $y=x^{\alpha}$, тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\Delta x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ и используя 3-е следствие из второго замечательного предела, получим вторую формулу.

3. Пусть $y=\sin x$, тогда

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Используя первый замечательный предел, получим

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

4. Пусть $y=\operatorname{tg} x$, тогда $(\operatorname{tg}x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}.$

5. Пусть $y=\log_a x$, тогда

$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)=\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$, теперь применяя первое следствие из второго замечательного предела, получим

$$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\ln a\cdot\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\ln a\cdot\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=\frac{1}{x\cdot\ln a}.$$

6. Пусть $y=a^x$, тогда, $x=\log_a y$, $x'(y)=\dfrac{1}{y\ln a}$, значит

$$y'(x)=\left(a^x\right)'=\frac{1}{x'(y)}=y\ln a=a^x\ln a.$$

7. Пусть $y=\arcsin x$, тогда

$$x=\sin y,\quad x'(y)=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}.$$

$$y'(x)=(\arcsin x)'=\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Примеры вычисления производных

1. $y=\sin^3(5x+2)$,

$$y'=3\sin^2(5x+2)\cos(5x+2)5=15\sin^2(5x+2)\cos(5x+2).$$

2. $y=4^{\ln(\operatorname{tg}2x)}$,

$$y'=4^{\ln(\operatorname{tg}2x)}\ln 4\frac{2}{\operatorname{tg}2x\cos^2 2x}=4^{\ln(\operatorname{tg}2x)}\frac{2\ln 4}{\sin 2x\cos 2x}.$$

3. $y=\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^3-1}}\right)$,

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^3-1}}}\cdot\frac{\sqrt{x^3-1}-\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}x}{x^3-1}=\frac{2x^3-2-3x^3}{2\sqrt{x^3-1-x^2}}=-\frac{x^3+2}{2\sqrt{x^3-x^2-1}}.$$

Дифференцирование неявно заданных функций

Если функция задана неявно, перед дифференцированием следует определиться, какую переменную считать аргументом. Пусть $x^2 + y^2 = 9$. Считаем x независимой переменной, y – функцией. Можно из уравнения определить $y = -\sqrt{9 - x^2}$ и $\tilde{y} = \sqrt{9 - x^2}$, тогда $y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{9 - x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ и $\tilde{y}' = -\dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$. Но можно поступить по-другому. Дифференцируем обе части уравнения $x^2 + y^2 = 9$ по переменной x, используя при этом правило дифференцирования сложных функций: $\left(x^2 + y^2\right)'_x = \left(9\right)'_x \Rightarrow 2x + 2y \cdot y' = 0$, откуда следует $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$, тогда

$x'(t) = 2(1 - \cos t)$, $\quad y'(t) = 2\sin t$ и $\quad y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$.

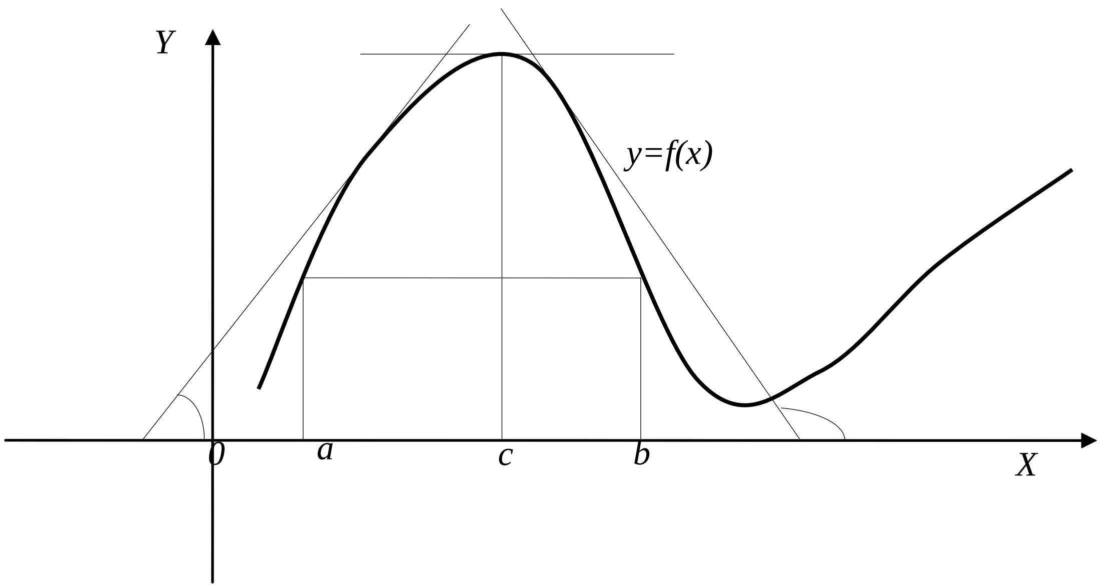
«Логарифмическое» дифференцирование

Здесь имеется в виду дифференцирование с предварительным логарифмированием функции. Пусть $y = x^{tgx}$. При вычислении производной нет возможности использовать таблицу производных, так как эта функция не является ни степенной, ни показательной. Прологарифмируем обе части уравнения $\ln y = \ln\left(x^{tgx}\right) \Rightarrow \ln y = \mathrm{tg}x \ln x$. В результате от явного задания функции перешли к неявному, при этом функция стала более удобной для дифференцирования. В самом деле, $\left(\ln y\right)'_x = \left(\mathrm{tg}x \ln x\right)'_x$. Поэтому $\dfrac{1}{y} y' = \dfrac{\ln x}{\cos^2 x} + \dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$. В результате $y' = \left(\dfrac{\ln x}{\cos^2 x} + \dfrac{\mathrm{tg}x}{x}\right) y = \left(\dfrac{\ln x}{\cos^2 x} + \dfrac{\mathrm{tg}x}{x}\right) x^{\mathrm{tg}x}$.

Теоремы о дифференцируемых функциях

Терема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), причем $f(a) = f(b)$, тогда найдется хотя бы одна точка c внутри интервала, в которой производная функции обращается в нуль, то есть $f'(c) = 0$, $c \in (a, b)$.

Теорема дается без доказательства, приведена геометрическая иллюстрация теоремы.



Теорема Коши. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b) и $g(b) \neq g(a)$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

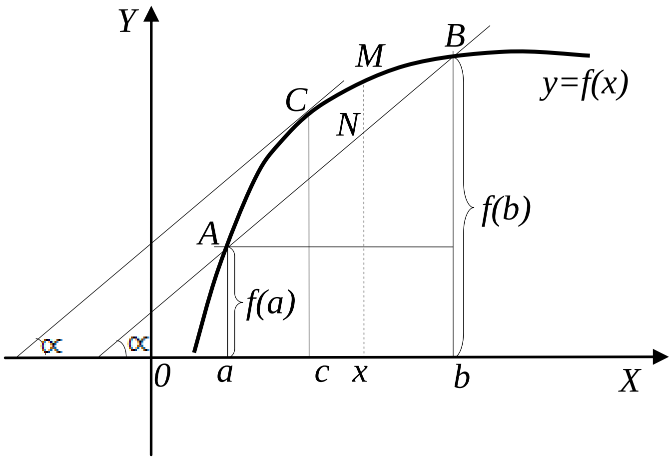
Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{[g(b) - g(a)]}[g(x) - g(a)].$$

Она дифференцируема, так как кроме функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в нее входят только постоянные, причем, $\Phi(a) = \Phi(b) = f(a)$, то есть удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Тогда $\Phi'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{[g(b) - g(a)]} g'(c) = 0$, теорема доказана.

Важным частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$ является

Теорема конечных приращений Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a\,, b)$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, для которой справедливо:
$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.



Производные и дифференциалы высших порядков

Определение. Второй производной функции $y = f(x)$ называется производная ее первой производной $y'' = (y')'$.

Если физический смысл первой производной – есть скорость изменения функции, то вторая производная определяет скорость изменения скорости изменения функции, то есть ускорение. Аналогично определяется производная любого порядка:

$$y''' = (y'')', \ldots, y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Примеры.

1) Если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$ и так далее. Заметим, что производные высших порядков степени с натуральным показателем обращаются в ноль, если порядок производной выше показателя степени.

2) Если $y = \sin x$, то

$$y' = \cos x,\quad y'' = -\sin x,\quad y''' = -\cos x,\quad y^{IV} = \sin x, \ldots, y^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2} n).$$

Аналогично определяются **дифференциалы высших порядков**.

Дифференциал второго порядка – это дифференциал от дифференциала, т.к. $df(x) = f(x)'dx$, тогда

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = (df(x))'dx = (f'(x)dx)'dx,$$

dx – бесконечно малое приращение, не зависящее от x, поэтому производная от dx вычисляется, как от постоянной. Т.е.

$$d^2 f(x) = (f'(x))'dx^2 = f''(x)\, dx^2.$$

Подобным образом получим $d^n f(x) = f^{(n)}(x)\, dx^n$.

Формула Тейлора

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет производную первого порядка в точке a. Из определения дифференцируемости функции в точке a имеем $f(a+\Delta x) - f(a) = f'(a)\Delta x + \beta$, где β – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$. Поэтому для точек x, близких к точке a справедлива формула

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a),$$

обеспечивающая **первое приближение** функции. Эта формула позволяет получать очень грубые приближенные значения функций в точках, так как ее можно трактовать как замену функции $f(x)$ многочленом первой степени в окрестности той точки a, где значение функции и ее производной легко найти. Очевидно, что формула эта применима в очень малой окрестности точки a.

Пример.

$\sqrt[4]{15} = \sqrt[4]{16-1} = 2\cdot\sqrt[4]{1-\dfrac{1}{16}} \approx 2\cdot\left[1+\dfrac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{4}}\cdot(-\dfrac{1}{16})\right] = \dfrac{63}{32}$. Здесь мы использовали формулу первого приближения при $f(x) = \sqrt[4]{1+x}$, $a = 0$, $x = -\dfrac{1}{16}$.

Поэтому $f(a) = 1$, $f'(a) = \dfrac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{4}}$ и $(x-a) = -\dfrac{1}{16}$.

Возникают вопросы:

1) нельзя ли использовать многочлены более высоких степеней для более точного приближения функции?

2) как оценить ошибку приближения?

Формула Тейлора дает ответы на эти вопросы.

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет все производные до $n+1$порядка в некотором промежутке, содержащем точку a. В таком случае для всех значений x из этого промежутка справедлива формула

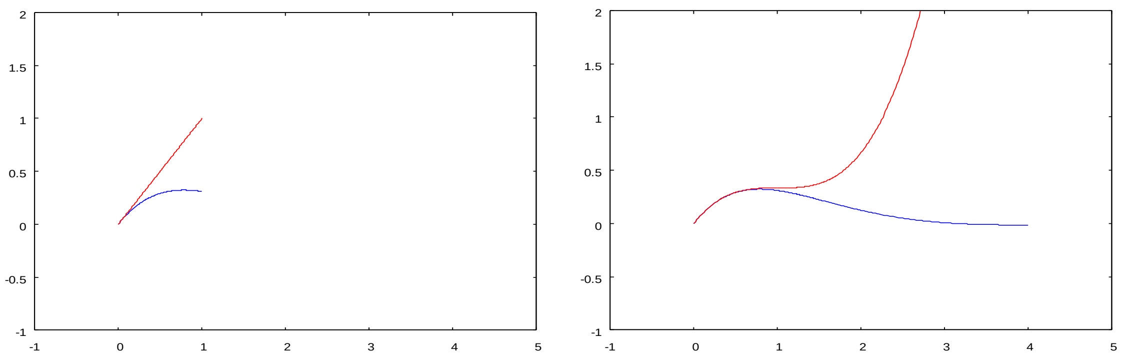
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 +$$

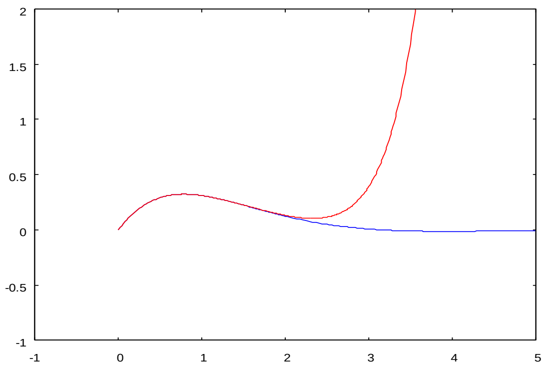
$$+\frac{f^{(IV)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r(x),$$

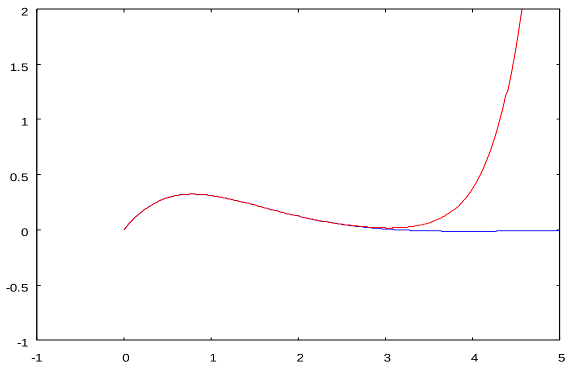
где остаточный член $r(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ и $\theta \in (0,1)$.

Таким образом, функция приближается многочленом, и ошибка вычислений, обусловленная заменой значения функции значением многочлена, равна остаточному члену. Поскольку точное значение $\theta \in (0,1)$ не может быть найдено, значения функций вычисляются приближенно, и остаточный член служит не для подсчета, а для оценки ошибки. Последняя формула является обобщением формулы конечных приращений Лагранжа.

Следующий пример демонстрирует, как приближается функция $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$ (голубая линия) многочленами по формуле Тейлора (красная линия) в правой части окрестности точки $a = 0$ при увеличении степеней многочленов от первой до одиннадцатой.







Формулу Тейлора можно записать через дифференциалы:

$$f(x)=f(a)+\frac{df(a)}{1!}+\frac{d^2f(a)}{2!}+\frac{d^3f(a)}{3!}+\frac{d^4f(a)}{4!}+\cdots+\frac{d^nf(a)}{n!}+r_n(x)$$

.

Для приложений к вычислению пределов используют **локальную** формулу Тейлора, имеющую вид

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+$$
$$+\frac{f^{(IV)}(a)}{4!}(x-a)^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right).$$

Такое представление остаточного члена показывает, что остаточный член есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(x-a)^n$.

Локальная формула Тейлора является обобщением формулы связи приращения функции и дифференциала функции в точке.

В частности, при $a=0$ формула Тейлора называется формулой Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Примеры разложений элементарных функций по формуле Маклорена

Пример 1. Рассмотрим функцию e^x. Нетрудно заметить, что любая производная этой функции равна самой функции, а $f^{(n)}(0)=e^0=1$. В соответствии с формулой Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x).$$

Оценим $r_n(x)$: $|r_n(x)| \le e^{\max\{x,0\}} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. В свою очередь для оценки величины $e^{\max\{x,0\}}$ можно брать 1 при $x<0$ и 3^x при $x>0$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Так как $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \sin x$, $f^{V}(x) = \cos x$ и т.д., получим

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{IV}(0) = 0$, $f^{V}(0) = 1$

Первые члены формулы Маклорена принимают вид

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

Анализируя первые члены разложения, записываем его общий член $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$. В результате

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + r_n(x).$$

Оценим $r_n(x)$: $|r_n(x)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$, так как $|\sin(x + (2n+1)\frac{\pi}{2})| \le 1$.

Пример 3. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \cos x$.

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x, \quad f^{IV}(x) = \cos x,$$
$$f^{V}(x) = -\sin x, \quad f^{VI}(x) = -\cos x.$$

Очевидно, что

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0,$$
$$f^{IV}(0) = 1, \quad f^{V}(0) = 0, \quad f^{VI}(0) = -1.$$

В соответствии с формулой Маклорена получаем

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + r_n(x).$$

Оценим $r_n(x)$: $|r_n(x)| \le \frac{|x|^{2(n+1)}}{(2n+2)!}$, так как $|\cos(x + (2n+2)\frac{\pi}{2})| \le 1$.

Пример 4. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f(x)=\ln(1+x)$. Поскольку $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, $(0!=1)$, имеем $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$, поэтому получим разложение

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+r_n(x).$$

Оценим $r_n(x)$. Согласно приведенной формуле остаточного члена имеем $|r_n(x)|=\dfrac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)|1+\theta x|^{(n+1)}}$. Поэтому для $x>0$ получим оценку $|r_n(x)|\le\dfrac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)}$, но для $x<0$ использование приведенной формулы остаточного члена не годится. Для таких значений x используют другие формы остаточного члена.

Пример 5. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\notin\mathrm{N}$. Дифференцируя, найдем

$$\left((1+x)^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

поэтому $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$, и имеем разложение

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Для оценки остаточного члена при n, больших или равных целой части α, приведенная форма остаточного члена годится также только для $x>0$. В этом случае оценка следующая: $|r_n(x)|\le\dfrac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n)}{(n+1)!}|x|^{(n+1)}$.

Пример применения локальной формулы Маклорена для вычисления предела

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)-(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+o(x^4))}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

Приложения производной функции

Правило Лопиталя (Правило раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$)

Пусть требуется вычислить предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем функции в числителе и знаменателе дифференцируемы в окрестности точки a и имеет место одна из неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, тогда если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, возможно, равный бесконечности, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство (для неопределенности $\frac{0}{0}$). Поскольку $f(a)=g(a)=0$, из теоремы Коши имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Здесь использовалось то, что c находится между a и x, следовательно, $c\to a$ при $x\to a$.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-3}{2x}=\dfrac{1}{4}$.

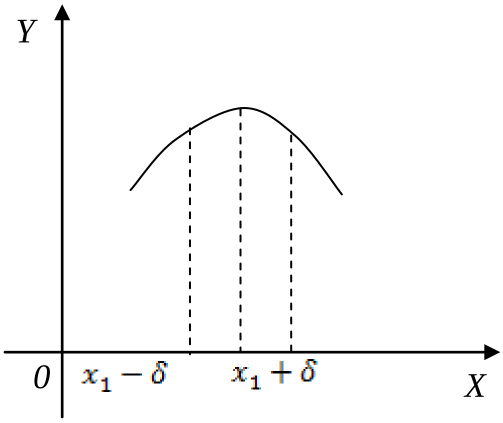
2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{-1}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

Теорема о возрастании (убывании) функции $y=f(x)$ на интервале

Необходимое условие возрастания (убывания) функции на интервале: Если функция $y=f(x)$, имеющая производную на интервале (a,b), возрастает (убывает) на этом интервале, то ее производная $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$) на этом отрезке.

Доказательство следует из формулы для производной $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, где знаки числителя и знаменателя совпадают (противоположны), а при предельном переходе знак неравенства становится нестрогим.

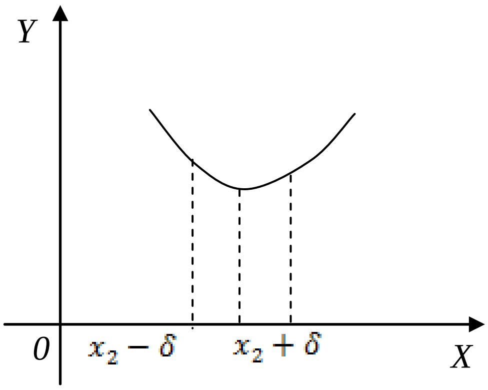
Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале:



Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), причем $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для $a<x<b$, то эта функция возрастает (убывает) на этом отрезке.

Доказательство легко получается применением теоремы Лагранжа.

Определение 1. Функция $y=f(x)$ в точке x_1 имеет **максимум**, если для всех x из некоторой δ - окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x)<f(x_1)$ при $x\neq x_1$.

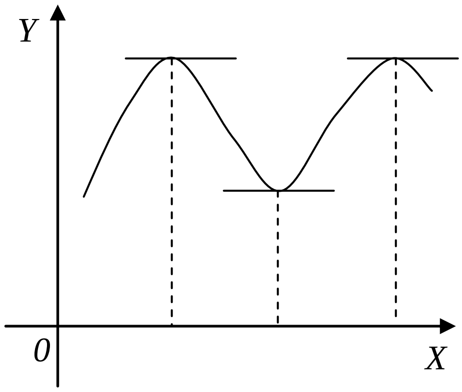


Определение 2. Функция $y=f(x)$ в точке x_2 имеет **минимум**, если для всех x из некоторой δ - окрестности точки x_2 выполняется неравенство $f(x)>f(x_2)$ при $x\neq x_2$.

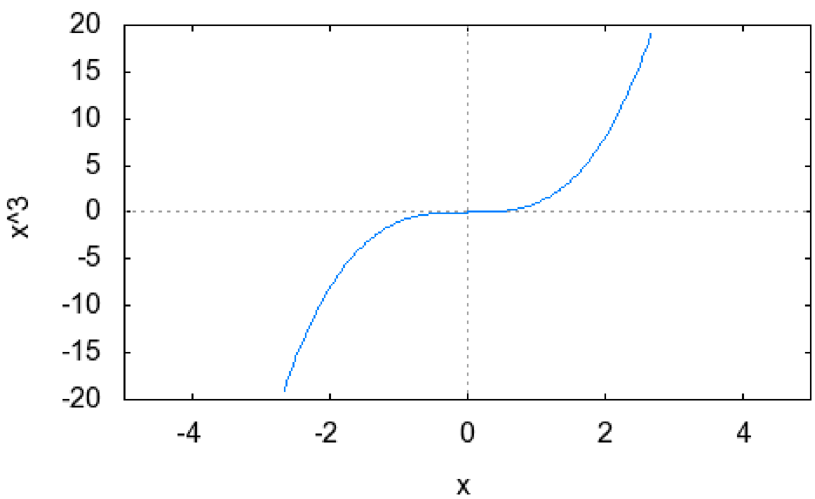
Определение 3. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Теорема о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции. Необходимым условием экстремума дифференцируемой в точке c функции является $f'(c)=0$.

Доказательство. Пусть точка c – точка максимума, тогда $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}<0$ при $\Delta x>0$ и $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}>0$ при $\Delta x<0$. Поскольку при вычислении производной пределы слева и справа должны совпадать, то есть $f'(c)=0$.



Точки, в которых производная функции обращается в ноль, называются **критическими точками**. Критические точки функции не обязательно являются точками экстремума. Например, если $f(x)=x^3$, то $f'(x)=3x^2=0$ при $x=0$, но точка $x=0$ не является точкой экстремума, что видно из рисунка.



Теорема 1 о достаточном условии существования максимума и минимума функции.

Если производная функции при переходе через точку c меняет знак с + на –, это точка максимума. Если знак производной меняется с – на +, имеем

точку минимума. Доказательство следует из теоремы о возрастании (убывании) функции.

Теорема 2 о достаточном условии существования максимума и минимума функции. Пусть $f'(x_0)=0$, тогда при $x=x_0$ функция имеет максимум, если $f''(x_0)<0$ и минимум, если $f''(x_0)>0$.

Доказательство.

Из формулы Тейлора в окрестности точки экстремума x_0, в которой удержано три первых члена, имеем

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right).$$

Поскольку $f'(x_0)=0$, что следует из условия теоремы, а остаточный член r по определению меньше предыдущего члена формулы, знак приращения функции независимо от того, точка x находится левее, или правее x_0, определяется знаком второй производной. Когда $f''(x_0)>0$, получаем $f(x)-f(x_0)>0$, следовательно, x_0 точка минимума функции, если $f''(x_0)<0$, значит $f(x)-f(x_0)<0$, тогда x_0 - точка максимума функции.

Пример 1. $y=\frac{1}{4}x^4-x^3$. Найдем критические точки этой функции. Так как $y'=x^3-3x^2=x^2(x-3)$, то критическими точками являются $x_1=0$, $x_2=3$. Применим первую теорему о достаточном условии. Очевидно, что $y'(x)<0$ при $x<0$ и при $0<x<3$, следовательно, в точке 0 экстремума нет. $y'(x)>0$ при $x>3$, следовательно, в точке 3 минимум функции.

Пример 2. $y=\cos^2 x$. Найдем критические точки этой функции. Так как $y'=-\sin 2x$, то критическими точками этой функции являются точки $x_k=\frac{\pi k}{2}$. Применим вторую теорему о достаточном условии. Очевидно, что $y''(x_k)=-2\cos\pi k$, поэтому $x_k=\frac{\pi k}{2}$ является точкой локального максимума при k четном и точкой локального минимума при k нечетном.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Следует отличать минимумы и максимумы функций от наибольшего и наименьшего ее значений на заданном отрезке.

Функция может не иметь экстремумов в исследуемой области, а наименьшее и наибольшее в этой области значения она имеет всегда.

Чтобы определить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке, необходимо подсчитать значения функции в точках экстремума, входящих в исследуемую область, а также в граничных ее точках и выбрать среди них наименьшее и наибольшее значения.

Пример.

Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $\left[1;4\right]$.

Решение.

Находим точки, в которых производная обращается в ноль:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x\left(x-2\right) = 0,$$

получаем две точки, одна из которых $x = 0$ не входит в исследуемую область, добавляем к ним граничные точки, тогда получим набор точек: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.

Определяем в этих точках значения функции $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, $y_3 = 17$.

Таким образом, наименьшее в заданной области значение функции (-3) реализуется при $x = 2$, наибольшее (17) при $x = 3$.

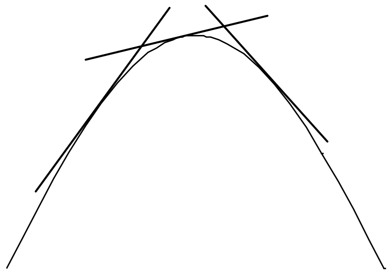
Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется выпуклой на интервале

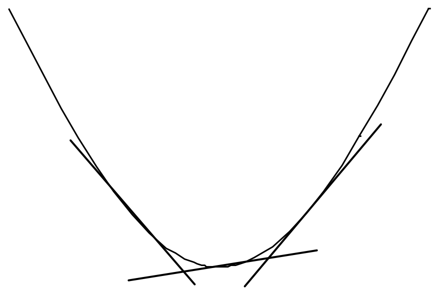
$(a\,, b)$, если точки касательных к функции на этом интервале расположены выше точек функции.

Определение 5. Функция $y = f(x)$ называется вогнутой на интервале

$(a_1\,, b_1)$, если точки касательных к функции на этом интервале расположены ниже точек функции.



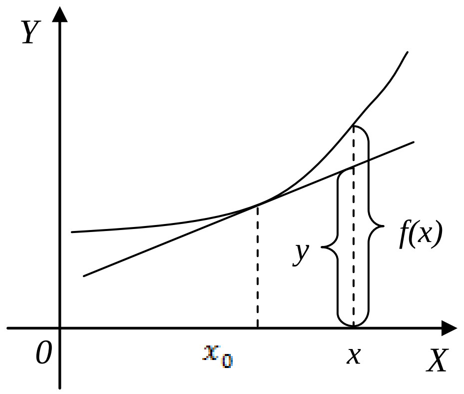
Выпуклая функция



Вогнутая функция

Определение 6. Точки, в которых выпуклость переходит в вогнутость, или наоборот, называются точками перегиба функции.

Теорема. Достаточным условием выпуклости функции $y = f(x)$ на интервале $(a\,,b)$ является $f''(x) < 0$. Достаточным условием вогнутости функции $y = f(x)$ на интервале $(a_1\,,b_1)$ является $f''(x) > 0$.



Для доказательства теоремы запишем уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x_0 \in (a\,;b)$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Вспомним также формулу Тейлора, которую представим следующим образом

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

Вычитаем эту формулу из формулы касательной, тогда

$$y - f(x) = -\frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right),$$

где y – ординаты точек касательной. Знак правой части определяется первым ее членом, поскольку остаточный член $o\left((x - x_0)^2\right)$ в окрестности x_0 мал по сравнению с основным членом, таким образом. При условии $f''(x_0) < 0$ разность между значением касательной и функции положительна, следовательно, точки касательной лежат выше точек кривой, и функция выпуклая. Перебирая различные точки x_0

интервала $(a\,;b)$, убеждаемся, что первая часть теоремы доказана. Аналогично доказывается вогнутость кривой.

Теорема. Если $f''(c)=0$ и при переходе через точку c вторая производная меняет знак, $x=c$ – точка перегиба.

Пример. Рассмотрим функцию $y=\frac{1}{4}x^4-x^3$. Имеем

$$y'=x^3-3x^2. \quad y''=3x^2-6x=3x(x-2)=0 \Rightarrow x_1=0, \quad x_2=2.$$

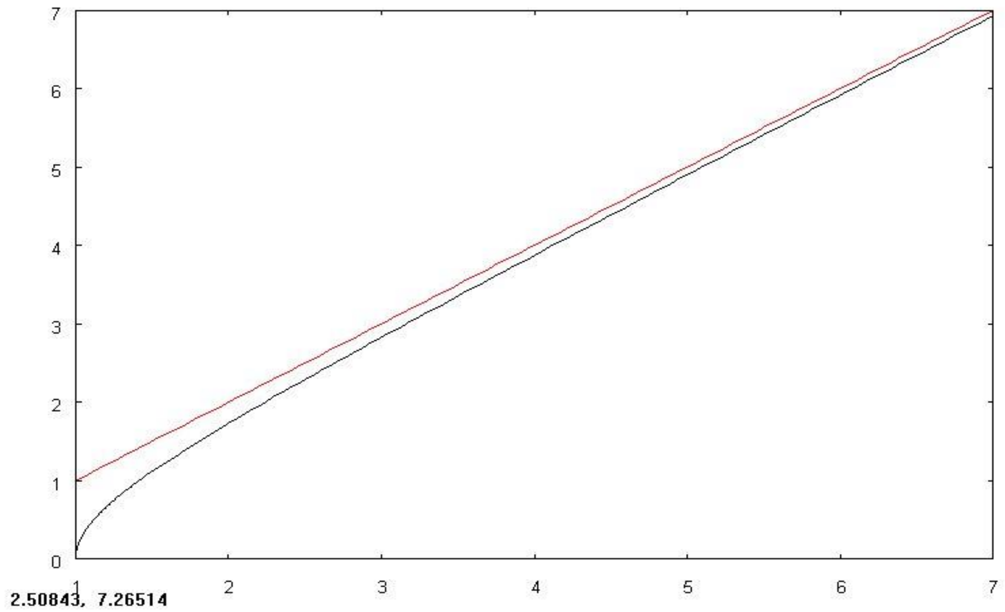
$$y''(x)>0, \text{ при } x<0,\ x>2, \quad y''(x)<0 \text{ при } 0<x<2.$$

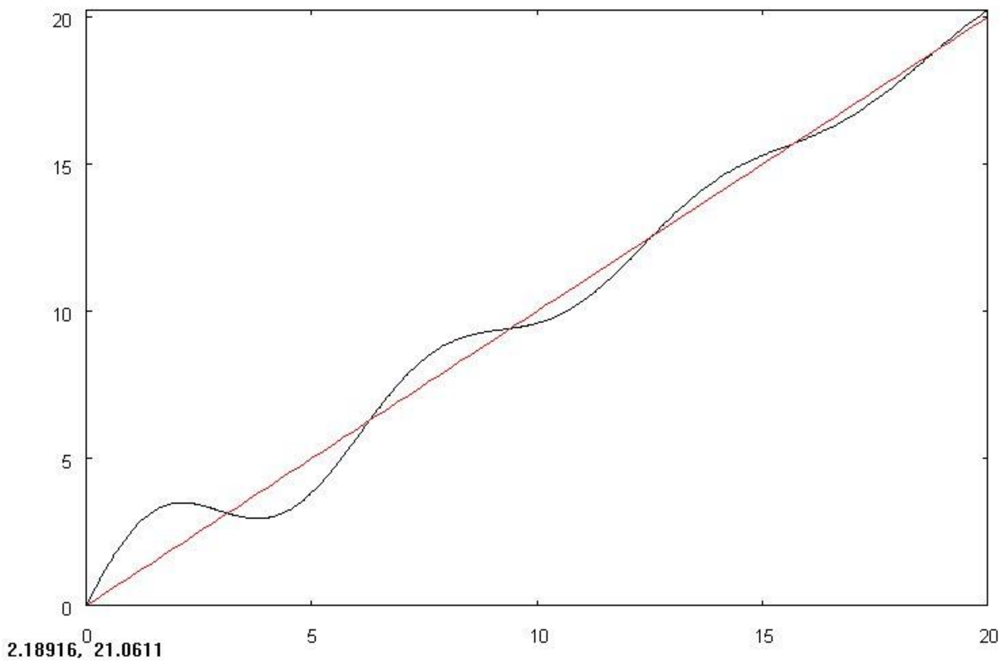
Следовательно, точки x_1 и x_2– точки перегиба. В первой вогнутость переходит в выпуклость, во второй – выпуклость в вогнутость.

Асимптоты кривой

Определение. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние δ от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю.

На двух следующих рисунках асимптоты окрашены в красный цвет





Асимптоты бывают вертикальными, они показывают поведение функции в окрестности особой точки, когда $y \to \pm\infty$, и наклонными, дающими представление о поведении функции при $x \to \pm\infty$.

Если x_0 – особая точка, то уравнение вертикальной асимптоты $x = x_0$.

Теорема. Кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту при $x \to \infty$, уравнение которой $y = kx + b$, если принимают, существуют пределы: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b$.

Доказательство. Из определения асимптоты следует $f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to \infty$, то есть $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$. Остается определить параметры уравнения асимптоты. Для этого вычислим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k, \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}[b + \alpha(x)] = b.$$

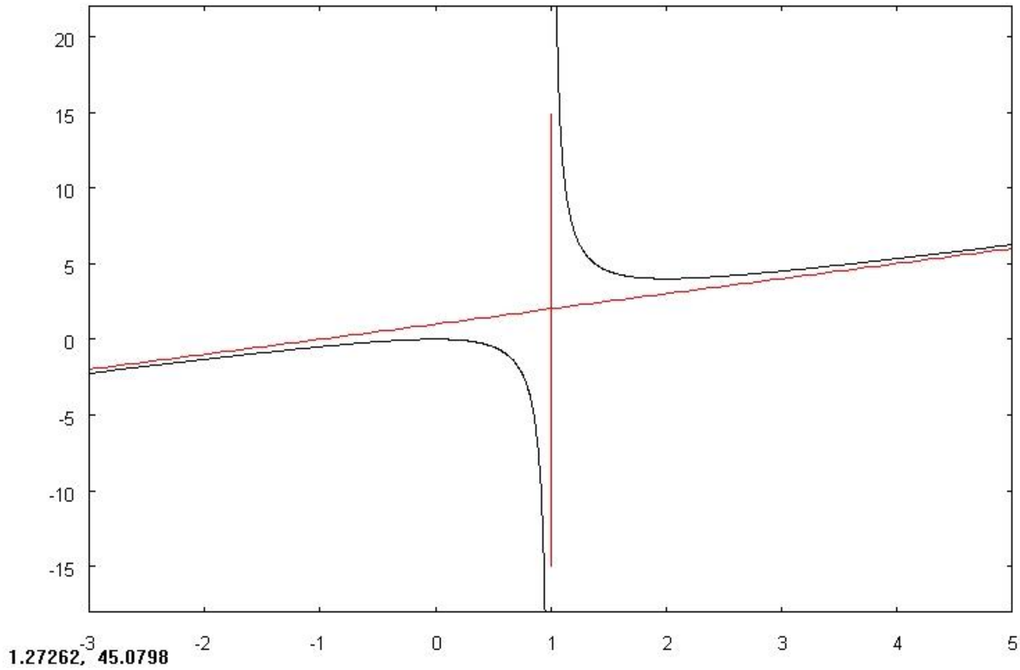
Итак, если оба предела существуют и конечны, параметры прямой k и b определены, причем точки этой прямой бесконечно сближаются с точками кривой при $x \to \infty$.

Пример. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$. Ясно, что $x = 1$ – уравнение вертикальной асимптоты.

Определим $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{(x-1)x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = 1$,

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-1)} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + x}{(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = 1.$$

Наклонная асимптота при $x \to \infty$ имеет уравнение $y = x + 1$.



Исследование функции, построение ее графика

Алгоритм исследования.

I. Исследование самой функции. Необходимо установить

1) Область определения функции, ее особые точки, вертикальные асимптоты.

2) Точки пересечения кривой с осями координат

3) Функция четная, нечетная или общего вида

4) Функция периодическая или не периодическая

II. Исследование производной функции. Необходимо определить

1) Точки максимума и минимума функции

2) Интервалы возрастания и убывания функции

III. Исследование второй производной

1) Точки перегиба

2) Интервалы выпуклости и вогнутости функции

IV. Исследование поведения функции при $x \to \pm\infty$. Наклонные асимптоты.

В качестве **примера** рассмотрим функцию $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

I.

1. Область существования функции – вся числовая ось, то есть $(-\infty\,;\infty)$. Следовательно, у этой кривой нет особых точек, нет и вертикальных асимптот.

2. Кривая пересекает оси координат в начале координат. Следовательно, первая характерная точка графика $(0\,;0)$.

3. Кривая нечетная: $\dfrac{4(-x)}{(-x)^2+1} = -\dfrac{4x}{x^2+1}$, следовательно, она симметричная относительно начала координат.

4. Функция непериодическая.

II.

1. Определим первую производную $y' = \dfrac{4(x^2+1-2xx)}{(x^2+1)^2} = -\dfrac{4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$, приравниваем ее нулю, откуда получаем еще две характерные (критические) точки $x=-1$, $x=1$, координаты этих точек на плоскости $(-1;-1)$, $(1;1)$. Рассмотрим первую из этих точек $x=-1$, левее ее производная $y'<0$, правее $y'>0$, следовательно, это точка минимума функции. Левее точки $x=1$ производная $y'>0$ правее она отрицательна, значит это точка максимума функции.

2. Знак первой производной определяется выражением $\left(-\left(x^2-1\right)\right)$, следовательно, она положительна на интервале $(-1;1)$, в остальных областях она отрицательна. Итак, функция убывает на интервале $(-\infty;-1)$, возрастает на интервале $(-1;1)$, затем опять убывает на $(1;\infty)$.

III.

1. Определяем вторую производную функции:

$$y' = -4\frac{2x\left(x^2+1\right)^2-4x\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^4} = -8x\frac{x^2+1-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{8x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Приравниваем производную нулю и получаем еще три характерные точки функции, одна из которых $x=0$ уже известна. Две другие $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$. На координатной плоскости они имеют координаты $\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$. Знак второй производной определяется ее числителем. Левее точки $x=-\sqrt{3}$ она отрицательна, правее $y''>0$. Следовательно, это точка перегиба. Левее точки $x=0$ имеем $y''>0$, правее $y''<0$., еще одна точка перегиба. Левее точки $x=\sqrt{3}$ получаем $y''<0$, правее $y''>0$, третья точка перегиба.

2. Поскольку других точек, в которых вторая производная меняет знак у функции нет, можно утверждать, что на интервале $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ кривая выпуклая, на интервале $\left(-\sqrt{3};0\right)$ кривая вогнутая, на интервале $\left(0;\sqrt{3}\right)$ кривая опять выпуклая и, наконец, на интервале $\left(\sqrt{3};\infty\right)$ - вогнутая.

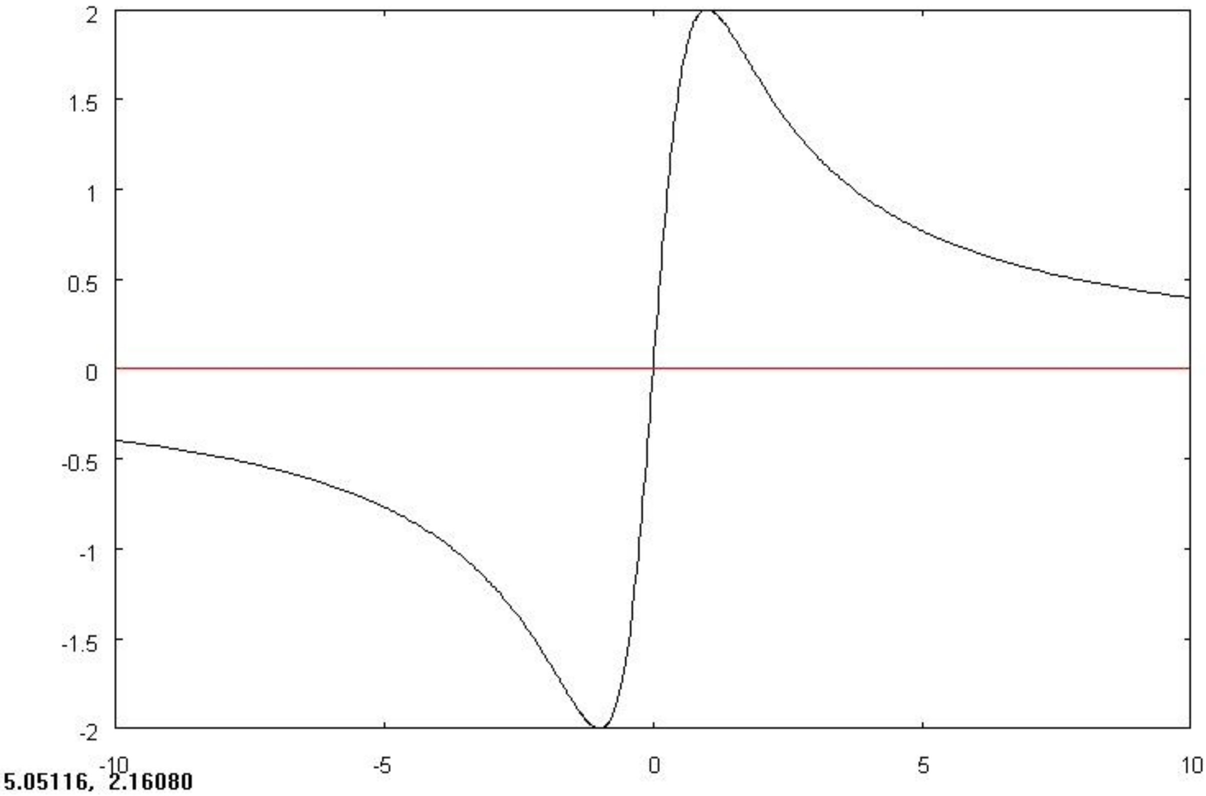
IV. Определяем наклонные асимптоты кривой, уравнение асимптоты $y=kx+b$, причем

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\left(x^2+1\right)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\left(x^2+1\right)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=0,$$

Поскольку уравнение асимптоты $y=0$, асимптотой функции является ось OX.

В итоге график функции имеет вид



На рисунке отчетливо наблюдаются точки максимума и минимума функции и три точки перегиба. Видим также, что кривая «прижимается» к оси OX при x, стремящимся как к плюс-, так и к минус- бесконечности, следовательно, асимптота единая.

Рассмотрим **пример** при другом оформлении результата. Пусть $y = \dfrac{36x}{(x-1)^2}$. Область существования данной функции – вся числовая ось, кроме точки $x = 1$. Функция непериодическая (нет тригонометрических функций), общего вида (не четная, не нечетная).

Определим вначале все характерные точки графика, то есть точки пересечения с осями координат, особые точки, точки максимума и минимума, точки перегиба. Для этого вычислим первую и вторую производные

$$y' = 36\frac{(x-1)^2 - 2(x-1)x}{(x-1)^4} = 36\frac{(x-1)-2x}{(x-1)^3} = -\frac{36(x+1)}{(x-1)^3},$$

$$y'' = -36\frac{(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^6} = -36\frac{(x-1)-3(x+1)}{(x-1)^4} = \frac{72(x+2)}{(x-1)^4}.$$

Исследуя функцию и ее производные, устанавливаем, что имеется одна особая точка $x=1$ и еще три характерных точки $x=-2$, $x=-1$, $x=0$. Составим таблицу по результатам исследования

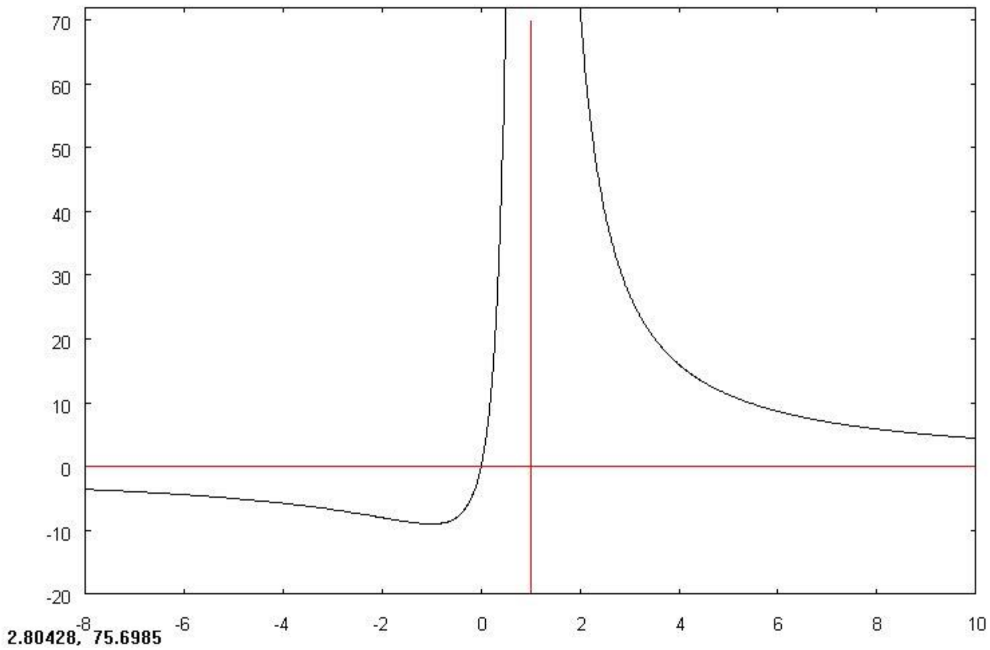
x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
y	<0	-8	<0	-9	<0	0	>0	н.с.	>0
y'	<0		<0	0	>0		>0	н.с.	<0
y''	<0	0	>0	>0	>0		>0	н.с.	>0
Примеч.	$y<0$, убыв., выпукл.	Т. Пер.	$y<0$, убыв., вогн.	Min	$y<0$, возр., вогн.		$y>0$, возр., вогн.	Н.с.	$y>0$, убыв., вогн.

В таблице собрана вся информация о функции, примечания позволяют проще построить ее график.

Определим наклонную асимптоту кривой $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{36}{(x-1)^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{36x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{36}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=0.$$



СЕМЕСТР II

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Первообразная, основное свойство первообразных

Определение 1. Первообразной функции $f(x)$ называется функция $\Phi(x)$, производная которой равна $f(x)$, то есть $\Phi'(x)=f(x)$.

Поскольку $\left(\Phi(x)+C\right)'=f(x)$, где $c-$постоянная, первообразных функции $f(x)$ бесчисленное множество.

Теорема. Любые две первообразные функции $f(x)$ могут отличаться только на постоянное слагаемое. Другими словами, если $\Phi'(x)=f(x)$ и $\Psi(x)=f(x)$, то $\Phi(x)-\Psi(x)=C=Const$.

Доказательство.
$(\Phi(x)-\Psi(x))'=\Phi'(x)-\Psi'(x)=f(x)-f(x)=0$, и так как производная разности двух первообразных оказалась равной нулю, сама разность функций является постоянной.

Определение 2. Множество всех первообразных одной функции называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx$, причем $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx-$подынтегральным выражением.

Очевидно, $\int f(x)dx$, где $\Phi'(x)=f(x)$, а $C-$произвольная постоянная интегрирования, слово "произвольная" подчеркивает, что постоянная может принимать любые значения.

Свойства неопределенного интеграла (НИ)

1) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$

Доказательство. $\left(\int f(x)dx\right)'=(\Phi(x)+C)'=\Phi'(x)=f(x)$.

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

Доказательство следует из определения дифференциала функции и первого свойства НИ $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$.

3) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$

Доказательство.

$$\int d\Phi(x) = \int \Phi'(x)dx = \int f(x)dx = \Phi(x) + C.$$

Примечание.

Все последующие доказательства проводятся с точностью до постоянной интегрирования, что следует из определения интеграла.

4) $\int mf(x)dx = m\int f(x)dx$, если $m -$ постоянная.

Доказательство. Поскольку

$$\int f(x)dx = \Phi(x) + C,$$

причем $\Phi'(x) = f(x)$, а

$$(m\Phi(x))' = m\Phi'(x) = mf(x),$$

$m\Phi(x) -$ первообразная подынтегральной функции $mf(x)$, а значит

$$\int mf(x)dx = m(\Phi(x) + C),$$

но $\Phi(x) + C = \int f(x)dx$, следовательно,

$$\int mf(x)dx = m\int f(x)dx.$$

5) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Доказательство. Пусть

$\int f(x)dx = \Phi(x) + C_1$ и $\int g(x)dx = G(x) + C_2$, где $\Phi'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$.

Поскольку

$$(\Phi(x) + G(x))' = \Phi'(x) + G'(x) = f(x) + g(x),$$

$\Phi(x) + G(x)$ является первообразной функции $f(x) + g(x)$, следовательно,

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \Phi(x) + G(x) + C_1 + C_2 = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Следствия.

1) Если $\int f(x)dx = \Phi(x) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\Phi(ax) + C$

Доказательство. Дифференцируем обе части доказываемого равенства. $\left(\int f(ax)dx\right)' = f(ax)$,

$$\left(\frac{1}{a}\Phi(ax)\right)'_x = \frac{1}{a}\frac{\Phi(t)}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{a}\frac{\Phi(t)}{dt}a = \frac{\Phi(t)}{dt} = f(t) = f(ax),$$

производные левой и правой частей равенства совпадают, следовательно, сами функции отличаются на постоянную.

2) $\int f(x+b)dx = \Phi(x+b) + C$

Доказательство. Из $\int f(t)dt = \Phi(t) + C$ при $t = x + b$ имеем $dt = dx$, откуда имеем $\int f(x+b)dx = \Phi(x+b) + C$.

3) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\Phi(ax+b) + C$

Доказательство следует из первого и второго следствий.

Таблица интегралов

Приведем таблицу неопределенных интегралов с проверкой того, что действительно производная от правой части совпадает с подынтегральной функцией.

№	Интеграл	Доказательство
1.	$\int 0 \cdot dx = C$	$(C)' = 0$.
2.	$\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$	$(x+C)' = 1$
3.	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right)' = x^{\alpha}$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$(\ln\|x\| + C)' = \frac{1}{x}$
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{1}{\ln a} a^x \ln a = a^x$
6.	$\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x + C)' = e^x$
7.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$(-\cos x + C)' = \sin x$

8.	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$(\sin x + C)' = \cos x$
9.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$(\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$(-\operatorname{ctg} x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C =$ $= -\arccos x + C$	$(\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-\arccos x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12.	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C =$ $= -\operatorname{arcctg} x + C$	$(\operatorname{arctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(-\operatorname{arcctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2}$
13.	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C.$	$\left(\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C\right)' = \frac{1}{1-x^2}.$
14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm k}\right\| + C$ $(k \neq 0)$	$\left(\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm k}\right\| + C\right)' =$ $= \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2 \pm k}\right)}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm k}}\right) =$ $= \frac{\left(x + \sqrt{x^2 \pm k}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 \pm k}\right)\sqrt{x^2 \pm k}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm k}}$

При интегрировании функций мы будем проверять результат с помощью пакета математических программ **MAXIMA**. Вычисление неопределенных интегралов выполняется функцией

integrate*(выражение, переменная интегрирования)*

Далее необходимо нажать одновременно клавиши **Shift** и **Enter**. Ответ компьютер выдает в следующей после задания строке, но без произвольной постоянной С.

Пакет программ **MAXIMA** содержит все известные формулы и приемы интегрирования, в том числе, таблицу интегралов. Следует помнить, что некоторые математические функции имеют отличное от привычного выражение, например, **tg** заменен на **tan**, **ctg** – на **cot**, **arctg** – на **atan**. Функция **ln** имеет представление **log**, а логарифмы по основаниям, отличным от числа **e**, не рассматриваются, либо должны быть приведены к основанию **e**. Замечательные числа, такие как то же

e, записываются со значком % перед ними. То есть, **e** записывается как **%e,** а число π – как **%pi.** Все функции записываются с маленькой буквы и переменные в функциях вводятся в скобках. Например, $\sin x$ запишется как **sin(x).** Знак умножения вводится знаком ***.** Степень вводится при помощи значка **^.**

Приемы интегрирования

I. Непосредственное интегрирование.
II. Замена переменной в интеграле.
III. Интегрирование по частям.

Рассмотрим каждый из этих приемов.

I. <u>Непосредственное интегрирование.</u> Этим способом можно вычислить интегралы, которые при помощи тождественных преобразований подынтегрального выражения и при использовании свойств интегралов сводятся к табличным интегралам.

Примеры.

1) $\int\left(x+\sqrt{x}-2\cos x\right)dx=\int xdx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-2\int\cos xdx=\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-2\sin x+C=$

$=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-2\sin x+C$.

В этом примере сначала вместо интеграла от суммы взяли сумму интегралов, затем во втором интеграле радикал записали в виде степенной функции, а в третьем интеграле вынесли постоянную за знак интеграла. В результате получили сумму трех табличных интегралов.

Проверим решение, использую пакет программ Maxima.

```
(%i1) integrate(x+sqrt(x)-2*cos(x), x);
```

(%o1) $-2\sin(x)+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^{3/2}}{3}$

2) $\int\frac{x-2}{x^3}dx=\int\left(x^{-2}-2x^{-3}\right)dx=\int x^{-2}dx-2\int x^{-3}dx=\frac{x^{-1}}{-1}-2\frac{x^{-2}}{-2}+C=$

$=x^{-2}-x^{-1}+C$

В этом примеры сначала почленно поделили числитель на знаменатель, а затем представили интеграл от разности в виде разности интегралов и вынесли постоянный сомножитель за знак интеграла. В результате получили разность табличных интегралов

Проверим решение.

```
(%i1) integrate((x-2)/x^3, x);
```

(%o1) $-\frac{x-1}{x^2}$

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$

$$= -ctg\ x + tg\ x + C$$

При решении воспользовались тождеством $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$.

```
(%i1) integrate(1/(sin(x)^2*cos(x)^2), x);
```

(%o1) $\tan(x) - \frac{1}{\tan(x)}$

II. <u>Замена переменной в интеграле</u>

Наибольшее число известных интегралов вычисляются с использованием этого приема. Суть его в следующем. Вместо прежней переменной интегрирования вводится новая переменная так, чтобы вновь получившийся интеграл стал более простым, или более удобным для интегрирования.

Докажем, что если $F(x) + C = \int f(x)\,dx$, где $x = \varphi(t)$, то

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Доказательство. Имеем: $(F(x) + C)' = f(x)$. Следовательно, согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$(F(\varphi(t)) + C)' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Формулу интегрирования заменой переменной можно записать в виде

$$\int f(x)\,dx = \begin{Bmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)\,dt \end{Bmatrix} = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\,.$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к старой переменной x.

Примеры.

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} = \begin{Bmatrix} t=x+2 \\ dt=dx \end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C =$$

$$= \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}\right|+C = \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C\,.$$

После выделения полного квадрата в подкоренном выражении стала очевидной замена, приводящая интеграл к табличному. Замена приведена в фигурных скобках. Важно заметить, что в ходе замены переменной должна быть установлена связь не только между новой и старой переменными, но и между дифференциалами этих переменных.

Проверим решение с помощью пакета программ **MAXIMA:**

```
(%i2) integrate(1/sqrt(x^2+4*x+5), x);
```

(%o2) $\operatorname{asinh}\left(\frac{2\,x+4}{2}\right)$

В ответе получилась функция $a\sinh\left(\frac{2x+4}{2}\right)$ или $arsh\,(x+2)$, которая называется ареа-синус (см. *Математическая справка*). Это обратная функция к гиперболическому синусу. Очевидно, что оба решения дают одинаковые ответы.

Математическая справка:

ареа-синус $arsh\;x = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$,

ареа-косинус $arch\;x = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$,

ареа-тангенс $arth\;x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$,

ареа-котангенс $arth\;x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1}$,

синус гиперболический $sh\;x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$,

косинус гиперболический $ch\;x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, тангенс гиперболический $th\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

котангенс гиперболический $cth\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

2. $\int \frac{2xdx}{1+x^4} = \int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \left\{ \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = d(x^2) \end{matrix} \right\} = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctgt + C = arctg(x^2) + C$.

Проверим решение.

```
(%i1) integrate(2*x/(1+x^4), x);
(%o1) atan(x^2)
```

3. $\int \cos^4 x \sin x dx = \left\{ \begin{matrix} z = \cos x \\ dz = -\sin x dx \end{matrix} \right\} = -\int z^4 dz = -\frac{z^5}{5} = -\frac{1}{5}\cos^5 x + C$.

Проверка решения:

```
(%i1) integrate(cos(x)^4*sin(x), x);
(%o1) -cos(x)^5/5
```

4. $\int e^{\sin x} \cos x dx = \left\{ \begin{matrix} t = \sin x \\ dz = \cos x dx \end{matrix} \right\} = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$

Проверка решения:

```
(%i1) integrate(exp(sin(x))*cos(x), x);
(%o1) %e^sin(x)
```

В вышеприведенных примерах не всегда понятно, как выбирается замена переменной. Далее будет изложена теория, из которой следует, какую замену нужно производить в том, или ином случае.

III. Интегрирование по частям

Интегрирование по частям обычно используется, если подынтегральная функция представляет произведение функций разных типов - степенная и показательная, степенная и тригонометрическая, обратная тригонометрическая функция и степенная, показательная и тригонометрическая и т.д. Интегрирование в этом случае производится с помощью формулы

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

где $u, v -$ функции одной переменной. Докажем формулу, рассмотрев дифференциал произведения функций. Пусть обе функции зависят от x, тогда

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + uv')dx = u'dx\, v + u\, v'dx = vdu + udv,$$

интегрируем обе части равенства $\int d(uv) = \int vdu + \int udv$, в результате имеем

$$uv = \int vdu + \int udv,$$

откуда и следует формула интегрирования по частям.

При применении процедуры интегрирования по частям важен выбор функции u.

Укажем приоритеты выбора этой функции.

1) В первую очередь в качестве u выбирается одна из функций $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ $arctgx$, $arcctgx$.

2) При отсутствии этих функций в подынтегральном выражении в качестве u может быть выбрана находящаяся в числителе степенная функция с целым положительным показателем степени.

Другиx приоритетов при выборе этой функции нет, задание u в этом случае осуществляется перебором возможных вариантов.

Примеры.

1. $$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{aligned} & u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ & dv = xdx, \quad v = \int xdx = \frac{1}{2}x^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Замечания:

а) из примера становится ясным, почему указанная процедура называется интегрированием по частям. Один интеграл вычисляется при определении v, другим интегралом является $\int vdu$, то есть вместо одного интегрирования производится два,

б) в качестве u в этом примере выбрана логарифмическая функция, поскольку она обладает высшим приоритетом по сравнению со степенной функцией,

в) при определении v постоянную интегрирования обычно считают нулем, поскольку в качестве v может использоваться любая из первообразных подынтегральной функции.

Проверка.

```
(%i1) integrate(x*log(x), x);
```

$$\text{(\%o1)}\quad \frac{x^2\log(x)}{2}-\frac{x^2}{4}$$

2. $\int x\cos xdx=\begin{Bmatrix} u=x, & du=dx \\ dv=\cos xdx, & v=\sin x\end{Bmatrix}=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$

3. $\int x^2e^xdx=\begin{Bmatrix} u=x^2, & du=2xdx \\ dv=e^xdx, & v=e^x\end{Bmatrix}=x^2e^x-\int e^x2xdx=$

$$=x^2e^x-2\int xe^xdx=\begin{Bmatrix} u=x, & du=dx \\ dv=e^xdx, & v=e^x\end{Bmatrix}=x^2e^x-2\left[xe^x-\int e^xdx\right]=$$

$$=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.$$

В этом примере для получения табличного интеграла пришлось интегрировать по частям дважды, при каждом интегрировании показатель степени степенной функции уменьшался на единицу. В итоге повторном применении указанной процедуры степенная функция из подынтегрального выражения исчезла. Именно поэтому интеграл стал проще. Если показатель степени дробный, степенная функция при интегрировании по частям не исчезает, а переходит в знаменатель, что усложняет интеграл.

4. $\int e^x\cos xdx=\begin{Bmatrix} u=\cos x, & du=-\sin xdx \\ dv=e^xdx, & v=e^x\end{Bmatrix}=e^x\cos x+\int e^x\sin xdx=$

$$=\begin{Bmatrix} u=\sin x, & du=\cos xdx \\ dv=e^xdx, & v=e^x\end{Bmatrix}=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos xdx.$$

В этом примере после дважды примененной процедуры интегрирования по частям табличного интеграла не получилось, однако, из формулы

$$\int e^x\cos xdx=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos xdx,$$

следует

$$2\int e^x\cos xdx=e^x\cos x+e^x\sin x$$

или

$$\int e^x\cos xdx=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C.$$

Некоторые классы интегрируемых функций

Далее будут рассмотрены методы интегрирования некоторых классов функций. В первую очередь рассмотрим интегралы от дробно рациональных функций. Важность этого класса интегралов следует из того, что наибольшее число интегралов других классов сводятся именно к этим интегралам.

Интегрирование простейших дробно-рациональных функций

Известны 4 простейшие дробно-рациональные функции. Интегралы от них вычисляются следующим образом

I. $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$.

Доказательство. $\left(\ln|x-a|\right)' = \frac{1}{x-a}$.

II. $\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \frac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C$.

Доказательство. $\left(\frac{1}{(1-m)}(x-a)^{1-m}\right)' = \frac{1}{(1-m)}(1-m)(x-a)^{-m}$.

III. $\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)}dx$,

IV. $\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^m}dx \quad (p^2-4q<0)$.

(при $p^2-4q \geq 0$ эти два интеграла могут быть сведены к более простому виду).

Простейшие дроби III и IY типов преобразуются одинаково по следующей схеме:

1) Выделяется полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2,$$

где

$$a^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{4q - p^2}{4} \geq 0.$$

2) Делается замена переменной $\left\{t = x + \frac{p}{2},\quad dt = dx\right\}$, и интеграл разбивается на два.

Тогда интеграл III типа сводится к следующим простым интегралам:

$$\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)}dx = \int \frac{(Mx+N)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2} = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\,\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{(2N - Mp)}{2a}arctg\,\frac{(2x+p)}{2a} + C.$$

Пример. Вычислить $\int \frac{(4x+3)}{(x^2+4x+5)}dx$. Поскольку $p^2 - 4q = 16 - 20 = -4 < 0$, данный интеграл является интегралом третьего типа. Решаем его, используя вышеприведенную процедуру

$$\int \frac{(4x+3)}{(x^2+4x+5)}dx = \int \frac{(4x+3)}{\left[(x+2)^2+1\right]}dx = \{t = x+2,\quad dt = dx\} = \int \frac{(4t-8+3)}{(t^2+1)}dt =$$

$$= \int \frac{4tdt}{(t^2+1)}dt - 5\int \frac{dt}{(t^2+1)} = 2\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{(t^2+1)} - 5\int \frac{dt}{(t^2+1)} = 2\ln\left|t^2+1\right| - 5arctgt + C =$$

$$= 2\ln\left|x^2+4x+5\right| - 5arctg(x+2) + C.$$

Проверка.

```
(%i1) integrate((4*x+3)/(x^2+4*x+5), x);
```

$$\text{(\%o1)}\quad 2\log(x^2+4x+5) - 5\,\mathrm{atan}\left(\frac{2x+4}{2}\right)$$

С интегралом IV типа сложнее. После той же замены переменной получаем

$$\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^m}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} =$$

$$= \left[\frac{M}{2}\frac{1}{(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}\right]_{t=x-\frac{p}{2}}.$$

Один из интегралов сведен к табличному и вычислен. Для вычисления второго требуется, так называемая, рекуррентная формула, вывод которой осуществляется с помощью интегрирования по частям.

$$J_m = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} = \left\{\begin{array}{l} u = \dfrac{1}{(t^2+a^2)^m},\ du = -m(t^2+a^2)^{-m-1}2tdt = -2m\dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^{m+1}} \\ dv = dt, \qquad v = t \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2m\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^{m+1}} = \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2m\int \frac{(t^2+a^2-a^2)dt}{(t^2+a^2)^{m+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2m\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} - 2ma^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m+1}},$$

откуда следует

$$J_m = \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2mJ_m - 2ma^2 J_{m+1}.$$

Определяем

$$J_{m+1} = \frac{1}{2ma^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^m} + (2m-1)J_m\right],$$

где

$$J_{m+1} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m+1}}.$$

Покажем на примерах, как применяется рекуррентная формула.

Пример 1. Вычислить $J_2 = \int \dfrac{dt}{(t^2+a^2)^2}$.

Поскольку $J_1 = \int \dfrac{dt}{(t^2+a^2)} = \dfrac{1}{a}arctg\dfrac{t}{a} + C$, применяем рекуррентную формулу
при $m=1$:

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)} + J_1\right] = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)} + \frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}\right] + C.$$

Итак,

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)} + \frac{1}{a}\,arctg\,\frac{t}{a}\right] + C.$$

Проверка.

```
(%i3) integrate(1/(t^2+a^2)^2, t);
```

$$\text{(\%o3)}\quad \frac{\mathrm{atan}\left(\frac{t}{a}\right)}{2\,a^3} + \frac{t}{2\,a^2\,t^2 + 2\,a^4}$$

Пример 2. Вычислить $J_3 = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^3}$. Применяем рекуррентную формулу при $m=2$: $J_3 = \frac{1}{4a^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^2} + 3J_2\right]$, но J_2 определено выше, тогда

$$J_3 = \frac{1}{4a^2}\left\{\frac{t}{(t^2+a^2)^2} + \frac{3}{2a^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)} + \frac{1}{a}\,arctg\,\frac{t}{a}\right]\right\} =$$

$$= \frac{t}{4a^2(t^2+a^2)^2} + \frac{3t}{8a^4(t^2+a^2)} + \frac{3}{8a^5}\,arctg\,\frac{t}{a}.$$

Тогда

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^3} = \frac{t}{4a^2(t^2+a^2)^2} + \frac{3t}{8a^4(t^2+a^2)} + \frac{3}{8a^5}\,arctg\,\frac{t}{a}.$$

Проверка:

```
(%i1) integrate(1/(t^2+a^2)^3, t);
```

$$\text{(\%o1)}\quad \frac{3\,\mathrm{atan}\left(\frac{t}{a}\right)}{8\,a^5} + \frac{3\,t^3 + 5\,a^2\,t}{8\,a^4\,t^4 + 16\,a^6\,t^2 + 8\,a^8}$$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{(2x+7)}{(x^2+2x+10)^2}dx$. Преобразуем интеграл, используя вышеуказанную процедуру

$$\int \frac{(2x+7)}{(x^2+2x+10)^2}dx = \int \frac{(2x+7)}{\left[(x+1)^2+9\right]^2}dx = \{t = x+1,\quad dt = dx\} = \int \frac{(2t-2+7)}{(t^2+9)^2}dt =$$

$$= \int \frac{2tdt}{(t^2+9)^2} + 5\int \frac{dt}{(t^2+9)^2}.$$

Поскольку

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+3^2\right)^2}=\frac{1}{18}\left[\frac{t}{\left(t^2+9\right)}+\frac{1}{3}arctg\,\frac{t}{3}\right]+C,$$

что следует из примера 1, получаем

$$\int \frac{(2x+7)}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx=-\frac{1}{\left(t^2+9\right)}+\frac{5}{18}\left[\frac{t}{\left(t^2+9\right)}+\frac{1}{3}arctg\,\frac{t}{3}\right]+C=$$

$$=\frac{5x-13}{18\left(x^2+2x+10\right)}+\frac{5}{54}arctg\,\frac{(x+1)}{3}+C.$$

Проверка.

```
(%i2) integrate((2*x+7)/(x^2+2*x+10)^2, x);
```

$$(\%o2)\quad \frac{5\,\mathrm{atan}\left(\frac{2\,x+2}{6}\right)}{54}+\frac{5\,x-13}{18\,x^2+36\,x+180}$$

II. Дробно-рациональные функции, их интегрирование

Определение. Дробно рациональной функцией называется выражение вида

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)},\ \text{где}\ P_n(x),\ Q_m(x)-\text{многочлены.}$$

Определение. Дробь называется правильной, если старшая степень многочлена, находящегося в числителе, меньше старшей степени многочлена в знаменателе, то есть $m<n$, в противном случае дробь неправильная.

При вычислении интегралов от дробно рациональных функций $\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx$ необходимо руководствоваться следующими правилами:

1) Установить, является ли подынтегральная функция правильной или неправильной дробью. Если дробь неправильная, представить ее в виде суммы целой части и правильной дроби.

2) Выяснить, является ли правильная дробь простейшей, если да, то приступить к ее интегрированию.

3) Если дробь не является простейшей, представить ее в виде суммы простейших дробей и после этого приступить к интегрированию.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{\left(3x^5-2x^4+x^3+6x-5\right)}{(x-2)}dx.$$

Дробь неправильная, значит необходимо выделить целую часть:

$$\begin{array}{l|l}
3x^5-2x^4+x^3+6x-5 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\left(3x^5-6x^4\right) & 3x^4+4x^3+9x^2+18x+42 \\ \cline{1-1}
4x^4+x^3+6x-5 & \\
-\left(4x^4-8x^3\right) & \\ \cline{1-1}
9x^3+6x-5 & \\
-\left(9x^3-18x^2\right) & \\ \cline{1-1}
18x^2+6x-5 & \\
-\left(18x^2-36x\right) & \\ \cline{1-1}
42x-5 & \\
-\left(42x-84\right) & \\ \cline{1-1}
79 &
\end{array}$$

В результате

$$\int \frac{\left(3x^5-2x^4+x^3+6x-5\right)}{(x-2)}dx=\int\left(3x^4+4x^3+9x^2+18x+42+\frac{79}{x-2}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{5}x^5+x^4+3x^3+9x^2+42x+79\ln|x-2|+C.$$

Примечание. Интегрирование целой части, выделенной из неправильной дроби, сложности не представляет, поскольку приводит к интегралам от степенных функций.

Теорема. Правильная несократимая дробно рациональная функция $\frac{Q_m(x)}{(x-a)^s\left(x^2+px+q\right)^k}$ ($m<s+2*k$) может быть представлена в виде суммы простейших дробей

$$\frac{Q_m(x)}{(x-a)^s\left(x^2+px+q\right)^k}=\frac{A_1}{(x-a)^s}+\frac{A_2}{(x-a)^{s-1}}+\frac{A_3}{(x-a)^{s-2}}+\ldots.+\frac{A_s}{(x-a)}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\frac{M_3x+N_3}{\left(x^2+px+q\right)^{k-2}}+\ldots..+\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)}.$$

(Без доказательства)

Правила определения коэффициентов разложения:

1) После представления правильной дробно рациональной функции в виде суммы простейших дробей приводим правую часть формулы к общему знаменателю, следя за тем, чтобы общий знаменатель суммы дробей совпадал со знаменателем разлагаемой дроби.
2) Так как знаменатели дробей в левой и правой частях равенства совпадают, приравняем их числители, в результате получаем равенство многочленов, расположенных в левой и правой частях формулы.
3) Из условия, что многочлены равны только тогда, когда совпадают коэффициенты при одинаковых степенях переменной, получаем систему уравнений относительно коэффициентов разложения, причем доказано, что она имеет единственное решение.
4) После определения из полученной системы значений коэффициентов разложения интегрируем простейшие дроби.

Пример 1. $\int \frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2}dx$.

Интеграл от дробно рациональной функции, дробь правильная, несократимая и не являющаяся простейшей. Тогда

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{D}{(x+3)}.$$

После приведения правой части равенства к общему знаменателю имеем

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2} \equiv \frac{A(x+3)^2 + B(x-2) + D(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)^2}.$$

Приравниваем числители дробей

$$3x+2 \equiv A(x+3)^2 + B(x-2) + D(x-2)(x+3),$$

откуда следует

$$3x+2 \equiv A\left(x^2+6x+9\right) + B(x-2) + D\left(x^2+x-6\right). \qquad (*)$$

Требуем равенства коэффициентов при одинаковых степенях многочленов, в результате приходим к системе уравнений относительно коэффициентов разложения

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+D=0 \\ x & 6A+B+D=3 \\ 1 & 9A-2B-6D=2 \end{array}$$

Итак, получена система трех уравнений относительно A, B, D. Известно, что ее решение единственно. Решение может быть получено разными способами.

Представляет особый интерес добавление к этой системе дополнительных, «лишних» уравнений, упрощающих получение решения. Рассуждают при этом следующим образом. Тождество (*) предполагает, что равенство справедливо при любых значениях переменной x, следовательно, его можно использовать и при конкретных значениях переменной.

Примем $x=2$, тогда тождество приводит к уравнению

$$8=25A+B\cdot 0+D\cdot 0,$$

откуда следует $A=\frac{8}{25}$. Из первого уравнения полученной выше системы следует $D=-\frac{8}{25}$, после чего из второго получаем $B=-\frac{48}{25}+\frac{8}{25}+3=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}$. Поскольку к решению системы привлекалось дополнительное уравнение, третье уравнение системы оказалось лишним. Используем его для проверки полученного результата $\frac{72}{25}-\frac{70}{25}+\frac{48}{25}=\frac{50}{25}=2$.

Теперь

$$\int\frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2}dx\equiv\frac{8}{25}\int\frac{dx}{(x-2)}+\frac{7}{5}\int\frac{dx}{(x+3)^2}-\frac{8}{25}\int\frac{dx}{(x+3)}=$$

$$=\frac{8}{25}\ln|x-2|-\frac{7}{5(x+3)}-\frac{8}{25}\ln|x+3|+C=\frac{8}{25}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|-\frac{7}{5(x+3)}+C.$$

Проверим результат:

```
(%i1) integrate((3*x+2)/(x-2)/(x+3)^2, x);
```

$$\text{(\%o1)}\quad -\frac{8\log(x+3)}{25}+\frac{8\log(x-2)}{25}-\frac{7}{5x+15}$$

Пример 2. $\int\frac{(x-4)}{(x^3+x^2-2)}dx$.

Подынтегральная функция представляет собой правильную дробно рациональную функцию, которую следует разложить на простейшие дроби. Для этого многочлен в знаменателе необходимо представить в виде произведения простейших множителей. Это возможно, если удается определить все корни многочлена в знаменателе, что не всегда получается. Часто поступают следующим образом. Перебором вариантов подбирается один из корней, в нашем примере это $x=1$.

Очевидно, многочлен в знаменателе нацело делится на $(x-1)$. Проверим это

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2-2 & x-1 \\ \hline -\left(x^3-x^2\right) & x^2+2x+2 \\ \hline \quad 2x^2-2 & \\ -\left(2x^2-2x\right) & \\ \hline \quad 2x-2 & \\ -\left(2x-2\right) & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

Тогда $x^3+x^2-2=(x-1)\left(x^2+2x+2\right)$, причем второй множитель действительных корней не имеет, поскольку его дискриминант равен (-4). Теперь

$$\frac{(x-4)}{\left(x^3+x^2-2\right)}=\frac{(x-4)}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{Mx+N}{\left(x^2+2x+2\right)}.$$

После приведения правой части к общему знаменателю, имеем

$$\frac{(x-4)}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A\left(x^2+2x+2\right)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)},$$

в результате

$$A\left(x^2+2x+2\right)+(Mx+N)(x-1)\equiv x-4.$$

Это тождество приводит к системе уравнений

$$\begin{array}{r||l} x^2 & A+M=0 \\ x & 2A-M+N=1 \\ 1 & 2A-N=-4 \end{array}$$

Добавим к этой системе уравнений дополнительное уравнение, полученное из тождества при $x=1$:

$$5A=-3,$$

откуда следует $A=-\frac{3}{5}$. Теперь из первого уравнения системы $M=\frac{3}{5}$, из последнего уравнения $N=-\frac{6}{5}+4=\frac{14}{5}$. Проверим результат, подставив полученные значения коэффициентов в оставшееся второе уравнение

$$2A-M+N=-\frac{6}{5}-\frac{3}{5}+\frac{14}{5}=\frac{5}{5}=1.$$

В итоге
$$\int\frac{(x-4)}{(x^3+x^2-2)}dx=-\frac{3}{5}\int\frac{dx}{(x-1)}+\frac{1}{5}\int\frac{(3x+14)}{(x^2+2x+2)}dx.$$
Первый интеграл табличный, второй является интегралом третьего типа, решаем его, используя описанную выше процедуру.

$$\int\frac{(3x+14)}{(x^2+2x+2)}dx=\int\frac{(3x+14)}{(x+1)^2+1}dx=\left\{\begin{matrix}z=x+1\\ dz=dx\end{matrix}\right\}=\int\frac{(3z-3+14)}{z^2+1}dz=3\int\frac{zdz}{z^2+1}+$$
$$+11\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{3}{2}\ln\left|z^2+1\right|+11\,\mathrm{arctg}\,z+C=\frac{3}{2}\ln\left|(x+1)^2+1\right|+11\,\mathrm{arctg}(x+1)+C.$$

Итак,
$$\int\frac{(x-4)}{(x^3+x^2-2)}dx=-\frac{3}{5}\ln|x-1|+\frac{3}{10}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\frac{11}{5}\,\mathrm{arctg}(x+1)+C.$$

Проверка.

```
(%i1) integrate((x-4)/(x^3+x^2-2), x);
```

$$\text{(\%o1)}\quad \frac{3\log(x^2+2x+2)}{10}+\frac{11\,\mathrm{atan}\left(\frac{2x+2}{2}\right)}{5}-\frac{3\log(x-1)}{5}$$

Пример 3. $\int\frac{dx}{x^4+4}$.

Иногда представление знаменателя дроби в виде произведения простейших скобок может быть осуществлено без определения корней знаменателя. Покажем, как это можно сделать в данном примере
$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2).$$
Дальнейшее упрощение знаменателя нецелесообразно, так как ни один из полученных квадратных трехчленов не имеет действительных корней. Итак,
$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}=\frac{Mx+N}{(x^2-2x+2)}+\frac{Px+Q}{(x^2+2x+2)}.$$

После приведения дробей к общему знаменателю приходим к тождеству
$$(Mx+N)(x^2+2x+2)+(Px+Q)(x^2-2x+2)\equiv 1$$
или
$$Mx(x^2+2x+2)+N(x^2+2x+2)+Px(x^2-2x+2)+Q(x^2-2x+2)\equiv 1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях многочленов в левой и правой частях тождества

$$
\begin{array}{c||l}
x^3 & M+P=0 \\
x^2 & 2M+N-2P+Q=0 \\
x & 2M+2N+2P-2Q=0 \\
1 & 2N+2Q=1
\end{array}
$$

В этом случае не удается для упрощения решения системы уравнений привлечь дополнительных уравнений. Однако третье уравнение системы с помощью первого уравнения приводится к виду $2N-2Q=0$, откуда имеем $Q=N$. Теперь из последнего уравнения получаем $Q=N=\frac{1}{4}$. Из первого уравнения $P=-M$. Подставляя все это во второе уравнение, имеем $2M+\frac{1}{4}+2M+\frac{1}{4}=0$, откуда следует $M=-\frac{1}{8}$, после чего $P=\frac{1}{8}$. Итак,

$$\frac{1}{x^4+4}=-\frac{x-2}{8(x^2-2x+2)}+\frac{x+2}{8(x^2+2x+2)}.$$

Вычисляем интегралы

$$-\frac{1}{8}\int\frac{x-2}{(x^2-2x+2)}dx=-\frac{1}{8}\int\frac{x-2}{(x-1)^2+1}dx=\left\{\begin{matrix}t=x-1\\ dt=dx\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{8}\int\frac{t-1}{t^2+1}dt=$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{tdt}{t^2+1}+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2+1}=-\frac{1}{16}\ln\left|t^2+1\right|+\frac{1}{8}\operatorname{arctg} t=-\frac{1}{16}\ln\left|(x-1)^2+1\right|+$$

$$+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x-1).$$

$$\frac{1}{8}\int\frac{x+2}{(x^2+2x+2)}dx=\frac{1}{8}\int\frac{x+2}{(x+1)^2+1}dx=\left\{\begin{matrix}z=x+1\\ dz=dx\end{matrix}\right\}=\frac{1}{8}\int\frac{z+1}{z^2+1}dz=$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{2z}{z^2+1}dz+\frac{1}{8}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{16}\ln\left|z^2+1\right|+\frac{1}{8}\operatorname{arctg} z=$$

$$=\frac{1}{16}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x+1).$$

В итоге

$$\int\frac{dx}{x^4+4}=\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x-1)+C.$$

Проверим результат с помощью **MAXIMA**:

```
(%i1) integrate(1/(x^4+4), x);
```

$$(\%o1)\quad \frac{\log(x^2+2x+2)}{16}-\frac{\log(x^2-2x+2)}{16}+\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2x+2}{2}\right)}{8}+\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2x-2}{2}\right)}{8}$$

```
(%i2) ratsimp(%);
```

$$(\%o2)\quad \frac{\log(x^2+2x+2)-\log(x^2-2x+2)+2\operatorname{atan}(x+1)+2\operatorname{atan}(x-1)}{16}$$

III. Интегрирование тригонометрические функции

1. Рассматриваются интегралы $\int R(\cos x, \sin x)dx$, где $R-$ дробно-рациональная функция двух аргументов $\cos x$ и $\sin x$.

Эти интегралы заменой переменной сводятся к интегралам $\int \overline{R}(t)dt$, причем $\overline{R}$ – дробно рациональная функция аргумента t.

Решение этой задачи осуществляется с помощью универсальной подстановки $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Покажем, что функции $\cos x$ и $\sin x$, а также dx оказываются дробно рациональными функциями новой переменной t.

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

При получении первой формулы учитывалось, что $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha$.

Кроме того, из $x=2\operatorname{arctg} t$ следует $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$. Итак,

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int \overline{R}(t)dt.$$

Таким образом, задача приведения рассматриваемого интеграла к интегралу предыдущего класса решена. Однако, как показывает опыт, эта замена приводит к сложным интегралам от дробно рациональных функций, вычисление которых весьма затруднительно, если вообще возможно.

В некоторых случаях с помощью других подстановок удается получить более простые дробно рациональные функции. В отличие от универсальной, эти подстановки, называют иногда специальными, так как применимы они лишь при выполнении некоторых условий.

а) Замена $t=\sin x$ применима при выполнении условия

$$R(-\cos x\,,\sin x)=-R(\cos x\,,\sin x),$$

то есть подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$.

б) Замена $t=\cos x$ применима при выполнении условия

$$R(\cos x\,,-\sin x)=-R(\cos x\,,\sin x),$$

то есть подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$.

в) Замена $t=tgx$ применима при выполнении условия

$$R(-\cos x\,,-\sin x)=R(\cos x\,,\sin x).$$

Это условие реализуется, когда функция $R(\cos x\,,\sin x)$ четна одновременно относительно $\cos x$ и $\sin x$.

Тогда

$$\cos^2 x=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)}=\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2}.$$

Так как $x=\mathrm{arctg}\,t$, значит $dx=\dfrac{1}{1+t^2}dt$.

Таким образом, приведение рассматриваемого класса интегралов к предыдущему классу возможно двумя способами. Либо применением универсальной подстановки, приводящей почти всегда к интегралам от сложных дробно рациональных функций, либо использованием, если это возможно, наиболее подходящей специальной подстановки.

Опыт показывает, что применение универсальной подстановки целесообразно, когда не работает ни одна из специальных подстановок. Если допустимы несколько специальных подстановок, желательно осуществить каждую из них, чтобы выбрать ту, которая приводит к интегралу от самой простой дробно рациональной функции.

Пример 1. Вычислить $\int \mathrm{tg}^5 x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx$.

Нетрудно проверить, что можно реализовать все приведенные выше подстановки. В самом деле, подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, нечетна относительно $\sin x$, так же она четна относительно одновременно $\cos x$ и $\sin x$. Универсальная же подстановка осуществима в этих интегралах всегда. Реализуем поочередно все подстановки, начиная с универсальной.

A) $$\int \mathrm{tg}^5 x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^5}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^5} \frac{2dt}{1+t^2} = -64\int \frac{t^5}{\left(t^2-1\right)^5\left(t^2+1\right)} dt =$$

$$= -64\int \frac{t^5}{(t-1)^5(t+1)^5\left(t^2+1\right)} dt\,.$$

В результате получен интеграл от дробно рациональной функции, дробь правильная, несократимая. Ее можно представить в виде суммы одиннадцати простейших дробей. Относительно коэффициентов разложения получается система 12 алгебраических уравнений.

B) $$\int \mathrm{tg}^5 x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} \cos x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\left(1-\sin^2 x\right)^3} \cos x\, dx =$$

$$= \left\{\begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x\, dx \end{aligned}\right\} = \int \frac{t^5}{\left(1-t^2\right)^3} dt = -\int \frac{t^5}{(t-1)^3(t+1)^3} dt\,.$$

Подынтегральная функция может быть представлена в виде суммы шести простейших дробей, для отыскания коэффициентов разложения требуется решить систему 6 алгебраических уравнений. Задача значительно проще по сравнению с А).

C) $$\int \mathrm{tg}^5 x\, dx = \left\{\begin{aligned} t &= \mathrm{tg}\, x \\ dx &= \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned}\right\} = \int \frac{t^5}{t^2+1} dt\,.$$

Итак, необходимо вычислить интеграл от неправильной дробно рациональной функции, что значительно проще вычисления интеграла В), не говоря уж об А).

D) $$\int \mathrm{tg}^5 x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x} \sin x\, dx = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos^5 x} \sin x\, dx =$$

$$= \left\{\begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x\, dx \end{aligned}\right\} = -\int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^5} dt = -\int \left(\frac{1}{t^5} - \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t}\right) dt =$$

$$=\frac{1}{4t^4}-\frac{1}{t^2}-\ln|t|+C=\frac{1}{4\cos^4 x}-\frac{1}{\cos^2 x}-\ln|\cos x|+C.$$

Таким образом, последний вариант замены переменной оказался самым удачным, с помощью этой подстановки интеграл вычислен. В ходе решения подтвердилось, что универсальная подстановка в рассмотренном примере приводит к значительно более трудоемким вычислениям.

Решим эту задачу с помощью **Maxima**:

```
(%i1) integrate(tan(x)^5, x);
```

$$\text{(\%o1)}\quad \frac{4\sin(x)^2-3}{4\sin(x)^4-8\sin(x)^2+4}-\frac{\log(\sin(x)^2-1)}{2}$$

Пример 2. Вычислить $\int\frac{dx}{3\sin x+\cos x+2}$. В этом случае не работает ни одна из специальных подстановок, приходится применять универсальную.

$$\int\frac{dx}{3\sin x+\cos x+2}=\left\{\begin{matrix} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & dx=\frac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{6t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+2}=\int\frac{2dt}{t^2+6t+3}.$$

Знаменатель получившейся подынтегральной функции имеет действительные корни, следовательно, дробь может быть представлена в виде суммы двух более простых дробей. Однако значения корней выражаются через радикалы, поэтому откажемся от требований теории, предпочтя выделение полного квадрата в знаменателе.

$$\int\frac{2dt}{t^2+6t+3}=\int\frac{2dt}{(t+3)^2-6}=\left\{\begin{matrix} z=t+3 \\ dz=dt\end{matrix}\right\}=2\int\frac{dz}{z^2-6}=\frac{2}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{6}}{z+\sqrt{6}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t+3-\sqrt{6}}{t+3+\sqrt{6}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3-\sqrt{6}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3+\sqrt{6}}\right|+C.$$

Итак, $$\int\frac{dx}{3\sin x+\cos x+2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3-\sqrt{6}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3+\sqrt{6}}\right|+C.$$

2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$.

Эти интегралы являются частным случаем интеграла $\int R(\cos x, \sin x)dx$, следовательно, к ним применима теория предыдущего параграфа. Ее и следует использовать, когда один из показателей степеней нечетен. Если $m -$нечетно, то делается замена $t = \cos x$, если нечетно n, реализуется замена $t = \sin x$. Интересен случай, когда m и $n -$ четные. Теория предлагает в этом случае замену $t = tgx$, однако удобнее понизить общую степень подынтегральной функции с помощью одной из формул

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример 3.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

3. Интегралы вида $\int \sin ax \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \sin bx\, dx$, $\int \cos ax \cos bx\, dx$. Они решаются с помощью формул

$$\int \sin ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin((a+b)x)dx + \int \sin((a-b)x)dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos((a+b)x)}{(a+b)} + \frac{\cos((a-b)x)}{(a-b)}\right] + C,$$

$$\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \cos((a-b)x)dx - \int \cos((a+b)x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((a-b)x)}{(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{(a+b)}\right] + C,$$

$$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \cos((a-b)x)dx + \int \cos((a+b)x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((a-b)x)}{(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{(a+b)}\right] + C.$$

IV. Интегрирование показательных функций

Вычисляются интегралы вида $\int R\left(a^x\right)dx$, где $R-$ дробно - рациональная функция аргумента a^x. В этом классе рекомендуется замена $z = a^x$, $dz = a^x \ln a\, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{\ln a}\frac{dz}{z}$, тогда $\int R\left(a^x\right)dx = \frac{1}{\ln a}\int \frac{R(z)\,dz}{z}$.

Пример.

$$\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1} = \left\{\begin{array}{l} z = e^x \\ dz = e^x dx \end{array}\right\} = \int \frac{dz}{z^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C.$$

V. Интегрирование иррациональных выражений

Этот класс интегралов является наиболее сложным, так как включает в себя множество подклассов интегралов, в каждом из которых свои приемы вычислений. Более того, кажущаяся очевидной замена переменной чаще всего не приводит к положительному результату. Основная идея, реализуемая в этом классе интегралов, избавление от радикалов в подынтегральном выражении.

1. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[p]{ax+b}, \sqrt[q]{ax+b}\right)dx$, где $R-$ дробно рациональная функция. В этом случае работает замена $ax + b = z^s$, где $s-$ наименьше общее кратное чисел m, n, p, q, другими словами, $s-$ наименьшее из чисел, делящихся нацело на m, n, p, q.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}} = \left\{\begin{array}{l} x = z^6 \\ dx = 6z^5 dz \end{array}\right\} = \int \frac{6z^5 dz}{z^3 - 2z^2} = 6\int \frac{z^3}{z-2}dz = 6\int \frac{z^3 - 8 + 8}{z-2}dz =$$

$$= 6\left[\int\left(z^2 + 2z + 4\right)dz + 8\int \frac{dz}{z-2}\right] = 2z^3 + 6z^2 + 24z + 48\ln|z-2| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x} + 24\sqrt[6]{x} + 48\ln\left|\sqrt[6]{x} - 2\right| + C.$$

2. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$. Для этих интегралов имеются замены переменных, напрямую приводящие их к классу дробно рациональных функций. Однако предпочтительнее в этом случае замена, переводящая интеграл в класс тригонометрических функций. Это

$$\left\{\begin{aligned}&x = a\sin t\,,\quad \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t\,,\\ &dx = a\cos t\,dt\end{aligned}\right\},$$

тогда $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx = \int R(a\sin t, a\cos t)a\cos t\,dt$. Преобразование полученного в результате замены переменной интеграла происходит по правилам, установленным в классе тригонометрических функций.

Пример.

$$\int\frac{(1-x)}{\sqrt{4-x^2}}dx = \left\{\begin{aligned}&x = 2\sin t\,, \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4(1-\sin^2 t)} = 2\cos t\\ &dx = 2\cos t\,dt\end{aligned}\right\} = \int\frac{(1-2\sin t)2\cos t}{2\cos t}dt =$$

$$= \int(1-2\sin t)\,dt = t + 2\cos t + C = \arcsin\frac{x}{2} + 2\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + 2\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)} + C = \arcsin\frac{x}{2} + 2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} + C =$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2} + C.$$

Проверка.

```
(%i2) integrate((1-x)/(4-x^2)^(1/2), x);
```

(%o2) $\operatorname{asin}\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{4-x^2}$

3. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$. Подынтегральная функция приводится к дробно рациональной относительно синуса и косинуса функции заменой

$$x = a\,\mathrm{tg}\,t\,,\quad \sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\mathrm{tg}^2 t} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t},\quad dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt\,,$$

откуда следует

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx = \int R\left(a\,\mathrm{tg}\,t\,, \frac{a}{\cos t}\right)\frac{a}{\cos^2 t}dt = \int \bar{R}(\cos t\,, \sin t)\,dt\,.$$

Для преобразований полученного интеграла используем теорию, относящуюся к интегралам от тригонометрических функций.

Пример.

$$\int\frac{(2+5x)}{\sqrt{(9+x^2)^3}}dx = \left\{x = 3\,\mathrm{tg}\,t\,,\quad \sqrt{9+x^2} = \frac{3}{\cos t},\quad dx = \frac{3}{\cos^2 t}dt\right\} =$$

$$= \int\frac{(2+15\,\mathrm{tg}\,t)}{\frac{27}{\cos^3 t}}\frac{3}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{9}\int(2\cos t + 15\sin t)dt = \frac{2}{9}\sin t - \frac{5}{3}\cos t + C =$$

$$=\frac{2}{9}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)-\frac{5}{3}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)+C.$$

Если учесть формулы

$$\cos x=\sqrt{\cos^2 x}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}},\quad \sin x=\operatorname{tg} x\cos x=\operatorname{tg} x\sqrt{\cos^2 x}=\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}},$$

то

$$\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}}=\frac{3}{\sqrt{9+x^2}},$$

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)}}=\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

Очевидно,

$$\int\frac{(2+5x)}{\sqrt{(9+x^2)^3}}dx=\frac{2x}{9\sqrt{9+x^2}}-\frac{5}{\sqrt{9+x^2}}+C.$$

Проверка.

```
(%i1) integrate((2+5*x)/(9+x^2)^(3/2), x);
```

(%o1) $\frac{2x}{9\sqrt{x^2+9}}-\frac{5}{\sqrt{x^2+9}}$

4. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$. Подынтегральная функция приводится к дробно рациональной относительно синуса и косинуса функции заменой

$$x=\frac{a}{\sin t}\ ,\quad \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}=a\frac{\cos t}{\sin t},\quad dx=-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt,$$

откуда следует

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=-\int R\left(\frac{a}{\sin t}\ ,a\frac{\cos t}{\sin t}\right)\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt=\int \overline{R}(\cos t,\sin t)\,dt.$$

Пример.

$$\int\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}dx=\left\{x=\frac{1}{\sin t},\quad \sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}=\frac{\cos t}{\sin t},\quad dx=-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt\right\}=$$

$$=\int \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\frac{1}{\sin t}} \cdot \left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right) dt = -\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = -\int \operatorname{ctg}^2 t\, dt = -\int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) dt =$$

$$= \operatorname{ctg} t + t + C = \operatorname{ctg} \arcsin\frac{1}{x} + \arcsin\frac{1}{x} + C = \sqrt{x^2 - 1} + \arcsin\frac{1}{x} + C\,.$$

Здесь учитывались формулы

$$\operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t} - 1$$

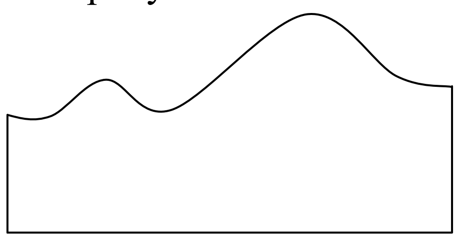
и

$$\operatorname{ctg} \arcsin\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \arcsin\frac{1}{x}} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2}} - 1} = \sqrt{x^2 - 1}\,.$$

ИНТЕГРАЛ РИМАНА

Площадь криволинейной трапеции

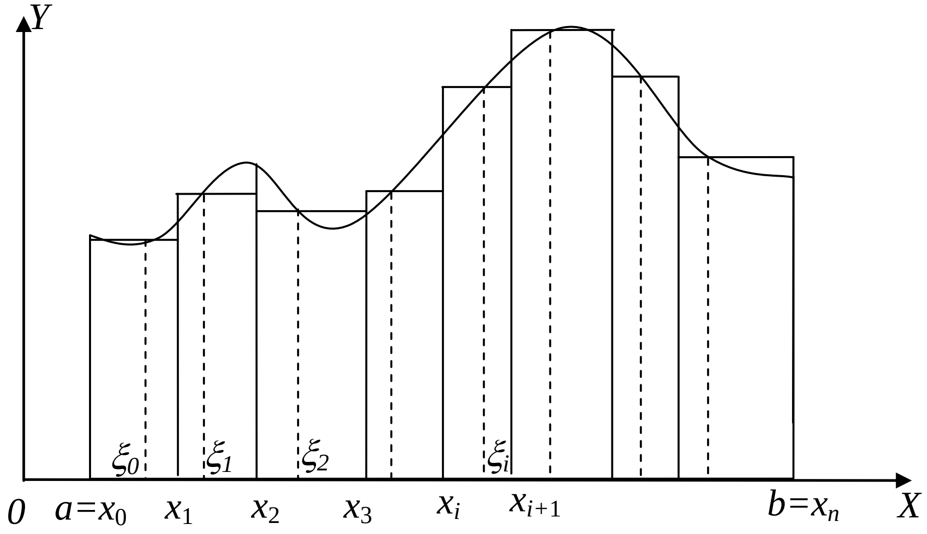
Представим, что мы должны подсчитать площадь земельного участка, изображенного на рисунке.



Такая фигура, ограниченная с трех сторон отрезками прямых, два из которых перпендикулярны третьему, а четвертая сторона пересекается прямой, перпендикулярной противоположному отрезку, только в одной точке, называется криволинейной трапецией. Очевидно, что любая плоская фигура может быть разбита на конечное число криволинейных трапеций. Будем считать, что прямолинейные участки сторон нашей криволинейной трапеции так же, как на рисунке, параллельны координатным осям. В этом случае можно нижний отрезок считать отрезком оси абсцисс, где $a \le x \le b$, и точки криволинейного участка задать с помощью непрерывной функции $y = f(x),\ x \in [a,b]$.

Для того чтобы найти площадь криволинейной трапеции, заменим трапецию объединением прямоугольников по следующей схеме.

Отрезок $[a,b]$ разделен на n отрезков $[x_i, x_{i+1}],\ i=0,...,n$, где $x_0 = a,\ x_n = b$.



На каждом отрезке выбрана точка ξ_i и в этой точке восстановлен перпендикуляр (прерывистая линия) до пересечения с кривой $y = f(x)$. Таким образом, вершиной перпендикуляра является точка с координатами

$$(\xi_i, f(\xi_i)).$$

На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ как на основании построен прямоугольник высотой $f(\xi_i)$. Очевидно, что чем меньше отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, тем меньше площадь прямоугольника отличается от площади криволинейной трапеции с основанием $[x_i, x_{i+1}]$. Обозначим Δ длину наибольшего из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$. Δ называется **диаметром разбиения**. Чем меньше диаметр разбиения, тем ближе сумма площадей построенных прямоугольников к площади исходной криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$.

Итак, за приближенное значение площади исходной криволинейной трапеции возьмем

$$\sigma(f, R, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Здесь R означает способ выбора точек разбиения x_i, ξ – выбор отмеченных точек ξ_i. Введенная сумма называется интегральной суммой Римана. Если существует предел

$$\lim_{\Delta \to 0} \sigma(f, R, \xi) = I,$$

причем этот предел не зависит ни от R, ни от ξ, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$, а сам предел называется **интегралом Римана по отрезку** и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Этот интеграл и будет равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$, ограниченной кривой $y = f(x)$.

Любая **непрерывная** на отрезке функция является **интегрируемой** на этом отрезке. Хотя класс интегрируемых по Риману функций значительно шире, чем класс непрерывных функций, мы будем рассматривать только интегралы от непрерывных функций.

Пока непонятно, почему площадь криволинейной трапеции назвали **интегралом** – так же, как множество первообразных. Не видно связи между этими объектами. Тем не менее, связь есть. Отметим пока следующие из свойств сумм и пределов

Свойства интеграла Римана

1. **Линейность**. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, α и β– произвольные постоянные, то функция $\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, причем

$$\int_a^b(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

2. **Аддитивность**. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $c\in[a,b]$, то $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Следствием этой формулы можно считать соотношение

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

То есть, замена направления интегрирования приводит к замене знака у интеграла.

3. **Сохранение неравенства.** Если $f(x)\ge g(x)$ всюду на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx.$$

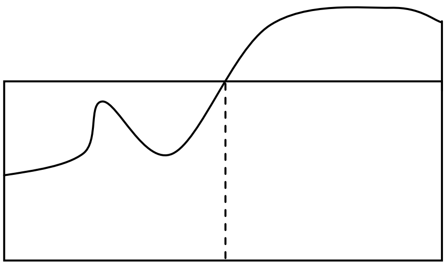
Следствие. Если M и m есть соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то

$$m\cdot(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M\cdot(b-a)$$

4. **Теорема о среднем**. Для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ существует такая точка $x_0\in[a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx=f(x_0)\cdot(b-a).$$

То есть, существует равновеликий криволинейной трапеции прямоугольник на том же основании с высотой, равной значению функции в промежуточной точке.



Формула Ньютона-Лейбница

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Будем рассматривать интегралы от этой функции на отрезках $[a,t]$ при всевозможных $t\in[a,b]$. Очевидно, что результат интегрирования зависит от значения верхнего предела интегрирования. Поэтому обозначим

$$I(t)=\int_a^t f(x)dx.$$

Причем $I(a)=0,\ I(b)=\int_a^b f(x)dx.$

Рассмотрим

$$I(t+\Delta t)-I(t)=\int_t^{t+\Delta t} f(x)dx.$$

В соответствии с теоремой о среднем существует такое значение $\theta\in(0,1)$, что

$$\int_t^{t+\Delta t} f(x)dx=f(t+\theta\cdot\Delta t)\cdot\Delta t.$$

Следовательно,

$$\frac{I(t+\Delta t)-I(t)}{\Delta t}=f(t+\theta\cdot\Delta t).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta t\to 0$ и пользуясь непрерывностью функции $f(x)$ в точке $t\in[a,b]$, получим

$$I'(t)=f(t).$$

Последнее означает, что функция $I(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Следовательно, если $\Phi(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$, то

$$\Phi(x)=I(x)+C$$

по свойству двух первообразных одной и той же функции. Следовательно,

$$\Phi(a)=C\text{, так как } I(a)=0,$$

и

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)\,dx+C.$$

Значит,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Последняя формула, называемая формулой Ньютона-Лейбница, как раз обеспечивает связь между интегралом Римана (его еще называют **определенным интегралом**) и первообразными. Формулу Ньютона-Лейбница еще записывают в виде

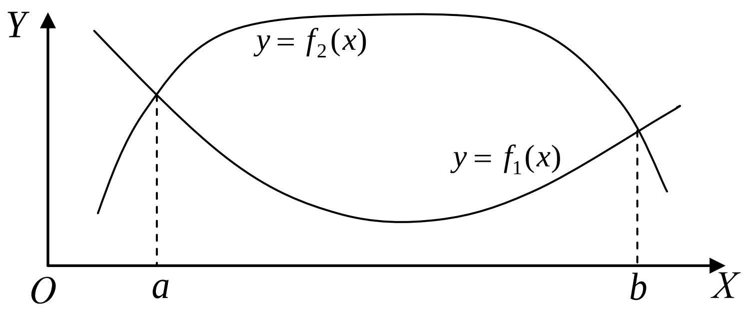
$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(x)\Big|_a^b,$$

где вертикальная черта и индексы обозначают разность значений функций, соответственно, при верхнем и нижнем значениях переменной.

Приложения интеграла Римана

Интеграл Римана по отрезку был нами введен как площадь криволинейной трапеции. Понятие площади неотделимо от понятия интеграла. С его помощью можно вычислять площади любых плоских областей, а также длины дуг, площади поверхностей и объемы тел.

1. Вычислить **площадь области, расположенной между двумя кривыми** $y = f_1(x)$ **и** $y = f_2(x)$ **и над отрезком** $[a,b]$, причем $f_1(a) = f_2(a), \quad f_1(b) = f_2(b)$.

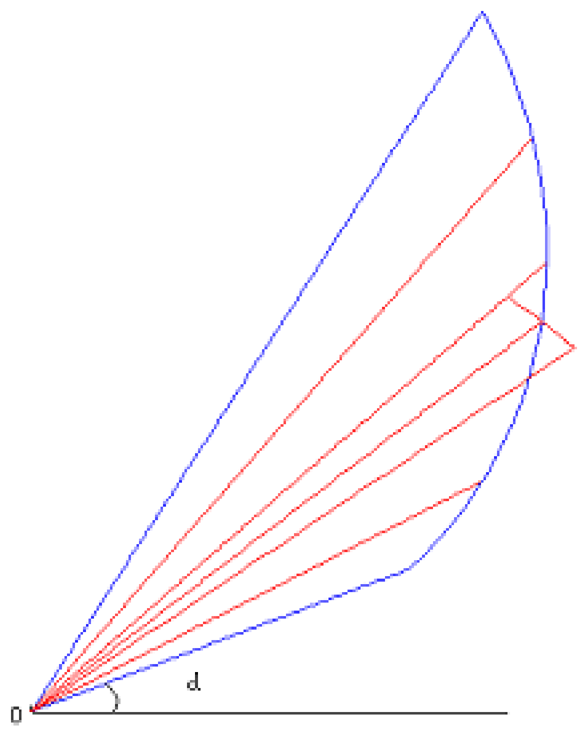


Очевидно, что площадь области между кривыми равна разности площадей соответствующих криволинейных трапеций, поэтому

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

2. Вычислить **площадь криволинейного сектора, ограниченного лучами (в полярных координатах)** $\varphi = \alpha$ **и** $\varphi = \beta$**, а также заданной в полярных координатах кривой** $r = f(\varphi), \quad \alpha < \varphi < \beta$**.**

Проведем внутри криволинейного сектора лучи $\varphi = \varphi_k$, $k = 1, \ldots, n-1$, разбивающие исходный сектор на мелкие криволинейные секторы $\varphi_k < \varphi < \varphi_{k+1}$, причем $\varphi_0 = \alpha, \quad \varphi_n = \beta$.



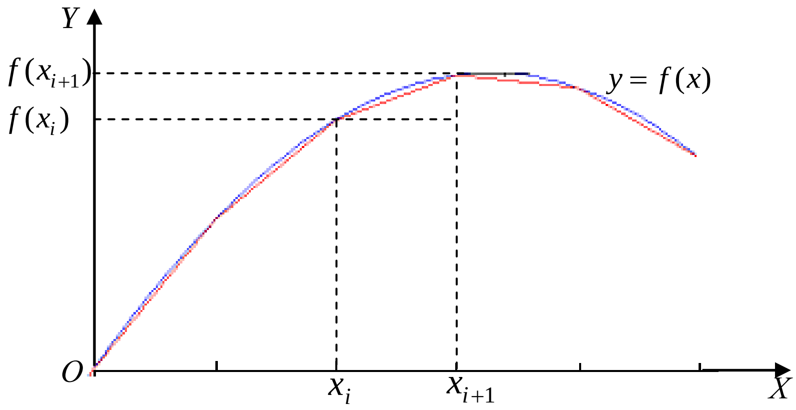
Заменим каждый мелкий криволинейный сектор круговым сектором с тем же углом при вершине и радиусом, равным значению $r(\tilde{\varphi}_k)$, где $\tilde{\varphi}_k \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}]$. Тогда площадь кругового мелкого сектора равна $r^2(\tilde{\varphi}_k)(\varphi_{k+1} - \varphi_k)/2$. При этом, чем меньше разность $\varphi_{k+1} - \varphi_k$, тем меньше площадь кругового мелкого сектора отличается от площади соответствующего криволинейного мелкого сектора.

При достаточно частом разбиении исходного криволинейного сектора площадь его достаточно близка к величине

$$\sum_{k=0}^{n} r^2(\tilde{\varphi}_k)(\varphi_{k+1} - \varphi_k)/2 = \sum_{k=1}^{n+1} r^2(\tilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k/2.$$

Если теперь устремить к нулю наименьший из растворов малых криволинейных секторов, мы получим предел интегральных сумм – интеграл $\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$, который совпадает с площадью исходного криволинейного сектора.

3. Вычислить **длину дуги кривой** $y = f(x)$, $x \in [a,b]$**.** Длиной дуги кривой мы будем называть предельную сумму длин вписанных в дугу хорд при стремлении этих хорд к точкам.



Разобьем отрезок $[a,b]$ на n отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,...,n$, где $x_0 = a$, $x_n = b$. Длина хорды, расположенной над отрезком $[x_i, x_{i+1}]$, равна $\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$. Воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа и получим длину этой же хорды в виде

$$\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + [f'(\xi_{i+1})(x_{i+1} - x_i)]^2} = \sqrt{1 + f'(\xi_{i+1})^2}\Delta x_i, \text{ где } \xi_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Таким образом, длина дуги всей кривой может быть приближена суммой $\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1 + f'(\xi_{i+1})^2}\Delta x_i$, причем, чем мельче разбиение отрезка $[a,b]$, тем точнее результат. При стремлении длины наименьшего из отрезков разбиения к нулю мы получим из суммы интеграл: $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx$, который и дает выражение длины дуги данной кривой.

4. Вычислить **длину дуги пространственной кривой**, заданной параметрически в виде

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [t_0, T],$$

для вычисления ее длины применяют формулу

$$S = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt\,.$$

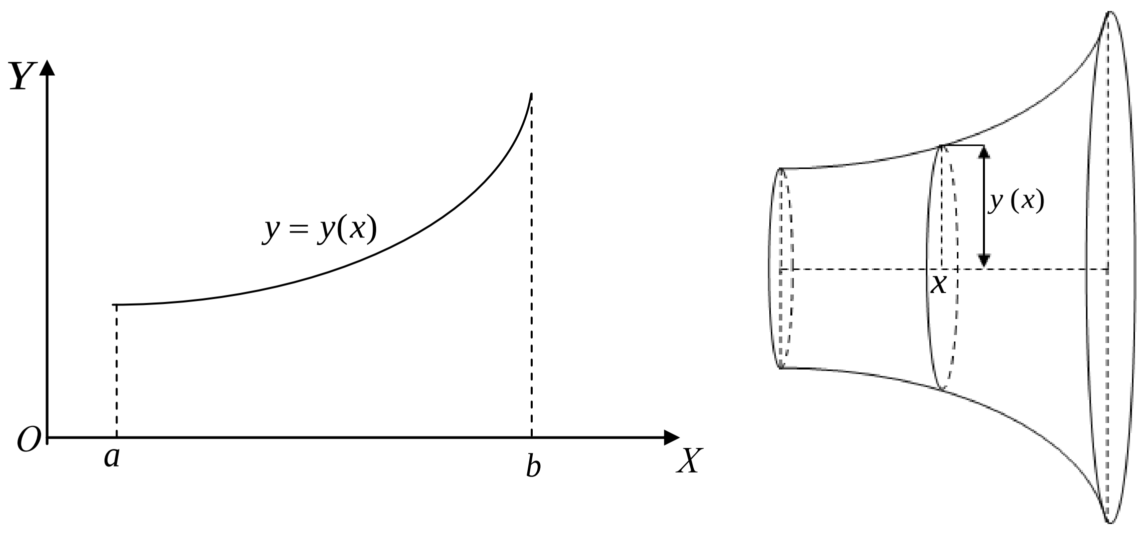
При вычислении интегралов Римана можно использовать пакет программ MAXIMA. Для получения $\int_a^b f(x)dx$ необходимо ввести команду

integrate (f(x), x, a, b)

и нажать Shift+Enter.

5. Вычислить **объем тела вращения**.

Если тело образовано вращением некоторой линии $y = y(x)$, заданной на отрезке $[a\,,b]$, относительно оси OX, то оно называется телом вращения, и его объем может быть определен с помощью формулы $V = \pi\int_a^b y^2(x)dx$. Докажем это.



Разобьем исследуемое тело на части плоскостями $x_0 = a$, x_1, $x_2 \ldots x_i \ldots\ldots x_n = b$, получив при этом n элементарных тел.

Любое сечение тела вращения плоскостями, перпендикулярными оси OX, представляет собой круг радиуса $y(x)$, площадь которого равна

$$S(x) = \pi y^2.$$

Выберем внутри каждой области $(x_i\ , x_{i+1})$ точку ξ_i и подсчитаем в ней $S(\xi_i)$, тогда выражение

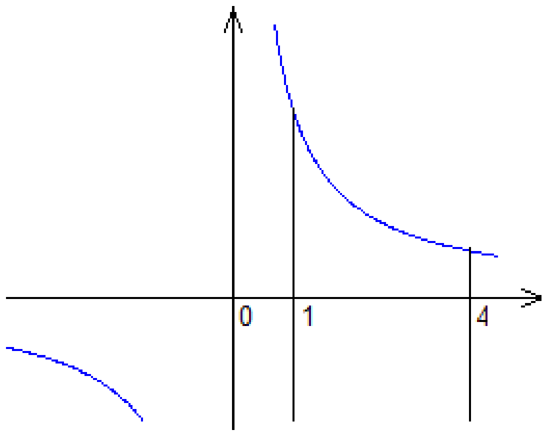
$$S(\xi_i)\Delta x_i = \pi\ y^2(\xi_i)\Delta x_i\,, \qquad \text{где } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

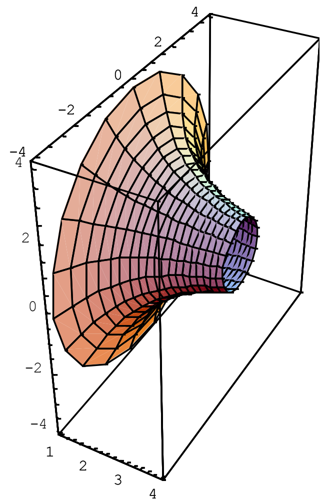
представляет объем элементарного цилиндра, приблизительно равный объему заданного элементарного тела. Очевидно,

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \pi\sum_{i=1}^{n} y^2(\xi_i)\Delta x_i$$

это сумма объемов элементарных цилиндров приближенно равна объему изучаемого тела. Если увеличивать число разбиений n, следя за тем, чтобы все Δx_i уменьшались, стремясь к нулю, то эта погрешность уменьшается, следовательно, $V = \lim\limits_{n\to\infty} \pi\sum\limits_{i=1}^{n} y^2(\xi_i)\Delta x_i$. Нетрудно заметить, что в правой части формулы стоит предел интегральной суммы Римана, который равен определенному интегралу, т.е. $V = \pi\int\limits_a^b y^2 dx$.

Пример. Вычислить объем тела, полученного вращением гиперболы $xy = 4$ вокруг оси OX и расположенного между плоскостями $x = 1$ и $x = 4$.





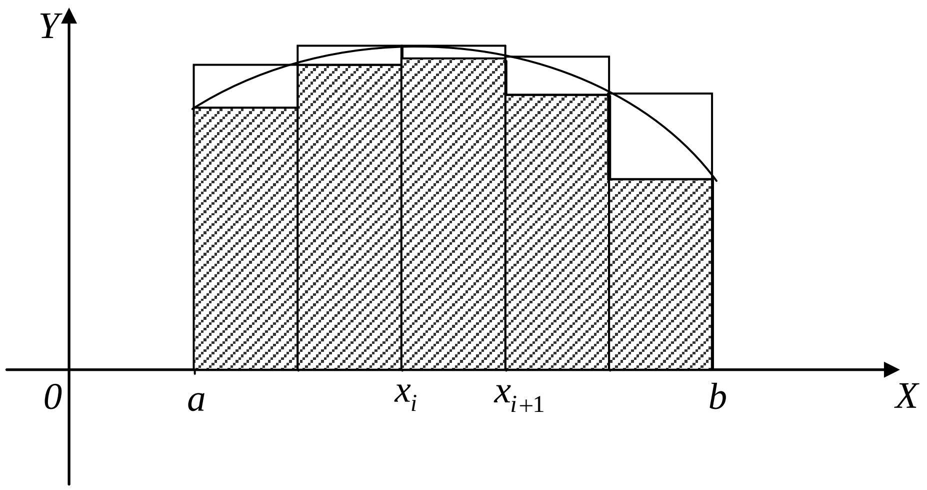
$$V = \pi\int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\pi\int_1^4 \frac{dx}{x^2} = -16\pi\frac{1}{x}\bigg|_1^4 = -16\pi\left(\frac{1}{4} - 1\right) = 12\pi\,.$$

Приближенное вычисление интеграла Римана

К сожалению, не для любой непрерывной функции можно найти первообразную в виде суперпозиции элементарных функций. Поэтому можно столкнуться с определенным интегралом, для которого применение формулы Ньютона-Лейбница невозможно. Например, $\int_1^4 \frac{\sin x}{x} dx$.

Для таких интегралов приходится применять приближенное интегрирование. Формул приближенного интегрирования довольно много, но все они основаны на ассоциации интеграла с площадью криволинейной трапеции, построенной на основании, совпадающем с отрезком интегрирования. Этот отрезок разбивается на n равных частей (для удобства машинного счета) и соответствующие узкие криволинейные трапеции заменяются близкими фигурами, площадь которых легко вычисляется. С ростом n площади узких криволинейных трапеций и простейших фигур практически не отличаются друг от друга, поэтому погрешность вычислений можно сделать сколь угодной малой. Мы рассмотрим две простейшие формулы – случаи, когда криволинейные трапеции заменяются прямоугольниками и трапециями.

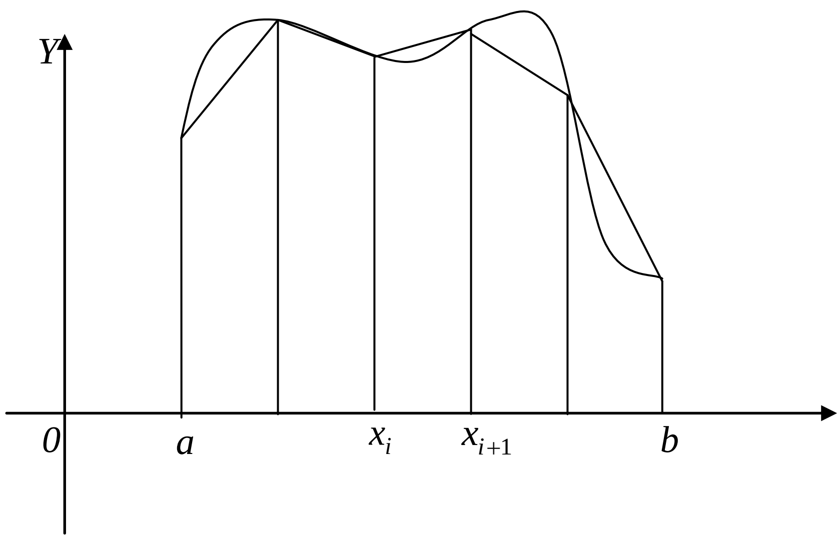
1. Формула прямоугольников. Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ отрезок $[a,b]$ разбивается на n равных частей узлами $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$.



Криволинейная трапеция с основанием $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется прямоугольником с высотой – либо $f(x_i)$, либо $f(x_{i+1})$. Суммируя площади этих прямоугольников с одинаковыми основаниями длины

$\frac{b-a}{n}$, получим либо $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$, либо $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

2. Формула трапеций. Отрезок $[a,b]$ снова разбивается на n равных частей узлами $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Криволинейная трапеция с основанием $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется обычной трапецией, причем участок кривой $y = f(x)$ над отрезком $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется хордой, соединяющей соответствующие точки.



Высота такой трапеции равна $\frac{b-a}{n}$, средняя линия равна $\frac{1}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$. Поэтому, суммируя площади соответствующих трапеций, получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right).$$

Сосчитаем приведенный выше интеграл $\int_1^4 \frac{\sin x}{x}dx$ двумя способами по формулам прямоугольников с помощью пакета программ MAXIMA. Выберем шаг, равный 3/200.

```
(%i1) 3/200*sum(sin(1+i*3/200)/(1+i*3/200),i,1,200),numer;
(%o1) 0.80439350136729
(%i2) 3/200*sum(sin(1+i*3/200)/(1+i*3/200),i,0,199),numer;
(%o2) 0.81985357549681
```

В пакете программ WXMAXIMA существует встроенная функция, которая вычисляет интегралы приближенно:

```
(%i3) first(quad_qag(sin(x)/x,x,1,4,2));
(%o3) 0.81212006858187
```

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Несобственные интегралы бывают двух типов (классов). Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций.

Интегралы с бесконечными пределами

Таких интегралов три, и вводятся они следующим образом.

I. $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$. Этот интеграл называется интегралом с бесконечным верхним пределом. Его называют сходящимся, если предел существует и имеет конечное значение. В противном случае он – расходящийся.

II. $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^b f(x)dx$. Этот интеграл с бесконечным нижним пределом является сходящийся, если предел существует и конечен, и расходящийся в противном случае.

III. $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^a f(x)dx + \int\limits_a^\infty f(x)dx$. Он сходится, если сходится каждый из интегралов, стоящих в правой части. Если хотя бы один из них расходящийся, расходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ при различных показателях степени p.

Пусть $p=1$, тогда $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\left[\ln b-\ln 1\right]=\infty$. Интеграл расходящийся.

Пусть $p\neq 1$, тогда

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}x^{-p}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^b=\frac{1}{(1-p)}\lim\limits_{b\to\infty}\left[b^{1-p}-1\right]=$$

$$=\frac{1}{(1-p)}\lim\limits_{b\to\infty}\left[\frac{1}{b^{p-1}}-1\right].$$

Если $p>1$, то при $b\to\infty$ дробь $\frac{1}{b^{p-1}}$ стремится к нулю и интеграл равен $\frac{1}{p-1}$. Если $p<1$, то выражение b^{1-p} стремится к ∞, и интеграл – расходящийся. Итак,

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & \text{если } p>1,\\ \text{расходится при } p\leq 1.\end{cases}$$

Примеры.

1) $$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^2+1}=\lim\limits_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg}1\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

2) $$\int\limits_{-\infty}^{2}e^x dx=\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^{2}e^x dx=\lim\limits_{a\to\infty}\left[e^2-e^{-a}\right]=\lim\limits_{a\to\infty}\left[e^2-\frac{1}{e^a}\right]=e^2.$$

3) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}.$$

Вычислим каждый из интегралов

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^{b}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\lim\limits_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg}(b+1)-\operatorname{arctg}1\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\lim_{a\to\infty}\left[\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-a+1)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}.$$

Очевидно, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\pi$.

Интегралы от неотрицательных функций

Первая теорема сравнения. Если $0\le f(x)\le g(x)$ на интервале $x\in(a,\infty)$ и

a) если $\int_a^{\infty}g(x)dx$ сходится, то $\int_a^{\infty}f(x)dx-$ также сходится,

b) а если $\int_a^{\infty}f(x)dx$ расходится, то $\int_a^{\infty}g(x)dx$ также расходится.

Следствие. Если на интервале $x\in(a,\infty)$ функции связаны неравенством $0\le f(x)\le g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{\infty}g(x)dx$ при $b>a$ следует сходимость интеграла $\int_b^{\infty}f(x)dx$, из расходимости интеграла $\int_a^{\infty}f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_b^{\infty}g(x)dx$.

Доказательство. Нетрудно показать с помощью определения несобственного интеграла, что $\int_a^{\infty}f(x)dx=\int_a^{b}f(x)dx+\int_b^{\infty}f(x)dx$, где $\int_a^{b}f(x)dx$ является определенным интегралом, а, следовательно, принимает конечное значение. Таким образом, из сходимости (расходимости) интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ следует сходимость (расходимость) интеграла $\int\limits_b^{\infty} f(x)dx$. То же самое можно сказать и об интегралах $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ и $\int\limits_b^{\infty} g(x)dx$. Очевидно, теорема, доказанная для одинаковых нижних пределов обоих интегралов, обобщается и на случай с разными нижними пределами.

Более того, ограничение $b > a$ можно снять, если условие $0 \le f(x) \le g(x)$ выполняется и на большем интервале $x \in (b, \infty)$.

Вторая теорема сравнения. Если на интервале $x \in (a, \infty)$ функции $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ ограничены и $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, причем $0 < K < \infty$, интегралы $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ ведут себя одинаково, то есть либо оба сходятся, либо оба расходятся. (Теорема дается в несколько упрощенной формулировке).

Эти две теоремы очень удобны для использования, если нет необходимости вычислять значение несобственного интеграла, а достаточно знать только, сходится он, или расходится.

Пример 1. Доказать сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

Поскольку нет необходимости вычислять этот интеграл, воспользуемся первой теоремой сравнения интегралов от положительных функций. Сравним интегралы $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2 + 4x + 5}$ и $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2}$.

Очевидно, на интервале $(1, \infty)$ имеет место неравенство $\dfrac{1}{x^2 + 4x + 5} < \dfrac{1}{x^2}$, а интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ – сходящийся, что следует из выше рассмотренного интеграла $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$. На основании теоремы сравнения 1 интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$ – сходящийся.

Пример 2. Установить, сходится ли интеграл $\int_4^{\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$, если сходится – вычислить. Нетрудно заметить, что в указанных пределах $\frac{1}{x^2-3x+2}\ge 0$, следовательно, можно попробовать сравнить интеграл с интегралом $\int_4^{\infty}\frac{dx}{x^2}$. Однако, оснований для использования первой теоремы сравнения нет, поэтому применим вторую теорему сравнения. Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-3x+2}=1$, следовательно, интеграл $\int_4^{\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$ ведет себя так же, как $\int_4^{\infty}\frac{dx}{x^2}$, то есть сходится. Вычислим интеграл

$$\int_4^{\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}=\int_4^{\infty}\frac{dx}{(x-2)(x-1)}=\lim_{b\to\infty}\int_4^{b}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right]dx=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\Big[\ln|x-2|-\ln(x-1)\Big]_4^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right]_4^b=\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left|\frac{b-2}{b-1}\right|-\ln\frac{2}{3}\right]=\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left|\frac{1-\frac{2}{b}}{1-\frac{1}{b}}\right|+\ln\frac{3}{2}\right]=\ln\frac{3}{2}.$$

При вычислении несобственных интегралов можно использовать пакет программ MAXIMA. Для получения $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ необходимо ввести команду **integrate(f(x),x,a,inf)** и нажать Shift+Enter. Для получения $\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx$ необходимо ввести команду **integrate(f(x),x,minf,b)** и нажать Shift+Enter.

Интегралы от неограниченных функций

Несобственные интегралы от неограниченных функций являются другим обобщением определенного интеграла. В этом случае отрезок интегрирования остается конечным, а подынтегральная функция может на этом иметь особую точку, то есть принимать сколь угодно большие значения при подходе к этой точке.

Интегралов от неограниченных функций также три.

I. $\int\limits_a^b f(x)dx$, причем $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\pm\infty$, то есть подынтегральная функция имеет особенность на верхнем пределе. Этот интеграл вводится следующим образом $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. В интеграле под знаком предела «вырезана» особая точка, другими словами, отрезок интегрирования сужен так, чтобы особая точка не входила в него, интеграл в этом случае становится определенным, и вычисление несобственного интеграла сводится к вычислению определенного интеграла, а затем предела от полученного результата. Если предел конечен, то интеграл называется сходящимся, его значение равно вычисленному пределу. Если предел не существует или бесконечен, интеграл расходящийся.

II. $\int\limits_a^b f(x)dx$, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$. Этот интеграл с особенностью на нижнем пределе. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$. Интеграл сходящийся и равен значению предела, если этот предел конечен, и расходящийся, если предел не существует или равен $\pm\infty$.

III. $\int\limits_a^b f(x)dx$, причем $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$ $(a<c<b)$, то есть особая точка находится внутри отрезка интегрирования. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$, и интеграл считается сходящимся, если сходится каждый из интегралов в правой части равенства по отдельности. В противном случае он – расходящийся.

Пример 1.

$$\int_0^2 \frac{2xdx}{x^2-4} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{2xdx}{x^2-4} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{d\left(x^2-4\right)}{x^2-4} = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\ln\left|x^2-4\right|\Big]_0^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\ln\left|(2-\varepsilon)^2-4\right| - \ln 4\Big] = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\ln\left|4-4\varepsilon+\varepsilon^2-4\right| - \ln 4\Big] = -\infty .$$

Пример 2.

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln x dx = \left\{\begin{matrix} u=\ln x\,, & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx\,, & v=x \end{matrix}\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[x\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\big[\ln 1 - \varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon\big] = \infty .$$

Пример 3. $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_{0}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} .$

Вычислим интегралы

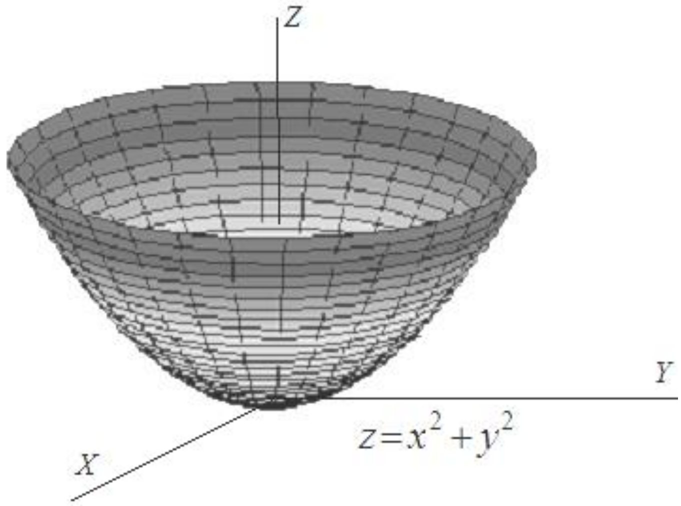
$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon} x^{-1/3}dx = \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{2/3} - (-1)^{2/3}\right] = -\frac{3}{2},$$

$$\int_{0}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{8} x^{-1/3}dx = \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[8^{2/3} - \varepsilon^{2/3}\right] = 6,$$

оба они сходятся, тогда $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}.$

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

С функциями двух переменных мы встречались в разделе «Аналитическая геометрия в пространстве», когда, например, знакомились с эллиптическим параболоидом, имеющим уравнение $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, или с гиперболическим параболоидом, имеющим уравнение $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$. Правые части приведенных выражений являются функциями переменных x и y. Если график функции одной переменной представляет собой плоскую кривую, характеризующую зависимость функции от переменной, то в случае двух переменных такую характеристику зависимости функции (z) от переменных (x и y) выражает поверхность.



Для графического изображения зависимости функции трех и более переменных понадобилось бы пространство размерности, большей, чем 3. Поэтому такие графические изображения невозможны.

Функции двух переменных

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x; y)$.

Определение. Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x; y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in \mathbf{R}$, называется **функцией двух переменных**, определенной на множестве D со значениями в $\mathbf{R}$, и записывается в виде $z = f(x; y)$ или $f : D \mapsto \mathbf{R}$. При этом x и y называются *независимыми переменными* (*аргументами*), а z – *зависимой переменной* (*функцией*).

Множество $D = D(f)$ называется *областью определения* функции. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется *областью изменения* этой функции, обозначается $E(f)$ или E.

Функцию $z = f(x; y)$, где $(x; y) \in D$ можно рассматривать как функцию точки $M(x; y)$ координатной плоскости *OXY*. В частности, областью определения может быть вся плоскость или ее часть, ограниченная некоторыми линиями.

Определение. Линию, ограничивающую область, называют **границей области**. Точки области, не лежащие на границе, называются **внутренними**.

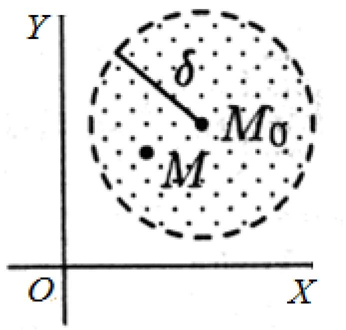
Определение. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется **открытой**. Область с присоединенной к ней границей называется **замкнутой**, обозначается $\bar{D}$. Примером замкнутой области является круг с окружностью.

Значение функции $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ обозначают $z_0 = f(x_0;y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$.

Функция двух переменных, как и функция одной переменной, может быть задана разными способами: таблицей, аналитически, графиком.

Предел функции

Определение. Множество всех точек $M(x;y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$, называется $\delta-$ **окрестностью точки** $M_0(x_0;y_0)$. Другими словами, $\delta-$ окрестность точки M_0 – это все внутренние точки круга с центром M_0 и радиусом δ.



Определение. Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки. Число A называется **пределом функции** $z = f(x;y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x;y) \to M_0(x_0;y_0)$), если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такой, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ выполняется неравенство $|f(x;y)-A|<\varepsilon$. Записывают:

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) \text{ или } A=\lim_{M\to M_0} f(M).$$

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому M стремится к M_0 (число таких направлений бесконечно; для функции одной переменной $x\to x_0$ по двум направлениям: справа и слева!).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение.

Переходя к полярным координатам в окрестности точки $(1,0)$, запишем

$$x=1+r\cdot\cos\varphi,\ y=r\cdot\sin\varphi.$$

Очевидно, что точка с координатами (x,y) стремится к точке с координатами $(1,0)$ тогда и только тогда, когда $r\to 0$. Следовательно, искомый предел равен

$$\lim_{r\to 0}\frac{\ln(1+r\cdot\cos\varphi+e^{r\cdot\sin\varphi})}{\sqrt{1+r^2+2\cdot r\cdot\cos\varphi}}.$$

Последний предел – это предел функции одной переменной r, непрерывной по r при $r=0$ для любого значения φ. Поэтому мы получаем ответ:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\ln 2.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}}\dfrac{2\cdot x\cdot y\cdot z}{x^3+2\cdot y^3-z^3}$.

Решение.

Переходя к сферическим координатам в окрестности точки $(0,0,0)$, положим

$$x=r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\psi,\ y=r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\psi,\ \ z=r\cdot\cos\psi.$$

Точка с координатами (x,y,z) стремится к точке $(0,0,0)$ тогда и только тогда, когда $r\to 0$. Следовательно, искомый предел после перехода к сферическим координатам и сокращения числителя и знаменателя на величину r^3 равен

$$\lim_{r\to 0}\frac{2\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\psi\cdot\cos\psi}{(\cos^3\varphi+2\cdot\sin^3\varphi)\cdot\sin^3\psi-\cos^3\psi}.$$

Очевидно, что данный предел не существует, так как полученное после сокращения выражение не зависит от переменной r, а зависит только от значений φ и ψ. Ответ: предел не существует.

Непрерывность функции двух переменных

Определение. Функция $z=f(x;y)$ (или $f(M)$) называется **непрерывной в точке** $M_0(x_0;y_0)$, если точка $M_0(x_0;y_0)$ входит в область определения функции D и предел функции равен значению функции z в точке M_0, т.е.

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$$

или

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=f(x_0;y_0)\cdot$$

Определение. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется **непрерывной в этой области**. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются **точками разрыва** этой функции. Точки разрыва $z=f(x;y)$ могут образовывать целые **линии разрыва**.

Например, функция $z=\dfrac{1}{2x-y}$ имеет линию разрыва $y=2x$.

Можно дать другое, равносильное приведенному выше, определение непрерывности функции $z=f(x;y)$ в точке. Обозначим $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, $\Delta z=f(x;y)-f(x_0;y_0)$. Величины Δx и Δy называются **приращениями аргументов** x и y, а Δz – **полным приращением функции** $f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$.

Определение. Функция $z=f(x;y)$ называется **непрерывной в точке** $M_0(x_0;y_0)\in D$, если выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$.

Производные и дифференциалы функции нескольких переменных

Остановимся теперь на дифференцировании функции двух переменных. По аналогии с производной функции одной переменной рассмотрим приращение функции двух переменных $z = f(x;y)$. Однако, здесь возникают вопросы. Очевидно, функция получает приращение, когда любой из ее аргументов x или y получает приращение, приращения функции при этом разные. Могут получать приращения сразу оба аргумента функции. Поэтому вводят понятия полного и частных приращений функции. Полное приращение функция имеет место, когда получают приращения оба аргумента функции

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y),$$

а частные приращения функции соответствуют приращению одного из аргументов:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x;y),$$
$$\Delta_y z = f(x; y+\Delta y) - f(x;y).$$

Определение. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x; y) - f(x;y)}{\Delta x},$$

то он называется **частной производной** функции $z = f(x;y)$ в точке $M(x;y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ f'_x,\ \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по x в точке $M_0(x_0;y_0)$ обычно обозначают символами $f'_x(x_0;y_0)$, $f'_x\big|_{M_0}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x;y)$ по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $z = f(x;y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной).

Пример. Найти частные производные функции $z = \ln\left(\dfrac{x^2+3y}{x+y^3}\right)$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\dfrac{x^2+3y}{x+y^3}} \cdot \frac{2x\left(x+y^3\right)-\left(x^2+3y\right)}{\left(x+y^3\right)^2} = \frac{x^2+2xy^3-3y}{\left(x^2+3y\right)\left(x+y^3\right)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\dfrac{x^2+3y}{x+y^3}} \cdot \frac{3\left(x+y^3\right)-3y^2\left(x^2+3y\right)}{\left(x+y^3\right)^2} = \frac{3x-6y^3-3x^2y^2}{\left(x^2+3y\right)\left(x+y^3\right)}.$$

Проверим результат с помощью MAXIMA:

(%i1) `diff(log((x^2+3*y)/(x+y^3)),x,1);`

(%o1) $$\frac{(y^3+x)\left(\dfrac{2\,x}{y^3+x}-\dfrac{3\,y+x^2}{(y^3+x)^2}\right)}{3\,y+x^2}$$

(%i2) `factor(%);`

(%o2) $$\frac{2\,x\,y^3-3\,y+x^2}{(3\,y+x^2)(y^3+x)}$$

(%i3) `diff(log((x^2+3*y)/(x+y^3)),y,1);`

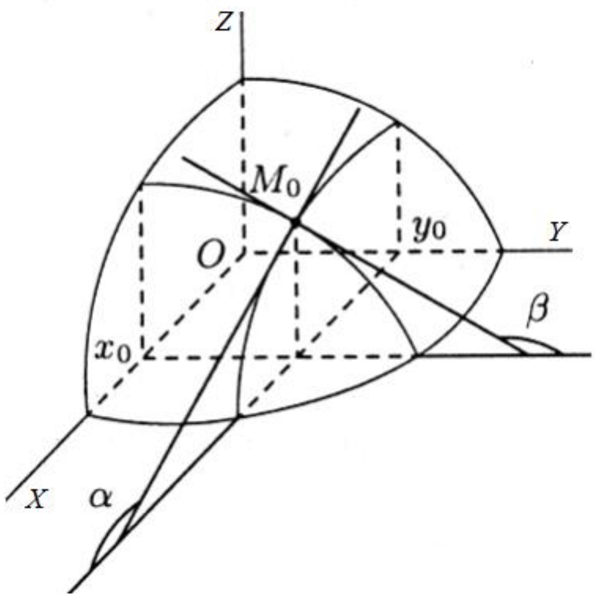
(%o3) $$\frac{(y^3+x)\left(\dfrac{3}{y^3+x}-\dfrac{3\,y^2\,(3\,y+x^2)}{(y^3+x)^2}\right)}{3\,y+x^2}$$

(%i4) `factor(%);`

(%o4) $$-\frac{3\,(2\,y^3+x^2\,y^2-x)}{(3\,y+x^2)(y^3+x)}$$

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Графиком функции $z = f(x;y)$ является некоторая поверхность. График функции $z = f(x;y_0)$ есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y = y_0$. Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной, заключаем, что $f'_x(x_0; y_0) = \mathrm{tg}\alpha$, где α – угол между осью OX и касательной, проведенной к кривой $z = f(x; y_0)$ в точке $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$. Аналогично, $f'_y(x_0; y_0) = \mathrm{tg}\,\beta$.



Замечание: Как уже говорилось выше, при вычислении частной производной функция ведет себя как функция одной переменной, следовательно, физический смысл частной производной – скорость движения тела (изменения функции) в направлении переменной.

Дифференцируемость функции

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y)$. Составим полное приращение функции в точке M:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Определение. Функция $z = f(x; y)$ называется **дифференцируемой** в точке $M(x; y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha,$$

где α настолько мала, что

$$\lim_{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0} \frac{\alpha}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Сумма первых двух слагаемых $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ представляет собой **главную часть приращения функции**.

Определение. Главная часть приращения функции $z = f(x; y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется **полным дифференциалом** этой функции и обозначается символом dz:

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y.$$

Выражения $A \cdot \Delta x$ и $B \cdot \Delta y$ называют **частными дифференциалами**. Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$. Поэтому последнее равенство можно переписать в виде

$$dz = A \cdot dx + B \cdot dy.$$

Выясним, чему равны *A* и *B*. Предположим, что функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Рассмотрим сначала частное приращение функции соответствующее приращению только переменной *x*:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x;y).$$

Тогда из определения дифференцируемости функции

$$\Delta z = \Delta_x z = A \cdot \Delta x + B \cdot 0 + \alpha,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha}{\Delta x} = 0$. Последние соотношения являются условием дифференцируемости функции $g(x) = f(x, y_0)$ одной переменной x в точке x_0. При этом

$$A = \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

Аналогично, задав приращение переменной *y*, получается:

$$B = \left.\frac{dh(y)}{dy}\right|_{y=y_0} = \left.\frac{df(x_0, y)}{dy}\right|_{y=y_0} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема (необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, причем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = A$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = B$.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке $M(x;y)$, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Частные производные высших порядков

Частные производные $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ называют **частными производными первого порядка**. Их можно рассматривать как функции от $(x;y)\in D$. Эти функции также могут иметь частные производные, которые называются **частными производными второго порядка**. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{x^2}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{xy}=f''_{xy}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{yx}=f''_{yx}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{y^2}(x;y).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т.д. порядков. Так, $z'''_{xxy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y\partial x^2}$ (или $(z'''_{xyx})'_x=z^{(4)}_{xyx^2}$) и т.д.

Частная производная второго и более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется **смешанной частной производной**. Таковыми являются, например, z''_{xy}, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, z'''_{xyx}.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции

$$u=e^x(\cos y+x\sin y).$$

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x(\cos y+x\sin y+\sin y)=e^x[\cos y+(x+1)\sin y],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^x(-\sin y+x\cos y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\{e^x[\cos y+(x+1)\sin y]\}=e^x[\cos y+(x+2)\sin y],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[e^x(-\sin y+x\cos y)\right]=-e^x(\cos y+x\sin y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[e^x(-\sin y+x\cos y)\right]=e^x(-\sin y+(x+1)\cos y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\{e^x[\cos y+(x+1)\sin y]\}=e^x[-\sin y+(x+1)\cos y].$$

Оказалось, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$. Этот результат не случаен.

Теорема (Шварц). Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для $z=f(x;y)$ имеем: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Дифференциалы высших порядков

Полный дифференциал функции

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

называют также дифференциалом первого порядка.

Пусть функция $z=f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. **Дифференциал второго порядка** определяется по формуле $d^2z=d(dz)$. Найдем его:

$$d^2z=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x\cdot dx+\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y\cdot dy=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dy\right)\cdot dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)\cdot dy.$$

Отсюда: $d^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\cdot dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$. Символически это записывается так:

$$d^2 z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2\cdot z.$$

Аналогично можно получить формулу для **дифференциала третьего порядка:**

$$d^3 z=d(d^2 z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3\cdot z,$$

где

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3=\frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2\cdot\frac{\partial}{\partial y}dy+$$

$$+3\frac{\partial}{\partial x}dx\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3.$$

Многомерные пространства

Теперь рассмотрим n-мерное пространство R^n, элементами которого являются точки x, каждая из которых задается n координатами $(x^1, x^2, ..., x^n)$. В случае малой размерности пространства, чтобы не вводить верхние индексы, мы будем использовать традиционные координаты: x, y, z, u, v, w.

Определение. **Расстоянием между точками** x и y n-мерного пространства является величина

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x^1-y^1)^2+(x^2-y^2)^2+...+(x^n-y^n)^2}\ .$$

По аналогии с функцией двух переменных введем основные понятия.

Определение. **Функцией** n **переменных** $z=f(x)=f(x^1,x^2,...,x^n)$, заданной на множестве D из пространства R^n, назовем закон, по которому каждой точке $x\in D$ ставится в соответствие вещественное число z.

Определение. Число z_0 называется **предел функции многих переменных** *f(x)*, т.е. $z_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $x \in D$, таких что $\rho(x, x_0) < \delta$, выполняется неравенство $| f(x) - z_0 | < \varepsilon$.

Определение. Функция многих переменных $z = f(x), x \in D$, называется **непрерывной в точке** $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$, если точка x_0 входит в область определения функции D и $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Из определения предела функции многих переменных следует, что в случае, когда функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $x \in D$, таких что $\rho(x, x_0) < \delta$, выполняется неравенство $| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$. Таким образом, **малым приращениям аргумента** (в смысле расстояния в пространстве R^n) у функции, непрерывной в точке, соответствуют **малые приращения функции.**

Как и в случае функций одной переменной, арифметические действия над непрерывными функциями не выводят из класса непрерывных функций, если нет деления на 0.

Дифференцируемость функции многих переменных

Требование дифференцируемости функции многих переменных в точке является более сильным, чем требование непрерывности функции в точке, так как не только обеспечивается малость приращения функции при малом приращении аргумента. Условие дифференцируемости состоит в том, что **приращение функции, соответствующее бесконечно малому приращению аргумента, является результатом линейного преобразования этого бесконечно малого приращения аргумента**.

Известно, что приращение аргумента функции многих переменных является n-мерным вектором, а линейное отображение n-мерного вектора в пространство размерности 1 задается матрицей-строкой размера $1 \times n$. Поэтому условие дифференцируемости функции многих переменных $z = f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n)$ в точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$ формулируется следующим образом: **существует матрица-строка** $(a_1, a_2, ..., a_n)$ **такая, что для любого вектора приращений аргумента** $\Delta x = (\Delta x^1, \Delta x^2, ..., \Delta x^n)$ **имеет место представление**

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a_1\cdot\Delta x^1+a_2\cdot\Delta x^2+\ldots+a_n\cdot\Delta x^n+\alpha,$$

где величина α настолько мала, что $\lim\limits_{\rho(x_0+\Delta x,x_0)\to 0}\dfrac{\alpha}{\rho(x_0+\Delta x,x_0)}=0$.

При этом матрица-строка $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ называется производной матрицей, а величина α называется бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с расстоянием $\rho(x_0+\Delta x,x_0)$.

Предположим, что функция $z=f(x)=f(x^1,x^2,\ldots.,x^n)$ дифференцируема в точке $x_0=(x_0^1,x_0^2,\ldots,x_0^n)$. Выберем вектор приращений так, что приращения происходят только по k-му аргументу x^k. Вектор приращений аргумента в этом случае имеет вид

$$\Delta x=(0,0,\ldots,0,\Delta x^k,0,\ldots,0),$$

следовательно,

$$\rho(x_0+\Delta x,x_0)=|\Delta x^k|.$$

Приращение функции примет вид

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_0^1,\ldots,x_0^k+\Delta x^k,\ldots,x_0^n)-f(x_0^1,\ldots,x_0^n)=a_k\cdot\Delta x^k+\alpha,$$

где $\lim\limits_{\Delta x^k\to 0}\dfrac{\alpha}{\Delta x^k}=0$. Последние соотношения являются условием дифференцируемости функции $g(x^k)=f(x_0^1,\ldots x_0^{k-1},x^k,x_0^{k+1},\ldots,x_0^n)$ одной переменной x^k в точке x_0^k. При этом

$$a_k=\frac{dg(x^k)}{dx^k}\Big|_{x^k=x_0^k}=\frac{df(x_0^1,\ldots x_0^{k-1},x^k,x_0^{k+1},\ldots,x_0^n)}{dx^k}\Big|_{x^k=x_0^k}.$$

Таким образом, k-й элемент производной матрицы-строки является производной по k-й переменной x^k заданной функции в точке x_0^k при фиксированных остальных переменных $x^j=x_0^j,\ j\neq k$. Такая производная называется **частной производной функции многих переменных** $f(x^1,x^2,\ldots.,x^n)$ по переменной x^k в точке $x_0=(x_0^1,x_0^2,\ldots,x_0^n)$ и обозначается

$$\frac{\partial f(x^1,\ldots.,x^n)}{\partial x^k}\Big|_{x=x_0}=f'_{x^k}(x_0).$$

Итак, производная матрица-строка, участвующая в определении условия дифференцируемости функции многих переменных в точке $x_0=(x_0^1,x_0^2,\ldots,x_0^n)$, состоит из частных производных по соответствующим переменным в точке x_0:

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n)=(f'_{x^1}(x_0),f'_{x^2}(x_0),\ldots,f'_{x^n}(x_0)).$$

Главная часть приращения функции многих переменных в точке x_0, принимающая теперь вид

$$\sum_{k=1}^{n}f'_{x^k}(x_0)\cdot\Delta x^k=\sum_{k=1}^{n}f'_{x^k}(x_0)\cdot dx^k,$$

называется **дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. Таким образом, связь приращения функции в точке и дифференциала в той же точке имеет вид

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=df(x_0)+\alpha,$$

где α – бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с расстоянием $\rho(x_0+\Delta x, x_0)$.

Любая частная производная f'_{x^k} функции n переменных $f(x)=f(x^1,...,x^n)$ сама также является функцией n переменных. Частная производная от частной производной функции многих переменных называется **частной производной второго порядка** функции $f(x)$. При этом, если переменные, по которым берутся производные сначала от функции $f(x)$, а затем от функции f'_{x^k}, не совпадают, такая частная производная называется смешанной. Обозначения частной производной второго порядка: $f''_{x^k x^l}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^k}$. В том случае, когда $f''_{x^k x^l}$ и $f''_{x^l x^k}$ – непрерывные функции в окрестности некоторой точки, $f''_{x^k x^l}=f''_{x^l x^k}$ в этой точке.

Аналогично вводятся частные производные любого порядка.

Дифференцируемость вектор-функции многих переменных

Определение. Вектор-функцией

$$z=f(x)=(f_1(x^1,x^2,...,x^n), f_2(x^1,x^2,...,x^n),..., f_m(x^1,x^2,...,x^n)),$$

размерности m, заданной на множестве D из пространства R^n, назовем закон, по которому каждой точке $x\in D$ ставится в соответствие точка z из m-мерного пространства ($z\in \mathrm{R}^m$). Каждая из функций, являющихся координатами вектор-функции, называется координатной функцией. Примером вектор-функции размерности 2 двух переменных служит $z=(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$, где $x=r\cdot\cos\varphi,\ y=r\cdot\sin\varphi$. Нетрудно видеть, что данная вектор-функция задает соответствие между полярными и декартовыми координатами.

Приращением m-мерной вектор-функции в точке x_0 является m-мерный вектор

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0),..., f_m(x_0+\Delta x)-f_m(x_0)).$$

Признаком дифференцируемости вектор-функции в точке $x_0=(x_0^1,x_0^2,...,x_0^n)$ является то, что **приращение функции, соответствующее бесконечно малому приращению аргумента является результатом линейного преобразования этого бесконечно**

малого приращения. Линейное отображение пространства R^n в пространство R^m задается матрицей размера $m\times n$. Поэтому условием дифференцируемости m-мерной вектор-функции n переменных является существование такой матрицы A размером $m\times n$, что для любого n-мерного вектора приращений аргумента Δx справедливо

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha ,$$

где вектор $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\rho(x_0+\Delta x,x_0)\to 0}\frac{\sqrt{\alpha_1^{\ 2}+\alpha_2^{\ 2}+...+\alpha_m^2}}{\rho(x_0+\Delta x,x_0)}=0$$

Матрица A называется производной матрицей и состоит из значений всех частных производных всех координатных функций, входящих в вектор-функцию, в данной точке:

$$A=\begin{pmatrix} f'_{1\,x^1}(x_0) & f'_{1\,x^2}(x_0) & ... & f'_{1\,x^n}(x_0) \\ f'_{2\,x^1}(x_0) & f'_{2\,x^2}(x_0) & ... & f'_{2\,x^n}(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ f'_{m\,x^1}(x_0) & f'_{m\,x^2}(x_0) & ... & f'_{m\,x^n}(x_0) \end{pmatrix}=\left[\,f'_{i\,x^j}(x_0)\right]_{i=1,\,j=1}^{m,\ n}.$$

Производная матрица суперпозиции вектор-функций

Пусть $z=f(x),\ x\in D,$ – m-мерная вектор-функция n переменных. То есть, $x=(x^1,x^2,...,x^n)$. Пусть $x=g(y),\ y\in S,$– n-мерная вектор-функция k переменных. То есть, $y=(y^1,y^2,...,y^k)$. Очевидно, что если подставить $g(y)$ вместо переменной x в выражение $z=f(x)$, мы получим новую функцию, называемую суперпозицией двух вектор-функций: $z=h(y)=(f\circ g)(y),\ y\in S,$ которая является m-мерной вектор-функцией k переменных.

Предположим, что вектор-функция $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0\in S$, и соответствующей производной матрицей является матрица B. Предположим, что вектор-функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0=g(y_0)\in D$, и соответствующей производной матрицей является матрица A. Тогда вектор-функция $h(y)=(f\circ g)(y)$ дифференцируема в точке y_0, и производной **матрицей суперпозиции является матрица** $C=A\cdot B$**.**

Якобиан

Пусть $z = f(x),\ x \in D,$ – n-мерная вектор-функция n переменных, дифференцируемая в точке x_0. В данном случае производная матрица является квадратной, размера $n \times n$. Для такой матрицы может быть вычислен определитель. Этот определитель

$$\begin{vmatrix} f'_{1\,x^1}(x_0) & f'_{1\,x^2}(x_0) & \dots & f'_{1\,x^n}(x_0) \\ f'_{2\,x^1}(x_0) & f'_{2\,x^2}(x_0) & \dots & f'_{2\,x^n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{n\,x^1}(x_0) & f'_{n\,x^2}(x_0) & \dots & f'_{n\,x^n}(x_0) \end{vmatrix}$$

называется якобианом и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{x=x_0} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}\big|_{x=x_0} = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x^1, x^2, \dots, x^n)}\big|_{x=x_0}$.

Примеры.

1. Сосчитаем якобиан перехода от полярных координат к декартовым координатам. Напомним формулы: $x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi$.
Имеем $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi \end{vmatrix} = r$.

2. Сосчитаем якобиан перехода от сферических координат к декартовым координатам.

Напомним формулы:

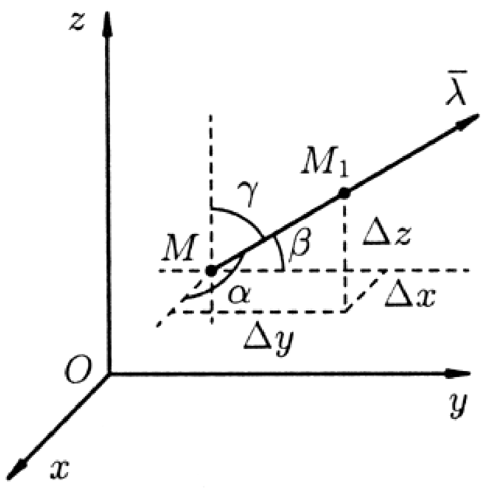
$$x = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\psi,\ y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi,\ z = r \cdot \cos\psi.$$

Имеем

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi \cdot \sin\psi & -r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi & r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi \\ \sin\varphi \cdot \sin\psi & r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\psi & r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi \\ \cos\psi & 0 & -r \cdot \sin\psi \end{vmatrix} = -r^2 \cdot \sin\psi.$$

Приложения частных производных

Производная по направлению



Как уже говорилось выше, частная производная, скажем по *x*, определяет скорость изменения функции в направлении *x*, то есть имеется возможность определять скорость изменения функции в направлении осей координат. Однако, не всегда этой информации достаточно для анализа изучаемого процесса. Наибольшая и наименьшая скорости протекания процесса могут реализовываться в других направлениях. Необходимо научиться определять эти направления и максимальные и минимальные значения скоростей.

Определить величину производной в любом заданном направлении. Пусть задана функция трех переменных $U = U(x\,,\,y\,,\,z)$. Возьмем в пространстве некоторую точку M и найдем скорость изменения функции U при движении точки M в произвольном направлении $\overline{\lambda}$.

Производная функции $U = U(x;y;z)$ **по направлению** $\overline{\lambda}$, заданному вектором $\overline{\lambda} = \lambda_x\,\overline{i} + \lambda_y\,\overline{j} + \lambda_z\,\overline{k}$, вычисляется по формуле

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma\,, \qquad (*)$$

где $\cos\alpha = \dfrac{\lambda_x}{\left|\overline{\lambda}\right|}$, $\cos\beta = \dfrac{\lambda_y}{\left|\overline{\lambda}\right|}$, $\cos\gamma = \dfrac{\lambda_z}{\left|\overline{\lambda}\right|}$,

$$\left|\overline{\lambda}\right| = \sqrt{\lambda_x^{\,2} + \lambda_y^{\,2} + \lambda_z^{\,2}}\,.$$

В случае функции двух переменных $U = U(x\,,\,y\,)$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha\,,\ \cos\gamma = 0$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\sin\alpha\cdot$$

Градиент

Можно заметить, что правая часть равенства (*) представляет собой скалярное произведение единичного вектора $\vec{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ и некоторого вектора $\vec{g} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right)$.

Определение. Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $U = U(x; y; z)$ в точке $M(x; y; z)$, называют градиентом функции и обозначают $\operatorname{grad} U$, т.е.

$$\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right) \text{ или}$$

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

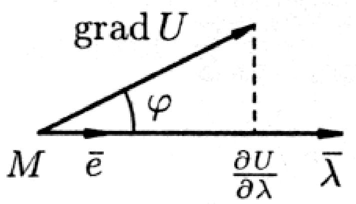
Отметим, что $\operatorname{grad} U$ есть векторная величина. Теперь равенство (*) можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \vec{e} \cdot \operatorname{grad} U,$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \left| \operatorname{grad} U \right| \cdot \cos\varphi, \qquad (**)$$

где φ – угол между вектором $\operatorname{grad} U$ и направлением $\vec{\lambda}$.



Из формулы (**) сразу следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1$, т.е. при $\varphi = 0$. Таким образом, направление градиента совпадает с направлением $\vec{\lambda}$, вдоль которого функция (поле) меняется быстрее всего, т.е. *градиент функции указывает направление наибыстрейшего возрастания функции*. Наибольшая скорость изменения функции U в точке M равна

$$\left|\text{grad}U\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

В этом состоит физический смысл градиента.

Формула Тейлора

Как и в случае функций одной переменной, для функций многих переменных $f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n)$ формула Тейлора дает связь между приращением функции в точке и ее дифференциалами в этой же точке:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + ... + \frac{1}{m!}d^m f(x_0) + \alpha,$$

где $\lim\limits_{\rho(x_0+\Delta x, x_0)\to 0} \dfrac{\alpha}{\rho^m(x_0 + \Delta x, x_0)} = 0$.

В частности, для функции двух переменных имеем:

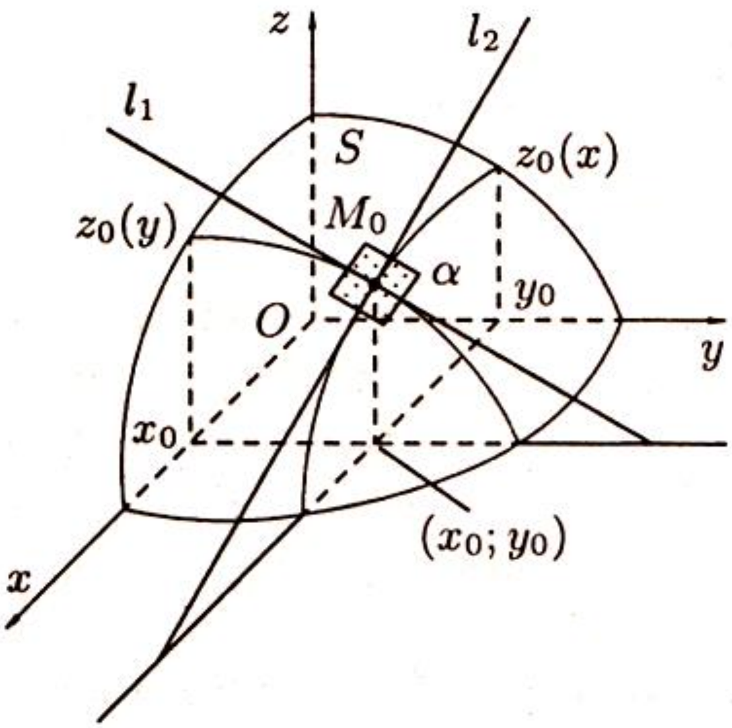
$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cdot dx + f'_y(x_0, y_0)\cdot dy +$$
$$+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0, y_0)\cdot(dx)^2 + 2\cdot f''_{xy}(x_0, y_0)\cdot dx\cdot dy + f''_{yy}(x_0, y_0)\cdot(dy)^2] + ... + \alpha.$$

Здесь $\lim\limits_{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0} \dfrac{\alpha}{\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)^m} = 0$.

Касательная плоскость к поверхности, заданной в явном виде

Рассмотрим поверхность $z = f(x, y)$, заданную над плоской областью D.

Определение. **Касательной плоскостью** к поверхности в точке M_0 с координатами $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ называется плоскость, проходящая через точку M_0 и характеризующейся тем свойством, что в этой плоскости лежат касательные ко всем кривым, лежащим на данной поверхности и проходящим через точку M_0. В частности, в касательной плоскости лежат касательные к кривым, полученным в пересечении поверхности с плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$.



Направляющие векторы этих касательных – векторы $(0,1, f'_y(x_0, y_0))$ и $(1,0, f'_x(x_0, y_0))$. Нормальный вектор $\vec{n}$ к касательной плоскости перпендикулярен каждому из этих направляющих векторов, следовательно, за нормальный вектор можно взять векторное произведение $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \\ 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \end{vmatrix}$. Таким образом, $\vec{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$. Записывая уравнение плоскости с данным нормальным вектором, проходящей через данную точку, получим: **уравнение плоскости, касательной к поверхности** $z = f(x, y)$ **в точке** (x_0, y_0, z_0) **имеет вид**

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Касательная плоскость к поверхности, заданной параметрически

Мы уже знаем, что касательная плоскость к поверхности, заданной явно в виде $z = z(x, y)$, в точке (x_0, y_0, z_0) имеет уравнение

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0)} \cdot (y - y_0).$$

Пусть теперь та же поверхность задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

где u, v – параметры, причем $x_0 = x(u_0,v_0)$, $y_0 = y(u_0,v_0)$ и $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|_{(u_0,v_0)} \neq 0$.

В соответствии с явным и параметрическим заданиями одной и той же поверхности имеем $z(u,v) = z(x(u,v), y(u,v))$. Это значит, что мы имеем суперпозицию функции двух переменных $z(x,y)$ и вектор-функции $(x(u,v), y(u,v))$. Поэтому производная матрица-строка (z'_u, z'_v) равна произведению матрицы-строки (z'_x, z'_y) на квадратную матрицу $\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}$. Сравнивая элементы одинаковых матриц, получим

$$\begin{cases} z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u, \\ z'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v. \end{cases}$$

Последние соотношения можно рассматривать как систему относительно z'_x и z'_y. Система с ненулевым главным определителем имеет единственное решение, которое можно найти с помощью правила Крамера:

$$z'_x(x_0,y_0) = -\frac{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}|_{(u_0,v_0)}, \; z'_y(x_0,y_0) = -\frac{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}|_{(u_0,v_0)}.$$

Подставляя полученные частные производные в уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной в явном виде, получим уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной параметрически:

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}|_{(u_0,v_0)} \cdot (x - x(u_0,v_0)) + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}|_{(u_0,v_0)} \cdot (y - y(u_0,v_0)) +$$
$$+ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|_{(u_0,v_0)} \cdot (z - z(u_0,v_0)) = 0.$$

Локальный экстремум функции двух переменных

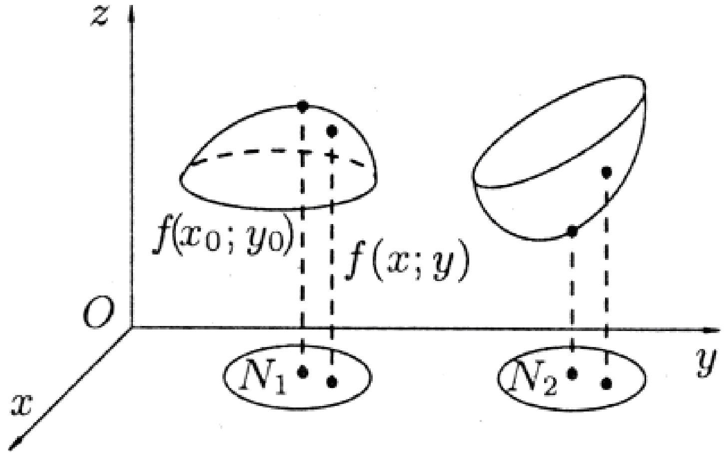
Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой области D, точка $N(x_0;y_0) \in D$.

Определение. Точка $(x_0;y_0)$ называется **точкой локального максимума** функции $z = f(x;y)$, если $\exists$ такая $\delta -$окрестность точки

$(x_0;y_0)$, что для каждой точки $(x;y)$, отличной от $(x_0;y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x;y) < f(x_0;y_0)$.

Аналогично определяется **точка локального минимума** функции: для всех точек $(x;y)$, отличных от $(x_0;y_0)$, из δ –окрестности точки $(x_0;y_0)$ выполняется неравенство: $f(x;y) > f(x_0;y_0)$.

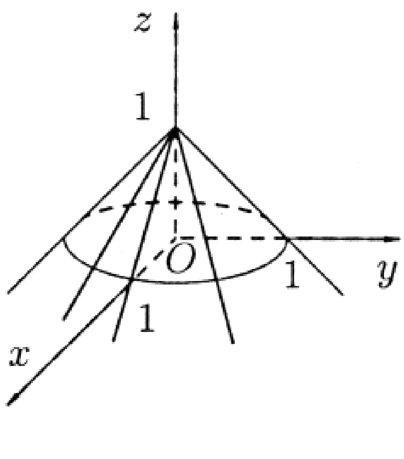
На рисунке: N_1 –точка локального максимума, а N_2 –точка локального минимума функции $z = f(x;y)$.



Значение функции в точке максимума (минимума) называется **максимумом** (**минимумом**) функции. Максимум и минимум функции называют ее **экстремумами**.

Теорема (необходимые условия экстремума). Если в точке $N(x_0;y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x;y)$ имеет локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0;y_0) = 0$, $f'_y(x_0;y_0) = 0$.

Замечание. Функция может иметь локальный экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет максимум в точке $O(0;0)$, но не имеет в этой точке производных.



Определение. Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x;y)$ равны нулю, т.е. $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, называется **стационарной точкой** функции z.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются **критическими точками**.

Выполнение необходимого условия экстремума не обязательно обеспечивает действительное наличие локального экстремума в точке, то есть, критическая точка функции может не быть точкой локального экстремума. В качестве примера рассмотрим функцию $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Критической точкой для этой функции является точка (0,0). Однако эта точка является не экстремальной, она является седловой.

Для того чтобы выяснить, достигается ли в критической точке экстремум и какой, следует обратиться к дифференциалу второго порядка в этой точке. Пусть критическая точка имеет координаты (x_0, y_0). Рассмотрим приращение функции в окрестности этой точки:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot (dx)^2 + 2 \cdot f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot dx \cdot dy + f''_{yy}(x_0, y_0) \cdot (dy)^2] + \alpha.$$

Если при любом сочетании бесконечно малых приращений dx и dy выражение в квадратных скобках не меняет знак, то данная критическая точка является точкой локального экстремума. Вынесем за квадратную скобку множитель $(dy)^2$. Знак приращения функции совпадает со знаком квадратного трехчлена

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot (\frac{dx}{dy})^2 + 2 \cdot f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{dy} + f''_{yy}(x_0, y_0)$$

относительно $\frac{dx}{dy}$. Как известно, квадратный трехчлен не меняет знак в том случае, если не имеет корней, то есть если его дискриминант отрицателен

$$D = \left(f''_{xy}(x_0, y_0) \right)^2 - f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

или

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0) \right)^2 > 0$$

В случае отрицательного дискриминанта знак квадратного трехчлена определяется знаком коэффициента при наибольшей степени (или знаком свободного члена). Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке $(x_0; y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0; y_0)$ значения $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0)$. Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

1. если $\Delta > 0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет локальный экстремум: максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$;
2. если $\Delta < 0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0; y_0)$ экстремума не имеет.

В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке $(x_0; y_0)$ может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Пример. Найти экстремум функции $z = 3x^3 + y^2 + 4xy - x + 2$.

Решение.

Здесь $z'_x = 9x^2 + 4y - 1$, $z'_y = 2y + 4x$. Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют.

Найдем стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y - 1 = 0, \\ 2y + 4x = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем точки $M_1(1; -2)$ и $M_2\left(-\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right)$.

Находим частные производные второго порядка данной функции:

$z''_{xx} = 18x$, $z''_{yy} = 2$, $z''_{xy} = 4$.

В точке $M_1(1; -2)$ имеем: $A = 18$, $B = 4$, $C = 2$ отсюда

$$\Delta = 18 \cdot 2 - 4^2 = 20 > 0.$$

Так как $A > 0$, то в точке $M_1(1; -2)$ функция имеет локальный минимум: $z_{\min} = z(1; -2) = 0$.

В точке $M_2\left(-\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$ имеем: $A=-2$, $B=4$, $C=2$ отсюда

$$\Delta=(-2)\cdot 2-4^2=-20<0.$$

Так как $A<0$, то в точке $M_2\left(-\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$ функция не имеет экстремума.

Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в области

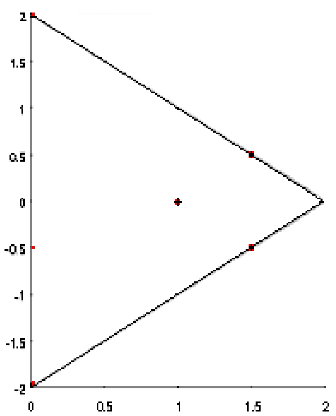
Так же, как в случае функции одной переменной, заданной на отрезке, функция двух переменных, заданная в замкнутой области, достигает своих наибольшего и наименьшего значений либо в **критических точках**, лежащих в заданной области, либо в **граничных точках** области. Трудность этого случая в том, что у области на плоскости, имеется бесконечное множество граничных точек.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z=x^2-xy+y^2-2x+y$$

в треугольнике, образованном прямыми

$$x=0,\ y=x-2,\ y=-x+2.$$



Решение. Прежде всего, найдем критические точки заданной функции, решив систему

$$\begin{cases} 2x-y-2=0, \\ -x+2y+1=0. \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение, и мы получаем критическую точку (1,0). Эта точка лежит внутри заданной области, поэтому мы вычисляем в этой точке значение функции: $z(1,0)=-1$.

Теперь переходим к граничным точкам. Заданная область имеет 3 прямолинейных граничных участка:

1) $x=0,\ -2\le y\le 2$,

2) $0\le x\le 2,\ y=x-2$,

3) $0\le x\le 2,\ y=-x+2$.

На участке 1)

$$z=z_1(y)=y^2+y,\ -2\le y\le 2.$$

Функция $z_1(y)$ на отрезке [-2,2] принимает наибольшее значение, равное 6, в точке 2 (конец отрезка), и наименьшее значение, равное -1/4, в критической точке -1/2.

На участке 2)

$$z = z_2(x) = x^2 - x(x-2) + (x-2)^2 - 2x + (x-2) = x^2 - 3x + 2\,,\ 0 \le x \le 2\,.$$

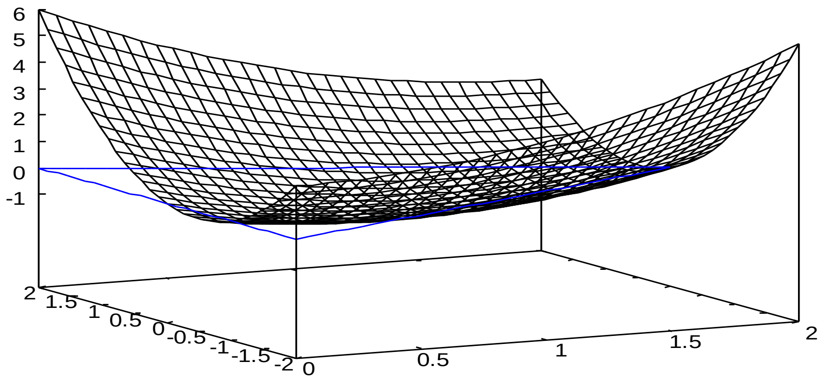
Функция $z_2(x)$ принимает на отрезке [0,2] наибольшее значение, равное 2, в точке 0 (конец отрезка), и наименьшее значение, равное -1/4, в критической точке 3/2.

На участке 3)

$$z = z_3(x) = x^2 - x(-x+2) + (-x+2)^2 - 2x + (-x+2) = x^2 - 9x + 6,\ 0 \le x \le 2\,.$$

Функция $z_3(x)$ принимает на отрезке [0,2] наибольшее значение, равное 6, в точке 0 (конец отрезка), и наименьшее значение, равное -3/4, в критической точке 3/2.

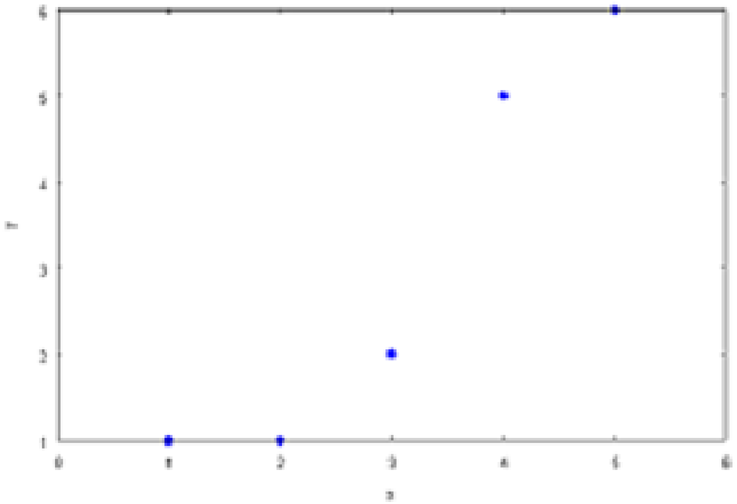
Получив значения в критической точке и наибольшие и наименьшие значения на отрезках границы (-1, 6, -1/4, 2, -3/4), мы выбираем среди них наибольшее и наименьшее. Это значения 6 (наибольшее значение данной функции в заданном треугольнике) и -1 (наименьшее значение данной функции в заданном треугольнике). Трехмерное изображение соответствующей поверхности выглядит следующим образом:



Метод наименьших квадратов

Поиск локальных экстремумов функции двух переменных активно применяется в задаче о проведении прямой линии, наиболее близкой к n заданным точкам на плоскости. Известно, что через одну точку можно провести бесчисленное множество прямых, через две точки – единственную прямую. Через произвольные 3 точки прямую провести нельзя. Тем более, через 5 точек. Но представим, что проведены замеры в 5 точках (x=1, x=2, x=3, x=4, x=5). Значения, полученные при замерах, соответственно, равны: y=1, y=1, y=2, y=5, y=6.

Нанесем результаты наблюдений на плоскость. Мы видим, что если соединить точки последовательно, полученная линия будет близка к прямой.



Учитывая, что замеры производятся неточно, мы хотим нарисовать приближенный график линейной зависимости y от x. Не существует прямой, проходящей через пять полученных на плоскости точек, но можно постараться провести прямую максимально близко к полученным точкам.

Уравнение прямой на плоскости $y = Ax + B$ зависит от двух параметров A и B. Нужно подобрать их так, чтобы при значениях x, равных 1, 2, 3, 4 и 5, значения $Ax + B$ мало отличались от 1, 1, 2, 5 и 6, соответственно. Это значит, что нужно подобрать такие A и B, чтобы значение функции

$$F(A,B) = (A\cdot 1 + B - 1)^2 + (A\cdot 2 + B - 1)^2 + (A\cdot 3 + B - 2)^2 + (A\cdot 4 + B - 5)^2 +$$
$$+(A\cdot 5 + B - 6)^2$$

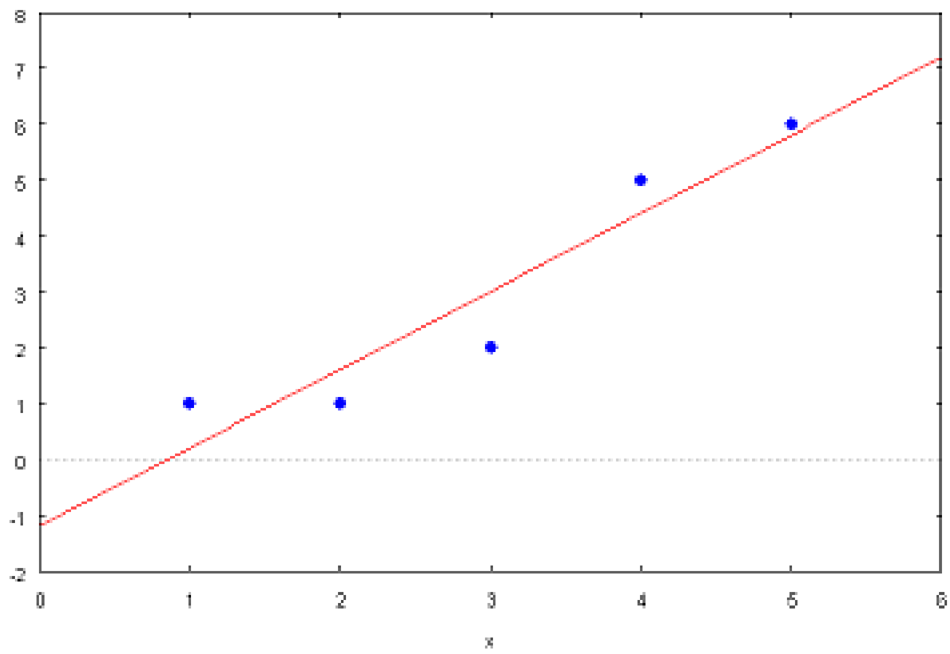
было минимальным. То есть, должно выполняться необходимое условие экстремума: $\begin{cases} F'_A = 0, \\ F'_B = 0. \end{cases}$

В данном случае после приведения подобных членов получим систему $\begin{cases} 110A + 30B = 118, \\ 15A + 5B = 15. \end{cases}$

Решая эту систему, найдем $A = \frac{7}{5}, B = -\frac{6}{5}$. Таким образом, уравнение искомой прямой: $y = \frac{7}{5}x - \frac{6}{5}$.

Нарисуем график с помощью MAXIMA:

```
(%i1) xy: [[1, 1], [2, 1], [3, 2], [4, 5], [5, 6]];
      plot2d([[discrete, xy], 7/5*x-6/5], [x,0,6],
      [style, points, lines]);
(%o1) [[1,1],[2,1],[3,2],[4,5],[5,6]]
 (%o2)
```



Предложенный метод нахождения прямой, проходящей наиболее близко к заданным точкам, называется **методом наименьших квадратов.**

Заметим, что пакет программ MAXIMA содержит этот метод. Для того чтобы решить ту же задачу при помощи компьютера без введения функции $F(A, B)$ и поиска критической точки этой функции, следует сначала ввести координаты точек на плоскости:

```
(%i3) load (lsquares);   M : matrix ( [1,1], [2,1], [3,2],
      [4,5], [5,6]);
define: warning: redefining the built-in function .
lsquares_estimates
```

(%o3) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1-G/share/maxima/5.25.1/share/contrib/lsquares.mac

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

Затем введем команды

```
(%i5) lsquares_estimates (M, [x,y], y = A*x+B, [A,B]);
```

(%o5) $[[A=\frac{7}{5}, B=-\frac{6}{5}]]$

Мы получили тот же результат.

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

По аналогии с определенными интегралами по отрезку от функции одной переменной рассматриваются интегралы по двухмерной области D от функции $f(x,y)$:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

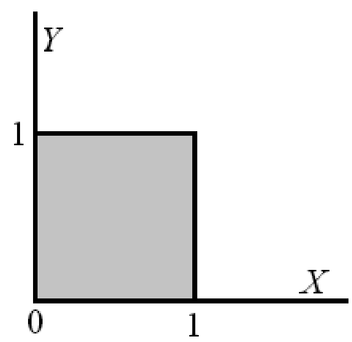
Такие интегралы называются двойными. В этом случае интеграл сводится к двум повторным интегралам, вычисляемым последовательно сначала по одной переменной, а затем по другой. Проще всего вычисляются интегралы по прямоугольной области.

Пример. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)dx\,dy \text{ по области } 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1.$$

Решение.

Изобразим область интегрирования на чертеже.



Фактически здесь нужно сначала вычислить интеграл по одной из переменных, например, по переменной x, считая вторую переменную константой. Затем выполняется и второе интегрирование, т.е.

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\int_0^1 dy\int_0^1\left(x^2+y^2\right)dx=\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}+x\,y^2\right)\Bigg|_0^1 dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{3}+y^2\right)dy=\left(\frac{1}{3}y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}.$$

СЕМЕСТР III

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Понятие **множества** или **совокупности** принадлежит к числу простейших математических понятий. Оно не имеет точного определения. Любое множество задается своими элементами. Примерами являются множество книг в библиотеке или множество студентов, присутствующих на занятии. Обычно множество обозначают заглавными латинскими буквами (A), а его элементы строчными латинскими буквами (a). То, что элемент принадлежит множеству, обозначают так: $a \in A$. Если a не принадлежит A, то этот факт обозначают так: $a \notin A$. Если все элементы множества A принадлежат множеству B, то A – подмножество множества B ($A \subset B$).

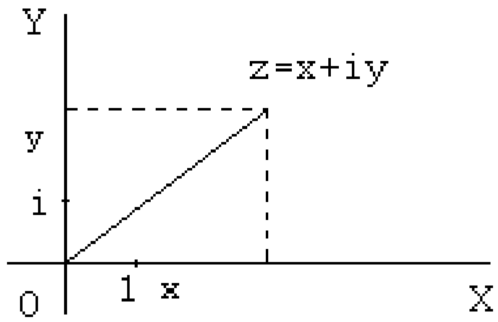
Чтобы задать множество, следует или перечислить его элементы, или указать характеристическое свойство его элементов, то есть такое свойство, которым обладают все элементы множества и только они. Мы уже знакомы со следующими примерами подмножеств вещественных чисел.

Примеры.

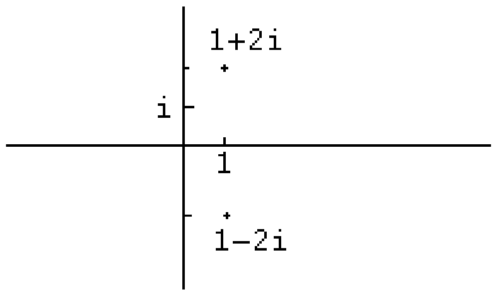
1. Множество натуральных чисел: N=$\{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$. Из записи следует, что все натуральные числа, начиная с двойки, получаются прибавлением единицы к предыдущему числу.
2. Множество целых чисел: Z=$\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots\}$.
3. Множество рациональных чисел: $Q = \{ \frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in N \}$.

Вертикальная черта означает, что за ней указывается характеристическое свойство элементов множества.

4. Рассмотрим множество C комплексных чисел: $C = \{ z = x + iy \mid x, y \in R \}$, где i – число, удовлетворяющее свойству: $i^2 = -1$. Очевидно, что такого числа не существует на действительной прямой. Поэтому для интерпретации комплексных чисел используют точки плоскости, на которой введены две координатные оси. Одна совпадает с действительной прямой, и на нее проецируют действительную часть комплексного числа (x). Другая – мнимая ось – перпендикулярна действительной оси, и на нее проецируют коэффициент при i (мнимую часть числа).



Множество действительных чисел R является подмножеством множества C (в случае, когда $y = 0$). Необходимость в комплексных числах возникает уже тогда, когда мы решаем квадратное уравнение и сталкиваемся со случаем отрицательного дискриминанта. Например, решая уравнение $t^2 - 2t + 5 = 0$ с отрицательным дискриминантом, мы получим корни $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-4}$ или $t_{1,2} = 1 \pm 2i$. В комплексной плоскости два этих комплексных числа выглядят так:



Очевидно, что $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Два множества равны тогда и только тогда, когда состоят из одних и тех же элементов. Поэтому $A = B$ означает, что $A \subset B$ и одновременно $B \subset A$.

В рамках рассматриваемой математической теории вводят два исключительных множества: пустое множество ($\varnothing$), не содержащее элементов, и универсальное множество или «универсум» (U), содержащее все элементы данной теории.

Аксиоматика операций над множествами

Основными операциями над множествами являются следующие.

1. **Дополнение.** Для любого множества $A \subset U$ определим дополнение $A^c = \{b \in U \mid b \notin A\}$.

Например, в множестве вещественных чисел дополнением к множеству Q является множество всех иррациональных чисел.

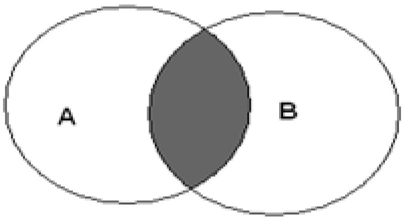
2. **Объединение.** Для любых двух множеств $A, B \subset U$ определим объединение $A \cup B = \{c \in U \mid (c \in A)$ или $(c \in B)\}$.

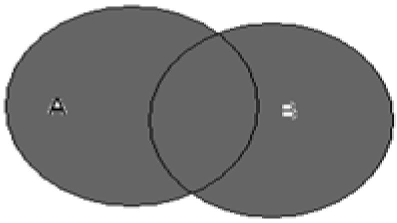
Например, объединением отрезков [1,3] и [2,7] является отрезок [1,7].

3. **Пересечение.** Для любых двух множеств $A, B \subset U$ определим пересечение $A \cap B = \{c \in U \mid (c \in A)$ и одновременно $(c \in B)\}$.

Например, пересечением отрезков [1,3] и [2,7] является отрезок [2,3].

Для иллюстрации операций над множествами вводят диаграммы Эйлера-Венна – круги, обозначающие множества. Так, введенные нами операции иллюстрируются следующим образом.

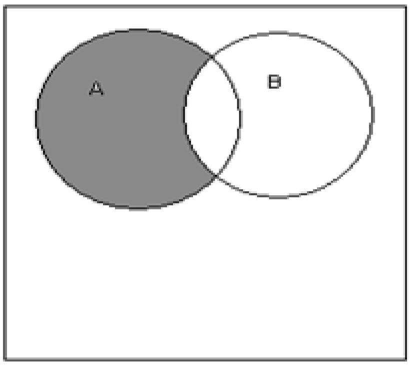


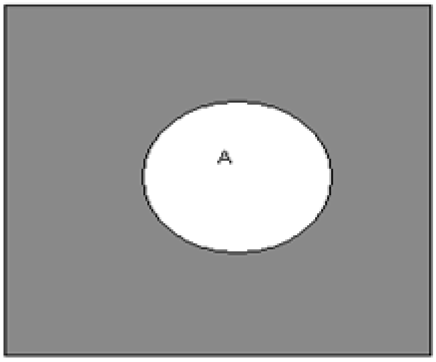


$A \cap B$ $\qquad\qquad$ $A \cup B$

Подчеркнем, что диаграммы Эйлера-Венна не могут служить доказательствами равенства множеств.

Кроме введенных нами трех операций над множествами существуют еще операции, которые могут быть представлены как комбинация простейших операций. Введем операцию **вычитания** множеств: $A \setminus B = \{c \in U \mid (c \in A)$ и одновременно $(c \notin B\}$. Ниже результат вычитания двух множеств представлен с помощью диаграммы Эйлера-Венна, рядом представлено изображение дополнения к множеству А результат вычитания множества А из универсума.





$A \backslash B$ $\quad\quad\quad\quad$ $A^c = U \backslash A$

Докажем, что $A \backslash B = A \cap B^c$. Для доказательства равенства двух множеств следует убедиться в том, что все элементы первого множества принадлежат второму, и все элементы второго множества принадлежат первому.

а) Пусть $x_0 \in A \backslash B$. Из определения следует, что справедливо $x_0 \in A$ и одновременно $x_0 \notin B$. То есть, $x_0 \in A$ и одновременно $x_0 \in B^c$. Следовательно, $x_0 \in A \cap B^c$. Вследствие произвольности элемента x_0 следует, что любой элемент из множества $A \backslash B$ принадлежит множеству $A \cap B^c$. Значит, $A \backslash B \subset A \cap B^c$

б) Пусть $x_0 \in A \cap B^c$. Из определения пересечения множеств следует, что $x_0 \in A$ и одновременно $x_0 \in B^c$. Последнее означает, что $x_0 \notin B$. Итак, $x_0 \in A$ и одновременно $x_0 \notin B$. В соответствии с определением разности множеств $x_0 \in A \backslash B$. Следовательно, любой элемент из множества $A \cap B^c$ принадлежит множеству $A \backslash B$, и значит, $A \cap B^c \subset A \backslash B$.

Из определения равенства множеств следует, что $A \backslash B = A \cap B^c$. Доказательство равенства двух множеств закончено.

Декартово произведение множеств

Пусть A и B – подмножества множества R вещественных чисел. Декартовым произведением этих множеств $A \times B$ назовем такое множество точек с координатами (x,y) на плоскости R^2, что $x \in A$ и одновременно $y \in B$. Например, если A представляет отрезок [0,2], а B – отрезок [-1,6], то $A \times B$ – это прямоугольник с соответствующими сторонами. Аналогично вводится декартово произведение трех и более множеств.

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Функции на множестве натуральных чисел в комбинаторике

В школьном курсе изучается много функций, задаваемых на вещественной оси или ее подмножествах. Подмножества эти являются отрезками, интервалами, полуинтервалами,….. В настоящем параграфе мы определим те функции, которые можно рассматривать только на множестве N, и найдем их приложения в **комбинаторике** – разделе математики, посвященном решению задач выбора и расположения элементов конечных множеств.

Основой для всех таких функций можно считать **факториал:**

$$n!=1\times 2\times 3\times \ldots \times n.$$

1. Попробуем решить такую задачу: сколькими способами можно рассадить на n пронумерованных стульях n гостей? На первый стул можно посадить любого из n гостей. Выбрав одного из них, на второй стул можно усадить уже одного из оставшихся (n – 1) претендентов. Выбрав и этого, на третий стул выбираем одного из (n – 2) гостей…. На последний стул претендент будет только один. Таким образом, если двигаться от конца процесса, мы получим $1\times 2\times 3\times \ldots \times n = n!$ вариантов.

Взаимно однозначное отображение конечного упорядоченного множества на себя называется **подстановкой** элементов множества. Каждая последовательность элементов конечного множества с учетом порядка называется **перестановкой** этих элементов и обозначается P_n. Перестановки не меняют элементов множества или их количества, они меняют порядок элементов. Таким образом, число всевозможных перестановок в множестве из n элементов P_n = n!.

2. Представим теперь, что, как в предыдущей задаче, у нас n пронумерованных стульев, но мы рассаживаем на них m претендентов, причем m > n. Конечно, всех усадить мы не сможем, но хотим выяснить, сколько имеется вариантов рассаживания. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, видим, что на 1-й стул имеется m

претендентов, на второй (m – 1), на третий (m – 2),…., на n-й стул остается (m – n + 1) претендент. Итак, число вариантов равно

$$(m-n+1)\times(m-n+2)\times\ldots\times(m-1)\times m=\frac{m!}{(m-n)!}.$$

Любой упорядоченный набор n различных элементов множества, состоящего из m элементов, называется **размещением** из m по n, число таких размещений обозначается A_m^n. Таким образом,

$$A_m^n=\frac{m!}{(m-n)!}.$$

3. Рассмотрим теперь несколько другую задачу, где мы «раздаем» не сидячие места на пронумерованных стульях (как известно, человек не может сидеть одновременно более чем на одном стуле), а, например, n раритетных книг группе страстных библиофилов, состоящей из m человек. Сколько вариантов раздачи n книг m претендентам? На первую книгу у нас m претендентов, на вторую – тоже m претендентов, и так далее. Следовательно, мы имеем m^n вариантов распределения книг между претендентами.

Любой упорядоченный набор n элементов множества, состоящего из m элементов, называется **размещением с повторением** из m по n и равен m^n.

4. Вернемся ко второй задаче, где мы рассаживали m человек на n стульях, только теперь у нас стулья не пронумерованы, не отличаются друг от друга, и нас не интересует, где кто сидит, а интересует, сидит человек или стоит. Значит, число вариантов рассаживания совпадает с числом вариантов отбора из m гостей группы счастливчиков, состоящей из n человек, которые смогут сесть на стулья. Решение этой задачи можно связать с решением задачи 2. Представим, что мы решили бы задачу 2 таким образом: отбирали бы группы по n человек, а затем делали бы внутри группы отобранных для сидения n человек всевозможные перестановки, чтобы учесть все варианты рассаживания на пронумерованных стульях. Мы должны были бы получить тот же результат: A_m^n. Следовательно, количество вариантов выбора групп по n человек из m человек равно A_m^n, деленное на число перестановок в группе из n человек, то есть на $n!$.

Любое подмножество из n элементов множества, состоящего из m элементов, называется **сочетанием** из m по n, и число сочетаний обозначается $C_m{}^n$. В соответствии с рассуждениями при решении задачи, $C_m{}^n = \frac{A_m{}^n}{n!}$ или $C_m{}^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

РЯДЫ

Числовые ряды

Понятие предела последовательности дает возможность ввести понятие числового ряда – бесконечной суммы вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, где a_k – общий член ряда. На первый взгляд бесконечное суммирование невозможно уже хотя бы в силу конечности жизни любого, кто занимается суммированием. Выход из положения следующий: бесконечная сумма понимается как предел последовательности s_n – конечных n–ных **частных сумм** $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Таким образом, суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ будем называть число

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Ряд называется **сходящимся**, если для него существует конечная сумма. Ряд называется **расходящимся**, если соответствующий предел частных сумм не существует или бесконечен.

Пример 1. Сосчитаем сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$, $|q|<1$. Имеем согласно формуле суммы геометрической прогрессии $s_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = q \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$. Поскольку $q^n \to 0$ при $n \to \infty$, получим $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$.

Заметим, что при $|q| \geq 1$ соответствующий ряд расходится.

Пример 2. Сосчитаем сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$. Имеем

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+...+\frac{n+1-n}{n(n+1)}=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1},$$

следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1.$

Необходимым признаком сходимости числового ряда является условие: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Доказывается это легко: пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, то есть существует $\lim_{n\to\infty}s_n=s$. При $n\to\infty$ справедливо: $n-1\to\infty$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s$. Поскольку $s_n-s_{n-1}=a_n$, то из 1-го и 2-го свойств пределов последовательностей имеем: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что необходимое условие сходимости не является достаточным. То есть, стремление к нулю общего члена ряда не обеспечивает его сходимость.

Контрпример. Покажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, называемый гармоническим рядом, расходится. Для этого рассмотрим последовательность частных сумм s_{2^n}, то есть частные суммы $s_2,s_4,s_8,....$. При суммировании членов конечной суммы s_{2^n} сгруппируем рядом стоящие члены суммы, начиная от $\frac{1}{2^l+1}$ до $\frac{1}{2^{l+1}}$, при всех $l=1,...,n-1$:

$$s_{2^n}=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+...+\frac{1}{8})+...+(\frac{1}{2^{n-1}+1}+...+\frac{1}{2^n})>$$
$$>1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+...+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=1+n\cdot\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\lim_{n\to\infty}s_{2^n}=\infty$, и значит, предел последовательности частных сумм не может быть конечным.

Свойства числовых рядов

Следующие свойства сходящихся рядов очевидным образом следуют из свойств пределов последовательностей.

1. Пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся, причем $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s,\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sigma.$ Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_k + \beta \cdot b_k)$ также сходится, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_k + \beta \cdot b_k) = \alpha \cdot s + \beta \cdot \sigma .$$

2. Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+N}$ сходятся или расходятся одновременно, причем $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+N} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - s_N$.

Ряды с положительными членами

Очевидно, что у таких рядов частные суммы растут с ростом количества слагаемых. Большую роль при исследовании числовых рядов с положительными членами играют следующие теоремы сравнения.

Теорема сравнения 1. Пусть $0 < a_k \le b_k$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Пример. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2-3}$. Сравним этот ряд с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$. Последний ряд расходится, так как в противном случае сходился бы гармонический ряд и его сумма в соответствии с первым свойством была вдвое больше суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$. Так как $\frac{n+1}{2n^2-3} > \frac{1}{2n}$, то исходный ряд также расходится.

Теорема сравнения 2. Пусть $a_k > 0,\ b_k > 0,$ причем существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = K(\neq 0)$. Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Из определения предела при $\varepsilon = \frac{K}{2}$ найдем N такое, что $|\dfrac{a_n}{b_n} - K| < \dfrac{K}{2}$ при любом $n > N$. Следовательно, $a_n < \dfrac{3}{2}K \cdot b_n,\ b_n < \dfrac{2}{K}\cdot a_n$ при $n > N$. Согласно теореме сравнения 1 ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k+N}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{k+N}$ сходятся или расходятся одновременно. Согласно свойству 2 сходящихся рядов теорема доказана.

Пример. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{3k^7+8}{10k^9+6k^3+4}$ сходится, так как его можно сравнить со сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(k+1)}$, рассмотренным выше. Действительно, существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n^7+8)n(n+1)}{(10n^9+6n^3+4)} = \dfrac{3}{10}$, и можно применить теорему сравнения 2.

Два следующих достаточных условия сходимости числовых рядов с положительными членами, называются признаками сходимости. Здесь приводятся доказательство на основе теоремы сравнения только одного из них.

Признак Даламбера. Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = p$. Если $p < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, если $p > 1$, то этот ряд расходится.

Пример. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1000^n}{n!}$. Здесь $a_n = \dfrac{1000^n}{n!},\ a_{n+1} = \dfrac{1000^{n+1}}{(n+1)!}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000}{n+1} = 0$, данный ряд сходится.

Признак Коши. Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = p$. Если $p < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, если $p > 1$, то этот ряд расходится.

Доказательство. Пусть $p<1$. Возьмем $\varepsilon<(1-p)/2$ и найдем N такое, что

$|\sqrt[n]{a_n}-p|<\varepsilon$ при $n>N$.

Следовательно, $\sqrt[n]{a_n}<\varepsilon+p=p_1<1$ и $a_n<p_1^n$ при $n>N$. Согласно теореме сравнения 1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k+N}$ сходится, так как сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_1^k$. Следовательно, и исходный ряд сходится.

Пусть $p>1$. Возьмем $\varepsilon<(p-1)/2$ и найдем N такое, что

$|\sqrt[n]{a_n}-p|<\varepsilon$ при $n>N$. Следовательно, $\sqrt[n]{a_n}>-\varepsilon+p=p_2>1$ и $a_n>p_2^n$

при $n>N$. Согласно теореме сравнения 1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k+N}$ расходится, так как расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_2^k$. Следовательно, и исходный ряд расходится.

Пример. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$. Так как

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$, данный ряд сходится.

Следующий признак основан на сравнении ряда и несобственного интеграла, подынтегральная функция которого при натуральных значениях аргумента превращается в члены ряда.

Интегральный признак. Пусть члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ монотонно убывают с ростом n. Если функция $f(x)$ такова, что $f(n)=a_n$, то сходимость или расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна сходимости или расходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.

Данный признак дает возможность сделать вывод о сходимости или расходимости ряда вида $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$, при том, что два предыдущих признака не позволяют это сделать, так как в обоих случаях здесь $p=1$. Вспомним, что несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$. Поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

Знакопеременные ряды

Для знакопеременных рядов приведенные признаки сходимости также можно применять, но для исследования **абсолютной сходимости**. Дело в том, что если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$, причем в этом случае ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ называется абсолютно сходящимся. Таким образом, если имеется знакопеременный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$, имеет смысл проверить возможность применения какого-либо признака сходимости к ряду $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|$, и если условия сходимости выполняются, исходный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ сходится абсолютно.

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\alpha}}$ сходится абсолютно при $\alpha>1$.

Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Пусть члены положительной последовательности a_k, монотонно убывая, стремятся к нулю при $k\to\infty$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ сходится.

Доказательство. Рассмотрим последовательность четных частных сумм

$$s_{2n}=a_1-a_2+a_3-......+a_{2n-1}-a_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+...+(a_{2n-1}-a_{2n})>0.$$

Очевидно, что с ростом n значения s_{2n} возрастают. Теперь запишем эту же частную сумму в ином виде: $s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - ...... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$. Очевидно, что $s_{2n} < a_1$. Таким образом, мы имеем монотонно возрастающую ограниченную сверху последовательность s_{2n}. По одному из свойств последовательностей существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s$. Итак, последовательность частных сумм с четными номерами имеет предел. Что же с нечетными частными суммами?

Так как $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = s$. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

Пример. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\alpha}}$ сходится по признаку Лейбница при любом $\alpha > 0$.

В предыдущем примере, опираясь на интегральный признак, мы показали, что этот ряд при $\alpha > 1$ сходится абсолютно. При $0 < \alpha \le 1$ ряд не может абсолютно сходиться. Но он сходится по признаку Лейбница.

Ряд, сходящийся, но не сходящийся абсолютно, называется **условно сходящимся**.

Функциональные ряды

Пусть $\{f_n(x)\}_{n\in \mathrm{N}}$, $x \in M$, – последовательность функций, заданных на одном и том же множестве, причем при каждом значении $x_0 \in M$ числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ сходится. Тогда мы можем рассматривать функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ на множестве M и исследовать свойства функции $s(x)$ – суммы ряда – на том же множестве M.

В связи с вопросами сходимости функциональных рядов отметим следующий из теоремы сравнения **мажорантный признак** сходимости функционального ряда: если $\exists a_n > 0$ такое что $\forall x \in M,\ \forall n \in \mathrm{N}\ (|f_n(x)| \le a_n)$ и ряд с положительными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

сходится, то функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ абсолютно сходится на множестве M.

Степенные ряды

Простейшим примером функционального ряда является степенной ряд – ряд вида $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$. Числа $c_k,\, k=0,1,...,$ называются коэффициентами степенного ряда. Поскольку простой заменой переменной $\tilde{x}=x-a$ исходный степенной ряд превращается в ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \tilde{x}^k$, мы будем рассматривать только степенные ряды вида $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Очевидно, что такой ряд обязательно сходится в точке $x=0$. Ответом на вопрос об области сходимости степенного ряда дает

Теорема Абеля. Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится в точке $x=x_1$, тогда он сходится, причем абсолютно, при $\forall x,\ |x|<|x_1|$.

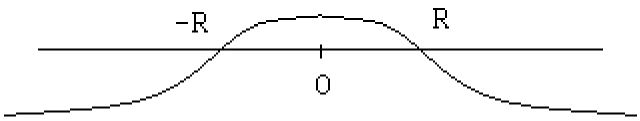
Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ расходится в точке $x=x_2$, тогда он расходится при $\forall x,\ |x|>|x_2|$.

Доказательство. Так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_1^k$ сходится, то общий член этого ряда стремится к нулю, и значит, ограничен, то есть, $\exists M>0$ тчо $|c_k x_1^k| \le M$.

Пусть $|x|<|x_1|$ тогда $|c_k x^k| \le M \left|\frac{x}{x_1}\right|^k$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_1}\right|^k$ сходится, то по теореме сравнения абсолютно сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_1^k$.

Так как $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_2^k$ расходится, то $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ не может сходиться ни при каких значениях $x,\ |x|>|x_2|$, так как в противном случае он бы сходился, в соответствии с доказанной частью теоремы, и при $x=x_2$.

Из теоремы Абеля следует, в частности, что область сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ представляет собой некоторый интервал $(-R,R)$, а область расходимости – внешность этого интервала. Что касается двух точек $x=\pm R$, являющихся границами этого интервала, то сходимость или расходимость ряда в этих точках следует проверять для каждой функции индивидуально.



Число R называется **радиусом сходимости** степенного ряда. Интервал $(-R,R)$ называется **интервалом сходимости** степенного ряда.

Способы определения радиуса сходимости степенного ряда

1. В соответствии с признаком Даламбера если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^{n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}||x|}{|c_n|}<1$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|c_k x^k|$ сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}||x|}{|c_n|}>1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|c_k x^k|$ расходится. Следовательно, при $|x|=R$ имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|R}{|c_n|}=1$ или $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$.

2. Аналогично используя признак Коши, получим $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}$.

Пример. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$.

Найдем радиус сходимости. Здесь $c_n=\frac{1}{n^p}$. Следовательно, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{n^p}=1$.

Проверим сходимость в точке $x=1$. Имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, который сходится, если $p>1$ и расходится, если $p\le 1$.

Проверим сходимость в точке $x=-1$. Имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$, который сходится, если $p>0$ и расходится, если $p\le 0$.

Замечание. Внутри интервала сходимости ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз. Это значит, что если $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = s(x),\ |x|<R$, то 1) $\int_a^b s(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b x^k dx,\ |a|,|b|<R$,

2) $(s(x))^{(m)} = \sum_{k=m}^{\infty} c_k (x^k)^{(m)},\ |x|<R$.

Связь между коэффициентами степенного ряда и его суммой

Итак, пусть $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = s(x),\ |x|<R$. Положим $x=0$, тогда получим:

$$c_0 = s(0).$$

Возьмем производную от членов ряда и его суммы: $\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} = s'(x),\ |x|<R,$ и положим $x=0$. Тогда $c_1 = s'(0)$. Продолжая процесс дифференцирования, получим: $n!c_n = s^{(n)}(0)$.

То есть, $c_n = \dfrac{s^{(n)}(0)}{n!}$. Таким образом, коэффициенты степенного ряда являются **коэффициентами формулы Тейлора** для суммы ряда.

Поставим вопросы: если для произвольной функции $f(x)$, имеющей бесконечное число производных в точке $x=0$ построить ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, называемый **рядом Тейлора** функции $f(x)$, то

1) где он будет сходиться, и

2) если будет сходиться, то будет ли сходиться к самой функции $f(x)$?

Ответы на поставленные вопросы.

1) Так как ряд Тейлора $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ – это степенной ряд, то для него обычным образом можно находить радиус и интервал сходимости. То есть, $R = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|f^{(n)}(0)|(n+1)}{|f^{(n+1)}(0)|}$.

2) Так как частная сумма ряда Тейлора – это многочлен из формулы Тейлора $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, то разность между частной суммой и

функцией $f(x)$ согласно формуле Тейлора есть остаточный член формулы Тейлора. Мы его рассматривали в форме Лагранжа: $r_n(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\ 0<\theta<1$. Таким образом, если внутри интервала сходимости остаточный член формулы Тейлора стремится к нулю с ростом n, то сумма ряда Тейлора совпадает с исходной функцией, по которой построен ряд. И тогда говорят, что функция $f(x)$ представима в виде ряда Тейлора, то есть

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Примеры разложения функций в ряды Тейлора

Пример 1. Рассмотрим функцию e^x. В соответствии с формулой Тейлора-Маклорена $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x)$,

где $|r_n(x)|\le e^{\max\{x,0\}}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Сосчитаем радиус сходимости степенного ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Таким образом, этот ряд сходится во всех точках вещественной оси. Для того чтобы выяснить, будет ли сходиться ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ к функции e^x, заметим, что при любом значении $x\in\mathrm{R}$ имеем $|r_n(x)|\le e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ при всех $x\in\mathrm{R}$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x)=\sin x$. В соответствии с формулой Тейлора-Маклорена

$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+r_n(x),$$

где $|r_n(x)|\le\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$. То есть, $R=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=\infty$ и $r_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Следовательно, $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$ при всех $x\in\mathrm{R}$.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x)=\cos x$. В соответствии с формулой Тейлора-Маклорена

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+r_n(x),$$

где $|r_n(x)|\le\frac{|x|^{2(n+1)}}{(2n+2)!}$. То есть, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(2n)!}=\infty$ и $r_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ при всех $x\in\mathrm{R}$.

Пример 4. Рассмотрим функцию $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\notin\mathrm{N}$. В соответствии с формулой Тейлора-Маклорена при $\alpha\notin\mathrm{N}$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Найдем радиус сходимости этого степенного ряда: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=1$.

Для оценки остаточного члена при n, больших или равных целой части α, форма Лагранжа остаточного члена годится только для $x>0$. В этом случае имеем оценку: $|r_n(x)|\le\frac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}|x|^{(n+1)}$. Очевидно, что при $0<x<1$ имеем $r_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$. Для отрицательных значений x применяется другая форма остаточного члена. В результате для $|x|<1$ справедливо представление $(1+x)^{\alpha}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$.

В случае, когда $\alpha=m$ – натуральное число, производные функции $(1+x)^m$ порядка выше, чем m, обращаются в 0. Следовательно, коэффициенты ряда при степенях выше m – нулевые, и значит, от ряда останется только конечная сумма, содержащая $m+1$ слагаемое. Разложение это имеет вид

$$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{m}\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n=1+\sum_{n=1}^{m}C_m^n x^n,$$

а полученная формула носит название «бином Ньютона».

Примеры приложений рядов Тейлора

Представленные в предыдущем пункте канонические разложения могут служить основой для получения новых разложений. Так, положив $\alpha = -1$ в последнем разложении, мы получим формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $(-q)$: $1 - q + q^2 + ... + (-q)^n + ... = \frac{1}{1+q}$. Заменив в этой формуле q на $(-q)$, получим: $1 + q + q^2 + ... + q^n + ... = \frac{1}{1-q}$.

Заменим в последней формуле q на $-t^2$, мы получим разложение

$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n,\ \ |t| < 1$. Последний ряд имеет радиус сходимости, равный 1. Вспомним, что внутри интервала сходимости ряды можно интегрировать почленно и проинтегрируем обе части последнего равенства по t от 0 до

$x,\ \ |x| < 1$, тогда получим разложение: $\quad \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Еще легче получить разложение $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$, если проинтегрировать почленно ряд $1 - t + t^2 + ... + (-t)^n + ... = \frac{1}{1+t}$ внутри интервала сходимости, то есть при $|t| < 1$.

Разложения функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$ в ряды Тейлора, справедливые для всех вещественных x, оказываются такими же и в случае, когда x – комплексное число. Пусть $x = i \cdot t$, где i – мнимая единица, то есть, $i^2 = -1$, а t – вещественное число. (Заметим, что $i^3 = -i$, $i^4 = 1$). Разложим $e^{i \cdot t}$ в ряд Тейлора:

$$e^{i \cdot t} = 1 + i \cdot t - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} - i\frac{t^7}{7!} + ... = (1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + ...) +$$
$$+ i(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + ...) = \cos t\ +\ i \cdot \sin t.$$

Вот эта формула, выражающая связь между e^x, $\sin x$ и $\cos x$ в случае комплексных переменных, и называется **формулой Эйлера**.

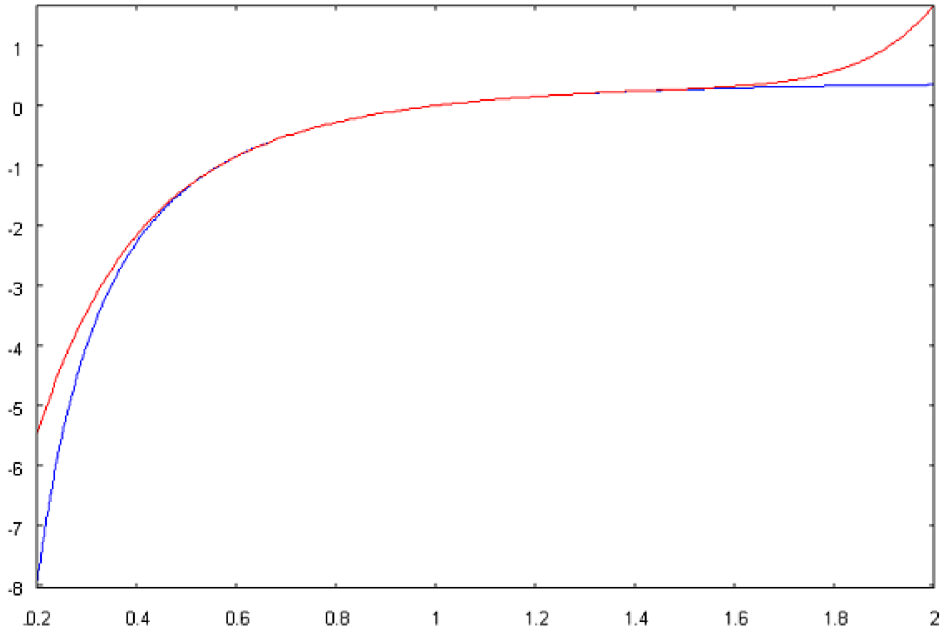
Ряды Тейлора служат для **приближения** многих функций. Дело в том, что арифметические операции, которые проводятся точно – это операции умножения на число (а, следовательно, и возведение в целую положительную степень) и сложение. Поэтому вычисление значений многих известных функций, например, $e^x, \sin x, \cos x, \ln x$, сводится к вычислению значений близких к этим функциям многочленов – частных сумм соответствующих рядов Тейлора. Эти суммы заложены в программу вычислений наших калькуляторов.

Частные суммы ряда Тейлора $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ для произвольной функции $f(x)$ можно получать с помощью программы MAXIMA. Для того чтобы получить $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ для конкретной функции $f(x)$, следует набрать **taylor(*f(x)*,*x*,*a*,*n*)** и нажать Shift+Enter**.**

Пример. Для получения суммы Тейлора 7-й степени по степеням $(x-1)$ для функции $\frac{\ln x}{x}$ следует набрать **taylor(log(x)/x,x,1,7).** Мы получим

x-1-3(x-1)^2/2+11(x-1)^3/6-25(x-1)^4/12+137(x-1)^5/60-49(x-1)^6/20+ +363(x-1)^7/140+.

Сравним полученный многочлен (красный график) с исходной функцией $\frac{\ln x}{x}$ (синий график) на одном рисунке. Для этого введем **load(draw); draw2d(color=blue, explicit(log(x)/x,x,0.2,2), color=red, explicit**(**taylor(log(x)/x,x,1,7),x,0.2,2))**



Мы видим, что красный и синий графики сливаются в окрестности точки $x=1$ и удаляются друг от друга при удалении аргумента от значения 1. Это свидетельствует о том, что частные суммы рядов Тейлора приближают функцию только в окрестности точки $x=1$.

Тригонометрические ряды Фурье

В различных отраслях науки, в том числе, в физике приходится иметь дело с периодическими явлениями. Простейший пример – электрические колебания. Периодической называется функция $f(x)$, для которой существует такая величина, называемая периодом, что $f(x)=f(x+T)$. Простейшими $T-$периодическими функциями являются тригонометрические функции вида $\sin\frac{2\pi kx}{T},\cos\frac{2\pi kx}{T}$, где $k-$ целое число, называемые **гармониками**. Представление периодической функции в виде суммы гармоник называется гармоническим анализом. В случае, когда такая сумма бесконечна, мы получаем тригонометрический ряд, называемый рядом Фурье.

Итак, пусть непрерывная $T-$периодическая функция $f(x)$ представлена в виде тригонометрического ряда: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{2\pi kx}{T}+b_k\sin\frac{2\pi kx}{T}$. Возникает вопрос: как найти коэффициенты $a_0,a_k,b_k,\ k\in N$?

Воспользуемся тем, что гармоники обладают следующим свойством:

$$\int_{-T/2}^{T/2}\cos\frac{2\pi kx}{T}dx=0,$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\sin\frac{2\pi kx}{T}dx=0,$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\cos\frac{2\pi lx}{T}\sin\frac{2\pi mx}{T}dx=0,\ \forall l,m\in\mathrm{N},$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\cos\frac{2\pi lx}{T}\cos\frac{2\pi mx}{T}dx=0,\ \forall l,m\in\mathrm{N},\ l\neq m,$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\sin\frac{2\pi lx}{T}\sin\frac{2\pi mx}{T}dx=0,\ \forall l,m\in\mathrm{N},\ l\neq m,$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 \frac{2\pi lx}{T} dx = \frac{T}{2},$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 \frac{2\pi lx}{T} dx = \frac{T}{2}.$$

Теперь для того, чтобы, например, найти a_m умножим обе части равенства $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kx}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kx}{T}$ на $\cos \frac{2\pi mx}{T}$ и проинтегрируем на отрезке $[-T/2, T/2]$. С учетом свойств гармоник в правой части равенства останется только слагаемое $a_m \frac{2}{T}$, а в левой части – выражение $\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2\pi mx}{T} dx$. Отсюда мы получим a_m.

Умножая на $\sin \frac{2\pi mx}{T}$ и интегрируя, получим b_m.

А для того, чтобы получить a_0, нужно просто проинтегрировать обе части равенства $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kx}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kx}{T}$ на отрезке $[-T/2, T/2]$.

Таким образом, непрерывная периодическая функция $f(x)$ представима в виде следующего тригонометрического ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kx}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kx}{T},$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2\pi kx}{T} dx, \ \ k = 0, 1, 2, \ldots.,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2\pi kx}{T} dx, \ \ k = 1, 2, \ldots.$$

В случае, когда периодическая функция имеет **точки разрыва**, ее также можно раскладывать в ряд Фурье, но равенство функции и суммы ряда будет только в точках непрерывности функции. В точках разрыва ряд Фурье будет сходиться к полусумме значений функции слева и справа от точки разрыва: $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2\pi k x_0}{T}+b_k \sin\frac{2\pi k x_0}{T}=\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$.

Возможно разложение функции в ряд Фурье с помощью MAXIMы. Мы получим все коэффициенты ряда Фурье для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-T,T]$ и T-периодически продолженной на всю вещественную ось, если введем **load(fourie); fourier*(f(x),x,t)*** и нажмем Shift+Enter.

Пример. Получим коэффициенты ряда Фурье для функции $f(x)=e^x, -\pi\le x<\pi$. Для этого введем **load(fourie); fourier(%e^x,x,%pi),** нажмем Shift+Enter и получим

$$a_0=(e^{\pi}-e^{-\pi})/\pi,$$

$$a_n=(n\sin\pi n/(e^{\pi}n^2+e^{\pi})+e^{\pi}n\sin\pi n/(n^2+1)-$$
$$-\cos\pi n/(e^{\pi}n^2+e^{\pi})+e^{\pi}\cos\pi n/(n^2+1))/\pi,$$

$$b_n=(\sin\pi n/(e^{\pi}n^2+e^{\pi})+e^{\pi}\pi\sin\pi n/(n^2+1)-$$
$$-n\cos\pi n/(e^{\pi}n^2+e^{\pi})+e^{\pi}n\cos\pi n/(n^2+1))/\pi.$$

Мы видим, что коэффициенты содержат выражения $\sin\pi n=0$ и $\cos\pi n=(-1)^n$. Поэтому преобразуем коэффициенты:

$$a_0=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi},$$

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{e^{\pi}(n^2+1)}-\frac{e^{\pi}}{(n^2+1)}\right),$$

$$b_n=\frac{(-1)^n n}{\pi}\left(-\frac{1}{e^{\pi}(n^2+1)}+\frac{e^{\pi}}{(n^2+1)}\right).$$

Для того чтобы не только вычислить коэффициенты ряда Фурье, но и получить разложение функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-T,T]$ и T-периодически продолженной на всю вещественную ось в ряд Фурье, следует
ввести **load(fourie); totalfourier (*f(x),x,T*)** и нажать Shift+Enter**.**

Пример. Для разложения в ряд Фурье функции из предыдущего примера введем **load(fourie); totalfourier (%e^x, x, %pi).** При этом получим разложение

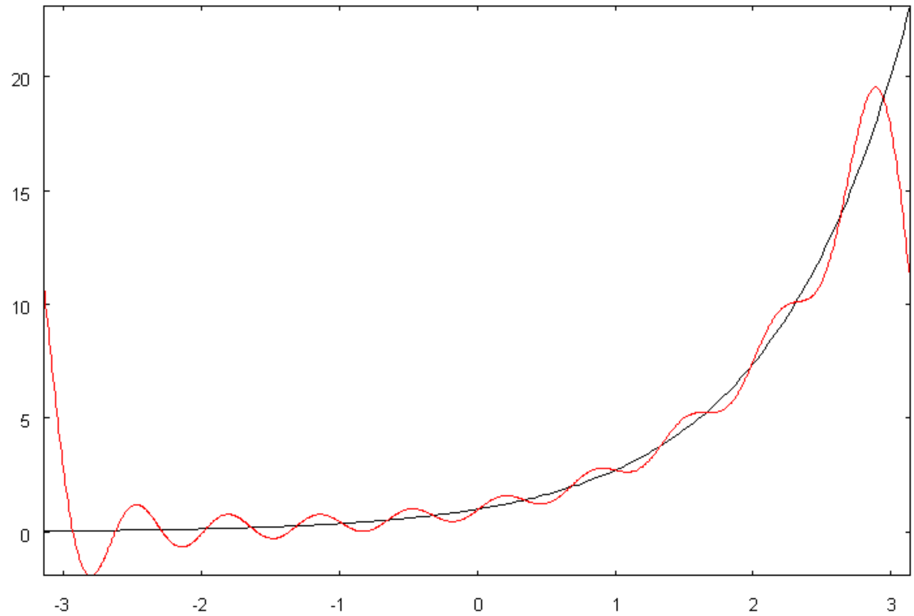
$$-\frac{e^{-\pi}(e^{\pi}-1)(e^{\pi}+1)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n\sin nx}{n^2+1}}{\pi}+\frac{e^{-\pi}(e^{\pi}-1)(e^{\pi}+1)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2+1}}{\pi}+$$
$$+\frac{e^{-\pi}(e^{\pi}-1)(e^{\pi}+1)}{2\pi}.$$

Следует отметить, что частные суммы ряда Фурье приближают исходную функцию не в конкретных точках, а «в среднем по отрезку». Сравним заданную функцию $y=e^x$, $-\pi\le x\le\pi$, и 9-ю частную сумму ряда Фурье на одном графике. Для этого сначала введем функцию $g(x)$, совпадающую с 9-й частной суммой, а затем нарисуем функцию e^x (черным цветом) и функцию $g(x)$ (красным цветом) на одном графике над отрезком $[-\pi,\pi]$:

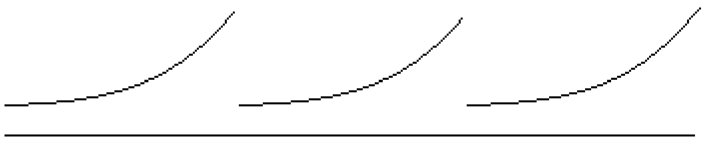
```
-->  g(x):=-(%e^(-%pi)*(%e^%pi-1)*(%e^%pi+1)*
     sum((n*(-1)^n*sin(n*x))/(n^2+1),n,1,9))/%pi+
         (%e^(-%pi)*(%e^%pi-1)*(%e^%pi+1)*
     sum(((-1)^n*cos(n*x))/(n^2+1),n,1,9))/%pi+
         (%e^(-%pi)*(%e^%pi-1)*(%e^%pi+1))/(2*%pi);

     load(draw);
     draw2d(explicit(%e^x,x,-%pi,%pi), color=red,
            explicit(g(x),x,-%pi,%pi)).
```

В результате получим картину



Здесь видно, что в конечных точках отрезка, где функция $y=e^x$, $-\pi\le x\le\pi$, при периодическом продолжении с отрезка $[-\pi,\pi]$ в другие точки вещественной оси терпит разрыв, график частной суммы ряда Фурье (красная линия) значительно отличается от графика экспоненциальной функции. Если брать частную сумму с большим количеством членов, то график частной суммы будет теснее приближаться к исходной функции во внутренних точках интервала $(-\pi,\pi)$, но вблизи точек $x=\pm\pi$ поведение будет тем же из-за разрыва исходной функции при периодическом продолжении.



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным уравнением называется соотношение вида $F(x,y(x),y',y'',...,y^{(n)})=0$. Решить дифференциальное уравнение – это значит, определить функцию $y(x)$, удовлетворяющее этому соотношению, возможно, в неявном или параметрическом виде.

Простейшее дифференциальное уравнение вида $y'(x)=f(x)$ мы уже решали, так как находили $y(x)=\int f(x)dx$. Мы знаем, что интеграл определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. То есть решение простейшего дифференциального уравнения содержит произвольную постоянную. Решения более сложных дифференциальных уравнений также находятся с точностью до произвольных постоянных. Любую функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению, мы будем называть **частным решением** этого уравнения, совокупность частных решений назовем **общим решением** дифференциального уравнения.

Порядок дифференциального уравнения определяется наивысшим порядком входящих в него производных. Поэтому дифференциальное уравнение вида $F(x,y(x),y',y'',...,y^{(n)})=0$ считается дифференциальным уравнением n-го порядка.

Так же, как не любая функция может быть проинтегрирована, и представлена в виде элементарных функций, так и не любое дифференциальное уравнение имеет решение, выражающееся через элементарные функции. Класс дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, узок. Мы изучим несколько классов дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, а также рассмотрим некоторые приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Кроме того, мы рассмотрим некоторые задачи, связанные с применением дифференциальных уравнений.

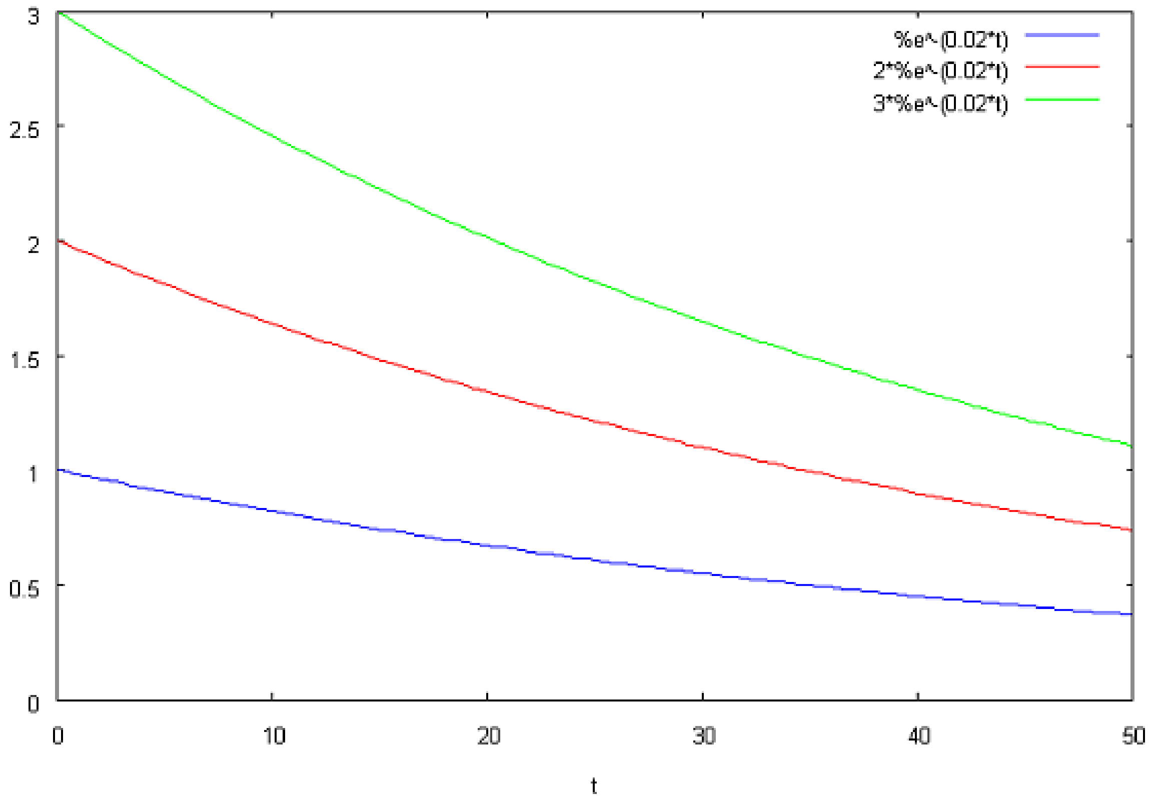
Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

Так называются уравнения вида $y' = f(x)\cdot g(y)$. Запишем производную в виде отношения дифференциалов: $\dfrac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$ и разнесем в разные части выражения, содержащие x и y. Мы получим равенство двух дифференциалов: $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)\cdot dx$. После интегрирования правой части по x, а левой – по y мы получим слева функцию, зависящую от y, а справа – функцию, зависящую от x, отличающихся на константу: $\int \dfrac{dy}{g(y)} = \int f(x)\cdot dx + C$.

Пример. В соответствии с законом радиоактивного распада вещества скорость распада пропорциональна количеству нераспавшегося вещества. Если обозначить $m(t)$ массу нераспавшегося вещества в момент t, то этот закон можно записать в виде соотношения: $m'(t) = -\alpha\cdot m$. Знак минус указывает на то, что масса вещества убывает с ростом t.

Решение. Разделим переменные: $\dfrac{dm}{m} = -\alpha\cdot dt$. После интегрирования получим $\ln m = -\alpha\cdot t + \ln C$. Здесь произвольное постоянное слагаемое мы представили в виде логарифма положительной постоянной величины для удобства последующего потенцирования: $m(t) = Ce^{-\alpha\cdot t}$.

Проанализируем полученное решение. Оно содержит постоянные α (эта постоянная зависит от вида радиоактивного вещества – стронций, радий, уран….) и C – постоянную интегрирования. Предположим, что мы исследуем радиоактивный распад радия, для которого $\alpha = 0{,}02$, если измерять время в годах. Решение уравнения распада имеет вид $m(t) = Ce^{-0{,}02\cdot t}$, и мы получаем множество решений вследствие присутствия произвольной положительной константы C, то есть, общее решение.

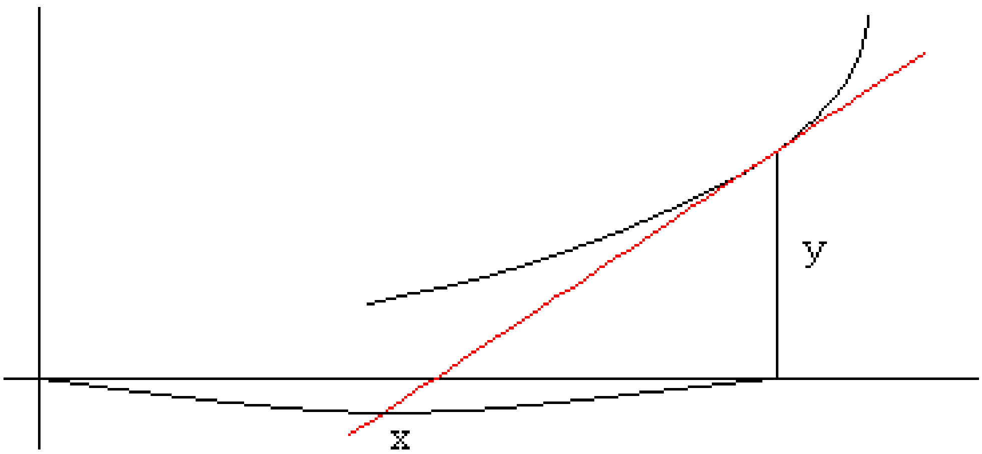


Как выбрать единственное? В данном случае, чтобы узнать, какое количество радиоактивного вещества останется по прошествии определенного времени, необходимо знать, сколько его было в начальный момент. Задавая $m(0)$, мы задаем значение C. Таким образом, чтобы решать конкретные задачи, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями, необходимо не только само уравнение, но и дополнительные данные, количество которых определяется порядком дифференциального уравнения. Для решения задачи, поставленной для дифференциального уравнения первого порядка, необходимо задать **начальное условие** $y(t_0)=y_0$. Уравнение вкупе с начальным условием называется **задачей Коши**. Решая задачу Коши, мы получаем **частное решение** уравнения.

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка

Так называют уравнение вида $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$. Для решения такого уравнения целесообразно ввести новую функцию $\frac{y(x)}{x} = p(x)$. Тогда $y(x) = xp(x)$ и $y' = p(x) + xp'(x)$. Подставляя в исходное уравнение, получим $p(x) + xp'(x) = F(p(x))$ или $p'(x) = \frac{F(p) - p}{x}$. Последнее уравнение – это уравнение с разделяющимися переменными. Решив его и найдя $p(x)$, мы найдем и $y(x) = xp(x)$.

Пример. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат. Выбрать среди кривых ту, которая проходит через точку (2,1).



Решение.

В соответствии с геометрическим условием $(x - \frac{y}{y'})^2 = (\frac{y}{y'})^2 + y^2$.

Упрощая, получим $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$. Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Вводя функцию $p(x)$, придем к уравнению с разделяющимися переменными $xp' = \frac{p(1+p^2)}{1-p^2}$. Разделив переменные, получим равенство дифференциалов $\frac{(1-p^2)dp}{p(1+p^2)} = \frac{dx}{x}$.

Левая дробь раскладывается на простейшие дроби следующим образом: $\frac{(1-p^2)}{p(1+p^2)}=\frac{1}{p}-\frac{2p}{(1+p^2)}$. В результате после интегрирования имеем $x=\frac{Cp}{1+p^2}$, и, возвращаясь к старой функции по формуле $y(x)=xp(x)$, получим

$$y=C(x^2+y^2).$$

Общее решение, то есть, семейство кривых, мы построили. Теперь нужно выбрать частное решение – ту кривую, которая проходит через точку (2,1). Подставляя координаты точки в уравнение, получим $1=C(4+1)$, то есть, $C=\frac{1}{5}$. Таким образом, уравнение выбранной кривой: $y=\frac{(x^2+y^2)}{5}$.

Уравнение в полных дифференциалах и приводимое к нему

Уравнение первого порядка $y'=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, очевидно, может быть записано в виде $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$. Представим теперь, что $M'_y=N'_x$ и эти функции непрерывны. Это означает, что существует такая функция $U(x,y)$, что $U'_x(x,y)=M(x,y),\ U'_y(x,y)=N(x,y)$. Действительно, ведь $U''_{xy}(x,y)=U''_{yx}(x,y)=M'_y(x,y)=N'_x(x,y)$. Итак, уравнение теперь имеет вид $U'_xdx+U'_ydy=0$ или $dU(x,y)=0$. Следовательно, решение исходного уравнения – множество неявно заданных функций $U(x,y)=C$.

Пример. Решить уравнение $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$. Мы видим, что условие $M'_y=N'_x$ выполняется. Перегруппировывая слагаемые в виде $(2xydx+x^2dy)-y^2dy=0$, можно заметить, что первая скобка – это $d(x^2y)$. Следовательно, уравнение можно переписать в виде $d(x^2y-y^3/3)=0$. Следовательно, решением является неявно заданная функция $x^2y-y^3/3=C$.

Иногда удается найти для произвольного дифференциального уравнения вида $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ такую функцию $\mu(x,y)$, что умножив обе части уравнения на эту функцию, мы превращаем его в уравнение в полных дифференциалах, так как $(\mu M)'_y=(\mu N)'_x$. Такой сомножитель называется **интегрирующим множителем**.

Пример. Решить уравнение $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$.

Сгруппируем члены уравнения следующим образом: $(x^2+y^2)dx+(xdx+ydy)=0$. Мы видим, что вторая скобка представляет собой $d(x^2+y^2)/2$. Разделим обе части уравнение на первую скобку: $dx+\dfrac{d(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)}=0$ или $d(x+\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{2})=0$. Отсюда $x+\ln(x^2+y^2)^{1/2}=C$. Здесь интегрирующим множителем явилась функция $\dfrac{1}{(x^2+y^2)}$.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Так называется дифференциальное уравнение вида $y'=a(x)y+b(x)$. Здесь сама функция и ее производная связаны линейно. Решать уравнение будем методом вариации произвольной постоянной. Для этого сначала решим соответствующее уравнение с нулевым свободным членом, называемое **линейным однородным** уравнением: $y'=a(x)y$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и имеет решение

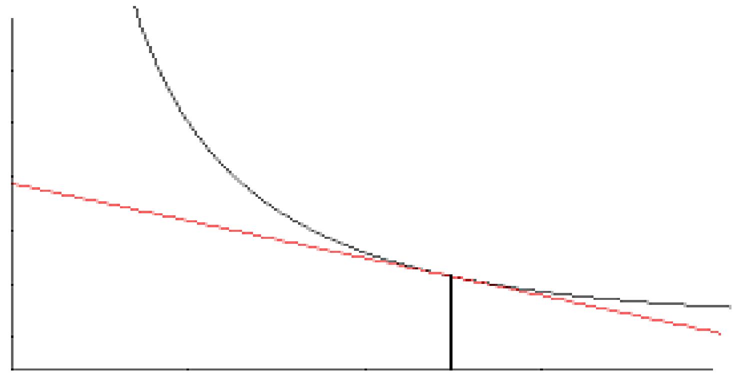
$$y=C\cdot e^{\int a(x)dx}.$$

Теперь мы будем искать решение исходного неоднородного уравнения в виде $y=C(x)\cdot e^{\int a(x)dx}$. Найдем неизвестный множитель $C(x)$, подставив y в указанном виде в заданное уравнение. Мы получим

$$C'(x)\cdot e^{\int a(x)dx}+C(x)\cdot a(x)e^{\int a(x)dx}=C(x)\cdot a(x)e^{\int a(x)dx}+b(x).$$

После взаимного уничтожения одинаковых слагаемых в левой и правой частях придем к соотношению $C'(x)\cdot e^{\int a(x)dx}=b(x)$. Отсюда мы найдем $C'(x)$, а затем и $C(x)$ с точностью до произвольного постоянного слагаемого

Пример. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a^2$.



Решение. Высота трапеции равна абсциссе точки касания x. Большее основание трапеции отличается от меньшего, равного y, на величину $-x \cdot y'$. Выражая площадь трапеции, получим соотношение $\frac{2y - xy'}{2} x = 3a^2$, откуда выведем линейное уравнение $y' = \frac{2}{x} y - \frac{6a^2}{x^2}$. Найдем сначала решение соответствующего однородного уравнения $y' = \frac{2}{x} y$. Это $y(x) = C \cdot x^2$. Теперь подставим выражение $y(x) = C(x) \cdot x^2$ в линейное неоднородное уравнение. Мы получим соотношение $C'(x) \cdot x^2 = -\frac{6a^2}{x^2}$, откуда $C(x) = \frac{2a^2}{x} + C$. Осталось подставить выражение $C(x)$ в представление $y(x)$. В результате получим общее решение $y(x) = \frac{2a^2}{x} + Cx^2$.

Уравнение Бернулли

К решению линейного уравнения сводится решение уравнения Бернулли $y' = a(x)y + b(x)y^n$, где $n \neq 1$. Действительно, если разделить обе части уравнения на y^n, то становится очевидной необходимость замены $\frac{1}{y^{n-1}} = z$. Действительно, уравнение принимает вид $z' = a(x)(1-n)z + b(x)(1-n)$ и оказывается линейным уравнением. Решив его и найдя $z(x)$, мы возвращаемся к функции $y(x)$ в соответствии с приведенной формулой.

Пример. Решить уравнение $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$. Введем новую функцию $z(x)=\dfrac{1}{y^2(x)}$. Тогда исходное уравнение сводится к линейному уравнению $z'=\dfrac{4z}{x}+2x^4e^x$. Решая соответствующее однородное уравнение, получим $z=Cx^4$, следовательно, решение неоднородного линейного уравнения следует искать в виде $z=C(x)\cdot x^4$. Подставив в уравнение, получим $C'(x)=e^x$ или $C(x)=e^x+C$. В итоге, восстановив $z(x)$ и перейдя к $y(x)$, получим общее решение $y^2(x)=\dfrac{1}{x^4e^x+Cx^4}$.

Понижение порядка дифференциального уравнения

До сих пор мы решали только дифференциальные уравнения первого порядка. Существуют дифференциальные уравнения высших порядков, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений первого порядка. Простейший пример: $y''=e^{2x}$. Очевидно, что для получения решения $y(x)$ достаточно дважды проинтегрировать правую часть. Заметим, что при первом интегрировании мы получаем постоянную интегрирования: $y'=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C_1$. При втором интегрирование мы снова получаем постоянную интегрирования – уже другую: $y=\dfrac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2$. Таким образом, общее решение дифференциального второго порядка содержит уже две произвольные постоянные. Очевидно, что решая подобное простейшее уравнение n-го порядка, мы получим n произвольных постоянных. Следовательно, что для получения частного решения дифференциального уравнения n-го порядка следует задавать n дополнительных условий.

1.Уравнение вида $F(x,y',y'')=0$. В этом случае следует взять за неизвестную функцию $z(x)=y'$. Найдя z, мы определим y интегрированием.

Пример. Решить уравнение $x^2y''=y'^2$. Введем функцию $z=y'$ и решим уравнение с разделяющимися переменными $x^2z'=z^2$. Получив его решение $z = \dfrac{x}{1 - C_1 x}$, найдем исходную функцию y: $y(x) = -\dfrac{x}{C_1} - \dfrac{1}{C_1^2}\ln|1 - C_1 x| + C_2$.

Для выделения из множества решений единственного решения можно задать условия: $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$. Например, $y(1) = 0,\ y'(1) = 2$.

Из последнего условия мы получим $C_1 = \dfrac{1}{2}$, то есть $y(x) = -2x - 4\ln|1 - x/2| + C_2$.

Из первого условия получим $C_2 = 2 - 4\ln 2$. Теперь частное решение, удовлетворяющее двум дополнительным условиям, имеет вид

$$y(x) = 2(1 - x) - 4\ln|2 - x|.$$

2. Уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$. В этом случае целесообразно сделать замену $z(y) = y'$. Заметим, что переменной во введенной функции является не x – как в предыдущем случае, а y. Теперь $y''(x) = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dy'}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = z' \cdot z$. Уравнение становится дифференциальным уравнением первого порядка. Решив его, то есть, найдя $z(y)$, мы получим $y(x)$ как решение уравнения с разделяющимися переменными $y' = z(y)$.

Пример. Решить уравнение $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$. Сделаем замену $z(y) = y'$ и запишем уравнение в виде $z \cdot z'(y) + z^2 = 2e^{-y}$. Очевидно, что здесь целесообразна еще одна замена: $z^2(y) = p(y)$. Уравнение принимает вид линейного уравнения первого порядка: $\dfrac{1}{2}p'(y) + p(y) = 2e^{-y}$. Решаем сначала соответствующее однородное ($p(y) = Ce^{-2y}$), а затем ищем решение неоднородного уравнения в виде $p(y) = C(y) \cdot e^{-2y}$. Подставляя в уравнение, получим $C'(y) = 4e^{y}$, и значит, $p(y) = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y}$. Следовательно, для определения функции $y(x)$ мы имеем уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}$. Это уравнения с разделяющимися уравнениями, и мы должны восстановить первообразные по дифференциалам: $\pm\frac{e^y dy}{\sqrt{4e^y + C_1}} = dx$. В результате получим общее решение: $\pm\sqrt{4e^y + C_1} = 2x + C_2$.

Для того чтобы найти частное решение, то есть, определить значения C_1 и C_2, недостаточно одного начального условия при решении задачи Коши. В случае дифференциального уравнения второго порядка задача Коши имеет два начальных условия: $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_1$.

Для данного примера зададим следующие начальные условия: $y(0) = 0, y'(0) = 0$. Тогда получим C_1 =-4, $C_2 = 0$. И решение примет вид $\pm\sqrt{e^y - 1} = x$ или $y(x) = \ln(1 + x^2)$.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Это уравнения, имеющие вид
$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = f(x)$, где $a_1, a_2, ..., a_n$ – постоянные коэффициенты.

Однородным линейным уравнением n-го порядка называются уравнения вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = 0$.

Решение однородного уравнения. Искать **частное** решение однородного уравнения будем в виде $y(x) = e^{kx}$. Подставив $y(x)$ в указанном виде в однородное уравнение, получим $(k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_n)e^{kx} = 0$. Следовательно, неизвестное значение сомножителя k мы найдем, если решим алгебраическое уравнение n-й степени

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_n = 0,$$

называемое **характеристическим уравнением.**

В соответствии с основной теоремой алгебры характеристическое уравнение имеет ровно n корней, считая все вещественные и комплексные корни с учетом их кратности.

Легко заметить, что если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно-независимых частных решения однородного уравнения, то $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2\, y_2(x)$ также удовлетворяет тому же однородному уравнению при любых C_1 и C_2 .

Рассмотрим все случаи корней характеристического уравнения и определим вид частного решения так, чтобы все частные решения были линейно-независимыми. Получив n линейно-независимых частных решений, мы сможем построить **общее** решение однородного уравнения $y(x) = C_1 y_1(x) + ... + C_n\, y_n(x)$, содержащее n произвольных постоянных и позволяющее решать любую задачу Коши с начальными данными $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Действительно, такая задача сведется к поиску конкретных значений постоянных $C_1, ... C_n$ из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + ... + C_n\, y_n(x_0) = y_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n\, y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

с ненулевым главным определителем системы

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) \ \ \dots\dots \ \ y_n(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \dots y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}.$$

а) **Простой вещественный корень**. Простому вещественному корню k_1 характеристического уравнения соответствует частное решение $y_1(x) = e^{k_1 x}$.

Пример. Решить однородное дифференциальное уравнение $y''' - 5y'' + 6y' = 0$. Построим характеристическое уравнение $k^3 - 5k^2 + 6k = 0$. Это характеристическое уравнение имеет три простых корня: $k = 0, k = 2, k = 3$. Поэтому общим решение исходного дифференциального уравнение является функция $y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.

б) **Вещественный корень кратности m.** Если корень k_0 характеристического уравнения имеет кратность m, то, естественно, мы не можем использовать m одинаковых частных решений вида $y(x) = e^{k_0 x}$, соответствующих этому корню, так как эти решения будут линейно зависимыми. В указанном виде мы сможем взять только одно из m частных решений. Можно показать, что все m частных решений, соответствующих данному корню характеристического уравнения, имеют вид $y_j(x) = x^{j-1} e^{k_0 x},\ j = 1,..,m$, то есть функции $x^{j-1} e^{k_0 x},\ j = 1,..,m$, удовлетворяют исходному однородному дифференциальному уравнению. Заметим, прежде всего, что если k_0 – корень уравнения $k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_n = 0$ кратности m, то k_0 – корень любого из уравнений $(k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_n)^{(j)} = 0,\ j = 1, ..., m-1.$

Покажем, как проводится доказательство того, что $xe^{k_0 x}$ (случай $j = 2$) удовлетворяет исходному однородному уравнению. Подставим $xe^{k_0 x}$ в левую часть исходного однородного дифференциального уравнения и получим

$$xe^{k_0 x} k_0^n + ne^{k_0 x} k_0^{n-1} + a_1 [xe^{k_0 x} k_0^{n-1} + (n-1)e^{k_0 x} k_0^{n-2}] + ... + a_{n-1}[xe^{k_0 x} k_0 + e^{k_0 x}] +$$
$$+ a_n xe^{k_0 x} = xe^{k_0 x}[k_0^n + a_1 k_0^{n-1} + ... + a_n] + e^{k_0 x}[nk_0^{n-1} + (n-1)k_0^{n-2} + ... + a_{n-1}] = 0.$$

Первое выражение в квадратных скобках обращается в ноль, так как k_0 – корень характеристического уравнения, второе выражение в квадратных скобках обращается в ноль, так как k_0 – корень уравнения $(k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_n)' = 0$. Подобным же образом можно показать, что функции $x^{j-1} e^{k_0 x},\ j = 3, .., m$, удовлетворяют исходному однородному дифференциальному уравнению.

Пример. Решить однородное дифференциальное уравнение $y^{(6)} - 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид $k^6 - 2k^5 + k^4 = 0$, и, следовательно, имеет корни 0 (кратности четыре) и 1 (кратности два). Поэтому общим решением исходного дифференциального уравнения является функция $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^x (C_5 + C_6 x)$.

в) **Простой комплексный корень.** При решении алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами наличие комплексного корня $\alpha + i\beta$ обеспечивает наличие комплексно сопряженного корня $\alpha - i\beta$. Поэтому можно было бы в качестве частных решений, соответствующих этой паре корней, взять функции $e^{(\alpha + i\beta)x}$ и $e^{(\alpha - i\beta)x}$. Однако для того, чтобы не привлекать комплексные числа для решения дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами, на основании формулы Эйлера $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$, в качестве частных решений берут функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y^{(4)}+4y''=0$. Характеристическим уравнением является уравнение $k^4+4k^2=0$. Корнями этого уравнения являются $k=0$ (кратности 2) и комплексные корни $\pm i2$. Поэтому общее решение имеет вид $y(x)=C_1+C_2x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$.

г) **Комплексные корни кратности** m**.** В случае, когда характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $\alpha\pm i\beta$ кратности m**,** соответствующие этим корням частные решения соответствующего однородного дифференциального уравнения имеют вид $x^{j-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ j=1,..,m$, и $x^{j-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,\ j=1,..,m$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(4)}+4y'''+14y''+20y'+25y=0.$$

Характеристическое уравнение можно представить в виде $(k^2+2k+5)^2=0$, следовательно, корнями характеристического уравнения являются $-1+2i$ (кратности 2) и $-1-2i$ (кратности 2). Поэтому общим решение заданного однородного дифференциального уравнения будет функция $y(x)=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2x\cos 2x+C_3\sin 2x+C_4x\sin 2x)$.

Решение неоднородного уравнения. Мы уже знаем, как найти общее решение однородного уравнения. Чтобы найти общее решение неоднородного уравнения, нужно найти **частное решение неоднородного уравнения** и прибавить к нему уже найденное общее решение соответствующего однородного уравнения. Действительно, пусть $y_0(x)$ – общее решение однородного уравнения $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=0$, содержащее n произвольных постоянных $C_1,...C_n$. Если $\tilde{y}(x)$ удовлетворяет неоднородному уравнению $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=f(x)$, то функция $\tilde{y}(x)+y_0(x)$ удовлетворяет тому же неоднородному уравнению и содержит произвольные постоянные $C_1,...,C_n$.

Таким образом, вопрос о нахождении общего решения неоднородного уравнения сводится к вопросу о нахождении частного решения неоднородного уравнения. Существуют разные методы построения такого решения. Рассмотрим **метод вариации произвольной постоянной,** который позволяет сразу получить общее решение неоднородного уравнения.

Суть этого метода в том, что, получив решение соответствующего однородного уравнения в виде $y_0(x)=C_1y_1(x)+...+C_ny_n(x)$, мы ищем общее решение неоднородного уравнения в виде $y(x)=C_1(x)y_1(x)+...+C_n(x)y_n(x)$ и подбираем такие неизвестные функции $C_1(x),...,C_n(x)$, чтобы функция $y(x)$ удовлетворяла неоднородному уравнению. Оказывается, что для этого достаточно, чтобы эти производные этих неизвестных функций удовлетворяли системе

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+...+C_n'(x)y_n(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+...+C_n'(x)y_n'(x)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots=0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x). \end{cases}$$

Докажем это для случая $n=2$. Пусть необходимо решить уравнение $y''+ay'+by=f(x)$. Решение однородного уравнения имеет вид $y_0(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, причем $y_j''+ay_j'+by_j=0,\ j=1,2$. Возьмем общее решение неоднородного уравнения в виде $y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ и подставим в неоднородное уравнение. Мы получим:

$$C_1''y_1+2C_1'y_1'+C_1y_1''+C_2''y_2+2C_2'y_2'+C_2y_2''+a(C_1y_1'+C_1'y_1+$$
$$+C_2y_2'+C_2'y_2)+b(C_1y_1+C_2y_2)=f(x).$$

Выражения, имеющие сомножителями C_1 и C_2, обращаются в ноль, поэтому имеем:

$$C_1''y_1+2C_1'y_1'+C_2''y_2+2C_2'y_2'+a(C_1'y_1+C_2'y_2)=f(x).$$

Пусть $C_1'y_1+C_2'y_2=0$. Взяв производные от обеих частей этого равенства, получим $C_1''y_1+C_1'y_1'+C_2''y_2+C_2'y_2'=0$. Поэтому для того, чтобы функция $y(x)$ была решением неоднородного уравнения, остается положить $C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x)$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$. Характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения имеет вид $k^2-2k+1=0$. Следовательно, общее решение однородного уравнения – функция $y_0(x)=C_1e^x+C_2xe^x$. Поэтому общее решение неоднородного уравнение ищем в виде $y(x)=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x$. Для определения неизвестных функций $C_1(x),C_2(x)$ составим систему относительно их производных

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'xe^x = 0, \\ C_1'e^x + C_2'(xe^x + e^x) = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Сокращая уравнения на e^x, мы получим систему с главным определителем, равным 1. Решая систему и интегрируя, получим

$$C_1(x) = -x + C_1,\ \ C_2(x) = \ln|x| + C_2.$$

Общее решение исходного уравнения запишется теперь в виде $y(x) = e^x(-x + C_1 + x\ln|x| + C_2 x)$. Заметим, что в силу произвольности константы C_2 выражение $-x + C_2 x$ можно заменить выражением $C_2 x$. Поэтому решение можно записать в виде $y(x) = e^x(C_1 + x\ln|x| + C_2 x)$.

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Системы уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + ... + a_{1n}y_n(x) + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + ... + a_{2n}y_n(x) + f_2(x), \\ \qquad\qquad .... \\ y_n' = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + ... + a_{nn}y_n(x) + f_n(x). \end{cases}$$

называются системами линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение системы предполагает, что мы должны найти n функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, удовлетворяющих уравнениям системы.

Имеет смысл рассматривать только системы первого порядка, так как в противном случае – например, если в уравнении системы встречается y_j'', следует ввести в рассмотрение дополнительную функцию $y_{n+1}(x) = y_j'$, заменить в системе y_j'' на y_{n+1}' и добавить к имеющимся уравнениям системы дополнительное: $y_j' = y_{n+1}(x)$.

Подобным образом любое линейное уравнение с постоянными коэффициентами n-го порядка сводится к системе из n линейных уравнений.

Обратное также возможно: решение системы линейных уравнений нетрудно свести к решению линейного уравнения высокого порядка. Покажем, как это делается для случая $n = 2$. Пусть нам нужно решить систему

$$\begin{cases} y_1' = ay_1(x) + by_2(x) + f_1(x), \\ y_2' = cy_1(x) + dy_2(x) + f_2(x). \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение и выразим в полученной правой части $y_2'(x)$ через правую часть второго уравнения. Мы получим

$$y_1'' = ay_1' + b(cy_1 + dy_2 + f_2) + f_1'.$$

А теперь входящую в полученную правую часть функцию $by_2(x)$ заменим ее выражением из первого уравнения исходной системы: $by_2 = y_1' - ay_1 - f_1$. Мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно функции $y_1(x)$:

$$y_1'' - (a+b)y_1' - (bc - ad)y_1 + df_1 - bf_2 + f_1' = 0.$$

Мы знаем, что решение этого уравнения представляет собой линейную комбинацию частных решений, которые строятся с помощью корней характеристического уравнения, плюс частное решение неоднородного уравнения. Таким образом, решения линейных систем также будут содержать линейные комбинации функций вида

$$x^m \cdot e^{kx}, \;\; x^m \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \;\; x^m \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x.$$

Приближенное решение дифференциальных уравнений

Класс уравнений, для которых можно получить точное решение, то есть, аналитическую функцию, удовлетворяющую заданному дифференциальному уравнению и всем дополнительным условиям (задача Коши или краевая задача), очень узок. Чаще всего дифференциальные уравнения решаются приближенно.

1. Приближение решения с помощью степенного ряда. Представим, что мы должны решить задачу Коши для дифференциального уравнения n-го порядка $y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ с начальным условием $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Если функция F в правой части уравнения разлагается в ряды по всем своим переменным, удобно искать решение дифференциального уравнения в окрестности точки $x = x_0$ в виде ряда Тейлора по степеням $(x - x_0)$. Представим решение в виде $y(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots$.

Из начальных условий и свойств коэффициентов ряда Тейлора следует, что все коэффициенты разложения вплоть до c_n нам известны:

$$y(x) = y_0 + y_1(x-x_0) + \frac{y_2}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{y_{n-1}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} +$$

$$+\frac{F(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1})}{n!}(x-x_0)^n + c_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \ldots,$$

остальные – неизвестные – коэффициенты обозначаются буквами c_k и определяются сравнением коэффициентов при одинаковых степенях, находящихся в обеих частях дифференциального уравнения.

Пример. Решить следующую задачу Коши:

$$y'' = xy' - y^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$$

Искать решение будем в виде ряда по степеням x. В соответствии с начальными условиями $y(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots$.

Подставим хотя бы первые слагаемые рядов в уравнение:

$$-1 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + \ldots = x(2 - x + 3c_3x^2 + \ldots) -$$

$$-(1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + c_3x^3 + \ldots)(1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + c_3x^3 + \ldots).$$

Перемножим входящие в правую часть сомножители:

$$-1 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + \ldots = 2x - x^2 + 3c_3x^3 + \ldots - (1 + 4x + 3x^2 + (2c_3 - 2)x^3 + \ldots)$$

А теперь сравним свободные члены (они равны) и коэффициенты при x, при x^2 и при x^3: $6c_3 = -2,\ 12c_4 = -4,\ 20c_5 = 2c_3 - 2$. Отсюда

$$c_3 = -\frac{1}{3},\ c_4 = -\frac{1}{3},\ c_5 = -\frac{2}{15}.$$

Мы могли бы и далее сравнивать коэффициенты при степенях x в уравнении и получать значения других коэффициентов c_k. Тем более применение программ MAXIMA упрощает этот процесс. В данном случае мы получили решение в виде ряда, первые члены которого известны: $y(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{15}x^5 + \ldots$.

Задачу Коши для системы уравнений можно решать подобным способом.

1. Метод Эйлера и его модификации. Познакомимся с методом Эйлера численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$. Предположим, что мы должны решить задачу на отрезке $[x_0, x_0 + b]$. Разделим отрезок

$[x_0, x_0+b]$ на n равных частей, равных Δ. Заменим на каждом отрезке $[x_0+k\Delta, x_0+(k+1)\Delta]=[x_k, x_{k+1}]$, $k=0,...,n-1$, решение дифференциального уравнения линейной функцией $\tilde{y}_k(x)=y_k+f(x_k,y_k)(x-x_k)$. При этом имеем узловые значения решения:

$$y_1=y_0+f(x_0,y_0)\Delta, y_2=y_1+f(x_1,y_1)\Delta,..., y_n=y_{n-1}+f(x_{n-1},y_{n-1})\Delta.$$

Мы здесь приравниваем отношение приращений функции и аргумента производной в точке, соответствующей началу отрезка разбиения:

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta}=f(x_k,y_k).$$

Очевидно, что такое приближение является тем менее точным, чем дальше мы отойдем от точки (x_0,y_0). Метод Эйлера является наиболее примитивным. Здесь интегральная кривая заменяется ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков. Возможны его некоторые модификации, несколько улучшающие точность. Например, если брать постоянные значения в виде

$$y_{k+1}=y_k+f(x_k+\frac{\Delta}{2}, y_k+f(x_k,y_k)\frac{\Delta}{2})\Delta.$$

2. Численные методы. Наиболее распространенным численным методом решения указанной задачи Коши является **метод Рунге-Кутта.** При решении дифференциального уравнения этим методом интегральная кривая заменяется ломаной, состоящей из кусков парабол. Метод Рунге-Кутта встроен в пакет программ MAXIMA.

Например, мы хотим решить дифференциальное уравнение $y'=y^2+x$ с начальным условием $y(0)=0.3$. При этом мы задаем отрезок [0,1], на котором хотим получить численное решение и шаг разбиения этого отрезка, равный 0.05. Мы должны ввести команду

load(dynamics); rk(y^2+x,y,0.3,[x,0,1,0.05]);

После того, как мы нажмем клавиши Shift+Enter, получим данные
[[0,0.3],[0.05,0.30583128660202],[0.1,0.31438277172198],
[0.15,0.32574776902574],[0.2,0.34003114365951],[0.25,0.35735268712942],
[0.3,0.37785103897622],[0.35,0.40168830090343],[0.4,0.42905553899765],
[0.45,0.46017943684494],[0.5,0.49533045405802],[0.55,0.53483297195895],

[0.6,0.57907808748734],[0.65,0.62853997325452],[0.7,0.6837970957275],
[0.75,0.74556013793749],[0.8,0.81470931041585],[0.85,0.8923450247018
2],
[0.9,0.97985793824278],[0.95,1.079027666994073],[1.0,1.1921649231469
31]].

Это означает, что мы получили узловые значения решения:

$y(0.05)$= 0.30583128660202,…, $y(0.4)$= 0.42905553899765,…..

Приближенное решение **дифференциальных уравнений высших порядков** сводятся к решению систем уравнений первого порядка. Например, требуется решить дифференциальное уравнение $y'' + x(y')^2 + 3x^2 y = 2$ на отрезке [0,2] с шагом 0.1 при начальных условиях $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$. Введем новую функцию $z = y'$. Теперь уравнение запишется в виде системы

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = 2 - xz^2 - 3x^2 y \end{cases}$$

с начальными условиями $y(0) = 1,\ z(0) = 0$.

Для получения решения методом Рунге-Кутта вводим команду **load(dynamics); rk([z,2-x*z^2-3*x^2*y], [y,z], [1,0], [x,0,2,0.1]).**

Мы получим значения в узлах:

[[0,1,0],[0.1,1.009973277486667,0.19889443755825],
[0.2,1.03953179049664,0.39025908431976],
[0.3,1.087443707860848,0.56407930484999],
[0.4,1.151355476824082,0.70808296273707],
[0.5,1.227625229955781,0.80905909503231],
[0.6,1.31132100772257,0.85473889531278],
[0.7,1.396404177611673,0.83546996450053],
[0.8,1.476033430956961,0.74483368487679],
[0.9,1.542855824183935,0.57873490276185],
[1.0,1.589128945076604,0.33294944409803],
[1.1,1.606518986789783,-9.8829227227875682*10^4],
[1.2,1.585353126452777,-0.44308261198787],
[1.3,1.512758668789601,-1.041803224981043],
[1.4,1.367721332806764,-1.927748829187044],
[1.5,1.104119674291387,-3.562685524381777],
[1.6,0.55276102463945,-9.157645341403534],
[1.7,-3.785389000081017,-789.9052329768924],
[1.8,-1.8741633219283803*10^14,-3.7934868677108632*10^30]].

Это означает, что, например,

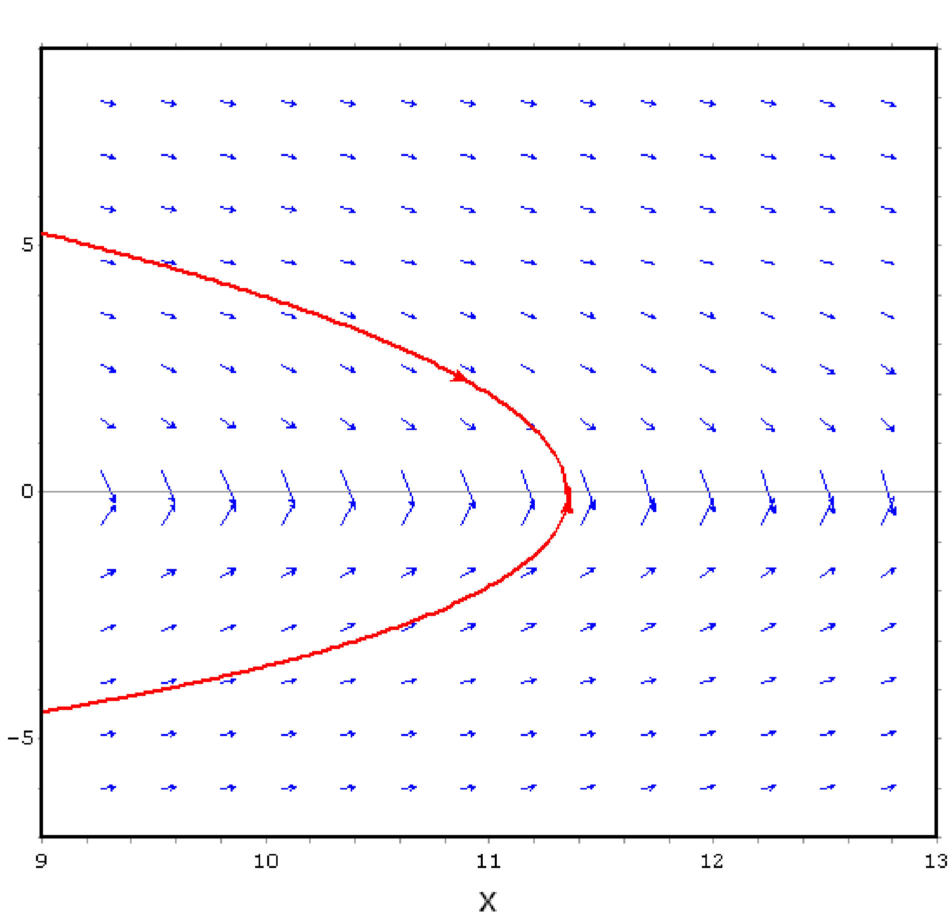
y(0.5)= 1.227625229955781, z(0.5)= 0.80905909503231.

3. Графический метод. Этим методом можно решать дифференциальные уравнения первого порядка вида $y' = f(x, y)$. Если нам необходимо построить интегральные кривые, которые являются графиками решений приведенного уравнения, в какой-то части плоскости XOY, мы каждой точке (x_0, y_0) этой области ставим в соответствие значение $f(x_0, y_0)$, которое совпадает с тангенсом угла наклона касательной к интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0). Зная точку и направление движения по кривой из этой точки, мы переходим к близкой точке, в которой также определяем направление движения,…. Так, двигаясь от точки к точке, мы построим соответствующую интегральную кривую, то есть, решим задачу Коши $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$.

Реальное построение решения таким методом было бы очень сложным без применения компьютерной техники. MAXIMA содержит программу построения графических решений. Если мы введем **load(plotdf); plotdf(f(x,y),[y,c,d],[x,a,b])**, на экране появится прямоугольник $[a,b]\times[c,d]$, в точках которого указаны направления касательных к интегральным кривым, проходящим через эти точки. Если щелкнуть курсором по выбранной точке на плоскости, компьютер нарисует интегральную кривую, проходящую через соответствующую точку.

Например, мы хотим построить интегральную кривую уравнения $y' = \dfrac{5 - x^2}{2xy - y^2}$, расположенную в прямоугольнике [9,13]×[-7,9] и проходящую через точку (11,2) .

Введем **load(plotdf); plotdf((5-x^2)/(2*x*y-y^2),[y,-7,9],[x,9,13]);** и нажмем Shift+Enter. Мы получим выбранный прямоугольник с указанием направлений из точек прямоугольника. Теперь щелкнем по точке (11,2) , и нарисуется соответствующая интегральная кривая.



Дифференциальные уравнения с частными производными

Дифференциальным уравнением с частными производными называется соотношение, содержащее функцию $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ и ее частные производные. Решить это уравнение – значит найти неизвестную функцию $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ в явном или неявном виде. Порядком такого уравнения называется наивысший порядок из входящих в уравнение производных.

Мы знаем, что в случае обыкновенных дифференциальных уравнений порядок уравнения определяет количество произвольных постоянных, входящих в решение.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений уравнения в частных производных имеют решения, содержащие не произвольные постоянные, а произвольные функции. Например, решением дифференциального уравнения первого порядка $u'_x = u'_y$ является $u(x, y) = f(x+y)$, где $f(t)$ – произвольная дифференцируемая функция одной переменной.

Рассмотрим в качестве следующего примера дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка $u''_{xy} = x \cdot y$. Последовательно восстановим искомую функцию: $u'_x = \frac{xy^2}{2} + f(x)$, где $f(x)$ – произвольная функция переменной *x*. Теперь

$$u(x, y) = \frac{x^2 y^2}{4} + \int f(x) dx + g(y) = \frac{x^2 y^2}{4} + f_1(x) + g(y),$$

где $f_1(x)$ и $g(y)$ – произвольные дифференцируемые функции своих аргументов.

Таким образом, решение последнего дифференциального уравнения в частных производных зависит от двух произвольных функций.

Для получения единственного решения недостаточно задавать значение искомой функции или ее производных в отдельных точках. Необходимо задавать решение на некоторых множествах точек. Так, например, чтобы получить единственное решение уравнения Лапласа $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ в некоторой конечной односвязной области, достаточно задать значения искомой функции $u(x, y)$ на границе этой области. Задача получения решения уравнения Лапласа, удовлетворяющего заданным граничным значениям, называется задачей Дирихле.

Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка имеют широкие приложения во многих областях физики. Решения этих уравнений сложны, и в большинстве случаев они решаются только приближенно численными методами. Методы решения таких уравнений изучаются в курсе «Уравнения математической физики».

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусак А.А. Высшая математика / А.А. Гусак. В двух томах. – Минск. ТетраСистемс, 2009.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. В двух томах. – М. Айрис Пресс, 2008.
3. Секаева Л.Р. Аналитическая геометрия на плоскости / Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. – Казань: Казанский государственный университет, 2008. – 56 с.
4. Секаева Л.Р. Элементы линейной алгебры. Векторная алгебра / Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. – Казань: Казанский государственный университет, 2008. – 52 с.
5. Туганбаев А.А. Основы высшей математики / А.А. Туганбаев.– Издательство «Лань», 2011. – 496 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2036.
6. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике / В.С. Шипачев – Москва, Высшая школа, 2004. – 304 с.

ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

Загрузка программы MAXIMA
http://sourceforge.net/projects/maxima/files/Maxima-Windows/5.28.0-Windows/maxima-5.28.0-2.exe/down

Интегральное исчисление
www.intuit.ru/shop/product.xhtml?id=2494713

Математика. Задачник
www.edu.ru/modules.php?op=modload&name=Web_Links&file=index&l_op

Практикум по работе в программе MAXIMA
http://www.pmtf.msiu.ru/chair31/students/spichkov/maxima2.pdf