1. Нормы на пространстве матриц

1. Через M_n будем обозначать множество всех квадратных матриц размера n с комплексными, вообще говоря, элементами. Определив на множестве M_n обычным образом операции сложения двух матриц и умножения матрицы на число, мы превратим его в комплексное линейное пространство размерности n^2. На этом линейном пространстве введем норму, т. е. поставим в соответствие каждой матрице $A \in M_n$ число $\|A\|$ так, что:

1) $\|A\| \geqslant 0$; равенства $\|A\| = 0$ и $A = 0$ эквивалентны;
2) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$;
3) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$ для любых матриц $A, B \in M_n$.
4) $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ для любых матриц $A, B \in M_n$.

Говорят в этом случае, что на пространстве матриц M_n введена *матричная норма*. Понятно, что она обладает всеми свойствами, которые были изучены в предыдущем параграфе применительно к норме векторов. Аксиома 4 выделяет *согласованные нормы* на пространстве матриц.

Отметим следующие простейшие свойства нормы:
1) $\|I\| \geqslant 1$ (где I есть единичная матрица).
Действительно $\|I\| = \|I \cdot I\| \leqslant \|I\|\|I\| = \|I\|^2$.
2) $\|A^{-1}\| \geqslant \dfrac{\|I\|}{\|A\|}$ и, в частности, $\|A\|\|A^{-1}\| \geqslant 1$.
Действительно $\|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leqslant \|A\|\|A^{-1}\|$.

Не всякие векторные нормы на пространстве матриц (удовлетворяющие аксиомам 1–3) является согласованными. Пусть, например,

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| \tag{1.1}$$

для $A \in M_n$. Очевидно, это — векторная норма, но она не является согласованной на M_n. Действительно, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ то } AA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

причем $\|A\| = 1$, $\|AA\| = 2$, и неравенство $\|AA\| \leqslant \|A\|\|A\|$ не выполнено.

2. Приведем важные примеры матричных норм.

1) Положим $\|A\|_{l_1} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ для $A \in M_n$. Очевидно, три первых аксиомы нормы выполнены. Проверим аксиому 4). По определению для $A, B \in M_n$ имеем

$$\|AB\|_{l_1} = \sum_{i,j=1}^{n} \Big| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \Big|,$$

следовательно,

$$\|AB\|_{l_1} \leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}|.$$

Добавляя к сумме в правой части последнего неравенства неотрицательные слагаемые, усилим неравенство:

$$\|AB\|_{l_1} \leqslant \sum_{i,j,k,m=1}^{n} |a_{ik}||b_{mj}|.$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{i,j,k,m=1}^{n} |a_{ik}||b_{mj}| = \sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}| \sum_{j,m=1}^{n} |b_{mj}| = \|A\|_{l_1} \|B\|_{l_1}.$$

2) Положим $\|A\|_E = \Big(\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \Big)^{1/2}$ для $A \in M_n$. Эта норма порождается естественным скалярным произведением на пространстве $\mathbb{C}^{nn}$, поэтому три первых аксиомы для нее выполняются. Норму $\|A\|_E$ обычно называют *евклидовой* нормой или нормой *Фробениуса*[1)]. Докажем справедливость четвертой аксиомы для этой нормы, опираясь на неравенство Коши (Гельдера с показателями $p = q = 2$):

$$\|AB\|_E^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \Big| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \Big|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2 =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \sum_{k,j=1}^{n,p} |b_{kj}|^2 = \|A\|_E^2 \|B\|_E^2.$$

[1)] Фердинанд Георг Фробениус (Ferdinand Georg Frobenius; 1849 — 1917) — немецкий математик.

3. Пусть $A \in M_n$, $\|\cdot\|$ — некоторая норма на пространстве векторов $\mathbb{C}^n$. Тогда существует неотрицательное число N_A такое, что

$$\|Ax\| \leqslant N_A\|x\| \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n. \tag{1.2}$$

В самом деле, поскольку всякая норма $\|\cdot\|$ на $\mathbb{C}^n$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_\infty$, то $c_1\|x\|_\infty \leqslant \|x\|\ \forall\, x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| \leqslant c_2\|x\|_\infty\ \forall\, x \in \mathbb{C}^n$, где c_1, c_2 — положительные не зависящие от x постоянные. Поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\|Ax\| \leqslant c_2\|Ax\|_\infty = c_2 \max_{1\leqslant i\leqslant m} \Big|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\Big| \leqslant c_2\|x\|_\infty \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leqslant$$
$$\leqslant (c_2/c_1) \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\|x\|.$$

Обозначим через $\|A\|$ точную нижнюю грань всех чисел N_A, для которых выполнено (1.2). Ясно, что

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n,\, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{C}^n,\, \|x\|=1} \|Ax\|. \tag{1.3}$$

Нетрудно убедиться в справедливости полезной оценки:

$$5)\ \|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Матричную норму $\|A\|$, сконструированную указанным способом, называют *подчиненной* норме векторов или *операторной* нормой.

Отметим, что при любом способе задания нормы на $\mathbb{C}^n$ подчиненная норма единичной матрицы (порядка n) равна единице.

Не всякая норма, определенная на M_n, подчинена какой либо норме векторов. Например, норма Фробениуса не подчинена никакой норме векторов, так как $\|I\|_E = \sqrt{n}$. Норма (1.1) также не является операторной, так как она не согласованная норма на M_n

4. Определим при $p = 1, 2, \infty$ матричную норму

$$\|A\|_p = \sup_{x\in\mathbb{C}^n,\, \|x\|_p=1} \|Ax\|_p, \tag{1.4}$$

подчиненную векторной норме $x \to \|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}$.

1) Случай $p = 1$, $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$. Тогда

$$\|A\|_1 = \max_{x \in \mathbb{C}^n,\, \|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1.$$

Нетрудно видеть, что для любого вектора $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\|_1 = 1$,

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Предположим, что $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|$, и положим, что $\tilde{x}$ есть вектор естественного базиса пространства $\mathbb{C}^n$ такой, что $\tilde{x}_k = 1$, а все остальные координаты вектора $\tilde{x}$ равны нулю. Ясно, что $\|\tilde{x}\|_1 = 1$, а $\|A\tilde{x}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|$. Таким образом, доказано, что

$$\|A\|_1 = \max_{x \in \mathbb{C}^n,\, \|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Поэтому норму $\|A\|_1$ часто называют *столбцовой* нормой матрицы A.

2) Случай $p = \infty$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$. Тогда

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Положим, что $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 1} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}|$ и определим вектор $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$ при помощи соотношений

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} \bar{a}_{kj}/|a_{kj}|, & a_{kj} \neq 0, \\ 1, & a_{kj} = 0, \end{cases}$$

где $j = 1, 2, \ldots, n$, черта, как обычно, есть знак комплексного сопряжения. Ясно, что $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$, причем элементарные выкладки показывают, что для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено неравенство

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|,$$

а для $i = k$

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j\Big| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|,$$

т. е. $\|A\tilde{x}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 1} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Таким образом,

$$\|A\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{C}^n,\, \|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Норму $\|A\|_\infty$ часто называют *строчной* нормой матрицы A.

3) Случай $p = 2$, $\|x\|_2 = (x, x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$. Для любого $x \in \mathbb{C}^n$ имеем $\|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x)$. Матрица A^*A эрмитова и неотрицательна. Поэтому существует ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ такой, что $A^*Ae^k = \rho_k^2 e^k$ (e^k есть собственные векторы, а $\rho_k^2 = \rho_k^2(A)$ — неотрицательные собственные числа матрицы A^*A). Представим вектор x в виде разложения по этому базису $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e^k$ и предположим, что $\|x\|_2 = 1$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 = 1$, $\|Ax\|_2^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \rho_k^2 |\xi_k|^2 \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \rho_k^2$. Пусть $\rho_j = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \rho_k$. Полагая $\tilde{x} = e^j$, получим $\|A\tilde{x}\|^2 = \rho_j^2$. Таким образом, доказано, что $\max\limits_{x\in\mathbb{C}^n,\, \|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \rho_k$, т. е.

$$\|A\|_2 = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \rho_k(A). \tag{1.5}$$

Отметим следующий интересный для многих приложений частный случай. Будем считать, что матрица $A \in M_n$ эрмитова, т. е. $A = A^*$. Тогда, очевидно $\rho_k(A) = |\lambda_k(A)|$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где через $\lambda_k(A)$ обозначены собственные числа матрицы A. Число

$$\rho(A) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\lambda_k(A)|$$

называют *спектральным радиусом* матрицы A. Таким образом, для любой эрмитовой матрицы

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k(A)| = \max_{x \in \mathbb{C}^n,\, x \neq 0} \frac{|(Ax, x)|}{(x, x)} = \rho(A). \tag{1.6}$$

Норму $\|A\|_2$ в связи с этим часто называют *спектральной*.

5. Знание согласованной нормы матрицы оказывается, в частности, полезным при оценке ее спектрального радиуса, а именно, для любой квадратной матрицы A справедливо неравенство

$$\rho(A) \leqslant \|A\|, \tag{1.7}$$

где $\|A\|$ — любая согласованая норма матрицы A. В самом деле, пусть λ, x — собственное число и соответствующий ей собственный вектор матрицы A, а X — квадратная матрица, столбцами (одинаковыми) которой служит вектор x. Тогда, очевидно, $AX = \lambda X$ и

$$|\lambda| \|X\| = \|AX\| \leqslant \|A\| \|X\|$$

для любой согласованной матричной нормы, причем $\|X\| \neq 0$, так как вектор x по определению собственного вектора не равен нулю. Таким образом, для любого собственного числа λ матрицы A верно неравенство $|\lambda| \leqslant \|A\|$, а это эквивалентно (1.7).

2. Задачи и упражнения

Упражнение 2.1. Пусть $\|\cdot\|$ — матричная норма на M_n, $S \in M_n$ — произвольная невырожденная матрица. Покажите, что формула $\|A\|_{(s)} = \|SAS^{-1}\| \ \ \forall A \in M_n$ также определяет матричную норму на M_n.

Упражнение 2.2. Доказать, что норма $\|A\| = n \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|$ является согласованной на пространстве M_n (т.е. справедлива аксиома 4).

Упражнение 2.3. Докажите, формула (1.3) действительно определяет матричную норму, т.е. выполнены все аксиомы матричной нормы.

Упражнение 2.4. Докажите, что при любом способе определения норм на пространствах $\mathbb{C}^n$ существует вектор $x^0 \in \mathbb{C}^n$ такой, что $\|x^0\| = 1$ и

$$\|Ax^0\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n,\, \|x\|=1} \|Ax\|,$$

т. е. в определении (1.3) символ точной верхней грани можно заменить на символ максимума.

Упражнение 2.5. Докажите, что для любой матрицы A: 1) нормы $\|A\|_2$ и $\|A\|_E$ не меняются при умножении A (слева или справа) на любую унитарную матрицу; 2) $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$.