1/2009

Мәгариф

MƏĞƏRİF

ПРОСВЕЩЕНИЕ

ТАТАРСТАНДА
СПОРТ ҺӘМ СӘЛАМӘТ ЯШӘҮ РӘВЕШЕ ЕЛЫ

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Михаил КИНДЕР, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры ТГГПУ

Теория «покрытия» — обширный и интересный раздел комбинаторной геометрии, изучающей оптимальные конфигурации точек или фигур. Области, которые требуется покрыть, могут быть любой формы, конечными или бесконечными. Форма фигур, которыми требуется покрыть заданную фигуру, варьируется от задачи к задаче. Иногда требуется покрытие не конгруэнтными фигурами, а фигурами нескольких различных форм. Доказательство невозможности разрезания или покрытия в таких задачах удается получить, раскрасив клетки покрываемой фигуры специальным образом.

Эта статья посвящена обсуждению олимпиадных задач, связанных с замощением плоских областей фигурками специального вида. **Полиомино** — фигуры, составленные из единичных квадратов, примыкающих друг к другу сторонами. Впервые математический мир узнал о них в 1953 г. от С.В.Голомба. Его книга [1] является источником первоначальных сведений об этих фигурах для всех любителей занимательной математики. До сих пор не существует эффективного алгоритма, позволяющего для любого данного конечного набора различных или одинаковых полиомино определить, можно ли из него сложить мозаику в виде некоторой заданной фигуры или части плоскости.

Тема разрезания клетчатых фигур на полиомино часто встречается в олимпиадной практике, многие идеи и подходы к решению таких задач уже давно стали стандартными. В этой статье мы познакомимся с методом «раскраски».

1. «Шахматная» раскраска.

Сначала рассмотрим старинную занимательную задачу, связанную с разрезанием шахматной доски на «доминошки» — прямоугольники размером 1 × 2.

Пример 1. Можно ли замостить костяшками домино размером 1 × 2 шахматную доску 8 × 8, из которой вырезаны два противоположных угловых поля?

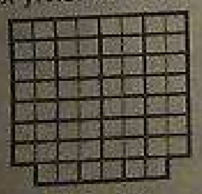

Рис. 1 а.

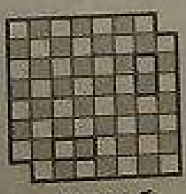

Рис. 1 б.

Решение. Замощение возможно, если вырезанные угловые клетки принадлежат одной боковой стороне *(рис. 1 а)*. Однако, если эти клетки находятся на несмежных боковых сторонах доски, то замостить ее доминошками уже не удается. Для доказательства используем то, что доска шахматная и все ее клетки раскрашены в «шахматном» порядке *(рис. 1 б)*.

Заметим, что вырезанные поля одного цвета, пусть для определенности черного. Значит, на доске осталось 32 белых и 30 черных клеток. Для их покрытия нужна 62 : 2 = 31 кость домино. Так как каждая доминошка всегда накрывает одну белую и одну черную клетку, то 31 костью домино можно накрыть только 31 белую и 31 черную клетки. Полученное противоречие означает, что нельзя замостить шахматную доску, из которой вырезаны два диагональных угловых поля.

Замечание. Обратите внимание на интересный факт: приведенное доказательство применимо к любой фигуре, у которой после раскрашивания в шахматном порядке клеток одного цвета оказывается больше, чем клеток другого цвета.

Следующая задача также использует идею шахматной раскраски для невозможности разрезания квадрата 10 × 10 на фигурки в форме буквы «Т».

Пример 2. Можно ли квадрат 10 × 10 клеток разрезать на фигурки Т-тетрамино из четырех клеток *(рис. 2 а)*?

Рис. 2 а.

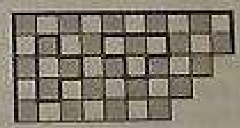

Рис. 2 б.

Решение. Докажем, что квадрат 10 × 10 невозможно разрезать на 10 × 10 : 4 = 25 фигурок в форме буквы Т. Раскрасим все клетки квадрата 10 × 10 в «шахматном» порядке. *(Фрагмент раскраски приведен на рис. 2 б.)* В отличие от предыдущей задачи при любом расположении плиток внутри квадрата каждая из них закроет либо одну, либо три черные клетки. Это затруднение удается преодолеть путем классификации фигурок, участвующих в разрезании квадрата. Пусть x фигурок закрывают по три черные клетки, а остальные $25 - x$ фигурок — по одной черной клетке, тогда всего черных клеток будет

$$3x + (25 - x) = 2x + 25.$$

Так как черных клеток 50, то имеем уравнение: $2x + 25 = 50$, откуда $x = 12{,}5$. Число плиток получилось нецелым, значит, разбить квадрат 10 × 10 на фигурки в форме буквы Т невозможно.

Замечание. Можно было бы обойтись и без вычислений. В самом деле, заметим, что в любом случае количество черных клеток, закрываемых каждой фигуркой, нечетно. Общее число фигурок также нечетно, поэтому количество закрытых черных клеток — как сумма 25 нечетных слагаемых — должно быть нечетным. Получили противоречие: количество черных клеток в квадрате равно четному числу 50.

2. Раскраска «зеброй».

«Шахматная» раскраска является неединственной при доказательстве невозможности разрезания фигуры. Тип раскраски, который используется в решениях следующих задач, существенно зависит от «геометрии» плиток, которыми покрывается данная фигура. Для