УДК 517.946

РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ В-ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

© М.Ю.Денисова

В статье исследуется основная краевая задача для B-полигармонического уравнения шестого порядка. Доказывается единственность поставленной задачи. С помощью введенных потенциалов задача сводится к системе интегральных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, полигармоническое уравнение, краевая задача, метод потенциалов.

Пусть E_3^+ – полупространство $x_3>0$ евклидова пространства E_3 точек $x=(x_1,x_2,x_3)$, D – симметричная относительно координатной плоскости $x_3=0$ область, ограниченная поверхностью Γ. Через D^+ и Γ^+ обозначим соответственно части D и Γ, расположенные в E_3^+. Область D^+ ограничена поверхностью Γ^+ и частью $\Gamma^{(0)}$ координатной плоскости $x_3=0$. Поверхность Γ^+ является поверхностью класса $\Lambda_{m,B}$, когда $\Gamma\in\Lambda_m$ [1].

В области D^+ рассматривается уравнение

$$\Delta_B^3 u=0, \tag{1}$$

где $\Delta_B=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}+B_{x_3}$, $B_{x_3}=\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\dfrac{k}{x_3}\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ – оператор Бесселя, $k>1$.

Фундаментальные решения уравнения (1) с особенностью в произвольной точке ξ получим, применив к фундаментальным решениям уравнения (1) с особенностью в начале координат оператор обобщенного сдвига

$$Q_1(x;\xi)=C_k\int_0^\pi\Big((x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+$$
$$+x_3^2+\xi_3^2-2x_3\xi_3\cos\varphi\Big)^{\frac{-k-1}{2}}\sin^{k-1}\varphi d\varphi,$$

$$Q_2(x;\xi)=C_k\int_0^\pi\Big((x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+$$
$$+x_3^2+\xi_3^2-2x_3\xi_3\cos\varphi\Big)^{\frac{-k+1}{2}}\sin^{k-1}\varphi d\varphi,$$

$$Q_3(x;\xi)=C_k\int_0^\pi\Big((x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+$$
$$+x_3^2+\xi_3^2-2x_3\xi_3\cos\varphi\Big)^{\frac{-k+3}{2}}\sin^{k-1}\varphi d\varphi,$$

где $C_k=\dfrac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$.

Следуя схеме, предложенной в работе [2], построим потенциалы, являющиеся решениями уравнения (1)

$$V_1(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma^+}\mu_1(\xi)\left(3\frac{\partial Q_2}{\partial n_\xi}-\frac{1}{3}\frac{\partial^3 Q_3}{\partial n_\xi^3}\right)\xi_3^k d\Gamma,$$

$$V_2(x)=\frac{k+3}{\pi}\int_{\Gamma^+}\mu_2(\xi)\left(Q_1-2\frac{\partial^2 Q_2}{\partial n_\xi^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial^4 Q_3}{\partial n_\xi^4}\right)\xi_3^k d\Gamma,$$

$$V_3(x)=\frac{(k+3)(k+5)}{3\pi}\times$$
$$\times\int_{\Gamma^+}\mu_3(\xi)\left(-\frac{\partial Q_1}{\partial n_\xi}+\frac{2}{3}\frac{\partial^3 Q_2}{\partial n_\xi^3}-\frac{1}{45}\frac{\partial^5 Q_3}{\partial n_\xi^5}\right)\xi_3^k d\Gamma,$$

где μ_1,μ_2,μ_3 – плотности соответствующих потенциалов; n_ξ – внешняя нормаль к границе Γ^+ в точке ξ; ξ – переменная точка границы Γ^+; x – переменная точка полупространства E_3^+.

Исследованы предельные значения потенциалов, их нормальных производных и операторов Δ_B [3].

Рассмотрим следующую краевую задачу: требуется найти четное по x_3 решение уравнения (1) в области D^+, два раза непрерывно дифференцируемое в области $\overline{D^+}$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{\Gamma^+}=f_0(\xi),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n_\xi}\right|_{\Gamma^+}=f_1(\xi),\quad \Delta_B u\big|_{\Gamma^+}=f_2(\xi), \tag{2}$$

где n_ξ – единичный вектор внешней нормали к границе Γ^+ в точке $\xi \in \Gamma^+$.

Теорема. Краевая задача (1), (2) не может иметь более одного решения.

Решение задачи (1), (2) ищем в виде

$$u(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x).$$

Используя предельные значения потенциалов, их нормальных производных и операторов Δ_B, а также краевые условия (2) для задачи (1), (2), относительно неизвестных плотностей $\mu_1(\xi)$, $\mu_2(\xi)$, $\mu_3(\xi)$. составляется система интегральных уравнений с ядрами со слабой особенностью. Применяя к полученной системе альтернативу Фредгольма, доказывается, что однородная система интегральных уравнений, соответствующая неоднородной, не имеет не нулевых решений, а, следовательно, неоднородная система, и с ней краевая задача (1), (2), однозначно разрешима.

* * * * * * * * * *

1. *Панич О.И.* О потенциалах для полигармонического уравнения четвертого порядка // Матем. сб. – 1961. – Т.50(92). – №3. – С.335-368.
2. *Лопатинский Я.Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. матем. журнал. – 1953. – Т.5. – №2. – С.123-151.
3. *Денисова М.Ю.* Потенциалы для уравнения $\Delta_B^3 u = 0$ // Тр. матем. центра им.Н.И.Лобачевского (Матер. науч. конференции). – Т.11. – Казань: "УНИПРЕСС", 2001. – С.79-83.

THE SOLUTION OF THE MAIN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR B-POLYHARMONIC EQUATION BY METHOD OF POTENTIALS

M.Yu.Denisova

In this article the main boundary value problem for B-polyharmonic equation of the six orders is analyzed. Uniqueness of the solution is proved. By means of specially built and studied potential functions the problem is reduced to the system of integral equations.

Key words: differential equation, polyharmonic equation, main boundary value problem, method of potentials.

* * * * * * * * * *

Денисова Марина Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.

E-mail: ffmo@tggpu.ru