УДК 517.95, 004.942

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Н.В. Зайцева[1]

1 *n.v.zaiceva@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе рассматривается построение математической модели малых колебаний газа в цилиндрической трубе. Решение задачи получено с помощью системы компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: идеальный газ, начально-граничная задача, программа Maple.

Состояние газа, как известно [1], определяют три величины: скорость v, давление p и плотность ρ. Уравнения, описывающие малые колебания газа, выводятся из общих уравнений гидродинамики: уравнения неразрывности и уравнения движения в форме Эйлера:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho v)=0, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p, \tag{2}$$

где $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ – субстанциональная производная, то есть скорость частицы в данной точке, F – действующие внешние силы. Связь между давлением p и плотностью ρ зададим в форме адиабаты Пуассона

$$p=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}. \tag{3}$$

Звук в газе описывается малыми колебаниями величин v, p, ρ. При этом скорость v – малая величина, а давление p и плотность ρ незначительно отклоняются от начальных значений p_0 и ρ_0, которые в общем случае могут зависеть от пространственных координат. В силу малости колебаний в уравнениях можно пренебречь величинами второго порядка малости, в результате чего уравнения становятся линейными.

Для линеаризации уравнений введем новые величины: $\sigma=(\rho-\rho_0)/\rho_0$ – относительное изменение плотности (конденсация газа) и $q=p/p_0$ – относительное давление. Тогда уравнение (3) сводится к равенству

$$q=(1+\sigma)^{\gamma}\approx 1+\gamma\sigma.$$

Подставляя $\rho=\rho_0(1+\sigma)$ в уравнение (1), получим

$$\rho_0\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_0(1+\sigma)v)=0.$$

Так как σv – малая величина, то

$$\rho_0\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\rho_0\operatorname{div}v+(\operatorname{grad}\rho_0,v)=0.$$

Теперь перейдем в последнем равенстве от σ к q с учетом $\sigma=(q-1)/\gamma$:

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial t}+\operatorname{div}v+\frac{1}{\rho_0}(\operatorname{grad}\rho_0,v)=0. \tag{4}$$

В уравнении Эйлера (2) заменим $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ на $\partial v/\partial t$, пренебрегая малыми величинами. И пусть внешние силы отсутствуют. Наконец, подставляя $p_0 q$ вместо p в уравнение (2), будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad}(p_0\,q). \tag{5}$$

В цилиндрической системе координат (r,α,z) уравнения (4) и (5) принимают вид:

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial r}v_r+\frac{1}{\rho_0\,r}\frac{\partial\rho_0}{\partial\alpha}v_\alpha+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial z}v_z=0,$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial r}(p_0\, q), \qquad \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha}(p_0\, q), \qquad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}(p_0\, q). \tag{6}$$

Рассмотрим частный случай. Предположим, что газ радиально неоднороден, то есть $\rho_0 = \rho_0(r)$. К тому же, пусть имеет место степенная зависимость плотности от радиальной координаты $\rho_0(r) = r^\beta$. И кроме того, в силу закона Бойля-Мариотта, при постоянной температуре справедливо равенство $p_0(r) = k\rho_0(r)$. Пусть также искомые функции не зависят от координаты z. Представим функцию $q(r,\alpha,t)$ в виде ряда Фурье

$$q(r,\alpha,t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} q_m(r,t)e^{im\alpha}.$$

Тогда из (6) для коэффициентов ряда с номером m получим уравнения

$$\frac{\partial v_{r,m}}{\partial t} = -\frac{k}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial r}(\rho_0\, q_m), \quad \frac{\partial v_{\alpha,m}}{\partial t} = -\frac{imk}{r}q_m, \quad \frac{1}{\gamma}\frac{\partial q_m}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_{r,m}) + \frac{im}{r}v_{\alpha,m} + \frac{\rho'}{\rho_0}v_{r,m} = 0.$$

Исключая из этих уравнений $v_{r,m}$ и $v_{\alpha,m}$, получим

$$\frac{1}{\gamma k}\frac{\partial^2 q_m}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 q_m}{\partial r^2} + \frac{2\beta+1}{r}\frac{\partial q_m}{\partial r} + \frac{\beta^2 - m^2}{r^2}q_m.$$

Переходя теперь в последнем уравнении от относительного давления q к давлению p, с учетом $q = \dfrac{p}{p_0} = \dfrac{1}{k}r^{-\beta}p$, будем иметь

$$\frac{1}{\gamma k}\frac{\partial^2 p_m}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_m}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}p_m. \tag{7}$$

Пусть газ совершает малые колебания в цилиндрической трубе радиуса R. Исследуем малые колебания газа в цилиндре радиуса R, ограничиваясь пределами одного поперечного сечения. Найдем решение уравнения (7), удовлетворяющее классическим начальным условиям

$$p_m|_{t=0} = \varphi_m(r), \qquad p_{m\,t}|_{t=0} = \psi_m(r) \tag{8}$$

и граничному условию

$$p_m|_{r=R} = 0. \tag{9}$$

Граничное условие (9) означает, что конденсация газа на стенках цилиндрической трубы равна нулю. Данная физическая модель носит название "мягкая стенка". Потребуем, чтобы величина $p_m(r,t)$ была конечной во всех точках цилиндрической области.

Таким образом, начально-граничная задача (7) – (9) – математическая модель, описывающая малые колебания идеального или совершенного газа [1] в бесконечной неограниченной цилиндрической трубке, рассматриваемые в пределах одного поперечного сечения. Решение задачи (7) – (9) методом разделения переменных можно построить с помощью системы аналитических вычислений Maple [2], имеющей большие возможности для решения некоторых классических задач математической физики.

Литература

1. Крайко А.Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность / А.Н. Крайко. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2010. – 440 с.

2. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple / Д.П. Голоскоков. – СПб.: Питер, 2004. – 539 с.

MATHEMATICAL MODELING OF THE PROBLEM OF GAS DYNAMICS

N.V. Zaitseva

The construction of a mathematical model of small oscillations of a gas in a cylindrical tube is studied. The solution of the problem was obtained with the System of Computer Mathematics Maple.

Keywords: ideal gas, initial-boundary value problem, Maple program.