ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 4 (503)

УДК 519.175:512.565

С.Н. ТРОНИН, А.В. СЕМЕНОВА

ОПЕРАДЫ КОНЕЧНЫХ ПОМЕЧЕННЫХ ГРАФОВ

Данная работа посвящена изучению некоторых структур операд, возникающих на множествах помеченных конечных графов. Определения и обозначения, относящиеся к теории операд, взяты из [1]. Структуры, изучаемые в данной работе, были определены в [2]. Для конечных непомеченных графов композиция графов, очень похожая на операдную, введена в [3]. Для непомеченных графов, однако, нельзя использовать возможности, предоставляемые теорией операд. Используемые понятия и обозначения из теории графов соответствуют книге [4]. Заметим, что термин "операда графов" недавно уже появился в литературе по теории операд [5], но в данной статье этот термин используется для совсем иного объекта. Ввиду того что элементы наших операд больше похожи на графы в традиционном смысле, сохраним слово "графы" в названии изучаемого здесь объекта. Авторы благодарны проф. З. Озиевичу за предоставленную возможность ознакомиться с его работами, в частности, со статьей [5].

Пусть K — некоторое множество с выделенным элементом ε. Обозначим через $\mathfrak{M}_{n,k} = \mathfrak{M}_{n,k}(K)$ множество всех $n \times k$-матриц с компонентами из K. Определим две операции композиции. Пусть $A_i \in \mathfrak{M}_{n_i,k_i}$, $1 \le i \le m$, $B \in \mathfrak{M}_{m,m}$, $B = (b_{ij})$, $1 \le j \le m$. Операция композиции, которую будем называть *композицией* 1, определяется так:

$$A_1 A_2 \dots A_m B = \begin{pmatrix} A_1 & b_{1\,2} & \dots & b_{1\,m} \\ b_{2\,1} & A_2 & \dots & b_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m\,1} & b_{m\,2} & \dots & A_m \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$A_1 A_2 \dots A_m B$ — блочная $(n_1 + \dots + n_m) \times (k_1 + \dots + k_m)$-матрица, разбитая на блоки размерами $n_i \times k_j$, и b_{ij} в (1) — матрица размера $n_i \times k_j$, заполненная одним и тем же элементом b_{ij} из B. Вместо b_{ij} следовало бы писать $b_{ij} J_{n_i,k_j}$, где J_{n_i,k_j} — матрица, состоящая из единиц.

Пусть теперь K — моноид с единицей ε. Операция композиции, которую будем называть *композицией* 2, определяется так:

$$A_1 A_2 \dots A_m B = \begin{pmatrix} A_1 b_{1\,1} & b_{1\,2} & \dots & b_{1\,m} \\ b_{2\,1} & A_2 b_{2\,2} & \dots & b_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m\,1} & b_{m\,2} & \dots & A_m b_{m\,m} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Соглашения здесь те же самые, что и в (1).

Напомним [1], что операция композиции называется ассоциативной, если выполнены тождества

$$(\overline{A}_1 B_1) \dots (\overline{A}_m B_m) C = (\overline{A}_1 \dots \overline{A}_m)(B_1 \dots B_m C),$$

где $\overline{A}_i = A_{1,i} \dots A_{n_i,i}$, $A_{l,i} \in \mathfrak{M}_{n_{l,i},k_{l,i}}$, $B_i \in \mathfrak{M}_{n_i,n_i}$, $C \in \mathfrak{M}_{m,m}$, $1 \le i \le m$, $1 \le l \le n_i$.

Лемма 1. *Обе операции композиции* (1) *и* (2) *ассоциативны.*

Доказательство. Это делается с помощью непосредственной проверки, использующей определения (1) и (2). □

Определим два семейства множеств $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{M}(n) \mid n = 1, 2, \dots\}$, $\overline{\mathfrak{M}} = \{\overline{\mathfrak{M}}(n) \mid n = 1, 2, \dots\}$. Пусть $\mathfrak{M}(n)$ — подмножество $\mathfrak{M}_{n,n}$, состоящее из всех матриц, диагональные элементы которых равны ε, а $\overline{\mathfrak{M}}(n) = \mathfrak{M}_{n,n}$. На $\mathfrak{M}(n)$ и $\overline{\mathfrak{M}}(n)$ слева действует группа подстановок n-й степени Σ_n следующим образом. Если $A = (a_{ij})$, $1 \le i, j \le n$, $a_{ij} \in K$, $\sigma \in \Sigma_n$, то матрица σA состоит из элементов

$$(\sigma A)_{ij} = a_{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)}. \tag{3}$$

В дальнейшем при действиях с матрицами можно считать, что их компоненты лежат в полугрупповом кольце $\mathbf{Z}[K]$.

Лемма 2. *Пусть $M(\sigma)$ — матрица подстановки $\sigma \in \Sigma_n$. Тогда*

$$\sigma A = M(\sigma) A M(\sigma)^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $E_{i,j}$ — матричная единица, тогда $M(\sigma) = \sum\limits_{j=1}^{n} E_{\sigma(j),j}$, и

$$M(\sigma) A M(\sigma^{-1}) = \left(\sum_{k=1}^{n} E_{\sigma(k),k}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{i,j}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} E_{l,\sigma(l)}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{kj} E_{\sigma(k),j}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} E_{l,\sigma(l)}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} E_{\sigma(k),\sigma(l)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)} E_{i,j}.$$

Получена матрица, в которой на (i,j)-м месте стоит элемент $a_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)}$, как и у σA. $\square$

Теорема 1. 1) *Семейство $\mathfrak{M}$ (соответственно $\overline{\mathfrak{M}}$) с операцией композиции* 1 (*соответственно* 2) *и действием симметрических групп* (3) *становится операдой.*

2) *Множество $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{n,k \ge 1} \mathfrak{M}_{n,k}$ превращается в алгебру над операдой $\mathfrak{M}$, если определить композицию по формуле* (1), *и в алгебру над операдой $\overline{\mathfrak{M}}$, если определить композицию по формуле* (2). *При этом операды $\mathfrak{M}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ надо считать несимметрическими* (*т. е. исключить из их определения действия симметрических групп*).

Доказательство. Ассоциативность проверена в лемме 1. Единичным элементом в $\mathfrak{M}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ служит 1×1-матрица $(\varepsilon) \in \mathfrak{M}(1) = \overline{\mathfrak{M}}(1)$, где $\varepsilon \in K$ — выделенный элемент K (или единица моноида). Соответствующие свойства сразу вытекают из формул (1), (2). Все это показывает, что $\mathfrak{M}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ — несимметрические операды. Из леммы 1 теперь следует, что $\mathfrak{A}$ есть алгебра над $\mathfrak{M}$ или $\overline{\mathfrak{M}}$ в зависимости от того, какая композиция используется.

Остается проверить, что формула (3) превращает $\mathfrak{M}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ в симметрические операды. Доказательства для $\mathfrak{M}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ практически одинаковы. Выполним все проверки для $\mathfrak{M}$. Докажем тождество

$$(\sigma_1 A_1)(\sigma_2 A_2) \dots (\sigma_m A_m) B = (\sigma_1 \times \sigma_2 \times \dots \times \sigma_m) A_1 A_2 \dots A_m B. \tag{4}$$

Будем использовать лемму 2. Напомним, что

$$\sigma \times \tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m & m+1 & \dots & m+n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(m) & m+\tau(1) & \dots & m+\tau(n) \end{pmatrix},$$

где $\sigma \in \Sigma_m$, $\tau \in \Sigma_n$. Тогда $M(\sigma \times \tau) = \begin{pmatrix} M(\sigma) & 0 \\ 0 & M(\tau) \end{pmatrix}$. Легко проверяется равенство

$$\begin{pmatrix} M(\sigma_1)A_1M(\sigma_1)^{-1} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & M(\sigma_2)A_2M(\sigma_2)^{-1} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & M(\sigma_m)A_mM(\sigma_m)^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} M(\sigma_1) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & M(\sigma_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & b_{12}J_{12} & \dots & b_{1m}J_{1m} \\ b_{21}J_{21} & A_2 & \dots & b_{2m}J_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{m1}J_{m1} & b_{m2}J_{m2} & \dots & A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M(\sigma_1)^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & M(\sigma_m)^{-1} \end{pmatrix},$$

из которого следует (4).

Осталось проверить выполнимость последнего тождества

$$A_1A_2\dots A_m(\sigma B) = (\alpha * \sigma)(A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}\dots A_{\sigma(m)}B). \tag{5}$$

Напомним [1], что $\alpha * \sigma$ определяется так: если $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$, $\sigma \in \Sigma_m$,

$\mathbf{p}_1 = (1, 2, \dots, n_1), \mathbf{p}_2 = (n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2), \dots, \mathbf{p}_i = (n_1 + \dots + n_{i-1} + 1, \dots, n_1 + \dots + n_{i-1} + n_i)$,

$1 \le i \le m$, то $\alpha * \sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_m \\ \mathbf{p}_{\sigma(1)} & \mathbf{p}_{\sigma(2)} & \dots & \mathbf{p}_{\sigma(m)} \end{pmatrix}$. Очевидно,

$$A_1\dots A_m(\sigma B) = \begin{pmatrix} A_1 & b_{\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(2)} & \dots & b_{\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(m)} \\ b_{\sigma^{-1}(2),\sigma^{-1}(1)} & A_2 & \dots & b_{\sigma^{-1}(2),\sigma^{-1}(m)} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{\sigma^{-1}(m),\sigma^{-1}(1)} & b_{\sigma^{-1}(m),\sigma^{-1}(2)} & \dots & A_m \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим правую часть тождества (5). Матрица $M(\alpha * \sigma)$ устроена следующим образом. Это блочная матрица из $m \times m$ блоков, где блок с индексами $(\sigma(j), j)$ имеет $n_{\sigma(j)}$ строк и $n_{\sigma(j)}$ столбцов и равен единичной $n_{\sigma(j)} \times n_{\sigma(j)}$-матрице $E_{n_{\sigma(j)}}$. Остальные блоки, размеры которых однозначно определяются, нулевые. Неформально говоря, $M(\alpha * \sigma)$ получается так: в $M(\sigma)$ вместо единиц (расположенных в строках $\sigma(j)$ и столбцах j) "подставляются" блоки $E_{n_{\sigma(j)}}$, а вместо нулей — нулевые блоки соответствующих размеров. Пусть

$$A_{\sigma(1)}\dots A_{\sigma(m)}B = \begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & A_{\sigma(2)} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & A_{\sigma(m)} \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mm} \end{pmatrix},$$

где C_{ij} — блок размера $n_{\sigma(i)} \times n_{\sigma(j)}$. Вычислим $M(\alpha * \sigma)CM(\alpha * \sigma)^{-1} = (\alpha * \sigma)C$ с учетом того, что $M(\alpha * \sigma)^{-1} = M(\alpha * \sigma)^T$, т. е. в j-й блочной строке шириной $n_{\sigma(j)}$, в $\sigma(j)$-м блочном столбце ширины $n_{\sigma(j)}$ находится матрица $E_{n_{\sigma(j)}}$. Положим

$$M = M(\alpha * \sigma) = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \dots & \ddots & \dots \\ M_{m1} & \dots & M_{mm} \end{pmatrix},$$

где M_{ij} — блок размером $n_i \times n_{\sigma(j)}$, причем $M_{\sigma(j),j} = E_{n_{\sigma(j)}}$, $M_{ij} = 0$ для иных i. Это означает, что в столбце с номером $n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(j-1)} + k$, $1 \le k \le n_{\sigma(j)}$, проходящем через j-й блок, все элементы нулевые, кроме того элемента, который находится в строке с номером $n_1 + \dots + n_{\sigma(j)-1} + k$.

Покажем, что над числом $n_1 + \ldots + n_{\sigma(j)-1} + k$, $1 \le k \le n_{\sigma(j)}$, в подстановке $\alpha * \sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_m \\ \mathbf{p}_{\sigma(1)} & \mathbf{p}_{\sigma(2)} & \dots & \mathbf{p}_{\sigma(m)} \end{pmatrix}$ расположено число $n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(j-1)} + k$. Число $n_1 + \dots + n_{\sigma(j)-1} + k$

расположено в блоке $\mathbf{p}_{\sigma(j)}$ на k-м месте. Число, расположенное над ним, есть его порядковый номер, считая слева направо. Следовательно, это число элементов в блоках $\mathbf{p}_{\sigma(1)},\dots,\mathbf{p}_{\sigma(j-1)}$ плюс k: $n_{\sigma(1)}+\dots+n_{\sigma(j-1)}+k$. Рассмотрим

$$M'=\begin{pmatrix}M'_{11} & \dots & M'_{1m}\\ \dots & \ddots & \dots\\ M'_{m1} & \dots & M'_{mm}\end{pmatrix}=M^T=M^{-1},$$

где M'_{ij} — блок размером $n_{\sigma(i)}\times n_j$, причем $M'_{i,\sigma(i)}=E_{n_{\sigma(i)}}$, $M'_{ij}=0$ для иных j. Вычислим MCM'. Это матрица из $m\times m$ блоков, причем (i,j)-й блок имеет размер $n_i\times n_j$, и вычисляется по формуле $\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{m}M_{ik}C_{kl}M'_{lj}$. Ненулевое слагаемое в этом выражении получается лишь при $k=\sigma^{-1}(i)$, $l=\sigma^{-1}(j)$. В этом случае

$$M_{i,\sigma^{-1}(i)}=E_{n_{\sigma(\sigma^{-1}(i))}}=E_{n_i},\quad M'_{\sigma^{-1}(j),j}=E_{n_{\sigma(\sigma^{-1}(j))}}=E_{n_j},$$

и вся сумма равна $C_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)}$.

Итак, $\alpha*\sigma$ действует на C следующим образом:

$$(\alpha*\sigma)C=\begin{pmatrix}C_{\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(1)} & \dots & C_{\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(m)}\\ \dots & \ddots & \dots\\ C_{\sigma^{-1}(m),\sigma^{-1}(1)} & \dots & C_{\sigma^{-1}(m),\sigma^{-1}(m)}\end{pmatrix}.$$

На (i,j)-м месте в этой матрице стоит блок $C_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)}$. Если $i=j$, то $C_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(i)}=A_{\sigma(\sigma^{-1}(i))}=A_i$; если $i\neq j$, $k=\sigma^{-1}(i)$, $l=\sigma^{-1}(j)$, то $C_{kl}=b_{kl}J_{n_{\sigma(k)},n_{\sigma(l)}}=b_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)}J_{n_i,n_j}$.

Отсюда следует $(\sigma*\alpha)C=(A_1\dots A_m)(\sigma B)$. $\square$

Пусть $\mathfrak{G}(n)$ — множество всех (не обязательно простых) неориентированных конечных графов с n вершинами, помеченными символами $1,2,\dots,n$. Будем считать, что графы рассматриваются с точностью до изоморфизма следующего вида: графы $\Gamma',\Gamma''\in\mathfrak{G}(n)$ считаются равными, если между множествами ребер, соединяющих любые две вершины с метками i и j (в дальнейшем будем отождествлять вершины и их метки) в графе Γ', и ребер, соединяющих вершины i и j в графе Γ'', можно установить взаимно однозначное соответствие.

Определим на множестве $\mathfrak{G}(n)$ структуру операды. Как обычно, для графа $\Gamma\in\mathfrak{G}(n)$ через $V(\Gamma)$ обозначается множество его вершин, а через $E(\Gamma)$ — множество его ребер. Зададим композицию

$$\mathfrak{G}(n_1)\times\dots\times\mathfrak{G}(n_m)\times\mathfrak{G}(m)\to\mathfrak{G}(n_1+\dots+n_m),\quad(\Gamma_1,\dots,\Gamma_m,\Gamma_0)\mapsto\Gamma_1\dots\Gamma_m\Gamma_0.$$

Пусть $\Gamma_i\in\mathfrak{G}(n_i)$, $1\le i\le m$, $\Gamma_0\in\mathfrak{G}(m)$. Граф $\Gamma=\Gamma_1\dots\Gamma_m\Gamma_0$ устроен следующим образом: $V(\Gamma)=\{1,2,\dots,n_1,n_1+1,\dots,n_1+n_2,n_1+n_2+1,\dots,n_1+\ldots+n_m\}$. Множество $\{n_1+\dots+n_{i-1}+1,\dots,n_1+\dots+n_{i-1}+n_i\}$ будем отождествлять с $\{1,\dots,n_i\}=V(\Gamma_i)$, сопоставляя вершине $1\le j\le n_i$ вершину $n_1+\ldots+n_{i-1}+j$. Таким образом, можно считать, что $V(\Gamma)=\bigcup\limits_{i=1}^{m}V(\Gamma_i)$, причем $V(\Gamma_i)\bigcap V(\Gamma_j)=\emptyset$.

Ребра $E(\Gamma)$ описываются так. Пусть ребро $e\in E(\Gamma_i)$ соединяет вершины u,v, где $1\le u,v\le n_i$. Тогда в графе Γ определено ребро с тем же именем e, соединяющее вершины $n_1+\dots+n_{i-1}+u$ и $n_1+\dots+n_{i-1}+v$. С учетом сделанного выше отождествления вершин Γ_i с подмножеством вершин Γ это означает, что $E(\Gamma_i)$ вкладывается в $E(\Gamma)$ так, что граф Γ_i — это подграф графа Γ при $1\le i\le m$.

Кроме того, если $e\in E(\Gamma_0)$ соединяет вершины i и j $(1\le i,j\le m)$ графа Γ_0, то для любых вершин $u\in E(\Gamma_i)$, $v\in E(\Gamma_j)$ определено ребро $e_{uv}=e_{vu}\in E(\Gamma)$, соединяющее вершину $n_1+\dots+n_{i-1}+u$ графа Γ с вершиной $n_1+\dots+n_{j-1}+v$.

Определим действие Σ_n на $\mathfrak{G}(n)$. Пусть $\sigma \in \Sigma_n$, $\Gamma \in \mathfrak{G}(n)$. Положим $\sigma\Gamma$ равным графу с вершинами $1, \ldots, n$, причем i и j соединены ребром e в Γ тогда и только тогда, когда вершины $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$ соединены ребром с тем же именем e в графе $\sigma\Gamma$.

Проверим, что так определено действие, т. е. $(\sigma\tau)\Gamma = \sigma(\tau\Gamma)$. Пусть $\Gamma_1 = \tau\Gamma$, $G_2 = \sigma(\tau\Gamma)$, $\Gamma_3 = (\sigma\tau)\Gamma$. Надо показать, что $\Gamma_2 = \Gamma_3$, т. е. согласно сделанным предположениям должно существовать взаимно однозначное соответствие между ребрами, соединяющими каждую пару вершин u, v (вершины в Γ_2 и Γ_3 общие). Ребро e соединяет в графе Γ вершины i и j тогда и только тогда, когда ребро с тем же именем e соединяет $\sigma\tau(i)$ и $\sigma\tau(j)$ в Γ_3.

С другой стороны, e соединяет i и j в Γ тогда и только тогда, когда ребром с именем e соединены вершины $\tau(i)$ и $\tau(j)$ в Γ_1, что эквивалентно тому, что вершины $\sigma\tau(i)$ и $\sigma\tau(j)$ соединены ребром e. Поскольку других ребер, кроме ребер указанного вида, в Γ_2 и Γ_3 нет, то наличие взаимно однозначного соответствия очевидно.

Через E обозначим граф с одной вершиной и пустым множеством ребер ($E \in \mathfrak{G}(1)$).

Теорема 2. 1) *Семейство множеств $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{G}(n) \mid n \geq 1\}$ с определенной на них выше операцией композиции и действием симметрических групп является операдой. Единица операды — граф E.*

2) *Подоперада операды $\mathfrak{G}$, состоящая из графов без петель, изоморфна подопераде, описанной в теореме* 1 *операды $\mathfrak{M}$ (где в качестве K берется множество целых неотрицательных чисел и $\varepsilon = 0$), состоящей из симметрических матриц.*

Доказательство. Проверим свойства единицы. Пусть $\Gamma_1 = \cdots = \Gamma_m = E$, $\Gamma = E \ldots E\Gamma_0$. В графе Γ имеется m вершин, как и в Γ_0. Поскольку $\Gamma_i = E$, $1 \leq i \leq m$, не имеет ребер, то все ребра Γ получаются из ребер Γ_0. Пусть k, l — вершины Γ_0, e — соединяющее их ребро в Γ_0. Вершины Γ_k и Γ_l можно выбрать единственным способом, и они имеют метки (в Γ) k и l. Таким образом, по определению композиции, в Γ найдется лишь одно ребро e_{kl}. Теперь очевидно, что имеется взаимно однозначное соответствие между ребрами Γ и Γ_0. Следовательно, это один и тот же элемент $\mathfrak{G}(m)$. Если $m = 1$, $\Gamma_0 = E$, $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_0 = \Gamma_1 E$, то прямо из определения композиции ясно, что вершины и ребра Γ те же, что и у Γ_1.

Докажем, что композиция ассоциативна. Пусть $\overline{\Gamma}_i = \Gamma_{1i} \ldots \Gamma_{n_i i}$, $1 \leq i \leq m$, $\Gamma_{ji} \in \mathfrak{G}(k_{ij})$, $\Gamma_i \in \mathfrak{G}(n_i)$, $\Gamma_0 \in \mathfrak{G}(m)$. Покажем, что графы $\Gamma' = (\overline{\Gamma}_1\Gamma_1) \ldots (\overline{\Gamma}_m\Gamma_m)\Gamma_0$ и $\Gamma'' = \overline{\Gamma}_1 \ldots \overline{\Gamma}_m(\Gamma_1 \ldots \Gamma_m\Gamma_0)$ представляют один и тот же элемент из $\mathfrak{G}\Big(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n_i} k_{ji}\Big)$.

Ясно, что множество вершин у этих графов одно и то же: $\Big\{1, 2, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n_i} k_{ji}\Big\}$. При этом вложения графов $\Gamma_{ji} \to \Gamma_{1i} \ldots \Gamma_{n_i i}\Gamma_i \to \Gamma''$, $\Gamma_{ji} \to \Gamma''$ отображают вершины Γ_{ji} в $V(\Gamma') = V(\Gamma'')$ одинаковым образом: $l \mapsto \sum\limits_{s=1}^{i-1}\sum\limits_{t=1}^{n_s} k_{ts} + \sum\limits_{t=1}^{n_i-1} k_{ti} + l$.

Отождествляя Γ_{ji} с подграфами Γ' и Γ'', а Γ_i — с подграфами $\Gamma_1 \ldots \Gamma_m\Gamma_0$, рассмотрим ребра Γ' и Γ''. Множество ребер Γ' можно разбить на три непересекающихся подмножества:

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{m}\bigcup\limits_{j=1}^{n_i} E(\Gamma_{ji})$;
2) множество ребер, определяемых так: для каждого ребра $e \in E(\Gamma_i)$, инцидентного вершинам $k, l \in V(\Gamma_i)$, для любых вершин $u \in V(\Gamma_{ki})$, $v \in V(\Gamma_{li})$ определено ребро $e_{uv} = e_{vu}$, соединяющее u и $v, 1 \leq i \leq m$;
3) множество ребер, определяемых так: для каждого ребра $e \in E(\Gamma_0)$, соединяющего вершины k, l графа Γ_0, произвольных p, q, $1 \leq p \leq n_k$, $1 \leq q \leq n_l$, и для любых $u \in V(\Gamma_{pk})$, $v \in V(\Gamma_{ql})$ определено ребро $e_{pq,uv}$, соединяющее u и v (здесь $e_{pq,uv} = e_{qp,uv} = e_{pq,vu}$ и т. д.).

Аналогичным образом, используя определение композиции, множество ребер Γ'' можно разбить на три непересекающихся подмножества, которые (с точностью до обозначений) совпадают с множествами из пп. 1), 2), 3) выше. Поэтому $\Gamma' = \Gamma''$ как элементы операды $\mathfrak{G}$.

Проверим свойства операды, связанные с подстановками. Пусть $\sigma_i \in \Sigma_{n_i}$, $\Gamma_i \in \mathfrak{G}(n_i)$, $1 \le i \le m$, $\Gamma_0 \in \mathfrak{G}(m)$; $\Gamma' = (\sigma_1\Gamma_1)\dots(\sigma_m\Gamma_m)\Gamma_0$, $\Gamma'' = (\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m)(\Gamma_1 \dots \Gamma_m\Gamma_0)$. Покажем, что это один и тот же элемент $\mathfrak{G}(n_1 + \dots + n_m)$. Для этого построим взаимно однозначное соответствие ребер (совпадение вершин очевидно). Пусть e — ребро Γ', соединяющее две вершины подграфа $\sigma_i\Gamma_i \subset \Gamma'$, например, $n_1 + \dots + n_{i-1} + \sigma_i(k)$ и $n_1 + \dots + n_{i-1} + \sigma_i(l)$, $1 \le k, l \le n_i$. Оно соответствует ребру e, соединяющему вершины $n_1 + \dots + n_{i-1} + k$ и $n_1 + \dots + n_{i-1} + l$ подграфа Γ_i графа $\Gamma_1 \dots \Gamma_m\Gamma_0$. Но по определению $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m$ этому ребру соответствует ребро, соединяющее вершины $(\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m)(n_1 + \dots + n_{i-1} + k) = n_1 + \dots + n_{i-1} + \sigma_i(k)$ и $(\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m)(n_1 + \dots + n_{i-1} + l) = n_1 + \dots + n_{i-1} + \sigma_i(l)$ графа $\Gamma'' = (\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m)(\Gamma_1 \dots \Gamma_m\Gamma_0)$. Если же e — ребро Γ_0, соединяющее вершины k и l, $1 \le k, l \le m$, то любые вершины в $\sigma_k\Gamma_k$ и $\sigma_l\Gamma_l$ можно представить в виде $\sigma_k u$ и $\sigma_l v$, $1 \le u \le n_k$, $1 \le v \le n_l$, так что в Γ' определено ребро $e_{\sigma_k u, \sigma_l v}$, соединяющее вершины $n_1 + \dots + n_{k-1} + \sigma_k u$ и $n_1 + \dots + n_{l-1} + \sigma_l v$. Для того же ребра e в графе $\Gamma_1 \dots \Gamma_m\Gamma_0$ определено ребро $e_{u,v}$, соединяющее вершины $n_1 + \dots + n_{k-1} + u$ и $n_1 + \dots + n_{l-1} + v$. Этому ребру соответствует в графе $(\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m)(\Gamma_1 \dots \Gamma_m\Gamma_0)$ ребро, соединяющее вершины $(\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m)(n_1 + \dots + n_{k-1} + u) = n_1 + \dots + n_{k-1} + \sigma_k u$ и $(\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m)(n_1 + \dots + n_{l-1} + v) = n_1 + \dots + n_{l-1} + \sigma_l v$.

Пусть теперь $\sigma \in \Sigma_m$, $\Gamma' = (\Gamma_1 \dots \Gamma_m)(\sigma\Gamma_0)$, $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$, $\Gamma'' = (\alpha * \sigma)(\Gamma_{\sigma 1} \dots \Gamma_{\sigma m}\Gamma_0)$. Построим взаимно однозначное соответствие между ребрами Γ' и Γ''.

Пусть e — ребро графа $\Gamma_{\sigma j}$, соединяющее вершины k и l, $1 \le k, l \le n_{\sigma(j)}$, $1 \le j \le m$. При вложении $\Gamma_{\sigma j}$ в Γ' ему соответствует ребро (с тем же именем), соединяющее вершины $n_1 + \dots + n_{\sigma(j)-1} + k$ и $n_1 + \dots + n_{\sigma(j)-1} + l$.

Рассмотрим вложение графа $\Gamma_{\sigma(j)}$ в граф $\Gamma_{\sigma 1} \dots \Gamma_{\sigma m}\Gamma_0$. Ребру e графа $\Gamma_{\sigma(j)}$ будет соответствовать ребро с тем же именем, соединяющее вершины $n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(j-1)} + k$ и $n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(j-1)} + l$. Тогда в графе $(\alpha * \sigma)(\Gamma_{\sigma 1} \dots \Gamma_{\sigma m}\Gamma_0)$ ребро с именем e должно соединять вершины $(\alpha * \sigma)(n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(j-1)} + k)$ и $(\alpha * \sigma)(n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(j-1)} + l)$. Но при доказательстве теоремы 1 уже было показано, что эти числа равны $n_1 + \dots + n_{\sigma(j)-1} + k$ и $n_1 + \dots + n_{\sigma(j)-1} + l$ соответственно.

Пусть e — ребро графа Γ_0, соединяющее вершины k и l, $1 \le k, l \le m$. Ему соответствует ребро e графа $\sigma\Gamma$, соединяющее σk и σl. Тогда для любых вершин $u \in V(\Gamma_{\sigma(k)})$, $1 \le u \le n_{\sigma(k)}$, $v \in V(\Gamma_{\sigma(l)})$, $1 \le v \le n_{\sigma(l)}$, определено ребро $e_{u,v}$ в Γ', соединяющее $n_1 + \dots + n_{\sigma(k)-1} + u$ и $n_1 + \dots + n_{\sigma(l)-1} + v$. С другой стороны, по ребру $e \in E(\Gamma_0)$ и вершинам $u \in V(\Gamma_{\sigma(k)})$, $v \in V(\Gamma_{\sigma(l)})$ строится ребро $e_{u,v}$ в графе $\Gamma_{\sigma 1} \dots \Gamma_{\sigma m}\Gamma_0$, соединяющее вершины $n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(k-1)} + u$ и $n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(l-1)} + v$. В графе $(\alpha * \sigma)(\Gamma_{\sigma 1} \dots \Gamma_{\sigma m}\Gamma_0)$ этому ребру соответствует ребро с тем же именем, соединяющее вершины $(\alpha * \sigma)(n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(k-1)} + u) = n_1 + \dots + n_{\sigma(k)-1} + u$ и $(\alpha * \sigma)(n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(l-1)} + v) = n_1 + \dots + n_{\sigma(l)-1} + v$.

Тем самым проверены все свойства операды для $\mathfrak{G}$.

Пусть $K = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество целых неотрицательных чисел. Каждому графу $\Gamma \in \mathfrak{G}(n)$ можно сопоставить матрицу инциденций $A = A(\Gamma)$, компоненты которой — элементы K. Так как вершины графов из $\mathfrak{G}(n)$ упорядочены, то таким образом задается инъективное отображение из $\mathfrak{G}(n)$ в $\mathfrak{M}_{n,n} = \overline{\mathfrak{M}}(n)$. Множество графов из $\mathfrak{G}(n)$ без петель при этом отображается в $\mathfrak{M}(n)$.

Легко убедиться, что если $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m, \Gamma_0$ — графы без петель, то и $\Gamma_1 \dots \Gamma_m\Gamma_0$ обладает этим свойством, и если матрицы $A_1 \in \mathfrak{M}(n_1), \dots, A_m \in \mathfrak{M}(n_m)$, $A_0 \in \mathfrak{M}(m)$ симметричны, то и матрица $A_1 \dots A_m A_0 \in \mathfrak{M}(n_1 + \dots + n_m)$ также симметрична. Таким образом, эти графы и матрицы образуют подоперады в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно.

Матрица инциденций для неориентированного графа является симметричной, ее элементы — целые неотрицательные числа, и т. к. рассматриваются графы без петель, то диагональные элементы матрицы равны нулю. Обратно, любая матрица такого вида однозначно определяет граф без петель — элемент $\mathfrak{G}(n)$. Легко проверяется, что $A(\Gamma_1 \dots \Gamma_m\Gamma_0) = A(\Gamma_1) \dots A(\Gamma_m)A(\Gamma_0)$, и $A(\sigma\Gamma) = \sigma A(\Gamma)$ при $\sigma \in \Sigma_n$, $\Gamma \in \mathfrak{G}(n)$. $\square$

Замечание 1. Аналогично тому, как это сделано выше для неориентированных графов, можно определить операду, элементами n-й компоненты которой будут ориентированные графы с множеством вершин $\{1, 2, \dots, n\}$. Можно также ввести операды взвешенных графов (ориентированных или нет), ребрам которых приписаны веса из моноида K. Имеется также несколько структур операд на множествах помеченных гиперграфов. В данной работе, однако, сосредоточимся на операде неориентированных графов.

Определение 1. Граф Γ будем называть *операдно разложимым* (или просто разложимым), если существует такая нумерация его вершин, что Γ изоморфен операдной композиции $\Gamma_1 \dots \Gamma_m \Gamma_0$, где $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m, \Gamma_0$ — помеченные графы (элементы операды $\mathfrak{G}$) такие, что $\Gamma_0 \neq E$ и, по крайней мере, один из Γ_i нетривиален при $i \geq 1$.

Граф Γ будем называть *операдно неразложимым* (или просто неразложимым), если он не является операдно разложимым. Иными словами, для неразложимого графа из $\Gamma \cong \Gamma_1 \dots \Gamma_m \Gamma_0$ следует, что либо $\Gamma_1 = \dots = \Gamma_m = E$, $\Gamma_0 \cong \Gamma$, либо $m = 1$, $\Gamma_0 = E$, $\Gamma_1 \cong \Gamma$.

Лемма 3. *Пусть* $\Gamma = \Gamma_1 \dots \Gamma_m \Gamma_0$. *Тогда в* Γ *существует подграф, изоморфный* Γ_0.

Доказательство. Строим этот подграф следующим образом. Выбираем для каждого $i \in V(\Gamma_0)$ по одной вершине $v_i \in V(\Gamma_i)$, $1 \leq i \leq m$, и для каждого ребра e, соединяющего в Γ_0 вершины i и j — ребро $e_{v_i v_j}$, соединяющее $v_i \in V(\Gamma_i) \subset V(\Gamma)$ и $v_j \in V(\Gamma_j) \subset V(\Gamma)$. Очевидно, подграф Γ' графа Γ с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_m\}$ и множеством ребер $\{e_{v_i v_j} \mid e \in E(\Gamma_0)\}$ изоморфен Γ_0. $\square$

Определение 2. *Фрагментом* графа Γ с ядром Γ^* будем называть пару графов (Γ', Γ^*), где $\Gamma^* \subseteq \Gamma' \subseteq \Gamma$, причем выполнены условия

1) если $v_1, v_2 \in V(\Gamma^*)$ инцидентны ребру $e \in E(\Gamma)$, то $e \in E(\Gamma^*)$;
2) если $v \in V(\Gamma^*)$ соединено ребром e с $v' \in V(\Gamma)$, то $v' \in V(\Gamma')$ и $e \in E(\Gamma')$.

Фрагмент (Γ', Γ^*) будем называть *нетривиальным*, если ядро Γ^* не равно тривиальному графу с одной вершиной без ребер, и $V(\Gamma') \neq V(\Gamma^*)$.

Нетривиальный фрагмент (Γ', Γ^*) графа Γ будем называть *разлагающим*, если выполняется еще одно условие

3) если вершины $v \in V(\Gamma^*)$ и $v' \in V(\Gamma')$, $v' \notin V(\Gamma^*)$, соединяет (в графе Γ) k ребер ($k \geq 0$ согласно условию 2) все эти ребра принадлежат графу Γ'), то любая другая вершина $w \in V(\Gamma^*)$ соединена в графе Γ с v' в точности k ребрами.

Замечание 2. Если (Γ', Γ^*) — фрагмент, то для $\Gamma \supseteq \Gamma'' \supseteq \Gamma'$ пара (Γ'', Γ^*) также будет фрагментом Γ, разлагающим, если разлагающим был фрагмент (Γ', Γ^*).

Лемма 4. *Фрагмент* (Γ', Γ^*) *является разлагающим тогда и только тогда, когда после некоторой перенумерации вершин* $\Gamma' \cong \Gamma^* E \dots E \Gamma_0$ *для некоторого графа* Γ_0, *в котором нет петель, инцидентных вершине* 1.

Доказательство. Пусть $\Gamma' = \Gamma^* E \dots E \Gamma_0$ и $1, 2, \dots, m$ — вершины Γ_0. Положим $\Gamma_1 = \Gamma^*$, $\Gamma_2 = E, \dots, \Gamma_m = E$, так что $\Gamma' = \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_m \Gamma_0$. Тогда $\Gamma_1 = \Gamma^*$ — подграф Γ'. Пусть $1, \dots, n_1$ — вершины Γ_1, тогда остальными вершинами Γ' будут $n_1 + 1, \dots, n_1 + m - 1$. Эти вершины соответствуют тривиальным подграфам E в разложении $\Gamma' = \Gamma^* E \dots E \Gamma_0$. По определению операдной композиции каждому ребру e графа Γ_0, соединяющему вершины 1 и $j > 1$, соответствует семейство ребер Γ' вида $e_{i, n_1 + j}$, соединяющих все вершины $\Gamma_1 = \Gamma^*$ (т. е. вершины $i = 1, \dots, n_1$) с вершиной $n_1 + j$. Если в Γ_0 имеется k ребер, инцидентных 1 и j, то для Γ' это будет означать, что каждая вершина Γ^* соединена с вершиной $n_1 + j$ одним и тем же количеством k ребер. Таким образом, условие 3) из определения выполнено.

Обратно, пусть (Γ', Γ^*) — разлагающий фрагмент, $n_1 = |V(\Gamma^*)|$. Снабдим вершины Γ' метками, начав нумерацию с вершин Γ^*, так что $V(\Gamma') = \{1, 2, \dots, n_1, n_1 + 1, \dots, n_1 + m - 1\}$ и $V(\Gamma^*) = \{1, \dots, n_1\}$. Пусть Γ_0 — граф, полученный "стягиванием" всех ребер и вершин Γ^* в одну точку. Множеством его вершин будет $\{1, 2, \dots, m\}$, причем вершина 1 соответствует всем вершинам Γ^*, вершины j — вершинам n_1+j при $2 \le j \le m-1$. Множество ребер Γ_0 устроено следующим образом. Если e — ребро Γ', соединяющее j и t, где $j,t > n_1$, то ему соответствует ребро Γ_0, соединяющее $j-n_1$ и $t-n_1$. Для любого $j > n_1$ либо не существует ребер Γ', соединяющих j с вершинами $1,\ldots,n_1$, либо каждая вершина $1,\ldots,n_1$ соединена с j одним и тем же количеством (напр., k) ребер. В этом случае в Γ_0 вершина 1 соединена с вершиной $j-n_1$ ровно k ребрами. Пусть $\Gamma_1 = \Gamma^*$, $\Gamma_2 = \cdots = \Gamma_m = E$. Тогда, сравнивая Γ' с $\Gamma_1 \ldots \Gamma_m \Gamma_0$, прямо из определения делаем вывод об изоморфности этих графов. □

Лемма 5. *Пусть* $\Gamma' = \Gamma_1 E \ldots E \Gamma'_0$ *для некоторого графа* Γ'_0. *Тогда существуют графы* Γ_0 *и* Γ^* *такие, что* $\Gamma' = \Gamma^* E \ldots E \Gamma_0$, *и в* Γ_0 *нет петель, инцидентных вершине* 1.

Доказательство. Если в Γ'_0 нет петель, инцидентных вершине 1, то $\Gamma_0 = \Gamma'_0$, $\Gamma^* = \Gamma_1$, и все доказано. В противном случае, пусть Λ — подграф Γ'_0 с единственной вершиной 1, ребра которого — всевозможные петли, инцидентные этой вершине.

Пусть Γ_0 — граф, получаемый из Γ'_0 стягиванием всех ребер Λ. Множество вершин у Γ_0 то же, что и у Γ'_0, но в Γ_0 уже нет петель, инцидентных вершине 1. Кроме того, очевидно, что $\Gamma'_0 = \Lambda E \ldots E \Gamma'_0$ (где тривиальные графы E соответствуют вершинам Γ'_0, не входящим в Λ). Отсюда $\Gamma_1 E \ldots E \Gamma'_0 = \Gamma_1 E \ldots E(\Lambda E \ldots E \Gamma_0) = (\Gamma_1\Lambda)(EE)\ldots(EE)\Gamma_0 = (\Gamma_1\Lambda)E\ldots E\Gamma_0$, и можно взять $\Gamma^* = \Gamma_1\Lambda$. □

Лемма 6. *Пусть* $\Gamma = \Gamma_1 \ldots \Gamma_{n_1}\Gamma_{n_1+1}\ldots\Gamma_m\Gamma_0$ *и выполнены следующие условия*:

a) $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_{n_1}$ — *пустые графы, т. е. графы без ребер*;
b) *в* Γ_0 *имеется фрагмент* (Γ'_0, Γ^*_0) *такой, что* $V(\Gamma^*_0) = \{1,\ldots,n_1\}$.

Тогда в Γ *можно выбрать фрагмент* (Γ', Γ^*) *такой, что* $\Gamma^* \cong \Gamma^*_0$.

Если к тому же (Γ'_0, Γ^*_0) — *разлагающий фрагмент, то и* (Γ', Γ^*) *можно выбрать разлагающим.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 3, в которой строится подграф $\Gamma'' \subset \Gamma$, изоморфный Γ_0. Пусть Γ^* — подграф, являющийся образом Γ^*_0 при этом изоморфизме, а Γ' строится так, что $V(\Gamma') = \bigcup\limits_{j\in V(\Gamma'_0)} V(\Gamma_j)$, и если $v_1 \in V(\Gamma_{j_1})$, $v_2 \in V(\Gamma_{j_2})$, то ребра $V(\Gamma')$, соединяющие v_1 и v_2, имеют вид $e_{v_1v_2}$, где $e \in V(\Gamma')$ соединяет j_1 и j_2. Проверим условия 1) и 2) из определения фрагмента. Пусть $v_1, v_2 \in V(\Gamma^*)$. Это значит, что $v_1 \in V(\Gamma_{i_1})$, $v_2 \in V(\Gamma_{i_2})$, i_1, i_2 — вершины Γ_0 и вершины Γ^*_0 соответственно, так что $1 \le i_1, i_2 \le n_1$. Пусть e — ребро Γ, инцидентное v_1 и v_2. Допустим, что $v_1 = v_2 = v$. Тогда по построению Γ'' должно быть $i_1 = i_2 = i$. Так как в Γ_i нет петель, то $e = u_{vv}$, где u — петля в Γ_0, инцидентная вершине i. Так как $i \in V(\Gamma^*_0)$, то из условия 1) для фрагмента (Γ'_0, Γ^*_0) следует $u \in E(\Gamma^*_0)$. Отсюда по определению Γ'' будем иметь $u_{vv} \in E(\Gamma^*)$. Если же $v_1 \ne v_2$, то в этом случае $i_1 \ne i_2$, и ребро e автоматически имеет вид $u_{v_1v_2}$ для некоторого ребра $u \in V(\Gamma_0)$, инцидентного i_1 и i_2. Но это ребро обязано принадлежать $E(\Gamma^*_0)$, и по построению $u_{v_1v_2} \in E(\Gamma^*)$.

Пусть теперь даны вершины $v \in V(\Gamma^*)$, $v' \in V(\Gamma)$ и соединяющее их ребро $e \in E(\Gamma)$. Условие a) исключает случай, когда v и v' принадлежат одному и тому же Γ_i, $1 \le i \le m$. Пусть $v \in V(\Gamma_i)$, $v' \in V(\Gamma_j)$, $i \ne j$. Тогда $e = u_{vv'}$, где u — ребро Γ_0, соединяющее вершины $i \in V(\Gamma^*_0)$ и j. По определению фрагмента должно быть $j \in V(\Gamma'_0)$ и $u \in E(\Gamma'_0)$. Это означает, что $v' \in V(\Gamma')$ и $e = u_{vv'} \in E(\Gamma')$.

Пусть фрагмент (Γ'_0, Γ^*_0) разлагающий. Проверим условие 3) для фрагмента (Γ', Γ^*). Пусть $v \in V(\Gamma^*)$, $v \in V(\Gamma_i)$, $1 \le i \le n_1$, $v' \in V(\Gamma')$, $v' \in V(\Gamma_j)$, $j > n_1$, и имеется ровно k ребер $e^{(1)},\ldots,e^{(k)}$, соединяющих в Γ вершины v и v'. Так как $j \ne i$, то все эти ребра имеют вид $e^{(t)} = u^{(t)}_{ij}$, где $u^{(1)},\ldots,u^{(k)}$ — ребра Γ_0, соединяющие вершины i и j. Пусть дана другая вершина $u \in V(\Gamma^*)$, $u \in V(\Gamma_p)$, $1 \le p \le n_1$. В Γ_0 имеется ровно k ребер, соединяющих вершину j с вершиной p. Если $w^{(1)},\ldots,w^{(k)}$ — эти ребра, то им соответствуют в Γ ровно k ребер $w^{(1)}_{i,p},\ldots,w^{(k)}_{i,p}$, соединяющих вершины u и v'. По определению операдной композиции графов других ребер, соединяющих u и v', быть не может. $\square$

Теорема 3. *Граф $\Gamma \in \mathfrak{G}(n)$ разложим тогда и только тогда, когда он содержит нетривиальный разлагающий фрагмент.*

Доказательство. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \ldots \Gamma_m \Gamma_0$ — нетривиальное разложение. Можно считать, что $\Gamma_1 \neq E$, и пусть $n_1 = |V(\Gamma_1)|$. Тогда

$$\Gamma = \Gamma_1 \ldots \Gamma_m \Gamma_0 = (\underbrace{E \ldots E}_{n_1} \Gamma_2 \ldots \Gamma_m)(\Gamma_1 \underbrace{E \ldots E}_{m-1} \Gamma_0).$$

По доказанному выше можно считать, что $\Gamma_0' = \Gamma_1 E \ldots E \Gamma_0 = \Gamma_0^* E \ldots E \Gamma_0''$, где Γ_0'' — граф без петель, инцидентных вершине 1, и тогда (Γ_0', Γ_0^*) — разлагающий фрагмент в Γ_0'. Из леммы 6 делаем вывод о том, что разлагающий фрагмент существует и в Γ.

Обратно, пусть в Γ существует нетривиальный разлагающий фрагмент (Γ', Γ^*). Исходя из замечания к определению 2, можно считать, что $\Gamma' = \Gamma$. Тогда из леммы 4 следует $\Gamma \cong \Gamma^* E \ldots E \Gamma_0$, т. е. Γ разложим. $\square$

Замечание 3. Несвязный граф Γ с более чем двумя вершинами разложим, т. к. любое объединение связных компонент, содержащее k вершин, $1 < k < |V(\Gamma)|$, будет ядром разлагающего фрагмента. В частности, операдно неразложимые графы с более чем двумя вершинами связны.

Аналогично тому, как это сделано выше, определяется операда простых помеченных графов без петель $G = \{G(n) \mid n \geq 1\}$. Определение разлагающего фрагмента, его свойства, формулировка и доказательство теоремы 3 для случая простых графов остаются теми же самыми. Ниже рассматриваются только простые графы без петель. Заметим еще, что основные результаты работы [3] на языке операд означают, что некоторые классы простых графов являются подоперадами в операде G.

Теорема 4. *Простой граф Γ с не менее чем тремя вершинами операдно неразложим тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующему свойству: для любого $2 \leq n < |V(\Gamma)|$ и любых n вершин $v_1, \ldots, v_n$ найдется вершина $v \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$, и вершины v_i и v_j, $i \neq j$, такие, что v соединена ребром с v_i, но не соединена ребром с v_j.*

Доказательство. Утверждение теоремы логически равносильно утверждению теоремы 3 для простых графов. Точнее, утверждение "Γ разложим $\Leftrightarrow$ существует разлагающий фрагмент (Γ, Γ^*)" логически равносильно утверждению "Γ неразложим $\Leftrightarrow$ для любого Γ^* фрагмент (Γ, Γ^*) не является разлагающим", что сводится к тому , что для любого Γ^* нарушено свойство 3 из определения разлагающего фрагмента. В формулировке этого свойства участвуют только вершины $v_1, \ldots, v_n$ подграфа Γ^*, и его невыполнение означает, что найдется вершина $v \notin V(\Gamma^*)$, которая соединена ребрами не со всеми вершинами Γ^* (с некоторыми соединена, с некоторыми нет). $\square$

Теорема 5. *Пусть Γ — простой связный граф без петель. Допустим, что Γ не содержит подграфов, изоморфных K_3 (треугольников), а также подграфов, изоморфных $K_{n,m}$ ($n \geq 2$), устроенных следующим образом. Это подграфы с вершинами $v_1, \ldots, v_n$, $u_1, \ldots, u_m$, причем каждая вершина v_i соединена ребром с каждой вершиной u_j, а вершины v_i могут быть соединены в Γ ребрами, кроме вершин вида u_j, только с вершинами вида v_k. Тогда граф Γ операдно неразложим.*

Доказательство. Рассмотрим разложимый граф Γ (простой, связный, без петель), и пусть Γ^* — ядро разлагающего фрагмента, $v_1, \ldots, v_n$ ($n \geq 2$) — вершины Γ^*. Пусть $u_1, \ldots, u_m$ — все вершины Γ, соединенные ребрами с вершинами Γ^*. Ввиду связности Γ имеем $m > 0$. Если Γ^* не дискретен, то две его вершины v_i и v_k, соединенные ребром, вместе с вершиной u_j образуют подграф, изоморфный K_3. Если даже Γ^* дискретен, то подграф Γ с множеством вершин $v_1, \ldots, v_n$,

$u_1, \ldots, u_m$ и множеством ребер, соединяющих вершины v_i с вершинами u_j, изоморфен $K_{n,m}$, и устроен так, как это описано в формулировке теоремы. Если же в Γ нет таких подграфов, то не существует и нетривиальных разлагающих фрагментов. $\square$

Применим теорему 5 для решения вопроса о неразложимости двух семейств графов.

Пример 1. Рассмотрим семейство графов — многомерных кубов Q_n. Вершины Q_n — последовательности нулей и единиц длины n, $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i = 0$ или $x_i = 1$, $|V(Q_n)| = 2^n$. Две вершины $\overline{x}$ и $\overline{y}$ считаются соединенными ребром, если расстояние Хэмминга $d(\overline{x}, \overline{y}) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$ между ними равно единице. Покажем, что при $n > 2$ граф Q_n операдно неразложим. Граф Q_2 разложим следующим образом: $Q_2 = \Gamma_1 \Gamma_2 K_2$, где $\Gamma_1 = \Gamma_2$ — дискретные графы с двумя вершинами. Покажем, что при $n > 2$ в Q_n нет ни треугольников, ни подграфов $K_{n,m}$ такого вида, который описан в теореме 5. Пусть в Q_n существует треугольник с вершинами $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(\overline{y}, \overline{z}) = d(\overline{x}, \overline{z}) = 1$. Допустим, что $x_1 \neq y_1$, $x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$. Для $\overline{z}$ рассмотрим два случая. Если $z_1 \neq x_1$, то из $d(\overline{x}, \overline{z}) = 1$ следует $z_2 = x_2 = y_2, \ldots, z_n = x_n = y_n$. Но из $x_1 \neq y_1$, $x_1 \neq z_1$ следует $y_1 = z_1$ и $\overline{y} = \overline{z}$. Если же $z_1 = x_1$, и, например, $z_2 \neq x_2 = y_2$, $z_3 = x_3 = y_3, \ldots, z_n = x_n = y_n$, то получим $z_1 = x_1 \neq y_1$, и $z_2 \neq y_2$, $d(\overline{z}, \overline{y}) = 2$, что невозможно. Степень каждой вершины Q_n равна n. Пусть $\overline{x}$, $\overline{z}$ — две различные вершины, имеющие один и тот же набор смежных вершин $\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}$. Покажем, что этого не может быть. Можно считать, что $\overline{y_i} = (x_1, \ldots, \widetilde{x}_i, \ldots, x_n)$, где $\widetilde{x}_i = 0$, если $x_i = 1$, и $\widetilde{x}_i = 1$, если $x_i = 0$. Тогда существует неединичная подстановка $\tau \in \Sigma_n$ такая, что $\overline{y}_{\tau(i)} = (z_1, \ldots, \widetilde{z}_i, \ldots, z_n)$. Выберем i так, чтобы $\tau(i) \neq i$. Тогда $\overline{x}$ и $\overline{y}_{\tau(i)}$ отличаются в $\tau(i)$-й компоненте (и только в ней), $\overline{y}_{\tau(i)}$ и $\overline{z}$ отличаются только в i-й компоненте. Так как $\tau(i) \neq i$, $\overline{x}$ и $\overline{z}$ отличаются друг от друга и в i-й и в $\tau(i)$-й компонентах. Допустим, что существует $j \neq i$, $j \neq \tau(i)$ такое, что $j \neq \tau(j)$. Тогда, рассуждая аналогичным образом, приходим к выводу, что $\overline{x}$ и $\overline{z}$ различаются в j-й и $\tau(j)$-й компонентах. Не исключается, что $\tau(j) = j$, но, по крайней мере, $d(\overline{x}, \overline{z}) \geq 3$. Однако из $d(\overline{x}, \overline{y_i}) + d(\overline{y_i}, \overline{z}) \geq d(\overline{x}, \overline{z}) \geq 3$ следует, что одно из чисел $d(\overline{x}, \overline{y_i}), d(\overline{y_i}, \overline{z})$ строго больше единицы, — противоречие. Допустим теперь, что τ — транспозиция, $\tau(i) = k$, $\tau(k) = i$, и $\tau(j) = j$ при $j \neq i, k$. При $n \geq 3$ такое число j существует. Сравнивая $\overline{x}, \overline{y}_i = \overline{y}_{\tau(k)}$, $\overline{y}_k = \overline{y}_{\tau(i)}$, $\overline{y}_j = \overline{y}_{\tau(j)}$ с $\overline{z}$, заключаем, что $\overline{z}$ и $\overline{y}_j$ различаются сразу в трех компонентах: i-й, j-й и k-й. Полученное противоречие показывает, что в Q_n при $n > 3$ не существует подграфа, изоморфного $K_{p,q}$, удовлетворяющего условию из теоремы 5.

Пример 2. Опишем разлагающие фрагменты в деревьях. Будем называть вершину дерева T внешней, если ее степень равна единице, и внутренней в противном случае. Гроздью в дереве T назовем поддерево T' с вершинами $v_1, \ldots, v_k, v_0$, $k \geq 2$, где $v_1, \ldots, v_k$ — внешние для T, а v_0 — внутренняя для T вершина.

Утверждается, что наличие гроздьев в дереве равносильно наличию разлагающих фрагментов. Точнее, если T' — гроздь, T^* — дискретный подграф с вершинами $\{v_1, \ldots, v_k\}$, то (T', T^*) — это разлагающий фрагмент дерева T. Это сразу следует из определений.

Обратно, пусть (T', T^*) — разлагающий фрагмент T. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — вершины T^*. Должна существовать вершина $v_0 \in V(T')$, $v_0 \notin V(T^*)$, соединенная ребром с одной из вершин T^* (а значит, по определению и со всеми). Иначе, т. к. все вершины T, соединенные ребрами с вершинами из T^*, содержатся в T', нарушилось бы условие связности T. Итак, v_0 существует, но тогда не существует другой такой вершины $u_0 \in V(T')$, $u_0 \notin V(T^*)$, соединенной ребрами со всеми $v_1, \ldots, v_k$. В противном случае в графе T были бы циклы (здесь важно то, что $k \geq 2$). По той же причине не существует ребер, соединяющих различные v_i и v_j при $i \neq j, i, j \geq 1$. Итак, подграф T' является гроздью, и T^* — множество его внешних вершин.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Литература

1. Тронин С.Н., Копп О.А. *Матричные линейные операды* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 6. – С. 53–62.
2. Тронин С.Н. *Операды конечных графов и гиперграфов* // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Актуальные проблемы математики и механики. – Казань: Унипресс, 2000. – Т. 5. – С. 207–208.
3. Levit V.E., Mandrescu E. *On hereditary properties of composition graphs* // Discuss. Math. Graph Theory. – 1998. - V. 18. – № 2. – P. 183–195.
4. Харари Ф. *Теория графов.* – М.: Мир, 1973. – 304 с.
5. Ozievich Z. *Operad of graphs, convolution and quasi-Hopf algebra* // Contemp. Math. – 2003. – V. 318. – P. 1–22.

Казанский государственный университет

Поступила 28.05.2002