Совершенные разбиения натуральных чисел

М.И. Киндер

E-mail: mkinder@rambler.ru

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет

Аннотация

В статье предлагается простой вывод вычислительных рекуррентных формул, связанных с подсчётом количества совершенных разбиений натурального числа. Использование производящих функций позволяет сократить объем необходимых преобразований, благодаря этому удается получить еще одно доказательство явной формулы МакМагона для подсчёта числа таких разбиений, а также некоторые новые рекуррентные соотношения.

Введение. Разбиения чисел являются классическим и достаточно хорошо изученным комбинаторным объектом. Понятие *совершенного разбиения* числа в 1886 году ввёл МакМагон [1]. Совершенным разбиением числа N называется такое разбиение, в котором содержится лишь одно разбиение каждого числа, меньшего N, при условии, что равные части считаются неразличимыми. Например, набор 1^N из N единиц является одним из совершенных разбиений для каждого натурального N. Для $N = 9$ разбиения 1^9, $2^4 1$ и $1^4 5$ и только они являются совершенными.

Если все части разбиения рассматривать как разновесы для весов, то совершенные разбиения оказываются решениями проблемы определения такого набора гирь, с помощью которого (при условии размещения гирь на одной чаше весов) можно взвесить единственным способом любой предмет, вес которого выражается целым числом. Именно в такой формулировке на одной из математических олимпиад школьников встретилась задача (11-ый Турнир Городов, 1990, автор — *Д.Фомин*):

Рассматривается набор гирь, каждая из которых весит целое число граммов, а общий вес всех гирь равен 500 граммов. Такой набор называется *правильным*, если любой груз, у которого вес выражается целым числом граммов от 1 до 500, может быть уравновешен некоторым количеством гирь набора, и притом единственным образом. Груз кладется на одну чашку весов, гири — на другую. Два способа уравновешивания, отличающиеся лишь заменой некоторых гирь на другие того же веса, считаются одинаковыми. Сколько существует различных правильных наборов? (Два набора различны, если некоторая гиря участвует в этих наборах не одинаковое число раз.)

Таким образом, в этой задаче требуется найти количество совершенных разбиений числа $N = 500$. В каждом совершенном разбиении, очевидно, должна содержаться по крайней мере одна часть, равная 1. Предположим, что в нём содержится $q_1 - 1$ частей, равных единице. Тогда все числа, меньшие q_1, обладают только одним разбиением, и значит, число q_1 будет следующей частью совершенного разбиения. Пусть теперь в разбиении содержится $q_2 - 1$ частей, равных q_1, тогда все числа от 1 до $q_1 - 1 + q_1(q_2 - 1) = q_1 q_2 - 1$ единственным способом выражаются с помощью 1 и q_1. Продолжая рассуждения аналогичным образом, приходим к совершенному разбиению вида

$$1^{q_1-1} q_1^{q_2-1} (q_1 q_2)^{q_3-1} \dots (q_1 q_2 \dots q_{s-1})^{q_s-1}.$$

Сумма всех составных частей этого разбиения равна N, поэтому

$$N = q_1 - 1 + q_1(q_2 - 1) + \ldots + (q_1 q_2 \ldots q_{s-1})(q_s - 1) = q_1 q_2 \ldots q_{s-1} q_s - 1,$$

и значит, q_i являются делителями числа $N+1$. Таким образом, *упорядоченный набор* чисел q_1, q_2, ..., q_s полностью определяет данное разбиение, при этом каждый сомножитель q_i больше 1. Следовательно, справедлива следующая

Теорема 1 [1-3]. *Количество совершенных разбиений натурального числа N совпадает с количеством упорядоченных факторизаций числа $N+1$ без единичных множителей.*

Различными разложениями на множители числа 10 служат 10, $2 \cdot 5$ и $5 \cdot 2$. Они соответствуют указанным выше совершенным разбиениям 1^9, $2^4 1$ и $1^4 5$ числа $N = 9$. В задаче Турнира Городов правильными наборами гирь будут 1^{500}, $1^2 3^{166}$ и $1^{166} 167^2$, соответствующие упорядоченным факторизациям 501, $3 \cdot 167$ и $167 \cdot 3$ числа $N+1 = 501$.

Пусть $N > 1$. Обозначим количество упорядоченных факторизаций числа $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s}$ через $T(n_1, n_2, \ldots, n_s)$.

Теорема 2. *Для функции $T(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ справедлива рекуррентная формула*

$$T(n_1, n_2, \ldots, n_s) = {\sum_{k_i}}' T(k_1, k_2, \ldots, k_s), \tag{1}$$

сумма берётся по всем наборам, в которых $0 \le k_i \le n_i$ $(1 \le i \le s)$ и $k_1 + k_2 + \ldots + k_s < n_1 + n_2 + \ldots + n_s$, причем $T(0, 0, \ldots, 0) = 1$.

Доказательство. Пусть $d = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$ — произвольный делитель числа N, отличный от N, то есть $N = md$ и $m > 1$. Тогда всякая факторизация числа N, у которой первый множитель равен m, получается из соответствующей факторизации числа d, причём число последних, очевидно, равно $T(k_1, k_2, \ldots, k_s)$. Отсюда следует равенство (1).

Добавив к обеим частям равенства (1) слагаемое $T(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, можно записать его в виде

$$2T(n_1, n_2, \ldots, n_s) = \sum_{0 \le k_i \le n_i} T(k_1, k_2, \ldots, k_s)\,. \tag{2}$$

Если число N имеет лишь один простой множитель, то есть $s = 1$ и $N = p_1^{n_1}$, из (1) имеем

$$T(n_1) = \sum_{k=0}^{n_1-1} T(k) = T(n_1 - 1) + \sum_{k=0}^{n_1-2} T(k) = 2T(n_1 - 1).$$

Поскольку $T(0) = 1$, получаем $T(n_1) = 2^{n_1-1}$. Решение задачи для произвольного натурального s мы приведем в конце статьи, начнем же с простейших случаев, когда число N имеет два или три простых делителя.

Случай двух делителей. Воспользуемся равенством (1), определяющим функцию $T(n_1, n_2)$, для получения более простых рекуррентных соотношений. Во-первых, запишем его в виде

$$T(n_1, n_2) = \sum_{k=0}^{n_1-1} T(k_1, n_2) + 2T(n_1, n_2 - 1).$$

Заменяя n_1 на $n_1 - 1$ и вычитая полученное равенство из предыдущего, получим

$$T(n_1, n_2) = 2T(n_1 - 1, n_2) + 2T(n_1, n_2 - 1) - 2T(n_1 - 1, n_2 - 1). \tag{3}$$

Формула (3) остаётся верной и при нулевых значениях параметров n_1, n_2 (кроме случая $n_1 = n_2 = 0$), при этом значения функции T с отрицательными аргументами нужно считать равными нулю, а $T(0,0) = \frac{1}{2}$.

Пример 1. Пусть $n_1 = n_2 = 1$. С помощью рекуррентной формулы (3) находим

$$T(1,1) = 2T(0,1) + 2T(1,0) - 2T(0,0).$$

Поскольку $T(1,0) = T(0,1) = 1$, получаем $T(1,1) = 2 + 2 - 1 = 3$. Другими словами, число $N = p_1^1 p_2^1$, где p_i — простые числа, имеет ровно три упорядоченные факторизации, а именно: N, $p_1 \cdot p_2$ и $p_2 \cdot p_1$.

Пример 2. Пусть $n_1 = 2, n_2 = 1$. Тогда

$$T(2,1) = 2T(1,1) + 2T(2,0) - 2T(1,0) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2^1 - 2 \cdot 1 = 8.$$

Опираясь на равенство (3), несложно найти явный вид производящей функции для последовательности $T(n_1, n_2)$. Пусть $F(x_1, x_2)$ — производящая функция для T, то есть

$$F(x_1, x_2) = \sum_{n_1, n_2 \geq 0} T(n_1, n_2) x_1^{n_1} x_2^{n_2} = \sum_{n_1 + n_2 > 0} T(n_1, n_2) x_1^{n_1} x_2^{n_2} + T(0,0).$$

Слагаемое $T(0,0)$ в этом равенстве выделено особо для того, чтобы в основной сумме можно было использовать рекуррентное соотношение (3) для $T(n_1, n_2)$. Имеем

$$F(x_1, x_2) = \sum_{n_1 + n_2 > 0} \Big(2T(n_1 - 1, n_2) + 2T(n_1, n_2 - 1) - 2T(n_1 - 1, n_2 - 1)\Big) x_1^{n_1} x_2^{n_2} + T(0,0).$$

Заменяя соответствующие индексы суммирования в каждой из трёх последних сумм, получим уравнение

$$F(x_1, x_2) = (2x_1 + 2x_2 - 2x_1 x_2) F(x_1, x_2) + T(0,0),$$

из которого находим

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(1 - x_1)(1 - x_2) - 1}\,. \tag{4}$$

Теорема 3 [4, p. 860], [5]. *Количество упорядоченных факторизаций числа $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2}$ равно*

$$T(n_1, n_2) = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} C_{n_1}^k C_{n_2}^k, \tag{5}$$

где $n = n_1 + n_2$.

Доказательство. Разложим функцию $F(x_1,x_2)$ из равенства (4) в ряд Тейлора в окрестности точки $(0,0)$:

$$F(x_1,x_2)=\sum_{n_2\ge 0}\Big(\sum_{n_1\ge 0}T(n_1,n_2)x_1^{n_1}\Big)x_2^{n_2}.$$

Коэффициент при $x_2^{n_2}$ равен

$$\sum_{n_1\ge 0}T(n_1,n_2)x_1^{n_1}=\frac{1}{n_2!}\cdot\frac{\partial^{n_2}F(x_1,x_2)}{\partial x_2^{n_2}}\bigg|_{x_2=0}=2^{n_2-1}\frac{1}{1-2x_1}\Big(1+\frac{x_1}{1-2x_1}\Big)^{n_2}.$$

Раскладывая выражения $(1+x)^{n_2}$ и $(1-2y)^{-k-1}$ в степенные ряды, мы получим

$$\sum_{n_1\ge 0}T(n_1,n_2)x_1^{n_1}=2^{n_2-1}\sum_{k=0}^{n_2}C_{n_2}^k x_1^k\frac{1}{(1-2x_1)^{k+1}}=2^{n_2-1}\sum_{k=0}^{n_2}C_{n_2}^k x_1^k\sum_{l=0}^{\infty}C_{l+k}^k 2^l x_1^l.$$

Коэффициент при $x_1^{n_1}$ в правой части находится из условия $n_1=l+k$. Подставляя вместо l число n_1-k и выделяя коэффициент при $x_1^{n_1}$, получаем равенство

$$T(n_1,n_2)=2^{n_2-1}\sum_{k=0}^{n_2}2^{n_1-k}C_{n_1}^k C_{n_2}^k=2^{n-1}\sum_{k=0}^{n}2^{-k}C_{n_1}^k C_{n_2}^k.$$

(Для симметричности формулы в последней сумме верхняя граница n_2 заменена на $n=n_1+n_2$. Конечно, равенство при этом не нарушается, поскольку биномиальные коэффициенты, у которых верхний индекс больше нижнего, равны нулю.) Равенство (5) доказано.

В следующей теореме мы установим связь специальных функций с функцией $T(n_1,n_2)$.

Теорема 4. *Количество упорядоченных факторизаций числа $N=p_1^{n_1}p_2^{n_2}$ равно*

$$T(n_1,n_2)=(-1)^{n_1}2^{n_2-1}P_{n_1}^{(n_2-n_1,\,0)}(-3)=\frac{2^{n_1-n_2-1}}{n_1!}\cdot\frac{d^{n_1}}{dx^{n_1}}\Big[(1+x)^{n_1}(1-x)^{n_2}\Big]\bigg|_{x=-3},$$

где $P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$ —многочлен Якоби степени n.

Доказательство. Воспользуемся известным представлением многочлена Якоби через биномиальные суммы (см. [6] при $n=n_1$) :

$$2^{-n_1}\sum_{k=0}^{n_1}C_{n_1+\alpha}^k C_{n_1+\beta}^{n_1-k}(x+1)^k(x-1)^{n_1-k}=P_{n_1}^{(\alpha,\,\beta)}(x).$$

Подставив $\alpha=n_2-n_1$, $\beta=0$ и $x=-3$, несложными преобразованиям приходим к требуемой формуле.

Следствие. *Количество упорядоченных факторизаций числа $N=(p_1p_2)^n$ равно*

$$T(n,n)=2^{n-1}P_n(3)=\frac{1}{2n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\bigg|_{x=3}.$$

где $P_n(x)$ — многочлен Лежандра степени n.

Для суммы в правой части равенства (5) можно привести более простое рекуррентное соотношение. (Ср. [7].)

Теорема 5. *Для функции $T(n_1, n_2)$ справедливо*

$$(n_1+1)T(n_1+1, n_2) - (n_2+1)T(n_1, n_2+1) = (n_1-n_2)T(n_1, n_2).$$

Случай трёх делителей. Воспользуемся равенством (2), определяющим функцию $T(n_1, n_2, n_3)$, для получения более простого рекуррентного соотношения. Для этого последовательно заменим каждый из параметров n_i на $n_i - 1$, каждую пару параметров n_i и n_j — на $n_i - 1$ и $n_j - 1$, и наконец, все три параметра n_1, n_2, n_3 заменим на $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, $n_3 - 1$. Из полученных равенств составим выражение

$$\begin{gathered}2T(n_1-1, n_2, n_3) + 2T(n_1, n_2-1, n_3) + 2T(n_1, n_2, n_3-1) - \\ - \Big(2T(n_1-1, n_2-1, n_3) + 2T(n_1-1, n_2, n_3-1) + 2T(n_1, n_2-1, n_3-1)\Big) + \\ + 2T(n_1-1, n_2-1, n_3-1)\,.\end{gathered}$$

Все слагаемые $T(k_1, k_2, k_3)\quad (0 \le k_i \le n_i)$, кроме $T(n_1, n_2, n_3)$, входят в это выражение ровно один раз, поэтому эта сумма в точности совпадает с $T(n_1, n_2, n_3)$. Запись выражения будет более удобной, если слагаемое $T(n_1-1, n_2, n_3)$ обозначить через $T(n_1-1)$. Аналогичным образом поступим с обозначениями остальных слагаемых, входящих в эту сумму. Полученное рекуррентное соотношение

$$T(n_1, n_2, n_3) = 2\sum_{1\le i\le 3} T(n_i-1) - 2\sum_{1\le j<i\le 3} T(n_i-1, n_j-1) + 2T(n_1-1, n_2-1, n_3-1) \quad (6)$$

напоминает известную комбинаторную формулу включений-исключений и, по сути, обобщает формулу (3) для двух параметров. Равенство (6) остаётся верным и при нулевых значениях параметров (кроме случая, когда все n_i равны 0), при этом значения функции T с отрицательными аргументами нужно считать равными нулю, а $T(0,0,0) = \frac{1}{2}$. При $n_3 = 0$ формула (6) переходит в формулу (3) для двух параметров.

Пример 3. Пусть $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. С помощью рекуррентной формулы (6) находим

$$T(1,1,1) = 2T(1,1,0)\cdot 3 - 2T(1,0,0)\cdot 3 + 2T(0,0,0).$$

Здесь мы воспользовались симметричностью функции T по своим аргументам, в частности, $T(1,1,0) = T(1,0,1) = T(0,1,1) = 3$. Поскольку $T(1,0,0) = 2T(0,0,0) = 1$, получаем $T(1,1,1) = 2\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot 1\cdot 3 + 1 = 13$. Другими словами, число $N = p_1^1 p_2^1 p_3^1$, где p_i — простые числа, имеет ровно 13 упорядоченных факторизаций.

Пример 4. Пусть $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 1$. Тогда

$$\begin{gathered}T(2,1,1) = 2T(1,1,1) + 2T(2,1,0)\cdot 2 - 2T(2,0,0) - 2T(1,1,0)\cdot 2 + 2T(1,0,0) = \\ = 2\cdot 13 + 2\cdot 8\cdot 2 - 2\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 1 = 44.\end{gathered}$$

Опираясь на равенство (6), несложно найти явный вид производящей функции для последовательности $T(n_1, n_2, n_3)$. Пусть $F(x_1, x_2, x_3)$ — производящая функция для T, то есть

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n_1+n_2+n_3>0} T(n_1, n_2, n_3) x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} + T(0, 0, 0).$$

Теперь с помощью тех же преобразований, как и в случае производящей функции от двух переменных, получим

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3 + x_1x_2x_3)F(x_1, x_2, x_3) + T(0, 0, 0).$$

Отсюда

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) - 1}\,. \tag{7}$$

Как и ожидалось, производящая функция $F(x_1, x_2, x_3)$ обладает симметрией по переменным x_1, x_2, x_3. При $x_3 = 0$ она переходит в производящую функцию (4) для случая двух переменных.

Таким образом, доказана

Теорема 6. *Производящая функция последовательности $T(n_1, n_2, n_3)$ описывается формулой (7). Количество упорядоченных факторизаций числа $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$ равно соответствующему коэффициенту в разложении функции $F(x_1, x_2, x_3)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$, то есть*

$$T(n_1, n_2, n_3) = \frac{1}{n_1!\, n_2!\, n_3!} \cdot \left. \frac{\partial^{n_1+n_2+n_3} F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \right|_{(0,0,0)}.$$

Общий случай. Теперь уже легко перечислить преобразования, которые необходимы для получения основного рекуррентного соотношения типа (6). Последовательно заменим в (2) каждый из параметров n_i на $n_i - 1$, каждую пару параметров n_i и n_j на $n_i - 1$ и $n_j - 1$, и так далее, наконец, заменим все s параметров $n_1, n_2, \ldots, n_s$ на $n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots, n_s - 1$. Из полученных равенств составим выражение

$$2 \sum_{1 \le i \le s} T(n_i - 1) - 2 \sum_{1 \le j < i \le s} T(n_i - 1, n_j - 1) + \ldots + (-1)^{s-1} \cdot 2T(n_1 - 1, \ldots, n_s - 1),$$

аналогичное формуле включений-исключений. Первая сумма содержит C_s^1 слагаемых, вторая — C_s^2 слагаемых, и так далее, наконец, последняя — C_s^s слагаемых. Значит, каждое слагаемое $T(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ $(0 \le k_i \le n_i)$, кроме $T(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, входит в это выражение ровно один раз, поскольку

$$C_s^1 - C_s^2 + \ldots + (-1)^{s-1} \cdot C_s^s = 1.$$

Отсюда следует, что выражение в точности равно $T(n_1, n_2, \ldots, n_s)$. Таким образом, доказано основное рекуррентное соотношение

$$T(n) = 2\sum_i T(n_i - 1) - 2\sum_{j<i} T(n_i - 1, n_j - 1) + \ldots + (-1)^{s-1} 2T(n_1 - 1, ..., n_s - 1) \tag{8}$$

Формула (8) остаётся верной и при нулевых значениях параметров (кроме случая, когда все n_i равны 0), при этом значения функции T с отрицательными аргументами по-прежнему считаем равными нулю, а $T(0,0,...,0)=\frac{1}{2}$.

Используя те же манипуляции, как и в случае $s=3$, получаем явный вид производящей функции от s переменных:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_s)-1}\,. \tag{9}$$

Полученное выражение для функции $F(x_1,x_2,\ldots,x_s)$ не меняется при любой перестановке чисел $x_1,x_2,\ldots,x_s$. Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Производящая функция для $T(n_1,n_2,\ldots,n_s)$ описывается формулой (9). Количество упорядоченных факторизаций числа $N=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_s^{n_s}$ равно соответствующему коэффициенту в разложении функции $F(x_1,x_2,\ldots,x_s)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0,0,\ldots,0)$, то есть*

$$T(n_1,n_2,\ldots,n_s)=\frac{1}{n_1!\,n_2!\ldots n_s!}\cdot\left.\frac{\partial^n F(x_1,x_2,\ldots,x_s)}{\partial x_1^{n_1}\,\partial x_2^{n_2}\ldots\partial x_s^{n_s}}\right|_{(0,0,\ldots,0)},$$

где $n=n_1+n_2+\ldots+n_s$.

Опираясь на равенство (9), МакМагон доказал явную формулу для значений $T(n_1,n_2,\ldots,n_s)$ в виде двойной суммы слагаемых, каждое из которых представляет произведение биномиальных коэффициентов.

Теорема 8 [4, p. 843]. *Пусть $n=n_1+n_2+\ldots+n_s$. Тогда при $n>0$*

$$T(n_1,n_2,\ldots,n_s)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k C_i^k\prod_{t=1}^{s}C_{i+n_t-k-1}^{n_t}\,. \tag{10}$$

Доказательство. Обозначим $x=(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_s)$ и запишем производящую функцию $F(x_1,x_2,\ldots,x_s)$ в виде

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}=\frac{1}{2}+\frac{x^{-1}-1}{1-(x^{-1}-1)}=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}(x^{-1}-1)^i=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k x^{-i+k}.$$

По формуле бинома Ньютона $(1-t)^{-n}=\sum_{m=0}^{\infty}C_{n+m-1}^m t^m$ для отрицательных показателей имеем

$$x^{-i+k}=\prod_{t=1}^{s}(1-x_t)^{-i+k}=\prod_{t=1}^{s}\sum_{n_t=0}^{\infty}C_{n_t+i-k-1}^{n_t}x_t^{n_t}\,,$$

и значит,

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_s)=\frac{1}{2}+\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_s=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k\prod_{t=1}^{s}C_{n_t+i-k-1}^{n_t}\Big)x_1^{n_1}\ldots x_s^{n_s}\,.$$

Здесь учтено, что соответствующие суммы при $i>n$ будут равны нулю. Теперь уже легко видеть, что коэффициент при $x_1^{n_1}\ldots x_s^{n_s}$ совпадает со значением, указанным в (10).

Пример 5. Пусть $n_1 = n_2 = \ldots n_s = 1$. Тогда $n = \sum n_i = s$, и по формуле (10) находим

$$T(1,1,\ldots,1) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k C_i^k (i-k)^s = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{i} (-1)^{i-k} C_i^k k^s\,.$$

В частности, при $s = 3$ получаем $T(1,1,1) = 1 + (8-2) + (3-24+27) = 13$. В работе [8] доказана более сложная вычислительная формула для функции $T(n_1, n_2, \ldots, n_s)$. В случае, когда все n_i равны 1, эта формула выглядит следующим образом:

$$T(1,1,\ldots,1) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_i=s \\ k_r>0}} \frac{s!}{k_1!\,k_2!\ldots k_i!}\,.$$

При $s = 3$ имеем $T(1,1,1) = \frac{3!}{3!} + \left(\frac{3!}{1!\,2!} + \frac{3!}{2!\,1!}\right) + \frac{3!}{1!\,1!\,1!} = 13$.

Замечания. Равенство (8) было доказано также в статье [9] с помощью формулы обращения Мёбиуса. В этой статье формулы (1) и (8) записаны в другой форме ($N \geq 2$):

$$H(N) = {\sum_{d|N}}' H(d), \tag{11}$$

$$H(N) = 2\sum_{p_i} H\left(\frac{N}{p_i}\right) - 2\sum_{p_i,p_j} H\left(\frac{N}{p_i p_j}\right) + \ldots + 2(-1)^{s-1} H\left(\frac{N}{p_1 p_2 \ldots p_s}\right), \tag{12}$$

где $H(N)$ — количество упорядоченных факторизаций числа N. В формуле (11) сумма берётся по всем делителям d числа N, которые меньше N, причём $H(1) = 1$. В формуле (12) считается, что $N \geq 2$ и $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s}$, причём здесь уже $H(1) = \frac{1}{2}$. Реализация этих вычислительных методов в *Mathematica*, а также их сравнительный анализ приведен в статье [10]:

```
In[1] := <<DiscreteMath 'Combinatorica'
H1[1] := 1;
H1[N_]:= H1[N] = Total[H1 /@ Drop[Divisors[N],-1]
In[4] := Table[H1[N], {N, 1, 12}]
Out[4] = {1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 2, 3, 1, 8}
In[5] := PrimeFactorList[N_] := First /@ FactorInteger[N]
In[6] := H2[1] := 1/2;
In[7] := H2[N_]:= H2[N] = -2Total[(-1)^(Length[#]) H2[N/Times @@#]&/@
         Rest[Subsets[PrimeFactorList[N]]]]
In[8] := Table[H2[N], {N, 2, 20}]
Out[8] = {1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 2, 3, 1, 8, 1, 3, 3, 8, 1, 8, 1, 8}
```

Вычисления по формуле (5) МакМагона выглядят следующим образом:

```
In[9] := H3[N_] := ∑_{i=1}^{Total[##]} ∑_{k=0}^{i-1} (-1)^k Binomial[i,k] Apple[Times,
         Binomial[#+i-k-1,#] &/@#]&[Last/@ FactorInteger[N]]
In[10]:= H3[2^5 3^4 5] // Timing
Out[10]= {0. Second, 102576}
```

Комбинаторное доказательство формулы (5), основанное на графической иллюстрации упорядоченной факторизации числа с двумя простыми делителями, дано в [4]. Другой подход к определению числа упорядоченных факторизаций предложен в работе [11], в которой получены новые рекуррентные формулы для $H(N)$. С помощью этих соотношений вычисление функции $H(N)$ можно свести к задаче нахождения количества разбиений числа N на части, каждая из которых не меньше 2. Для вычисления этого количества требуется подсчитать число разбиений на части, не меньшие 3, и т.д.

Список литературы

[1] P. A. MacMahon. *Certain special partitions of numbers*, Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, **21** (1886), 367-373.

[2] Я. Гульден, Д. Джексон. *Перечислительная комбинаторика,* Наука, М., 1990. (Задача 2.5.12, с. 99.)

[3] E. O'Shea. *Bachet's Problem: as few weights to weigh them all*, ArXiv: **1010.5486v1** [math.HO] (26 Oct. 2010).

[4] P. A. MacMahon. *Memoir on the Theory of the Compositions of Numbers*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London (A), **184** (1893), 835-901.

[5] B. Chor, P. Lemke, Z. Mador. *On the number of ordered factorizations of natural numbers*, Discrete Mathematics, **214** (2000), 123-133.

[6] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. *Интегралы и ряды.* В 3 т. Т. 1. Элементарные функции, Физматлит, М., 2002. (4.2.7.30.)

[7] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. *Конкретная математика. Основание информатики*, Мир, М., 1998. (Задача 101, с. 284.)

[8] U. Kühnel. Über die Anzahl der Produktdarstellungen der positiven ganzen Zahlen, Archiv der Mathematik, **2:3** (1950), 216–219.

[9] E. Hill. *A problem in "Factorisatio Numerorum"*, Acta Arithmetica, **2** (1936), 134-144.

[10] A. Knopfmacher, M. Mays. *Ordered and Unordered Factorizations of Integers*, Mathematica Journal, **10** (2006), 72-89.

[11] В. В. Кручинин. *Число разбиений натурального числа n на части, каждая из которых не менее m*, Математические заметки, **86:4** (2009), 538-542.