1. Элементы теории поля (дифференциальные характеристики)

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассматриваются координатные векторы $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Через $\mathbf{r}$ обозначается вектор (x, y, z). Таким образом, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Будем считать, что в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задано скалярное поле $u = u(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$, т.е. $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Аналогично, будем рассматривать векторное поле $\mathbf{a} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, т.е.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}, \quad (x, y, z) \in \Omega.$$

Дифференцируемое скалярное поле $u : \Omega \to \mathbb{R}$ порождает векторное поле градиента $\operatorname{grad} u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$. Направление градиента в точке — это направление наискорейшего возрастания u, а его модуль $|\operatorname{grad} u|$ дает скорость этого возрастания.

Дифференцируемое вектрное поле $\mathbf{a} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ порождает скалярное поле дивергенции:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

и векторное поле ротора

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Производная по направлению. Если задано скалярное поле $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и направление $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ($|\mathbf{l}| = 1$), то в точках $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \Omega$ определяется производная по направлению

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x, y, z) = \lim_{h\to 0} \frac{u(\mathbf{r}+h\mathbf{l})-u(\mathbf{r})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+hl_1, y+hl_2, z+hl_3)-u(x, y, z)}{h}.$$

Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ получаются, если брать в качестве направлений координатные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}, \mathbf{k}$ соответственно.

Для вычисления производных по направлению чаще всего используется формула

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \mathbf{l}) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Задание по теме. Прорешать задачи из Демидовича (эл. — издания, которые обычно скачены из интернета). №№ 4401.2 (эл. 4401.1: $u = xy - z^2$), 4402, 4408 — все пункты (пункт “е)” должен быть: $\operatorname{grad} f(u) = f'(u)\operatorname{grad} u$), 4416, 4424, 4425, 4427 ($r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$), 4435 а), 4436.1 а) (эл. 4436 а)), 4436.2 (эл. 4436.1: M(1, 2, -2)), 4439 — оба пункта.