Наибольшая подалгебра Хопфа в биалгебре

М. С. Еряшкин, С. М. Скрябин

Как известно, алгебры Хопфа выделяются среди биалгебр наличием антипода – обратного к тождественному отображению относительно операции конволюции. Для двух подалгебр Хопфа H_1, H_2 биалгебры B не ясно, всегда ли существует подалгебра Хопфа, содержащая H_1 и H_2 одновременно. Основной результат настоящей работы заключается в том, что ответ на этот вопрос положителен, если B слабо конечна, и в этом случае B имеет наибольшую подалгебру Хопфа $\mathscr{H}(B)$. Для произвольной алгебры Хопфа H образ любого гомоморфизма биалгебр $H \to B$ содержится в $\mathscr{H}(B)$.

Слабо конечными являются многие классы колец (см., например, [1] или [2]). В частности, сформулированный выше результат применим к любой нётеровой слева или справа биалгебре, а также к любой биалгебре, удовлетворяющей полиномиальному тождеству. По крайней мере, утверждение о гомоморфизмах $H \to B$ перестает быть верным без предположения о слабой конечности.

Следствие 2.4 показывает, что биидеал J алгебры Хопфа H с необходимостью является идеалом Хопфа (т.е. факторбиалгебра H/J является алгеброй Хопфа) при условии, что H/J слабо конечна. Это усиливает результат работы [3].

1. Наибольшая обратимая подкоалгебра. Все рассматриваемые алгебры и коалгебры определены над полем k. Алгебры предполагаются ассоциативными с единицей, коалгебры – коассоциативными с коединицей. Через $\Delta\colon C \to C \otimes C$ будем обозначать коумножение, а через $\varepsilon\colon C \to k$ – коединицу коалгебры C. Если A – алгебра, то векторное пространство $\operatorname{Hom}(C, A)$ всех линейных отображений $C \to A$ наделено структурой алгебры посредством конволюции $*$, задаваемой по формуле

$$\varphi * \psi = M \circ (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta, \qquad \varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(C, A),$$

где $M\colon A \otimes A \to A$ – умножение в A (см. [4], [5]). Единичным элементом этой алгебры служит отображение $u \circ \varepsilon$, где $u\colon k \to A$ определено сопоставлением $\alpha \mapsto \alpha 1_A$. В случае, когда $\dim C < \infty$, имеется канонический изоморфизм алгебр $\operatorname{Hom}(C, A) \cong C^* \otimes A$. Если $g\colon D \to C$ – морфизм коалгебр, а $f\colon A \to B$ – морфизм алгебр, то отображение

$$\operatorname{Hom}(g, f)\colon \operatorname{Hom}(C, A) \to \operatorname{Hom}(D, B), \qquad \varphi \mapsto f \circ \varphi \circ g,$$

является морфизмом алгебр. В частности, для обратимого элемента φ алгебры $\operatorname{Hom}(C, A)$ с обратным φ^{-1} имеем $f \circ \varphi^{-1} \circ g = (f \circ \varphi \circ g)^{-1}$ в $\operatorname{Hom}(D, B)$.

Пусть далее B – некоторая биалгебра. Если H – подалгебра Хопфа в B, то ее антипод s_H, рассматриваемый как линейное отображение $H \to B$, является обратным к отображению включения $H \to B$ в алгебре $\operatorname{Hom}(H, B)$. Это мотивирует следующее

Определение 1. Назовем подкоалгебру $C \subseteq B$ *слабо обратимой* в B, если отображение включения $i\colon C \to B$ обратимо в $\operatorname{Hom}(C, B)$. Обозначим $s_C = i^{-1}$. Назовем C *обратимой* в B, если, кроме того, $\operatorname{Im} s_C \subseteq C$.

Лемма 1.1. *Линейное отображение $\varphi\colon C \to A$ обратимо относительно $*$ в каждом из следующих случаев*:

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00222).