

УДК 517.9

Е. М. Карчевский, И. Е. Плещинская, А. О. Спиридонов

**ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ  
О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА  
С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ**

*Ключевые слова: проекционные методы, спектральные задачи, диэлектрические волноводы.*

*Задача о поверхностных и вытекающих собственных волнах слабонаправляющего диэлектрического волновода с кусочно-постоянным показателем преломления сведена к нелинейной спектральной задаче для системы слабо сингулярных граничных интегральных уравнений. Интегральный оператор аппроксимируется методом Галеркина и методом коллокации. Сходимость и свойства этих методов исследуются численно. Метод коллокации демонстрирует лучшую скорость сходимости.*

*Keywords: projection methods, spectral problems, dielectric waveguides.*

*The original problem on surface and leaky eigen modes of a weakly guiding step-index optical waveguide is considered. The original problem is reduced to a nonlinear spectral problem for the set of weakly singular boundary integral equations. We approximate the integral operator by collocation method and by Galerkin method. The convergence and quality of these numerical methods are proved by numerical experiments. The collocation method demonstrates better speed of convergence.*

**Введение**

Для расчета собственных волн диэлектрических волноводов предложено множество алгоритмов (см., напр. обзоры в [1], [2]), основанных на конечно-элементных и конечно-разностных аппроксимациях, лучевом приближении, различные варианты метода частичных областей и метода коллокации. Часто авторы интересуются алгоритмическими аспектами и физической интерпретацией численных результатов больше, чем фундаментальными математическими свойствами решений задачи, включая существование, свойства и распределение спектра на комплексной плоскости спектрального параметра. Аналогичная ситуация наблюдается при исследовании собственных волн в слоистых композитных структурах [3], [4]. Данная работа развивает новый подход к математическому и численному анализу спектральных задач теории диэлектрических волноводов, основанный на методах спектральной теории оператор-функций и слабо сингулярных интегральных уравнений [5], [6].

Рассматривается задача о поверхностных и вытекающих собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с постоянным показателем преломления, близким к показателю преломления окружающей среды [7]. Постановка задачи и ее редукция к нелинейной спектральной задаче с фредгольмовым интегральным оператором представлены в [7]. Сходимость метода Галеркина численного решения этой задачи доказана в [8]. В настоящей работе для решения нелинейной спектральной задачи для системы слабо сингулярных интегральных уравнений предлагается метод сплайн-коллокации и подобластей нулевого порядка. В ходе численных экспериментов устанавливается, что метод сплайн-коллокации имеет первый порядок скорости сходимости. Несмотря на это,

метод по объему вычислений имеет значительное преимущество по сравнению с методом Галеркина.

**Нелинейная спектральная задача  
для интегрального уравнения по контуру  
поперечного сечения волновода  
в однородной среде**

Рассмотрим задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в однородной среде с произвольным контуром поперечного сечения и постоянным показателем преломления, близким к показателю преломления окружающей среды.

Пусть образующая цилиндра параллельна оси  $x_3$ , а показатель преломления волновода не зависит от  $x_3$ , является кусочно-постоянной вещественной функцией  $n = n(x_1, x_2)$ . Показатель преломления  $n_\infty$  вне волновода является постоянной положительной величиной. Обозначим через  $R^2 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1, x_2 < \infty\}$  плоскость поперечного сечения волновода. Пусть область поперечного сечения волновода  $\Omega$  ограничена дважды непрерывно дифференцируемым контуром  $\Gamma$ . Обозначим через  $\Omega_\infty$  область  $R^2 \setminus \Omega$ . Пусть функция  $n$  равна константе  $n_+ > n_\infty$  в  $\Omega$ , кроме того,  $n_+ \approx n_\infty$  (т. е. удовлетворяет аппроксимации слабонаправляющего волновода). Как обычно, точку на плоскости будем обозначать символом  $x = (x_1, x_2)$ .

В скалярном приближении слабонаправляющего волновода задача сводится [7] к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \chi_+^2 \beta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\Delta u + \chi_\infty^2 \beta u = 0, \quad x \in \Omega_\infty, \quad (2)$$

где  $\chi_+ \beta = \sqrt{k^2 n_+^2 - \beta^2}$ ,  $\chi_\infty \beta = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}$ ,  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ ,  $\omega > 0$ , – частота электромагнитных колебаний;  $\varepsilon_0, \mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные, соответственно; комплексный параметр  $\beta$  называется продольной постоянной распространения.

Функция  $u$  должна удовлетворять также условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

и условиям излучения на бесконечности

$$u = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m H_m^{(1)}(\chi \beta r) \exp(i m \varphi) u^-, \quad |x| > R_0. \quad (4)$$

Здесь  $\nu$  – производная по нормали, внешней относительно контура  $\Gamma$ ;  $H_m^{(1)}$  – функция Ханкеля первого рода порядка  $m$ ;  $(r, \varphi)$  – полярные координаты точки  $x$ . Ряд (4) является абсолютно и равномерно сходящимся.

Решение задачи (1) – (4) будем искать в виде потенциалов простого слоя

$$u(x) = \int_{\Gamma} \Phi_+(\beta; x, y) f_+(y) dl(y), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$u(x) = \int_{\Gamma} \Phi_\infty(\beta; x, y) f_\infty(y) dl(y), \quad x \in \Omega_\infty, \quad (6)$$

где  $\Phi(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi \beta |x - y|)$  – фундаментальные решения уравнений Гельмгольца (1) и (2), а неизвестные плотности  $f_+$  и  $f_\infty$  принадлежат пространству непрерывных по Гельдеру функций.

Методами теории потенциала исходная задача сводится к нелинейной спектральной задаче для системы слабо сингулярных интегральных уравнений по контуру поперечного сечения волновода:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \Phi_+(\beta; x, y) f_+(y) dl(y) - \\ & - \int_{\Gamma} \Phi_\infty(\beta; x, y) f_\infty(y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (7) \\ & \frac{1}{2} f_+(x) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_+(y) dl(y) + \frac{1}{2} f_\infty(x) - \\ & - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_\infty(y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (8) \end{aligned}$$

В работе [7] доказано, что для каждого  $\beta$  интегральный оператор (7) – (8) является фредгольмовым, и исходная задача (1) – (4) является спектрально эквивалентной задаче (7) – (8).

### Метод Галеркина

В качестве базисных функций выберем тригонометрические и будем строить приближения к собственным функциям  $f_+$  и  $f_\infty$  в виде отрезков рядов Фурье. В результате получим систему ли-

нейных алгебраических уравнений метода Галеркина [8]:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-N}^N \alpha_k^{(1)} \lambda_{k,m} + \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-N}^N \alpha_k^{(1)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{(1,1)} e^{ik\tau} e^{-imt} d\tau dt + \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-N}^N \alpha_k^{(2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{(2,1)} e^{ik\tau} e^{-imt} d\tau dt = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-N}^N \alpha_k^{(1)} \lambda_{k,m} + \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-N}^N \alpha_k^{(1)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{(1,2)} e^{ik\tau} e^{-imt} d\tau dt + \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-N}^N \alpha_k^{(2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{(2,2)} e^{ik\tau} e^{-imt} d\tau dt = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где ядра интегралов нелинейно зависят от постоянной распространения и определяются равенствами

$$\begin{aligned} & h^{(1,1)}(\beta; t, \tau) = \\ & = \pi(\Phi_+(\beta; x(t), y(\tau)) + \Phi_\infty(\beta; x(t), y(\tau))) \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right|, \\ & h^{(1,2)}(\beta; t, \tau) = \\ & = \pi(\Phi_+(\beta; x(t), y(\tau)) + \Phi_\infty(\beta; x(t), y(\tau))) |r'(t)|, \\ & h^{(2,1)}(\beta; t, \tau) = \\ & = 2\pi \left( \frac{\partial \Phi_+(\beta; x(t), y(\tau))}{\partial \nu(x(t))} + \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x(t), y(\tau))}{\partial \nu(x(t))} \right), \\ & h^{(2,2)}(\beta; t, \tau) = \\ & = 2\pi \left( \frac{\partial \Phi_+(\beta; x(t), y(\tau))}{\partial \nu(x(t))} - \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x(t), y(\tau))}{\partial \nu(x(t))} \right), \end{aligned}$$

а числовые параметры задаются следующим образом:

$$\lambda_{k,m} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq m, \\ \ln 2, & \text{если } k = m = 0, \\ \frac{1}{2|k|}, & \text{если } k = m \neq 0, \end{cases}$$

$$l = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq m, \\ 1, & \text{если } k = m. \end{cases}$$

Таким образом, мы свели задачу к нелинейной конечномерной спектральной задаче  $A(\beta)u = 0$ , где  $A$  – матрица системы уравнений (9) – (10), а  $u$  – вектор неизвестных.

### Метод коллокации

Для аппроксимации интегральных операторов в уравнениях (7) – (8) используем метод сплайн-коллокации и подобластей нулевого порядка [9], с. 241. Разобьем контур  $\Gamma$  на  $n$  подобластей

– дуг  $s_j$ , где  $i = \overline{1, n}$ . Обозначим через  $\tau$  – длину дуги  $s_j$ . Точки коллокации  $\xi_j$  выберем в серединах дуг  $s_j$ . Приближенное решение  $f_+$ ,  $f_\infty$  системы (7), (8) будем искать в виде сплайнов нулевого порядка. Потребуем совпадения левых и правых частей этой системы в точках коллокации. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений метода коллокации:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(1)} \int_{s_i} \Phi_+(\beta; \xi_j, y) \psi^l(\psi) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(2)} \int_{s_i} \Phi_\infty(\beta; \xi_j, y) \psi^l(\psi) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \alpha_i^{(1)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(1)} \int_{s_i} \frac{\partial \Phi_+(\beta; \xi_j, y)}{\partial \nu \xi_j} d\ell(\psi) + \frac{1}{2} \alpha_i^{(2)} - \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(2)} \int_{s_i} \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; \xi_j, y)}{\partial \nu \xi_j} d\ell(\psi) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Здесь неизвестные  $\alpha_i^{(j)}$  – значения искомых функций в точках коллокации. Ядра интегралов этой системы нелинейно зависят от постоянной распространения. Таким образом, мы вновь свели задачу к нелинейной конечномерной спектральной задаче.

При совпадении аргументов интегралы в (11), (12) имеют логарифмическую особенность, однако, они могут быть вычислены аналитически:

$$\begin{aligned} a_{j,j}^{(1,1)} &= \tau \frac{i}{4} \left( 1 + \frac{2i}{\pi} [\ln \chi_+(\beta) - \ln 2 - \psi(1) + \ln \frac{\tau}{2} - 1] \right), \quad j = \overline{1, n}, \\ a_{j,j}^{(1,2)} &= -\tau \frac{i}{4} \left( 1 + \frac{2i}{\pi} [\ln \chi_\infty(\beta) - \ln 2 - \psi(1) + \ln \frac{\tau}{2} - 1] \right), \quad j = \overline{1, n}, \\ a_{j,j}^{(2,1)} &= \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2\pi}, \quad a_{j,j}^{(2,2)} = \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2\pi}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где  $\psi$  – пси-функция.

Остальные интегралы вычисляются по методу средних прямоугольников:

$$\begin{aligned} a_{k,j}^{(1,1)} &= \tau \Phi_+(\beta; \xi_k, \xi_j), \quad k, j = \overline{1, n}, \quad k \neq j, \\ a_{k,j}^{(1,2)} &= \tau \Phi_\infty(\beta; \xi_k, \xi_j), \quad k, j = \overline{1, n}, \quad k \neq j, \\ a_{k,j}^{(2,1)} &= \frac{1}{2} - \frac{i}{4} \tau \chi_+(\beta) \left( \frac{(\xi_j^{(1)} - \xi_k^{(1)}) \nu_1}{|\xi_j - \xi_k|} + \frac{(\xi_j^{(2)} - \xi_k^{(2)}) \nu_2}{|\xi_j - \xi_k|} \right) \cdot H_1^{(1)}(\chi_+(\beta) |\xi_j - \xi_k|) \\ a_{k,j}^{(2,2)} &= \frac{1}{2} + \frac{i}{4} \tau \chi_\infty(\beta) |\xi_j - \xi_k|, \quad k, j = \overline{1, n}, \quad k \neq j. \end{aligned}$$

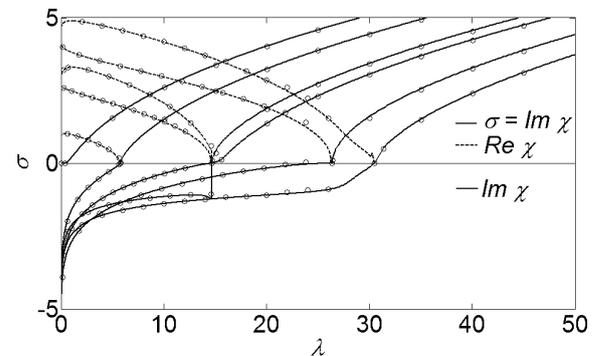
$$\begin{aligned} a_{k,j}^{(2,2)} &= \frac{1}{2} - \frac{i}{4} \tau \chi_\infty(\beta) \left( \frac{(\xi_j^{(1)} - \xi_k^{(1)}) \nu_1}{|\xi_j - \xi_k|} + \frac{(\xi_j^{(2)} - \xi_k^{(2)}) \nu_2}{|\xi_j - \xi_k|} \right) \cdot H_1^{(1)}(\chi_\infty(\beta) |\xi_j - \xi_k|) \\ k, j &= \overline{1, n}, \quad k \neq j. \end{aligned}$$

Приведем результаты численного решения конкретной спектральной задачи теории диэлектрических волноводов. В качестве модельной выберем задачу о собственных волнах слабонаправляющего диэлектрического волновода с кусочно-постоянной диэлектрической проницаемостью и круговым поперечным сечением. В этом случае задача (1) – (4) решается методом разделения переменных (см., например, [10]). В табл. 1 приведены результаты вычислений нормированных постоянных распространения  $h_j = \beta_j/k$ , полученные методом коллокации в сравнении с точным решением метода разделения переменных  $h_6 = 1,02561149$ . Здесь  $\varepsilon = |h_6 - \bar{h}_6|/|h_6|$  – относительная погрешность вычислений,  $e = \varepsilon/\tau$  – параметр скорости сходимости, связывающий погрешность вычислений с размером подобластей,  $n$  – число точек коллокации.

**Таблица 1 – Результаты вычислений, полученные методом коллокации**

$n$	$\tau$	$\bar{h}_6$	$\varepsilon$	$e$
100	0.0634	1,024+9e-03i	0,0011	0,018
250	0.0252	1,025+4e-03i	0,0004	0,017
500	0.0125	1,025+2e-03i	0,0002	0,016
1000	0.0062	1,025+8e-05i	0,0001	0,016
2000	0.0031	1,025+4e-05i	5e-05	0,016

Параметр скорости сходимости практически не зависит от размера подобластей. Это говорит о том, что метод коллокации имеет первый порядок скорости сходимости. На рис. 1, 2 представлены дисперсионные кривые и линии уровня собственных волн волновода кругового поперечного сечения.



**Рис. 1 – Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн для волновода кругового поперечного сечения**

На рис. 1 показана зависимость поперечного волнового числа  $\chi_\infty(\beta) = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}$  от волнового параметра  $\lambda = k^2 (n_+^2 - n_\infty^2)$ . Сплошными линиями и пунктиром обозначено точное решение, кружочками – результат расчетов.

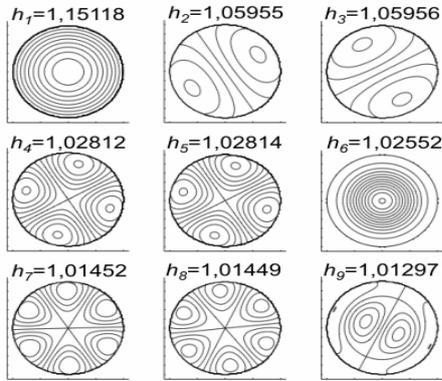


Рис. 2 - Линии уровня собственных волн волновода кругового поперечного сечения

### Нелинейная спектральная задача для интегрального уравнения по контуру поперечного сечения волновода в полупространстве

Рассмотрим задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в полупространстве с произвольным контуром поперечного сечения и постоянным показателем преломления, близким к показателю преломления окружающей среды (рис. 3).

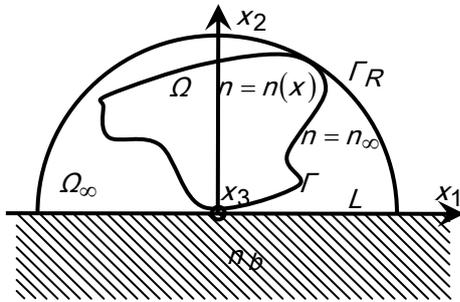


Рис. 3 - Поперечное сечение волновода в полупространстве

В скалярном приближении слабонаправляющего волновода задача сводится [6] к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \chi_+^2(\beta) u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (13)$$

$$\Delta u + \chi_\infty^2(\beta) u = 0, \quad x \in \Omega_\infty, \quad (14)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \quad (15)$$

граничному условию

$$u = 0, \quad x_2 = 0, \quad (16)$$

и условиям излучения на бесконечности

$$u = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m H_m^{(1)}(\chi(\beta)r) \sin(m\varphi) \quad |x| > R_0. \quad (17)$$

Основным отличием этой задачи от рассмотренной в предыдущих разделах является то, что область  $\Omega_\infty$  представляет собой дополнение области  $\Omega$  не до всей плоскости, а до верхней полуплоскости. Как следствие, появляется дополнительное граничное условие (16), а парциальные условия излучения принимают вид (17). Свойства решений этой задачи хорошо исследованы теоретически [6]. Наша цель – развить и исследовать метод сплайн-коллокации с подобластями нулевого порядка для численного решения этой задачи.

Решение задачи (13) – (17) будем искать в виде потенциалов простого слоя

$$u(x) = \int_{\Gamma} G_{C_+}(\beta; x, y) f_+(y) \varphi(y) \quad x \in \Omega, \quad (18)$$

$$u(x) = \int_{\Gamma} G_{C_\infty}(\beta; x, y) f_\infty(y) \varphi(y) \quad x \in \Omega_\infty, \quad (19)$$

где

$$G_C(\beta; x, y) = \frac{i}{4} \left( H_0^{(1)}(\chi(\beta)|x-y|) - H_0^{(1)}(\chi(\beta)|x-y^*|) \right),$$

$y^* = (y_1, -y_2)$ . Отметим, что здесь в отличие от представлений (5) используется не фундаментальное решение уравнений Гельмгольца на плоскости, а функция Грина для полуплоскости. Это позволяет точно учесть граничное условие (16) и поведение искомых функций на бесконечности. Используя свойства потенциалов простого слоя, исходную задачу сведем к нелинейной спектральной задаче

$$\int_{\Gamma} G_{C_+}(\beta; x, y) f_+(y) \varphi(y) - \int_{\Gamma} G_{C_\infty}(\beta; x, y) f_\infty(y) \varphi(y) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} f_+(x) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G_{C_+}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_+(y) \varphi(y) + \frac{1}{2} f_\infty(x) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G_{C_\infty}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_\infty(y) \varphi(y) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (21)$$

Функции Грина в (20), (21) отличаются от фундаментальных решений уравнений Гельмгольца гладким слагаемым. Поэтому для каждого  $\beta$  интегральный оператор системы (20), (21) является фредгольмовым, и исходная задача (13) – (17) спектрально эквивалентна задаче (20), (21).

Для численного решения данной задачи используем метод коллокации. Все выкладки аналогичны случаю задачи о собственных волнах волновода в однородной среде. Приведем результаты численных экспериментов. На рис. 4 представлены линии уровня функции  $u$  для волновода с поперечным сечением в форме полукруга, находящегося в полупространстве, построенные при  $n_+ = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 500$ .

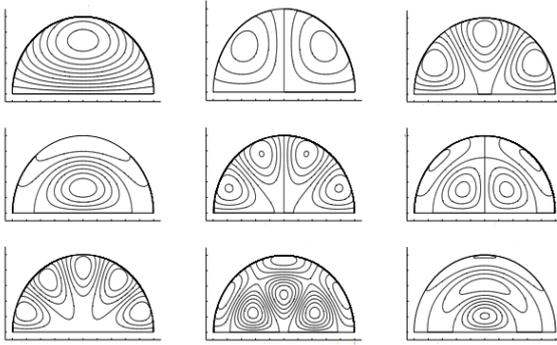


Рис 4 - Линии уровня для волновода в форме полукруга

### Сравнение методов

Для сравнения объемов вычислений метода Галеркина и метода коллокации измерялось время счета, которое необходимо было затратить для достижения одинаковой относительной погрешности при решении модельной задачи.

Таблица 2 – Сравнение методов

$n$	$time(s)$	$\bar{\varepsilon}$	$N$	$time(s)$	$\varepsilon$
100	12	1e-3	1	1449	9e-3
500	167	3e-4	3	6484	2e-4
2000	2308	4e-4	4	10450	6e-4
4000	9457	0			

Результаты измерений приведены в таблице 2. Здесь  $n$  – количество точек коллокации,  $N$  – число членов ряда Фурье метода Галеркина,  $\bar{\varepsilon}$  – относительная погрешность вычислений методом коллокации,  $\varepsilon$  – относительная погрешность вычислений методом Галеркина,  $time(s)$  – время вычисления в

секундах. Как видно из таблицы, метод коллокации значительно быстрее метода Галеркина.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и АН РТ, грант 12-01-97012-р-поволжье-а.

### Литература

- [1] T.P. Horikis, *Dielectric waveguides of arbitrary cross sectional shape*, *Applied Mathematical Modeling*, **37**, 7, 5080-5091, (2013).
- [2] J. Xiao, X. Sun, *Full-vectorial mode solver for anisotropic optical waveguides using multidomain spectral collocation method*, *Optics Communications*, **283**, 14, 2835-2840 (2010).
- [3] Е.А. Осипов, И.Е. Плещинская, Н.Б. Плещинский, *Вестник Казанск. технол. ун-та*, **15**, 3, 82-85 (2012).
- [4] И.Л. Александрова, И.Е. Плещинская, Н.Б. Плещинский, *Вестник Казанск. технол. ун-та*, **15**, 7, 37-39 (2012).
- [5] E.M. Kartchevski, A. I. Nosich, G. W. Hanson, *Mathematical analysis of the generalized natural modes of an inhomogeneous optical fiber*, *SIAM J. Appl. Math.*, **65**, 6, 2033-2048 (2005).
- [6] Е.М. Карчевский, А.Г. Фролов, *Известия вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки*, №1, 22–30 (2012).
- [7] E.M. Karchevskii, *Comput. Math. Math. Phys.*, **39**, 9, 1493-1498 (1999).
- [8] E.M. Karchevskii, *Russian Math., (Iz. VUZ)*. **43**, 1, 8–15 (1999).
- [9] Б.Г. Габдулхаев, *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода*. Изд-во казанского университета, Казань, 1994. 288 с.
- [10] Е.М. Карчевский, *Математические модели спектральной теории диэлектрических волноводов: Учебное пособие*. Изд-во казанского университета, Казань, 2008, 140 с.

© Е. М. Карчевский - д-р физ.-мат. наук, проф. каф. прикладной математики К(П)ФУ, ekarchev@yandex.ru; И. Е. Плещинская - канд. физ.-мат. наук, доц. каф. информатики и прикладной математики КНИТУ, plant\_flower@mail.ru; А. О. Спиридонов – студ. К(П)ФУ.