МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ДРОБНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А.Ф. Галимянов
Казанский (Приволжский) федеральный университет
anis_59@mail.ru

Работа посвящена точным и приближенным (в первую очередь, прямым) методам решения интегро-операторного уравнения

$$A\overline{\varphi} = \gamma + I_{a+}^{\alpha}(\varphi, t) + T(\varphi; t) = f(t), a \le t \le b.$$

Здесь γ – искомый параметр, $\varphi(t)$ – искомая функция, $f(t)$ – данная непрерывная функция, T – данный линейный, в том числе интегральный оператор, а $\overline{\varphi} = (\gamma, \varphi)$ – искомая вектор-функция.

$I_{a+}^{\alpha}\varphi(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}, 0 < \alpha < 1$ – дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка α.

Доказана устойчивость решения данного уравнения. Следуя методике, изложенной в [1], построен метод коллокаций, который состоит в следующем. Приближенное решение уравнения ищется в виде вектор-функции

$$\overline{\varphi}_n(t) = (\gamma_n, \varphi_n(t)),$$

где $\lambda_n \in R$ и $\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k t^{k-1}, c_k \in R, n \in N$. Неизвестные коэффициенты γ_n, а также $c_1, c_2 .... c_n$ будем определять из условий

$$A(\overline{\varphi}_n; t_j) = f(t_j), j = \overline{0, n},$$

где $\{t_j\}_0^n$ – некоторая система узлов из $[a, b]$.

Для данной вычислительной схемы справедлива

Теорема. Пусть выполнены условия

а) данное уравнение имеет единственное решение $\overline{\varphi}^* = (\gamma^*, \varphi^*)$ при любой правой части f;

б) узлы коллокации выбраны по формуле

$$t_j = \cos^2 \frac{j\pi}{2n}, j = \overline{0, n};$$

в) существуют достаточно гладкие дробные производные порядка α у $T(\varphi; t)$ и $f(t)$.