С помощью этого утверждения и неравенства (23) при $p=1$ можно получить следующее

Предложение 1.1. *Если $f \in L_1$ и при некотором натуральном k*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} E_n(f)_1 \ln(n+1) < \infty,$$

то функция $f(x)$ имеет $(k-1)$-ю абсолютно непрерывную производную, а $f^{(k)}(x) \in L \ln^+ L$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ульянов П. Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω. — Изв АН СССР. Сер. матем., 1968, т. 32, с. 649—686.
2. Ульянов П. Л. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в различных метриках.— Матем. сб., 1970, т. 81 (123) : 1, с. 104—131.
3. Тиман М. Ф. О вложении $L_p^{(k)}$ классов функций.— Изв. вузов. Матем., 1974, № 10, с. 61—74.
4. Timan M. F. Orthonormal systems satisfying an inequality of S. M. Nikol'skii.— Anal. Math., 1978, № 1, v. 4, p. 75—82.
5. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного.— М., 1960.— 624 с.
6. Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства.— М., 1948.— 456 с.
7. Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1951, т. 15, с. 219—242.
8. Тиман М. Ф. Наилучшее приближение и модуль гладкости функций, заданных на всей вещественной оси.— Изв. вузов. Матем., 1961, № 6, с. 108—120.
9. Зигмунд А. Тригонометрические ряды.— М.— Л., 1939.— 324 с.
10. Конюшков А. А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье.— Матем. сб., 1958, т. 44 (86) : 1, с. 53—84.

г. Днепропетровск

Поступила 14.05.1982

С. Н. Тронин

УДК 512.71

О СИСТЕМАХ ОБРАЗУЮЩИХ ПРОЕКТИВНЫХ АЛГЕБР

Рассматриваются проективные алгебры над кольцом A, коммутативные, ассоциативные, с единицей и, как правило, конечнопорожденные. Напомним, что A-алгебра B называется проективной, если существуют множество X и пара гомоморфизмов A-алгебр $\pi: A[X] \to B$, $\theta: B \to A[X]$ таких, что $\pi\theta = 1_B$. Центральным вопросом в теории проективных алгебр является вопрос об их изоморфности симметрическим алгебрам проективных A-модулей при некоторых ограничениях на A, напр., если A — поле ([1], с. 515; [2], с. 501). Однако ситуация, в которой π и θ имеют достаточно общий вид, а не возникают, скажем, из изоморфизма $B[Y_1, \ldots, Y_m] \simeq A[X_1, \ldots, X_{m+r}]$ (проблема сокращения; см. [3]—[5]), изучена недостаточно. В § 2 данной работы, в предположении $\mathrm{Ker}(\pi) \subset (X)$, где (X) — идеал, порожденный множеством X, по π и θ строятся естественным образом гомоморфизмы A-алгебр $\Phi: B \to S_B(\Omega^1_{B/A})$, $\Psi: S_B(\Omega^1_{B/A}) \to B$, причем $\Phi(b) = b + d_{B/A}(b) + \ldots$ Здесь $S_B(M)$ — симметрическая алгебра B-модуля M, $\Omega^1_{B/A}$ — модуль A-дифференциалов B, $d_{B/A} = d: B \to \Omega^1_{B/A}$ — универсальное A-дифференцирование ([6]; [7], гл. 2, § 8). Из Φ и Ψ с помощью π и θ строятся согласованные с фильтрациями мономорфизмы

$$\varphi: B \to S_A(\Omega^1_{B/A} \otimes_B A), \ \psi: S_A(\Omega^1_{B/A} \otimes_B A) \to B,$$

причем оказывается, что $\mathrm{gr}(\varphi)$ и $\mathrm{gr}(\psi)$ — взаимно обратные биекции. Подробности о задании фильтрации на B и структуры B-алгебры на A см. в § 2. В § 3 данной работы находятся некоторые достаточные условия биективности φ или ψ в случае, когда A как абелева группа не имеет кручения. В § 1 собран ряд вспомогательных фактов и определений.

Название работы отражает тот факт, что задание π и θ практически равносильно заданию некоторой системы полиномов $f = \{f_1, \ldots, f_n \mid f_i \in A[X_1, \ldots, X_n]\}$ таких, что $f_i(f_1, \ldots, f_n) = f_i$ для всех i. Соответствие устанавливается равенствами $f_i = \theta\pi(X_i)$. Алгебру B можно при помощи θ отождествить с $A[f] = A[f_1, \ldots, f_n] \subset A[X_1, \ldots, X_n]$, тогда $\pi(X_i) = f_i$ и f можно считать системой образующих B. Многие вычисления удобнее проводить именно в терминах этих полиномов.

§ 1. Системы образующих и модули дифференциалов проективных алгебр

Условимся о следующем. Будем рассматривать системы полиномов вида $f = \{f_1, \ldots, f_n \mid f_i \in A[X_1, \ldots, X_n]\}$ как элементы A-модуля $A[X]^n$. Если f и g — две такие системы, то $f(g)$ будет обозначать систему $\{f_i(g_1, \ldots, g_n) \mid i \in [1, n]\}$ ([8], гл. 3, § 4, п. 4, с. 278). Система из n нулей обозначается символом 0 так, что $f(0)$ — система свободных членов f, а $f(0) = 0$ означает равенство свободных членов нулю. Если $h \in A[X_1, \ldots, X_n]$, то $h(f)$ — подстановка системы f в полином h.

Необходимое нам „дифференциальное исчисление" — это гомоморфизм $\Delta: A[X] \to A[X][Y]$, где $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, $Y = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$, $\Delta(X_i) = X_i + Y_i$ для всех i. Будем пользоваться мультииндексными обозначениями [9] (с. 9). В частности, если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — n-ка целых неотрицательных чисел, то $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $Y^\alpha = Y_1^{\alpha_1} \ldots Y_n^{\alpha_n}$. Определим $\Delta_\alpha^k(h)(X) \in A[X_1, \ldots, X_n]$, где $k = |\alpha|$, $h \in A[X_1, \ldots, X_n]$, из равенства

$$\Delta(h)(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha, |\alpha| = k} Y^\alpha \Delta_\alpha^k(h)(X).$$

Лемма 1.1. *Пусть h — полином, f — система из n полиномов, Δ_i^1 обозначает Δ_α^1 для $\alpha = (0 \ldots 1 \ldots 0)$ (на i-ом месте находится единица). Тогда*

$$\Delta_i^1(h)(X) = (\partial h / \partial X_i)(X), \quad \Delta_i^1(h(f))(X) = \sum_{j=1}^{n} \Delta_i^1(f_j)(X) \Delta_j^1(h)(f).$$

Вид последнего тождества объясняется тем, что мы рассматриваем правые модули и их гомоморфизмы, действующие слева. Нам не понадобятся другие свойства Δ. Часть из них вполне аналогична тождествам из [10] (лемма 27, с. 470).

Пусть теперь B — проективная алгебра. Гомоморфизмы $\pi: A[X] \to B$, $\theta: B \to A[X]$ такие, что $\pi\theta = 1_B$, будем называть представляющей парой (п. п.) алгебры B, соответствующую им систему полиномов $f = \{f_1, \ldots, f_n \mid f_i = \theta\pi(X_i)\}$ такую, что $f(f) = f$, — представляющей системой полиномов алгебры B (п. с.). Пусть $\mathfrak{A} = \mathrm{Ker}(\pi)$.

Лемма 1.2. (а) *$\mathfrak{A}$ порожден полиномами $X_i - f_i$, $i \in [1, n]$;*

(б) *$h \in \mathfrak{A}^m$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\alpha^k(h)(f) = 0$ для всех мультииндексов α с $|\alpha| = k < m$.*

Вернемся к случаю произвольной A-алгебры B. Будем называть гомоморфизм A-алгебр $\varepsilon: B \to A$ аугментацией B, т. к. термин „пополнение" необходим для топологического объекта. Очевидно, что проективные алгебры обладают аугментациями. Сюръективный гомоморфизм A-алгебр $\pi: A[X] \to B$ назовем правильным, если $\mathrm{Ker}(\pi) \subset (X)$.

Лемма 1.3. *Равносильны утверждения*:

(а) *множество аугментаций A-алгебры B непусто*;

(б) *существует правильный сюръективный гомоморфизм* $\pi: A[X] \to B$.

Следствие 1.1. *Пусть B — проективная A-алгебра. Существует правильный сюръективный гомоморфизм* $\pi: A[X] \to B$ *и для любого* $\theta: B \to A[X]$ *такого, что* $\pi\theta = 1_B$, *и системы полиномов* f, *соответствующей паре* (π, θ), *выполняется* $f(0) = 0$.

Доказательство. $X_i - f_i \in \operatorname{Ker}(\pi) \subset (X)$, откуда и следует, что у f_i нет свободного члена.

Нас интересуют главным образом представляющие пары (π, θ), в которых π — правильный гомоморфизм (правильные представляющие пары — п. п. п.), и соответствующие им представляющие системы f с $f(0) = 0$ (правильные представляющие системы — п. п. с.). Согласно предыдущему утверждению, они существуют и строятся так: если $\mathfrak{B} \subset B$ — идеал аугментации, т. е. $B = A \oplus \mathfrak{B}$, и $b_1, \ldots, b_n$ из $\mathfrak{B}$ таковы, что $B = A[b_1, \ldots, b_n]$, то $\pi: A[X_1, \ldots, X_n] \to B$, где $\pi(X_i) = b_i$ — правильный гомоморфизм.

Лемма 1.4. *Проективная алгебра B изоморфна $S_A(P)$ тогда и только тогда, когда существует п. п. с. f алгебры B такая, что* $\deg(f_i) \leqslant 1$ *для всех* i.

В связи с этой леммой заметим, что если f — п. п. с. алгебры B и для каждого i v_i означает линейную часть f_i, то система $v = \{v_i\}$ удовлетворяет условиям $v(v) = v$, $v(0) = 0$. Следовательно, алгебра $A[v] \subset A[X]$ является проективной и согласно предыдущей лемме даже симметрической. За модуль P можно взять A-модуль $\sum v_i A$.

Предложение 1.1. *Пусть B, C суть A-алгебры,* $\pi: C \to B$, $\theta: B \to C$ — *гомоморфизмы A-алгебр и* $\pi\theta = 1_B$. *Если* $\mathfrak{A} = \operatorname{Ker}(\pi)$, *то имеет место точная расщепляющаяся последовательность B-модулей*

$$0 \to \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2 \xrightarrow{\sigma} \Omega^1_{C/A} \otimes_C B \xrightarrow{\bar{\pi}} \Omega^1_{B/A} \to 0, \qquad (*)$$

в которой $\sigma(c \bmod \mathfrak{A}^2) = dc \otimes 1$, $\bar{\pi}(dx \otimes 1) = d\pi(x)$ *и расщепляющим для* $\bar{\pi}$ *служит* $\bar{\theta}$, *действующий по правилу* $\bar{\theta}(db) = d\theta(b) \otimes 1$.

Доказательство. Необходимо установить только расщепляемость, т. к. остальное известно ([7], гл. 2, § 8, предложение 8.4A, с. 225). Соответствие $c \to (c - \theta\pi(c)) \bmod \mathfrak{A}^2$ определяет A-дифференцирование из C в $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$, а следовательно, и гомоморфизм $\tau: \Omega^1_{C/A} \otimes_C B \to \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$. Непосредственная проверка показывает, что $\tau\sigma = 1$, $\bar{\pi}\bar{\theta} = 1$.

Как следствие отсюда получается, что если B — проективная A-алгебра, то $\Omega^1_{B/A}$ — проективный B-модуль, конечнопорожденный, если конечно порождена B. Достаточно взять в качестве C алгебру $A[X]$, в качестве π и θ — любую п. п. алгебры B. Рассмотрим матрицу Якоби п. с. f, соответствующей п. п. (π, θ):

$$\Delta^1(f)(X) = \begin{pmatrix} \Delta^1_1(f_1)(X) & \ldots & \Delta^1_1(f_n)(X) \\ \Delta^1_2(f_1)(X) & \ldots & \Delta^1_2(f_n)(X) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta^1_n(f_1)(X) & \ldots & \Delta^1_n(f_n)(X) \end{pmatrix}.$$

Из $f(f) = f$ согласно лемме 1.1 следует, что $\Delta^1(f)(X) = \Delta^1(f)(X)\Delta^1(f)(f)$. Это влечет идемпотентность $\Delta^1(f)(f)$. Отождествляя B с $A[f]$, легко заметить, что $\Delta^1(f)(f)$ есть матрица эндоморфизма $\bar{\theta}\bar{\pi}$ свободного B-модуля $\Omega^1_{A[X]/A} \otimes_{A[X]} B$ в базисе $dX_1 \otimes 1, \ldots, dX_n \otimes 1$. Если f — п. п. с., то $\Delta^1(f)(0) = \Delta^1(v)(v)$ также идемпотентна. Можно рассмотреть точную последовательность вида $(*)$ для алгебры $A[v]$ и ее п. п. п., соответствующей п. п. с. v, откуда видно, что $\Delta^1(f)(0)$ имеет для $A[v]$ тот же смысл, который имеет $\Delta^1(f)(f)$ для $B \simeq A[f]$.

Лемма 1.5. *A-модуль $P=\sum v_iA$ изоморфен модулю $\Omega^1_{B/A}\otimes_B A$, где структура B-алгебры на A возникает из аугментации $B\xrightarrow{\theta}A[X]\to A$, причем последняя стрелка—это гомоморфизм, переводящий все X_i в нуль. Изоморфизм можно выбрать так, чтобы v_i соответствовал элементу $df_i\otimes 1$.*

В дальнейшем всегда используется именно описанная в этой лемме структура B-алгебры на A, т. е. аугментация B, и изоморфизм между P и $\Omega^1_{B/A}\otimes_B A$, соответствующие п. п. п. (π, θ) и п. п. с. f.

Предложение 1.2. *Пусть M есть A-модуль, V есть $S_A(M)$-модуль, $\mathrm{in}: M\to S_A(M)$ — естественное вложение. Для любого гомоморфизма A-модулей $\tau: M\to V$ существует одно и только одно A-дифференцирование $\delta: S(M)\to V$ такое, что $\delta\,\mathrm{in}=\tau$.*

Доказательство начинается с построения по τ дифференцирования из тензорной алгебры M в модуль V, а затем непосредственная проверка показывает, что оно обращается в нуль на идеале, порожденном всеми $x\otimes y-y\otimes x$.

Заметим, что предложения 1.1 и 1.2 допускают обобщение на модули кэлеровых дифференциалов произвольных порядков.

§ 2. Построение гомоморфизмов Ψ, Φ, ψ, φ

Гомоморфизмы ψ и φ будут построены двумя способами, из которых первый допускает некоммутативное обобщение.

Предложение 2.1. *Пусть K — не обязательно коммутативная A-алгебра с фильтрацией $K=K_0\supset K_1\supset K_2\supset\ldots$, $K_0=A\oplus K_2$, B и C — некоторые A-алгебры. Допустим, что:*

(а) *C — фильтрованная алгебра, $C=C_0\supset C_1\supset C_2\supset\ldots$, $\bigcap C_n=0$, причем $C_n=C^n\oplus C_{n+1}$, $C^0=A$ и существуют согласованные с фильтрациями гомоморфизмы A-алгебр $\rho_1: K\to C$, $\rho_2: C\to K$ такие, что $\rho_1\rho_2=1_C$;*

(б) *существуют гомоморфизмы A-алгебр $\pi_1: K\to B$, $\pi_2: B\to K$ такие, что $\pi_1\pi_2=1_B$, и если положить $B_n=\pi_1(K_n)$, то $\bigcap B_n=0$ и для всех n $B_n=B_{n-1}B_1$;*

(в) *существуют множества элементов $\{x_\alpha\mid x_\alpha\in B_1,\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$, $\{y_\alpha\mid y_\alpha\in C^1,\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$ такие, что x_α порождают A-алгебру B, $\bar y_\alpha$ порождают A-алгебру $\mathrm{gr}(C)$ (черта означает переход к $C_1/C_2=\mathrm{gr}^1(C)$) и для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$*

$$y_\alpha-\rho_1\pi_2(x_\alpha)\in C_2,\quad x_\alpha-\pi_1\rho_2\rho_1\pi_2(x_\alpha)\in B_2.$$

При выполнении этих условий $\varphi=\rho_1\pi_2: B\to C$, $\psi=\pi_1\rho_2: C\to B$ суть мономорфизмы, согласованные с фильтрациями, причем $\mathrm{gr}(\varphi)$ и $\mathrm{gr}(\psi)$ — взаимно обратные биекции и $\forall n\,(B_n=\psi(C^n)\oplus B_{n+1})$.

Доказательство. Сначала покажем, что φ и ψ согласованы с фильтрациями. ψ есть композиция согласованных с фильтрациями гомоморфизмов. Чтобы убедиться в согласованности φ, достаточно проверить, что $\varphi(x_\alpha)\in C_1$ для всех α. Но $\varphi(x_\alpha)=\rho_1\pi_2(x_\alpha)\equiv y_\alpha \bmod C_2$ и $y_\alpha\in C^1$, откуда это и следует.

Пусть $\mathfrak{A}_1=\{\alpha\in\mathfrak{A}\mid x_\alpha\notin B_2\}$. Если $\beta\notin\mathfrak{A}_1$, то $y_\beta=0$. В самом деле, из $x_\beta\in B_2$ вытекает $\rho_1\pi_2(x_\beta)\in C_2$. Но т. к. $y_\beta\in C^1$ и $y_\beta-\rho_1\pi_2(x_\beta)\in C_2$, то $y_\beta\in C^1\cap C_2=0$. Можно считать, что $\mathfrak{A}_1\neq\varnothing$. В противном случае, $B_1=B_n$ для всех n, откуда следует $B_1=0$, т. е. $K_1\subset\mathrm{Ker}(\pi_1)$ и B есть фактор-кольцо A. Существование π_2 возможно лишь при $B=A$. С другой стороны, при $\mathfrak{A}_1=\varnothing$ все $y_\alpha=0$. Следовательно, $\mathrm{gr}(C)=A$, и из $\bigcap C_n=0$ получаем $C=A$, так что утверждение 2.1 выполняется тривиальным образом. Ввиду этого без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1$, и элементы $\bar x_\alpha\in\mathrm{gr}^1(B)$ порождают A-алгебру $\mathrm{gr}(B)$.

По определению $\mathrm{gr}(\psi)(\bar{y}_\alpha)=\overline{\pi_1\rho_2(y_\alpha)}$. Так как $\pi_1\rho_2(y_\alpha)\equiv\pi_1\rho_2\rho_1\pi_2(x_\alpha) \bmod B_2$ и $\pi_1\rho_2\rho_1\pi_2(x_\alpha)\equiv x_\alpha \bmod B_2$, то $\mathrm{gr}(\psi)(\bar{y}_\alpha)=\bar{x}_\alpha$. С другой стороны, $\mathrm{gr}(\varphi)(\bar{x}_\alpha)=\overline{\rho_1\pi_2(x_\alpha)}=\bar{y}_\alpha$. Значит, $\mathrm{gr}(\varphi)$ и $\mathrm{gr}(\psi)$ биективно переводят друг на друга множества $\{\bar{x}_\alpha \mid \alpha\in\mathfrak{A}\}$ и $\{\bar{y}_\alpha \mid \alpha\in\mathfrak{A}\}$. Отсюда следует, что $\mathrm{gr}(\varphi)$ и $\mathrm{gr}(\psi)$ — взаимно обратные биекции. Ввиду отделимости фильтраций φ и ψ — мономорфизмы ([8], гл. 3, § 1, следствие 1 из теоремы 1, с. 209). Теперь рассмотрим фактор-гомоморфизм $\gamma_n: B_n\to \mathrm{gr}^n(B)$ и изоморфизм $\delta_n: C^n\to \mathrm{gr}^n(C)$, переводящий $y_{\alpha_1}\dots y_{\alpha_n}$ в $\bar{y}_{\alpha_1}\dots \bar{y}_{\alpha_n}$. Ограничение ψ на C^n снова обозначим через ψ. Легко убедиться, что композиция $\delta_n^{-1}\mathrm{gr}^n(\varphi)\gamma_n\psi$ есть тождественный эндоморфизм C^n. Отсюда вытекает последнее утверждение 2.1.

Чтобы применить 2.1 к проективным алгебрам, возьмем в качестве K алгебру $A[X]$ с ее естественной фильтрацией, в качестве B — проективную алгебру, в качестве π_1 и π_2 — п. п. п. (π, θ) алгебры B. Легко проверить, что если взять $B_m=\pi((X)^m)$, то условия п. (б) выполнены. Пусть f — п. п. с., соответствующая паре (π, θ), v — система линейных частей f. В качестве C возьмем алгебру $A[v]=S_A(P)$, $P=\sum v_iA$, с ее естественной фильтрацией, и пусть ρ_2 и ρ_1 — естественные вложение и проекция: $\rho_1(X_i)=v_i$. Осталось заметить, что если взять за $\{x_\alpha\}$ и $\{y_\alpha\}$ множества $\{f_i\}$ и $\{v_i\}$, отождествляя B с $A[f]$, то все условия утверждения 2.1 окажутся выполненными. Отождествим P с $\Omega^1_{B/A}\otimes_B A$ и сформулируем результат в виде отдельного предложения.

Предложение 2.2. *По данной п. п. п. проективной алгебры B естественным образом можно построить мономорфизмы $\psi: S_A(\Omega^1_{B/A}\otimes_B A)\to B$, $\varphi: B\to S_A(\Omega^1_{B/A}\otimes_B A)$. Если рассмотреть на B фильтрацию, перенесенную из $A[X]$ при помощи первого члена п. п. п., то ψ и φ оказываются согласованными с фильтрациями, а $\mathrm{gr}(\psi)$ и $\mathrm{gr}(\varphi)$ — взаимно обратными биекциями.*

Если не проводить отождествления P, то, очевидно, $\psi(v_i)=v_i(f)$ и $\varphi(f_i)=f_i(v)$.

Пусть C — какая-нибудь алгебра с фильтрацией, тогда $\hat{C}$ будет означать ее пополнение, а ν_C — естественный гомоморфизм из C в $\hat{C}$.

Следствие 2.1. *В сделанных выше предположениях существуют согласованные с фильтрациями мономорфизмы $\xi: B\to\hat{S}_A(P)$, $\zeta: S_A(P)\to\hat{B}$ такие, что $\xi\psi=\nu_{S(P)}$, $\zeta\varphi=\nu_B$. Алгебры $\hat{B}$ и $\hat{S}_A(P)$ изоморфны.*

Следствие 2.2. *Сохраняются обозначения, введенные перед формулировкой предложения 2.2, причем B предполагается конечнопорожденной. Из $\mathrm{Im}(\rho_2)\subset\mathrm{Im}(\theta)$ или $\mathrm{Im}(\theta)\subset\mathrm{Im}(\rho_2)$ следует $\mathrm{Im}(\rho_2)=\mathrm{Im}(\theta)$. В этом случае, конечно, φ и ψ — изоморфизмы. Включения равносильны тождествам $v(f)=v$ и $f(v)=f$ соответственно. Для того чтобы ψ был изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы для каждого i, f_i был A-линейной комбинацией полиномов $v_j(f)$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Im}(\rho_2)\subset\mathrm{Im}(\theta)$. Тогда $B=\psi(S(P))\oplus\pi(\mathrm{Ker}(\rho_1)\cap\mathrm{Im}(\theta))$. Обозначим идеал $\pi(\mathrm{Ker}(\rho_1)\cap\mathrm{Im}(\theta))$ через $\mathfrak{B}$ и рассмотрим точную последовательность типа (*): $0\to\mathfrak{B}/\mathfrak{B}^2\to\Omega^1_{B/A}\otimes_B S(P)\to\Omega^1_{S(P)}\to 0$. Модуль $\Omega^1_{B/A}\otimes_B S(P)$ изоморфен образу эндоморфизма свободного $S(P)$-модуля с матрицей $\Delta^1(f)(f(v))$, а $\Omega^1_{S(P)/A}$ — образу эндоморфизма с матрицей $\Delta^1(f)(0)$. Так как модули конечно порождены, то ясно, что их ранги равны. Отсюда $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}^2$, но в проективных алгебрах это возможно лишь при $\mathfrak{B}=0$. Аналогичным образом рассматривается ситуация с $\mathrm{Im}(\theta)\subset\mathrm{Im}(\rho_2)$. Докажем последнее утверждение. Для этого рассмотрим естественную возрастающую фильтрацию $A[X]$, которая с помощью π переносится на B и индуцирует естественную возрастающую фильтрацию на $A[v]=S(P)$. Очевидно, что ψ согласован и с возрастающими фильтрациями (чего нельзя сказать о φ). Рассмотрим соответствующий гомоморфизм ассоциированных градуированных алгебр. Согласно [8] (гл. 3, § 1, следствие 2 из теоремы 1, с. 209) из его сюръективности следует сюръективность ψ. Таким образом, все сводится к сюръективности гомоморфизма A-модулей $\sum v_i A \to \sum f_i A$, переводящего v_j в $v_j(f)$.

Замечание. Если X — множество из одного элемента, то условия следствия 2.2 выполнены. К этому фактически и сводится доказательство теоремы 3.4 в [2] (с. 498).

Предложение 2.3. *Пусть B — проективная A-алгебра, (π, θ) — ее п. п. п. По ней естественным образом строится гомоморфизм A-алгебр $\Phi = \Phi(\pi, \theta): B \to S_B(\Omega^1_{B/A})$ со следующими свойствами:*

(а) $\Phi(b) = b + d_{B/A}(b) + \ldots$;

(б) *композиция* $B \xrightarrow{\Phi} S_B(\Omega^1_{B/A}) \to S_B(\Omega^1_{B/A}) \otimes_B A \simeq S_A(\Omega^1_{B/A} \otimes_B A)$ *совпадает с определенным выше мономорфизмом* φ.

Доказательство. Рассмотрим $\Delta: A[X] \to A[X][Y]$, алгебру $A[X][Y]$ отождествим с $S_{A[X]}(\Omega^1_{A[X]/A})$, считая переменные $Y_1, \ldots, Y_n$ базисом $dX_1, \ldots, dX_n$. Искомый гомоморфизм есть композиция

$$B \xrightarrow{\theta} A[X] \xrightarrow{\Delta} S_{A[X]}(\Omega^1_{A[X]/A}) \to S_{A[X]}(\Omega^1_{A[X]/A}) \otimes_{A[X]} B \simeq$$

$$\simeq S_B(\Omega^1_{A[X]/A} \otimes_{A[X]} B) \xrightarrow{S(\bar{\pi})} S_B(\Omega^1_{B/A}),$$

где $\bar{\pi}$ взят из точной последовательности (*). Заметим, что Δ при отождествлении $A[X][Y]$ с симметрической алгеброй сам удовлетворяет условию типа (а). Отсюда следует выполнимость такого условия для Φ. Доказательство п. (б) проще всего провести, отождествив B с $A[f]$, $S_A(\Omega^1_{B/A} \otimes_B A)$ — с $A[v]$ и вычислив образы элементов f_i. Тогда окажется, что

$$\Phi(f_i) = \sum_k \sum_\alpha (df)^\alpha \Delta^k_\alpha(f_i)(f),$$

и т. к. $df_j \otimes 1$ отождествлен с v_j, то $\Phi(f_i)$ переходит в

$$\sum_k \sum_\alpha v^\alpha \Delta^k_\alpha(f_i)(0) = f_i(v).$$

Как уже отмечалось, именно таким образом действует гомоморфизм φ.

Предложение 2.4. *Сохраняются те же соглашения и обозначения. Рассмотрим на B „тривиальную" B-модульную структуру: $xb = x\varepsilon(b)$, где $\varepsilon: B \to A$ есть композиция θ и естественной аугментации $A[X]$. Существует ровно одно A-дифференцирование δ из B в определенный так B-модуль такое, что*

$$\delta(f_i) = \sum_{j=1}^n f_j \Delta^1_j(f_i)(0).$$

Оно продолжается до гомоморфизма B-модулей, а затем до гомоморфизма A-алгебр $\Psi = \Psi(\pi, \theta): S_B(\Omega^1_{B/A}) \to B$. Если $\eta: S_B(\Omega^1_{B/A}) \to S_B(\Omega^1_{B/A}) \otimes_B A \simeq S_A(\Omega^1_{B/A} \otimes_B A)$ — естественный гомоморфизм, то $\Psi = \psi\eta$, где ψ — мономорфизм, построенный в предложении 2.2.

Доказательство. Тривиальную B-модульную структуру на B можно превратить в тривиальную $A[X]$-модульную структуру. Определим дифференцирование $\delta_0: A[X] \to B$, полагая

$$\delta_0(X_i) = \sum_{j=1}^n f_j \Delta^1_j(f_i)(0).$$

Оно существует по предложению 1.2. Пусть $\delta = \delta_0\theta$. Непосредственно проверяется с использованием „тривиальности" умножения на элементы из B, что δ есть A-дифференцирование алгебры B. Этим доказано существование Ψ. Единственность очевидна. Теперь заметим, что $\operatorname{Ker}(\eta) = \mathfrak{B}S_B(\Omega^1_{B/A})$, где $\mathfrak{B} = \operatorname{Ker}(\varepsilon)$. Этот идеал содержится в $\operatorname{Ker}(\Psi)$, откуда $\Psi = \psi\eta$ для некоторого ψ. Чтобы доказать, что ψ тот же самый, что и в предложении 2.2, достаточно провести отождествления и вычислить значение ψ на v_i. Очевидно, что это то же самое, что вычислить значение Ψ на df_i, и из определения Ψ вытекает

$$\Psi(df_i) = \sum_{j=1}^{n} f_j \Delta^1_j(f_i)(0) = v_i(f).$$

§ 3. Некоторые достаточные условия биективности φ и ψ

Если проективная алгебра уже изоморфна симметрической, то у нее существует п. п. с., для которой соответствующие φ и ψ биективны. Это следует, напр., из леммы 1.4. В этом параграфе описываются некоторые случаи, когда по виду п. п. с. конечнопорожденной алгебры над кольцом без кручения можно сделать вывод о биективности φ и ψ.

Пусть B — конечнопорожденная проективная A-алгебра, π, θ, f, v имеют тот же смысл, что и раньше, и пусть $\theta_0 : S(P) = A[v] \to A[X]$ — естественное вложение, $\pi_0 : A[X] \to S(P)$ — проекция, $\pi_0(X_i) = v_i$ для всех i. Зафиксируем изоморфизм B-модулей

$$\mu : (\Omega^1_{A[X]/A} \otimes_{A[X]} S(P)) \otimes_{S(P)} B \to \Omega^1_{A[X]/A} \otimes_{A[X]} B, \quad \mu(dX_j \otimes 1 \otimes 1) = dX_j \otimes 1.$$

Рассмотрим композицию

$$\tilde{\psi} : \Omega^1_{S(P)/A} \otimes_{S(P)} B \xrightarrow{\bar{\theta}_0 \otimes 1} (\Omega^1_{A[X]/A} \otimes_{A[X]} S(P)) \otimes_{S(P)} B \xrightarrow{\mu} \Omega^1_{A[X]/A} \otimes_{A[X]} B \xrightarrow{\bar{\pi}} \Omega^1_{B/A}$$

и гомоморфизм, индуцированный ψ:

$$\bar{\psi} : \Omega^1_{S(P)/A} \otimes_{S(P)} B \to \Omega^1_{B/A}.$$

В дальнейшем не будет делаться различий между эндоморфизмом свободного модуля и его матрицей, т. к. базис в каждом конкретном случае определен однозначно.

Лемма 3.1. (а) $\bar{\psi} = \tilde{\psi}$;

(б) $\operatorname{Im}(\mu(\bar{\theta}_0 \otimes 1)) = \operatorname{Im}(\Delta^1(f)(0))$.

Это проверяется прямым вычислением. Отметим, что если определить двойственным образом $\bar{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}$, то равенство $\bar{\varphi} = \tilde{\psi}$ в общем случае, по-видимому, уже не выполняется. Доказательства следующих лемм также тривиальны.

Лемма 3.2. *Эквивалентны три условия*: (а) $\operatorname{Im}(\mu(\bar{\theta}_0 \otimes 1)) = \operatorname{Im}(\bar{\theta})$; (б) $\Delta^1(f)(0) = \Delta^1(f)(f)\Delta^1(f)(0)$; (в) $\Delta^1(f)(f) = \Delta^1(f)(0)\Delta^1(f)(f)$.

Лемма 3.3. *Эквивалентны три условия*: (а) $\operatorname{Ker}(\Delta^1(f)(0)) = \operatorname{Ker}(\bar{\pi})$; (б) $\Delta^1(f)(0) = \Delta^1(f)(0)\Delta^1(f)(f)$; (в) $\Delta^1(f)(f) = \Delta^1(f)(f)\Delta^1(f)(0)$.

Начиная с этого места, будет предполагаться, что кольцо A как абелева группа не имеет кручения. Отсюда, в частности, следует, что $\operatorname{Ker}(d_{A[X]/A}) = A$.

Предложение 3.1. *Допустим, что выполнено одно из условий*:

(а) $\Delta^1(f)(f) = \Delta^1(f)(X)$, $\Delta^1(f)(f) = \Delta^1(f)(f)\Delta^1(f)(0)$;

(б) $\Delta^1(f)(f) = \Delta^1(f)(X)$, $\Delta^1(f)(0) = \Delta^1(f)(f)\Delta^1(f)(0)$;

(в) $\Delta^1(f)(f) = \Delta^1(f)(v)$, $\Delta^1(f)(0) = \Delta^1(f)(0)\Delta^1(f)(f)$. *Тогда* $B \simeq A[f] = A[v] \simeq S(P)$.

Доказательство. Во всех трех случаях проверяется выполнимость условий следствия 2.2. Пусть справедливо требование (а). Вычислим $\Delta_i^1(v_j(f))(X)$ двумя способами.

$$\Delta_i^1(v_j(f))(X)=\sum_{k=1}^n \Delta_i^1(f_k)(X)\,\Delta_k^1(f_j)(0)=\sum_{k=1}^n \Delta_i^1(f_k)(f)\,\Delta_k^1(f_j)(0)=$$
$$=\Delta_i^1(f_j)(f)=\Delta_i^1(f_j)(X).$$

Положим $f_i=v_i+q_i$, тогда $v_j(f)=v_j+v_j(q)$,

$$\Delta_i^1(v_j(f))(X)=\Delta_i^1(f_j)(0)+\Delta_i^1(v_j(q))(X),\ \Delta_i^1(f_j)(X)=\Delta_i^1(f_j)(0)+\Delta_i^1(q_j)(X).$$

Отсюда следует $\Delta_i^1(v_j(q)-q_j)(X)=0$ для всех i. Ввиду отсутствия кручения в A это дает $v_j(q)=q_j$, т. е. $v_j(f)=v_j+q_j=f_j$, что и требовалось доказать. Вывод из условий (б) и (в) проводится аналогично.

Заметим, что по симметрии к условиям (а) — (в) примыкает такое: $\Delta^1(f)(f)=\Delta^1(f)(v)$ и $\Delta^1(f)(f)=\Delta^1(f)(0)\,\Delta^1(f)(f)$. Однако рассуждение приведенного выше типа для него не проходит.

Следствие 3.1. *Из* $\Delta^1(f)(X)=\Delta^1(f)(0)$ *следует* $B\simeq A[f]=A[v]\simeq S(P)$.

Замечание. Отсутствие кручения существенно. В содержащемся в [2] (с. 501) примере $A=K+T^pK[[T]]$, где K — поле простой характеристики p, $B=A[f_1, f_2]\subset A[U, V]$,

$$f_1=U+T^{p+1}V-T^{p+1}(U+TV)^{p^2},\ f_2=U^p+T^p(U+TV)^{p^2}.$$

Здесь $\Delta^1(f)(U, V)=\Delta^1(f)(0)$, но алгебра B не симметрическая.

Предложение 3.2. *Пусть B — конечнопорожденная проективная A-алгебра, $\mathfrak{B}$ — идеал аугментации B. Предположим следующее:*

(а) $\Omega^1_{B/A}$ *— свободный B-модуль с базисом $db_1, \ldots, db_m$, $b_i\in\mathfrak{B}$ для всех* $i\in[1, m]$;

(б) *можно выбрать $b_{m+1}, \ldots, b_n$ из $\mathfrak{B}^2$ так, чтобы $B=A[b_1, \ldots, b_n]$, и если взять $\pi\colon A[X_1, \ldots, X_n]\to B$, $\pi(X_i)=b_i$, то для некоторого θ, расщепляющего π, соответствующая п. п. с. $f=\{f_i=\theta\pi(X_i)\mid i\in[1, n]\}$ удовлетворяет одному из эквивалентных условий леммы* 3.3.

В этом случае $B=A[b_1, \ldots, b_m]\simeq A[X_1, \ldots, X_m]$.

Доказательство. Выбрать $b_{m+1}, \ldots, b_n$ из $\mathfrak{B}^2$ так, чтобы $B=A[b_1, \ldots, b_n]$, при условии (а) можно всегда, т. к.

$$\mathfrak{B}=\Big(\sum_{i=1}^m b_iA\Big)\oplus\mathfrak{B}^2.$$

Отсюда же следует, что если какой-либо θ выбран, то

$$\Delta^1(f)(0)=\begin{bmatrix}1_m & 0\\ C_{21} & 0\end{bmatrix},$$

где 1_m — единичная $(m\times m)$-матрица, C_{21} есть $((n-m)\times m)$-матрица. Теперь $\Delta^1(f)(f)$ можно представить в виде

$$\Delta^1(f)(f)=\begin{bmatrix}1+Q_{11} & Q_{12}\\ C_{21}+Q_{21} & Q_{22}\end{bmatrix}.$$

Идемпотентность означает выполнение тождеств:

$$Q_{11}=-Q_{11}^2-Q_{12}(C_{21}+Q_{21}),\ Q_{22}=Q_{22}^2+(C_{21}+Q_{21})\,Q_{12},$$
$$(C_{21}+Q_{21})\,Q_{11}=-Q_{22}(C_{21}+Q_{21}),\ Q_{11}Q_{12}=-Q_{21}Q_{22}.$$

Отсюда следует, что для любого целого $s\geqslant 0$

$$Q_{11}^sQ_{12}=(-1)^sQ_{12}Q_{22}^s. \qquad (1)$$

Так как $db_1, \ldots, db_m$ — базис, то, отождествляя b_i с f_i, при $j \in [m+1, n]$ имеем

$$df_j = \sum_{i=1}^{m} df_i \beta_{ij}.$$

Элементы β_{ij} образуют матрицу W_{12}. С другой стороны,

$$df_j = \sum_{k=1}^{n} df_k \Delta_k^1 (f_j)(f).$$

Сравнивая обе записи, приходим к тождеству

$$W_{12}(1 - Q_{22}) = Q_{12}. \tag{2}$$

Над $\mathfrak{B}$-адическим пополнением $\hat{B}$ алгебры B матрица $1 - Q_{22}$ обратима. Представляя $(1 - Q_{22})^{-1}$ в виде ряда $1 + Q_{22} + Q_{22}^2 + \ldots$ и пользуясь тождествами (1), заключаем, что $W_{12} = (1 - Q_{11} + Q_{11}^2 - \ldots) Q_{12}$, откуда над B получаем

$$(1 + Q_{11}) W_{12} = Q_{12}. \tag{3}$$

Над $\hat{B}$ рассмотрим матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 + Q_{11} & Q_{12} \\ C_{21} + Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & W_{12} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Q_{11} & 0 \\ * & (C_{21} + Q_{21}) W_{12} - Q_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & W_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Q_{11} & -Q_{12} \\ -(C_{21} + Q_{21}) & 1 - Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(Q_{11} + W_{12}(C_{21} + Q_{21})) & 0 \\ * & 1 - Q_{22} \end{bmatrix}.$$

Мы утверждаем, что отсюда следует

$$Q_{22} = (C_{21} + Q_{21}) W_{12}, \quad (4) \qquad Q_{11} = -W_{12}(C_{21} + Q_{21}). \quad (5)$$

Лемма 3.4. *Пусть матрица эндоморфизма свободного B-модуля ранга n в некотором базисе имеет вид*

$$\begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix},$$

где H_{11} есть $(m \times m)$-матрица, H_{22} есть $((n-m) \times (n-m))$-матрица. Предположим, что образ эндоморфизма—проективный модуль ранга m. Тогда из $H_{11} \equiv 1_m \bmod \mathfrak{B}$ следует $H_{22} = 0$.

Прежде всего, легко убедиться, что

$$\operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ H_{21} & 0 \end{bmatrix}\right) \oplus \operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix}\right).$$

Теперь достаточно доказать, что первое слагаемое имеет ранг m. Переходя к $\hat{B}$, получаем

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_{21} H_{11}^{-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ H_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогично можно обосновать (5). Кроме того, из (3) получаем $Q_{12} = (1 - W_{12}(C_{21} + Q_{21})) W_{12}$. В итоге

$$\Delta^1(f)(f) = \begin{bmatrix} 1 - W_{12}(C_{21} + Q_{21}) & (1 - W_{12}(C_{21} + Q_{21})) W_{12} \\ C_{21} + Q_{21} & (C_{21} + Q_{21}) W_{12} \end{bmatrix}.$$

Используем последнюю часть условия (б). Должно выполняться тождество $\Delta^1(f)(0)=\Delta^1(f)(0)\Delta^1(f)(f)$. Отсюда получаем $1=1-W_{12}(C_{21}+C_{21})$, т. е. $W_{12}(C_{21}+Q_{21})=0$, и далее $(1-W_{12}(C_{21}+Q_{21}))W_{12}=0$, что дает $W_{12}=0$. Ввиду отсутствия кручения это означает, что $B=A[b_1,\ldots,b_m]$. Наконец, легко проверить, что $b_1,\ldots,b_m$ алгебраически независимы, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Суслин А. А. Локально полиномиальные кольца и симметрические алгебры.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1977, т. 41, № 3, с. 503—515.
2. Costa D. L. Retracts of polynomial rings.— J. Algebra, 1977, v. 44, № 2, p. 492—502.
3. Fujita T. On Zariski Problem.— Proc. Japan Acad., 1979, v. 55 A, № 3, p. 106—110.
4. Kambayashi T. On Fujita's strong cancellation theorem for the affine plane.— J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1980, Sec. 1 A, v. 27, № 3, p. 535—548.
5. Russel P. On Affine-Ruled Rational Surfaces.— Math. Ann., 1981, v. 225, № 3, p. 287—302.
6. Nakai Y. High order derivations, I.— Osaka J. Math., 1970, v. 7, № 1, p. 1—27.
7. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия.— М., 1981.— 599 с.
8. Бурбаки Н. Элементы математики. Коммутативная алгебра.— М., 1971.— 707 с.
9. Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов.— М., 1975.— 220 с.
10. Wang S. S.-S. A Jacobian criterion for separability.— J. Algebra, 1980, v. 65, № 2, p. 453—494.

г. Казань

Поступила 11.05.1982