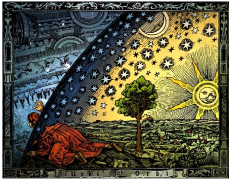
Математические модели теоретической физики

(математика и компьютерные науки)

Математические основы физики

(математика и информатика)

профессор Игнатьев Юрий Геннадиевич



Казанский федеральный университет
Институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Казань, VI семестр, 2015 г.

Содержание лекции

- Калибровочная инвариантность электромагнитного поля
- Действие для электромагнитного поля
- Вариация действия электромагнитного поля

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Калибровочная инвариантность электромагнитного поля
- Действие для электромагнитного поля
- Вариация действия электромагнитного поля

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Лекция XI: Уравнения Максвелла: действие поля

Содержание лекции

- Калибровочная инвариантность электромагнитного поля
- Действие для электромагнитного поля
- Вариация действия электромагнитного поля

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Калибровочная инвариантность электромагнитного поля
- Действие для электромагнитного поля
- Вариация действия электромагнитного поля

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Калибровочная инвариантность электромагнитного поля
- Действие для электромагнитного поля
- Вариация действия электромагнитного поля

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Лекция XI: Уравнения Максвелла: действие поля

Содержание лекции

- Калибровочная инвариантность электромагнитного поля
- Действие для электромагнитного поля
- Вариация действия электромагнитного поля

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Калибровочная инвариантность электромагнитного поля
- Действие для электромагнитного поля
- Вариация действия электромагнитного поля

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Калибровочная инвариантность электромагнитного поля
- Действие для электромагнитного поля
- Вариация действия электромагнитного поля

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики / Пер. с англ. — М., 1932 (или Принципы квантовой механики) – любое издание.
4. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Калибровочная инвариантность электромагнитного поля

- Рассмотрим связь между тензором Максвелла F_{ik} и векторным потенциалом электромагнитного поля A_i (лекция 10)

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \tag{1}$$

и выясним, насколько однозначна она. Тензор Максвелла является наблюдаемой физической величиной, так как он определяет силу, действующую на пробную заряженную частицу, тогда как о векторном потенциале этого нельзя сказать наверняка. Изменим векторный потенциал и потребуем, чтобы при этом изменении не изменялся тензор Максвелла:

$$A'_i = A_i + \xi_i \to F'_{ik} = \partial_i A'_k - \partial_k A'_i = F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$$
$$\Longrightarrow \partial_i \xi_k - \partial_k \xi_i = 0. \tag{2}$$

- Соотношения (2) можно записать в виде четырехмерного векторного соотношения:

$$[\nabla \xi] = \mathrm{rot}\, \xi = 0. \tag{3}$$

- В курсе векторного анализа доказывается теорема:

Единственным решением уравнения (3) является градиентная функция:

$$\xi = \mathrm{grad} f \leftrightarrow \xi_i = \partial_i f, \tag{4}$$

где $f(x^1, \dots, x^n)$ - произвольная скалярная функция.

- Рассмотрим связь между тензором Максвелла F_{ik} и векторным потенциалом электромагнитного поля A_i (лекция 10)

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \tag{1}$$

и выясним, насколько однозначна она. Тензор Максвелла является наблюдаемой физической величиной, так как он определяет силу, действующую на пробную заряженную частицу, тогда как о векторном потенциале этого нельзя сказать наверняка. Изменим векторный потенциал и потребуем, чтобы при этом изменении не изменялся тензор Максвелла:

$$A'_i = A_i + \xi_i \to F'_{ik} = \partial_i A'_k - \partial_k A'_i = F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$$
$$\Longrightarrow \partial_i \xi_k - \partial_k \xi_i = 0. \tag{2}$$

- Соотношения (2) можно записать в виде четырехмерного векторного соотношения:

$$[\nabla, \xi] = \mathrm{rot}\,\xi = 0. \tag{3}$$

- В курсе векторного анализа доказывается теорема:

Единственным решением уравнения (3) является градиентная функция:

$$\xi = \mathrm{grad} f \Rightarrow \xi_i = \partial_i f, \tag{4}$$

где $f(x^1, \ldots, x^n)$ - произвольная скалярная функция.

- Рассмотрим связь между тензором Максвелла F_{ik} и векторным потенциалом электромагнитного поля A_i (лекция 10)

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \tag{1}$$

и выясним, насколько однозначна она. Тензор Максвелла является наблюдаемой физической величиной, так как он определяет силу, действующую на пробную заряженную частицу, тогда как о векторном потенциале этого нельзя сказать наверняка. Изменим векторный потенциал и потребуем, чтобы при этом изменении не изменялся тензор Максвелла:

$$A'_i = A_i + \xi_i \to F'_{ik} = \partial_i A'_k - \partial_k A'_i = F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$$
$$\Longrightarrow \partial_i \xi_k - \partial_k \xi_i = 0. \tag{2}$$

- Соотношения (2) можно записать в виде четырехмерного векторного соотношения:

$$[\nabla, \xi] \equiv \mathbf{rot}\ \xi = 0. \tag{3}$$

- В курсе векторного анализа доказывается теорема:

> Единственным решением уравнения (3) является градиентная функция:
>
> $$\vec{\xi} = \mathbf{grad} f \Leftrightarrow \xi_i = \partial_i f, \tag{4}$$
>
> где $f(x^1, \ldots, x^n)$ - произвольная скалярная функция.

- Рассмотрим связь между тензором Максвелла F_{ik} и векторным потенциалом электромагнитного поля A_i (лекция 10)

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \tag{1}$$

и выясним, насколько однозначна она. Тензор Максвелла является наблюдаемой физической величиной, так как он определяет силу, действующую на пробную заряженную частицу, тогда как о векторном потенциале этого нельзя сказать наверняка. Изменим векторный потенциал и потребуем, чтобы при этом изменении не изменялся тензор Максвелла:

$$A'_i = A_i + \xi_i \to F'_{ik} = \partial_i A'_k - \partial_k A'_i = F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$$
$$\Longrightarrow \partial_i \xi_k - \partial_k \xi_i = 0. \tag{2}$$

- Соотношения (2) можно записать в виде четырехмерного векторного соотношения:

$$[\nabla, \xi] \equiv \mathbf{rot}\ \xi = 0. \tag{3}$$

- В курсе векторного анализа доказывается теорема:

Единственным решением уравнения (3) является градиентная функция:

$$\xi = \mathrm{grad} f \Leftrightarrow \xi_i = \partial_i f, \tag{4}$$

где $f(x^1, \ldots, x^n)$ - произвольная скалярная функция.

- Рассмотрим связь между тензором Максвелла F_{ik} и векторным потенциалом электромагнитного поля A_i (лекция 10)

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \tag{1}$$

и выясним, насколько однозначна она. Тензор Максвелла является наблюдаемой физической величиной, так как он определяет силу, действующую на пробную заряженную частицу, тогда как о векторном потенциале этого нельзя сказать наверняка. Изменим векторный потенциал и потребуем, чтобы при этом изменении не изменялся тензор Максвелла:

$$A'_i = A_i + \xi_i \to F'_{ik} = \partial_i A'_k - \partial_k A'_i = F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$$
$$\Longrightarrow \partial_i \xi_k - \partial_k \xi_i = 0. \tag{2}$$

- Соотношения (2) можно записать в виде четырехмерного векторного соотношения:

$$[\nabla, \xi] \equiv \mathbf{rot}\ \xi = 0. \tag{3}$$

- В курсе векторного анализа доказывается теорема:

> Единственным решением уравнения (3) является градиентная функция:
>
> $$\vec{\xi} = \mathbf{grad} f \Leftrightarrow \xi_i = \partial_i f, \tag{4}$$
>
> где $f(x^1, \ldots, x^n)$ - произвольная скалярная функция.

- Рассмотрим связь между тензором Максвелла F_{ik} и векторным потенциалом электромагнитного поля A_i (лекция 10)

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \tag{1}$$

и выясним, насколько однозначна она. Тензор Максвелла является наблюдаемой физической величиной, так как он определяет силу, действующую на пробную заряженную частицу, тогда как о векторном потенциале этого нельзя сказать наверняка. Изменим векторный потенциал и потребуем, чтобы при этом изменении не изменялся тензор Максвелла:

$$A'_i = A_i + \xi_i \to F'_{ik} = \partial_i A'_k - \partial_k A'_i = F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$$
$$\Longrightarrow \partial_i \xi_k - \partial_k \xi_i = 0. \tag{2}$$

- Соотношения (2) можно записать в виде четырехмерного векторного соотношения:

$$[\nabla, \xi] \equiv \mathbf{rot}\ \xi = 0. \tag{3}$$

- В курсе векторного анализа доказывается теорема:

Единственным решением уравнения (3) является градиентная функция:

$$\vec{\xi} = \mathbf{grad} f \Leftrightarrow \xi_i = \partial_i f, \tag{4}$$

где $f(x^1, \ldots, x^n)$ - произвольная скалярная функция.

- Рассмотрим связь между тензором Максвелла F_{ik} и векторным потенциалом электромагнитного поля A_i (лекция 10)

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \tag{1}$$

и выясним, насколько однозначна она. Тензор Максвелла является наблюдаемой физической величиной, так как он определяет силу, действующую на пробную заряженную частицу, тогда как о векторном потенциале этого нельзя сказать наверняка. Изменим векторный потенциал и потребуем, чтобы при этом изменении не изменялся тензор Максвелла:

$$A'_i = A_i + \xi_i \to F'_{ik} = \partial_i A'_k - \partial_k A'_i = F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$$
$$\Longrightarrow \partial_i \xi_k - \partial_k \xi_i = 0. \tag{2}$$

- Соотношения (2) можно записать в виде четырехмерного векторного соотношения:

$$[\nabla, \xi] \equiv \mathbf{rot}\ \xi = 0. \tag{3}$$

- В курсе векторного анализа доказывается теорема:

Единственным решением уравнения (3) является градиентная функция:

$$\vec{\xi} = \mathbf{grad} f \Leftrightarrow \xi_i = \partial_i f, \tag{4}$$

где $f(x^1, \ldots, x^n)$ - произвольная скалярная функция.

- Таким образом, преобразования четырехмерного векторного потенциала вида

$$A'_i = A_i + \partial f, \tag{5}$$

где $f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ – произвольная скалярная функция, не изменяют тензор Максвелла.

- Поэтому при градиентных преобразованиях векторного потенциала вида (5) наблюдаемые физические величины не изменяются, таким образом, векторный потенциал электромагнитного поля определен с точностью до произвольного градиентного вектора. Физический смысл имеют только величины, инвариантные по отношению к преобразованиям (5). Преобразования (5) называются калибровочными преобразованиями, а само свойство инвариантности электромагнитного поля по отношению к этим преобразованиям называется калибровочной инвариантностью электромагнитного поля.
- Неоднозначность определения векторного потенциала позволяет наложить на него одно произвольное дополнительное условие, выбираемое из соображений удобства решения задачи. Часто в качестве такого условия выбирается так называемое калибровочное условие Лоренца. Вычислим четырехмерную дивергенцию от обеих частей (5):

$$g^{ik}A_{i,k} = g^{ik}A'_{i,k} - g^{ik}f_{,ik}. \tag{6}$$

- Таким образом, преобразования четырехмерного векторного потенциала вида

$$A'_i = A_i + \partial f, \quad (5)$$

где $f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ – произвольная скалярная функция, не изменяют тензор Максвелла.

- Поэтому при градиентных преобразованиях векторного потенциала вида (5) наблюдаемые физические величины не изменяются, таким образом, векторный потенциал электромагнитного поля определен с точностью до произвольного градиентного вектора. Физический смысл имеют только величины, инвариантные по отношению к преобразованиям (5). Преобразования (5) называются калибровочными преобразованиями, а само свойство инвариантности электромагнитного поля по отношению к этим преобразованиям называется калибровочной инвариантностью электромагнитного поля.
- Неоднозначность определения векторного потенциала позволяет наложить на него одно произвольное дополнительное условие, выбираемое из соображений удобства решения задачи. Часто в качестве такого условия выбирается так называемое калибровочное условие Лоренца. Вычислим четырехмерную дивергенцию от обеих частей (5):

$$g^{ik}A_{i,k} = g^{ik}A'_{i,k} - g^{ik}f_{,ik}. \quad (6)$$

Калибровочная инвариантность электромагнитного поля

- Таким образом, преобразования четырехмерного векторного потенциала вида
$$A'_i = A_i + \partial f, \qquad (5)$$
где $f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ – произвольная скалярная функция, не изменяют тензор Максвелла.

- Поэтому при градиентных преобразованиях векторного потенциала вида (5) наблюдаемые физические величины не изменяются, таким образом, векторный потенциал электромагнитного поля определен с точностью до произвольного градиентного вектора. Физический смысл имеют только величины, инвариантные по отношению к преобразованиям (5). Преобразования (5) называются калибровочными преобразованиями, а само свойство инвариантности электромагнитного поля по отношению к этим преобразованиям называется калибровочной инвариантностью электромагнитного поля.

- Неоднозначность определения векторного потенциала позволяет наложить на него одно произвольное дополнительное условие, выбираемое из соображений удобства решения задачи. Часто в качестве такого условия выбирается так называемое калибровочное условие Лоренца. Вычислим четырехмерную дивергенцию от обеих частей (5):

Калибровочная инвариантность электромагнитного поля

- Таким образом, преобразования четырехмерного векторного потенциала вида

$$A'_i = A_i + \partial f, \tag{5}$$

где $f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ – произвольная скалярная функция, не изменяют тензор Максвелла.

- Поэтому при градиентных преобразованиях векторного потенциала вида (5) наблюдаемые физические величины не изменяются, таким образом, векторный потенциал электромагнитного поля определен с точностью до произвольного градиентного вектора. Физический смысл имеют только величины, инвариантные по отношению к преобразованиям (5). Преобразования (5) называются калибровочными преобразованиями, а само свойство инвариантности электромагнитного поля по отношению к этим преобразованиям называется калибровочной инвариантностью электромагнитного поля.

- Неоднозначность определения векторного потенциала позволяет наложить на него одно произвольное дополнительное условие, выбираемое из соображений удобства решения задачи. Часто в качестве такого условия выбирается так называемое калибровочное условие Лоренца. Вычислим четырехмерную дивергенцию от обеих частей (5):

$$g^{ik}A_{i,k} = g^{ik}A'_{i,k} - g^{ik}f_{,ik}. \tag{6}$$

Калибровочная инвариантность электромагнитного поля

- Таким образом, преобразования четырехмерного векторного потенциала вида
$$A'_i = A_i + \partial f, \qquad (5)$$
где $f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ – произвольная скалярная функция, не изменяют тензор Максвелла.

- Поэтому при градиентных преобразованиях векторного потенциала вида (5) наблюдаемые физические величины не изменяются, таким образом, векторный потенциал электромагнитного поля определен с точностью до произвольного градиентного вектора. Физический смысл имеют только величины, инвариантные по отношению к преобразованиям (5).
Преобразования (5) называются калибровочными преобразованиями, а само свойство инвариантности электромагнитного поля по отношению к этим преобразованиям называется калибровочной инвариантностью электромагнитного поля.
- Неоднозначность определения векторного потенциала позволяет наложить на него одно произвольное дополнительное условие, выбираемое из соображений удобства решения задачи. Часто в качестве такого условия выбирается так называемое калибровочное условие Лоренца. Вычислим четырехмерную дивергенцию от обеих частей (5):

$$g^{ik}A_{i,k} = g^{ik}A'_{i,k} - g^{ik}f_{,ik}. \qquad (6)$$

- Таким образом, преобразования четырехмерного векторного потенциала вида

$$A'_i = A_i + \partial f, \tag{5}$$

где $f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ – произвольная скалярная функция, не изменяют тензор Максвелла.

- Поэтому при градиентных преобразованиях векторного потенциала вида (5) наблюдаемые физические величины не изменяются, таким образом, векторный потенциал электромагнитного поля определен с точностью до произвольного градиентного вектора. Физический смысл имеют только величины, инвариантные по отношению к преобразованиям (5). Преобразования (5) называются калибровочными преобразованиями, а само свойство инвариантности электромагнитного поля по отношению к этим преобразованиям называется калибровочной инвариантностью электромагнитного поля.
- Неоднозначность определения векторного потенциала позволяет наложить на него одно произвольное дополнительное условие, выбираемое из соображений удобства решения задачи. Часто в качестве такого условия выбирается так называемое калибровочное условие Лоренца. Вычислим четырехмерную дивергенцию от обеих частей (5):

$$g^{ik}A_{i,k} = g^{ik}A'_{i,k} - g^{ik}f_{,ik}. \tag{6}$$

Калибровочная инвариантность электромагнитного поля

- Выберем скалярную функцию f следующим образом:

$$\Box f = g^{ik}A'_{i,k} \Rightarrow A^{i}{}_{,i} = 0; \quad (7)$$

$\Box f \equiv g^{ik} f_{,ik}$ – оператор d'Alamber'a. Условие (7) и называется калибровкой Лоренца.

- Поскольку неоднородное волновое уравнение:

$$\Box f = F \quad (8)$$

всегда имеет решение, согласно (7) всегда можно подобрать такую функцию f, чтобы векторный потенциал удовлетворял условию калибровки Лоренца.

- Выберем скалярную функцию f следующим образом:

$$\Box f = g^{ik} A'_{i,k} \Rightarrow A^i{}_{,i} = 0; \tag{7}$$

$\Box f \equiv g^{ik} f_{,ik}$ – оператор d'Alamber'a. Условие (7) и называется калибровкой Лоренца.

- Поскольку неоднородное волновое уравнение:

всегда имеет решение, согласно (7) всегда можно подобрать такую функцию f, чтобы векторный потенциал удовлетворял условию калибровки Лоренца.

- Выберем скалярную функцию f следующим образом:

$$\Box f = g^{ik} A'_{i,k} \Rightarrow A^{i}{}_{,i} = 0; \qquad (7)$$

$\Box f \equiv g^{ik} f_{,ik}$ – оператор d'Alamber'a. Условие (7) и называется калибровкой Лоренца.

- Поскольку неоднородное волновое уравнение:

$$\Box f = F \qquad (8)$$

всегда имеет решение, согласно (7) всегда можно подобрать такую функцию f, чтобы векторный потенциал удовлетворял условию калибровки Лоренца.

- Выберем скалярную функцию f следующим образом:

$$\Box f = g^{ik} A'_{i,k} \Rightarrow A^{i}{}_{,i} = 0; \tag{7}$$

$\Box f \equiv g^{ik} f_{,ik}$ – оператор d'Alamber'a. Условие (7) и называется калибровкой Лоренца.

- Поскольку неоднородное волновое уравнение:

$$\Box f = F \tag{8}$$

всегда имеет решение, согласно (7) всегда можно подобрать такую функцию f, чтобы векторный потенциал удовлетворял условию калибровки Лоренца.

- Выберем скалярную функцию f следующим образом:

$$\Box f = g^{ik} A'_{i,k} \Rightarrow A^{i}{}_{,i} = 0; \tag{7}$$

$\Box f \equiv g^{ik} f_{,ik}$ – оператор d'Alamber'a. Условие (7) и называется калибровкой Лоренца.

- Поскольку неоднородное волновое уравнение:

$$\Box f = F \tag{8}$$

всегда имеет решение, согласно (7) всегда можно подобрать такую функцию f, чтобы векторный потенциал удовлетворял условию калибровки Лоренца.

Действие для электромагнитного поля

- В лекции 9 мы ввели согласно принципу аддитивности функции Лагранжа суммарное действия для заряженной частицы и электромагнитного поля представим в виде:

  $$S = S_p + S_{ef} + S_f, \qquad (9)$$

  где S_p – действие для свободной частицы (заряда), S_{ef} – действие взаимодействия заряда с электромагнитным полем, S_f – действие для электромагнитного поля.
- Займемся теперь действием для электромагнитного поля. В отличие от систем частиц, динамическими переменными для которых являются $x^i(s), \dot{x}^i(t)$ – координаты и скорости частиц как функции одного переменного – времени/собственного времени, динамическими переменными для полевых систем являются потенциалы $A_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$ и их первые частные производные по пространственным переменным, которые в конечном итоге в случае электромагнитного поля выражаются через тензор Максвелла $F_{ik}(x^1, x^2, x^3, x^4)$. В связи с этим функционал действия для электромагнитного поля должен представляется не в виде однократного интеграла по времени/собственному времени динамической системы, а по четырехмерному объему пространства Минковского.
- Установим вид функционала действия. Этот функционал S_f, во-первых, должен быть составлен из инвариантов поля. Вследствие неоднозначности векторного потенциала Действие электромагнитного поля не может определяться непосредственно им.

- В лекции 9 мы ввели согласно принципу аддитивности функции Лагранжа суммарное действия для заряженной частицы и электромагнитного поля представим в виде:

$$S = S_p + S_{ef} + S_f, \tag{9}$$

где S_p – действие для свободной частицы (заряда), S_{ef} – действие взаимодействия заряда с электромагнитным полем, S_f – действие для электромагнитного поля.

- Займемся теперь действием для электромагнитного поля. В отличие от систем частиц, динамическими переменными для которых являются $x^i(s), \dot{x}^i(t)$ – координаты и скорости частиц как функции одного переменного – времени/собственного времени, динамическими переменными для полевых систем являются потенциалы $A_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$ и их первые частные производные по пространственным переменным, которые в конечном итоге в случае электромагнитного поля выражаются через тензор Максвелла $F_{ik}(x^1, x^2, x^3, x^4)$. В связи с этим функционал действия для электромагнитного поля должен представляется не в виде однократного интеграла по времени/собственному времени динамической системы, а по четырехмерному объему пространства Минковского.
- Установим вид функционала действия. Этот функционал S_f, во-первых, должен быть составлен из инвариантов поля. Вследствие неоднозначности векторного потенциала Действие электромагнитного поля не может определяться непосредственно им.

- В лекции 9 мы ввели согласно принципу аддитивности функции Лагранжа суммарное действия для заряженной частицы и электромагнитного поля представим в виде:

$$S = S_p + S_{ef} + S_f, \tag{9}$$

где S_p – действие для свободной частицы (заряда), S_{ef} – действие взаимодействия заряда с электромагнитным полем, S_f – действие для электромагнитного поля.

- Займемся теперь действием для электромагнитного поля. В отличие от систем частиц, динамическими переменными для которых являются $x^i(s), \dot{x}^i(t)$ – координаты и скорости частиц как функции одного переменного – времени/собственного времени, динамическими переменными для полевых систем являются потенциалы $A_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$ и их первые частные производные по пространственным переменным, которые в конечном итоге в случае электромагнитного поля выражаются через тензор Максвелла $F_{ik}(x^1, x^2, x^3, x^4)$. В связи с этим функционал действия для электромагнитного поля должен представляется не в виде однократного интеграла по времени/собственному времени динамической системы, а по четырехмерному объему пространства Минковского.
- Установим вид функционала действия. Этот функционал S_f, во-первых, должен быть составлен из инвариантов поля. Вследствие неоднозначности векторного потенциала Действие электромагнитного поля не может определяться непосредственно им.

- В лекции 9 мы ввели согласно принципу аддитивности функции Лагранжа суммарное действия для заряженной частицы и электромагнитного поля представим в виде:

$$S = S_p + S_{ef} + S_f, \tag{9}$$

где S_p – действие для свободной частицы (заряда), S_{ef} – действие взаимодействия заряда с электромагнитным полем, S_f – действие для электромагнитного поля.

- Займемся теперь действием для электромагнитного поля. В отличие от систем частиц, динамическими переменными для которых являются $x^i(s), \dot{x}^i(t)$ – координаты и скорости частиц как функции одного переменного – времени/собственного времени, динамическими переменными для полевых систем являются потенциалы $A_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$ и их первые частные производные по пространственным переменным, которые в конечном итоге в случае электромагнитного поля выражаются через тензор Максвелла $F_{ik}(x^1, x^2, x^3, x^4)$. В связи с этим функционал действия для электромагнитного поля должен представляется не в виде однократного интеграла по времени/собственному времени динамической системы, а по четырехмерному объему пространства Минковского.

- Установим вид функционала действия. Этот функционал S_f, во-первых, должен быть составлен из инвариантов поля. Вследствие неоднозначности векторного потенциала Действие электромагнитного поля не может определяться непосредственно им.

Действие для электромагнитного поля

- В лекции 9 мы ввели согласно принципу аддитивности функции Лагранжа суммарное действия для заряженной частицы и электромагнитного поля представим в виде:

$$S = S_p + S_{ef} + S_f, \tag{9}$$

где S_p – действие для свободной частицы (заряда), S_{ef} – действие взаимодействия заряда с электромагнитным полем, S_f – действие для электромагнитного поля.

- Займемся теперь действием для электромагнитного поля. В отличие от систем частиц, динамическими переменными для которых являются $x^i(s), \dot{x}^i(t)$ – координаты и скорости частиц как функции одного переменного – времени/собственного времени, динамическими переменными для полевых систем являются потенциалы $A_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$ и их первые частные производные по пространственным переменным, которые в конечном итоге в случае электромагнитного поля выражаются через тензор Максвелла $F_{ik}(x^1, x^2, x^3, x^4)$. В связи с этим функционал действия для электромагнитного поля должен представляется не в виде однократного интеграла по времени/собственному времени динамической системы, а по четырехмерному объему пространства Минковского.
- Установим вид функционала действия. Этот функционал S_f, во-первых, должен быть составлен из инвариантов поля. Вследствие неоднозначности векторного потенциала Действие электромагнитного поля не может определяться непосредственно им.

Действие для электромагнитного поля

- Далее, действие должно быть квадратично по полю, поэтому единственной возможностью является функция Лагранжа пропорциональная первому инварианту электромагнитного поля $F_{ik}F^{ik}$:

$$S_f = \alpha \int\limits_{V_4} F_{ik}F^{ik} dV_4, \qquad (10)$$

где α – некоторая фундаментальная константа.

- Определим эту фундаментальную константу, исходя из соображений размерности. Как мы отмечали ранее, действие имеет размерность произведения энергии на время:

- Далее, размерность тензора Максвелла $[F_{ik}] = [F^{ik}] = [\mathbf{E}] = [\mathbf{H}]$ в декартовой системе координат. Размерность же $\mathbf{E}$ мы можем определить из двух законов: уравнения движения заряда в электрическом поле $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ и закона Кулона $E = e/r^2$:

- Далее, действие должно быть квадратично по полю, поэтому единственной возможностью является функция Лагранжа пропорциональная первому инварианту электромагнитного поля $F_{ik}F^{ik}$:

$$S_f = \alpha \int\limits_{V_4} F_{ik}F^{ik} dV_4, \qquad (10)$$

где α – некоторая фундаментальная константа.

- Определим эту фундаментальную константу, исходя из соображений размерности. Как мы отмечали ранее, действие имеет размерность произведения энергии на время:

$$[S_f] = [\mathcal{E} \cdot t] = \left[\frac{ml^2}{t}\right] \qquad (11)$$

- Далее, размерность тензора Максвелла $[F_{ik}] = [F^{ik}] = [\mathbf{E}] = [\mathbf{H}]$ в декартовой системе координат. Размерность же $\mathbf{E}$ мы можем определить из двух законов: уравнения движения заряда в электрическом поле $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ и закона Кулона $E = e/r^2$:

$$[F] = \left[\frac{e^2}{r^2}\right] \Rightarrow [e] = \left[\frac{m^{1/2}l^{3/2}}{t}\right]; \qquad (12)$$

$$[E] = \left[\frac{F}{e}\right] = \left[\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}\right] \Rightarrow [F_{ik}F^{ik}] = \left[\frac{m}{lt^2}\right]. \qquad (13)$$

- Далее, действие должно быть квадратично по полю, поэтому единственной возможностью является функция Лагранжа пропорциональная первому инварианту электромагнитного поля $F_{ik}F^{ik}$:

$$S_f = \alpha \int\limits_{V_4} F_{ik}F^{ik} dV_4, \qquad (10)$$

где α – некоторая фундаментальная константа.

- Определим эту фундаментальную константу, исходя из соображений размерности. Как мы отмечали ранее, действие имеет размерность произведения энергии на время:

$$[S_f] = [E \cdot t] = \left[\frac{ml^2}{t}\right] \qquad (11)$$

- Далее, размерность тензора Максвелла $[F_{ik}] = [F^{ik}] = [\mathbf{E}] = [\mathbf{H}]$ в декартовой системе координат. Размерность же $\mathbf{E}$ мы можем определить из двух законов: уравнения движения заряда в электрическом поле $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ и закона Кулона $E = e/r^2$:

$$[\mathbf{F}] = \left[\frac{e^2}{r^2}\right] \Rightarrow [e] = \left[\frac{m^{1/2}l^{3/2}}{t}\right]; \qquad (12)$$

$$[\mathbf{E}] = \left[\frac{\mathbf{F}}{e}\right] = \left[\frac{m^{1/2}}{tl^{1/2}}\right] \Rightarrow [F_{ik}F^{ik}] = \left[\frac{m}{lt^2}\right]. \qquad (13)$$

Действие для электромагнитного поля

- Далее, действие должно быть квадратично по полю, поэтому единственной возможностью является функция Лагранжа пропорциональная первому инварианту электромагнитного поля $F_{ik}F^{ik}$:

$$S_f = \alpha \int\limits_{V_4} F_{ik}F^{ik} dV_4, \tag{10}$$

  где α – некоторая фундаментальная константа.

- Определим эту фундаментальную константу, исходя из соображений размерности. Как мы отмечали ранее, действие имеет размерность произведения энергии на время:

$$[S_f] = [E \cdot t] = \left[\frac{ml^2}{t}\right] \tag{11}$$

- Далее, размерность тензора Максвелла $[F_{ik}] = [F^{ik}] = [\mathbf{E}] = [\mathbf{H}]$ в декартовой системе координат. Размерность же $\mathbf{E}$ мы можем определить из двух законов: уравнения движения заряда в электрическом поле $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ и закона Кулона $E = e/r^2$:

- Далее, действие должно быть квадратично по полю, поэтому единственной возможностью является функция Лагранжа пропорциональная первому инварианту электромагнитного поля $F_{ik}F^{ik}$:

$$S_f = \alpha \int\limits_{V_4} F_{ik}F^{ik} dV_4, \tag{10}$$

где α – некоторая фундаментальная константа.

- Определим эту фундаментальную константу, исходя из соображений размерности. Как мы отмечали ранее, действие имеет размерность произведения энергии на время:

$$[S_f] = [E \cdot t] = \left[\frac{ml^2}{t}\right] \tag{11}$$

- Далее, размерность тензора Максвелла $[F_{ik}] = [F^{ik}] = [\mathbf{E}] = [\mathbf{H}]$ в декартовой системе координат. Размерность же $\mathbf{E}$ мы можем определить из двух законов: уравнения движения заряда в электрическом поле $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ и закона Кулона $E = e/r^2$:

$$[\mathbf{F}] = \left[\frac{e^2}{r^2}\right] \Rightarrow [e] = \left[\frac{m^{1/2}l^{3/2}}{t}\right]; \tag{12}$$

$$[\mathbf{E}] = \left[\frac{\mathbf{F}}{e}\right] = \left[\frac{m^{1/2}}{tl^{1/2}}\right] \Rightarrow [F_{ik}F^{ik}] = \left[\frac{m}{lt^2}\right] \tag{13}$$

Действие для электромагнитного поля

- Далее, действие должно быть квадратично по полю, поэтому единственной возможностью является функция Лагранжа пропорциональная первому инварианту электромагнитного поля $F_{ik}F^{ik}$:

$$S_f = \alpha \int\limits_{V_4} F_{ik}F^{ik} dV_4, \tag{10}$$

где α – некоторая фундаментальная константа.

- Определим эту фундаментальную константу, исходя из соображений размерности. Как мы отмечали ранее, действие имеет размерность произведения энергии на время:

$$[S_f] = [E \cdot t] = \left[\frac{ml^2}{t}\right] \tag{11}$$

- Далее, размерность тензора Максвелла $[F_{ik}] = [F^{ik}] = [\mathbf{E}] = [\mathbf{H}]$ в декартовой системе координат. Размерность же $\mathbf{E}$ мы можем определить из двух законов: уравнения движения заряда в электрическом поле $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ и закона Кулона $E = e/r^2$:

$$[\mathbf{F}] = \left[\frac{e^2}{r^2}\right] \Rightarrow [e] = \left[\frac{m^{1/2}l^{3/2}}{t}\right]; \tag{12}$$

$$[\mathbf{E}] = \left[\frac{\mathbf{F}}{e}\right] = \left[\frac{m^{1/2}}{tl^{1/2}}\right] \Rightarrow [F_{ik}F^{ik}] = \left[\frac{m}{t^2 l}\right]. \tag{13}$$

- Далее, действие должно быть квадратично по полю, поэтому единственной возможностью является функция Лагранжа пропорциональная первому инварианту электромагнитного поля $F_{ik}F^{ik}$:

$$S_f = \alpha \int\limits_{V_4} F_{ik}F^{ik} dV_4, \tag{10}$$

  где α – некоторая фундаментальная константа.

- Определим эту фундаментальную константу, исходя из соображений размерности. Как мы отмечали ранее, действие имеет размерность произведения энергии на время:

$$[S_f] = [E \cdot t] = \left[\frac{ml^2}{t}\right] \tag{11}$$

- Далее, размерность тензора Максвелла $[F_{ik}] = [F^{ik}] = [\mathbf{E}] = [\mathbf{H}]$ в декартовой системе координат. Размерность же $\mathbf{E}$ мы можем определить из двух законов: уравнения движения заряда в электрическом поле $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ и закона Кулона $E = e/r^2$:

$$[\mathbf{F}] = \left[\frac{e^2}{r^2}\right] \Rightarrow [e] = \left[\frac{m^{1/2}l^{3/2}}{t}\right]; \tag{12}$$

$$[\mathbf{E}] = \left[\frac{\mathbf{F}}{e}\right] = \left[\frac{m^{1/2}}{tl^{1/2}}\right] \Rightarrow [F_{ik}F^{ik}] = \left[\frac{m}{t^2 l}\right]. \tag{13}$$

- Далее, действие должно быть квадратично по полю, поэтому единственной возможностью является функция Лагранжа пропорциональная первому инварианту электромагнитного поля $F_{ik}F^{ik}$:

$$S_f = \alpha \int\limits_{V_4} F_{ik}F^{ik} dV_4, \tag{10}$$

где α – некоторая фундаментальная константа.

- Определим эту фундаментальную константу, исходя из соображений размерности. Как мы отмечали ранее, действие имеет размерность произведения энергии на время:

$$[S_f] = [E \cdot t] = \left[\frac{ml^2}{t}\right] \tag{11}$$

- Далее, размерность тензора Максвелла $[F_{ik}] = [F^{ik}] = [\mathbf{E}] = [\mathbf{H}]$ в декартовой системе координат. Размерность же $\mathbf{E}$ мы можем определить из двух законов: уравнения движения заряда в электрическом поле $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ и закона Кулона $E = e/r^2$:

$$[\mathbf{F}] = \left[\frac{e^2}{r^2}\right] \Rightarrow [e] = \left[\frac{m^{1/2}l^{3/2}}{t}\right]; \tag{12}$$

$$[\mathbf{E}] = \left[\frac{\mathbf{F}}{e}\right] = \left[\frac{m^{1/2}}{tl^{1/2}}\right] \Rightarrow [F_{ik}F^{ik}] = \left[\frac{m}{t^2 l}\right]. \tag{13}$$

- Таким образом, из сравнения формул (10), (11) и (13) следует:

$$[\alpha] = [S_{ef}]/[F_{ik}F^{ik}] = \left[\frac{t}{l}\right], \qquad (14)$$

т.е., α имеет размерность обратной скорости. Но такой фундаментальной скоростью может быть лишь скорость света $\to \alpha \sim 1/c$.

- Уточняя эту константу численным коэффициентом для соответствия ее так называемой гауссовой системе единиц, получим окончательно

$$\boxed{S_f = \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} F_{ik}F^{ik} dV_4.} \qquad (15)$$

- Вычислим вариацию этого действия, учитывая что динамическими переменными поля являются не функции одного переменного, а функции четырех переменных, в качестве которых можно выбрать компоненты векторного потенциала $A_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Варьируя действие поля (15), получим, переставляя порядок варьирования и дифференцирования:

$$\delta S_f = \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}\delta F_{ik} \equiv \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}\delta(\partial_i A_k - \partial_k A_i)$$

$$= \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}(\partial_i \delta A_k - \partial_k \delta A_i). \qquad (16)$$

- Таким образом, из сравнения формул (10), (11) и (13) следует:

$$[\alpha] = [S_{ef}]/[F_{ik}F^{ik}] = \left[\frac{t}{l}\right], \tag{14}$$

т.е., α имеет размерность обратной скорости. Но такой фундаментальной скоростью может быть лишь скорость света $\to \alpha \sim 1/c$.

- Уточняя эту константу численным коэффициентом для соответствия ее так называемой гауссовой системе единиц, получим окончательно

$$\boxed{S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} F_{ik}F^{ik}dV_4 \tag{15}}$$

- Вычислим вариацию этого действия, учитывая что динамическими переменными поля являются не функции одного переменного, а функции четырех переменных, в качестве которых можно выбрать компоненты векторного потенциала $A_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Варьируя действие поля (15), получим, переставляя порядок варьирования и дифференцирования:

$$\delta S_f = \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}\delta F_{ik} \equiv \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}\delta(\partial_i A_k - \partial_k A_i)$$

$$= \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}(\partial_i \delta A_k - \partial_k \delta A_i). \tag{16}$$

- Таким образом, из сравнения формул (10), (11) и (13) следует:

$$[\alpha] = [S_{ef}]/[F_{ik}F^{ik}] = \left[\frac{t}{l}\right], \qquad (14)$$

т.е., α имеет размерность обратной скорости. Но такой фундаментальной скоростью может быть лишь скорость света $\rightarrow \alpha \sim 1/c$.

- Уточняя эту константу численным коэффициентом для соответствия ее так называемой гауссовой системе единиц, получим окончательно

$$\boxed{S_f = \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} F_{ik}F^{ik} dV_4. \qquad (15)}$$

- Вычислим вариацию этого действия, учитывая что динамическими переменными поля являются не функции одного переменного, а функции четырех переменных, в качестве которых можно выбрать компоненты векторного потенциала $A_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Варьируя действие поля (15), получим, переставляя порядок варьирования и дифференцирования:

$$\delta S_f = \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}\delta F_{ik} \equiv \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}\delta(\partial_i A_k - \partial_k A_i)$$

$$= \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}(\partial_i \delta A_k - \partial_k \delta A_i). \qquad (16)$$

- Таким образом, из сравнения формул (10), (11) и (13) следует:

$$[\alpha] = [S_{ef}]/[F_{ik}F^{ik}] = \left[\frac{t}{l}\right], \qquad (14)$$

т.е., α имеет размерность обратной скорости. Но такой фундаментальной скоростью может быть лишь скорость света $\to \alpha \sim 1/c$.

- Уточняя эту константу численным коэффициентом для соответствия ее так называемой гауссовой системе единиц, получим окончательно

$$\boxed{S_f = \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} F_{ik}F^{ik}dV_4. \qquad (15)}$$

- Вычислим вариацию этого действия, учитывая что динамическими переменными поля являются не функции одного переменного, а функции четырех переменных, в качестве которых можно выбрать компоненты векторного потенциала $A_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Варьируя действие поля (15), получим, переставляя порядок варьирования и дифференцирования:

$$\delta S_f = \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}\delta F_{ik} \equiv \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}\delta(\partial_i A_k - \partial_k A_i)$$

$$= \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}(\partial_i \delta A_k - \partial_k \delta A_i). \qquad (16)$$

- Таким образом, из сравнения формул (10), (11) и (13) следует:

$$[\alpha] = [S_{ef}]/[F_{ik}F^{ik}] = \left[\frac{t}{l}\right], \quad (14)$$

т.е., α имеет размерность обратной скорости. Но такой фундаментальной скоростью может быть лишь скорость света $\rightarrow \alpha \sim 1/c$.

- Уточняя эту константу численным коэффициентом для соответствия ее так называемой гауссовой системе единиц, получим окончательно

$$\boxed{S_f = \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} F_{ik}F^{ik}dV_4. \quad (15)}$$

- Вычислим вариацию этого действия, учитывая что динамическими переменными поля являются не функции одного переменного, а функции четырех переменных, в качестве которых можно выбрать компоненты векторного потенциала $A_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Варьируя действие поля (15), получим, переставляя порядок варьирования и дифференцирования:

$$\delta S_f = \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}\delta F_{ik} \equiv \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}\delta(\partial_i A_k - \partial_k A_i)$$

$$= \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}(\partial_i \delta A_k - \partial_k \delta A_i). \quad (16)$$

- Таким образом, из сравнения формул (10), (11) и (13) следует:

$$[\alpha] = [S_{ef}]/[F_{ik}F^{ik}] = \left[\frac{t}{l}\right], \qquad (14)$$

т.е., α имеет размерность обратной скорости. Но такой фундаментальной скоростью может быть лишь скорость света $\to \alpha \sim 1/c$.

- Уточняя эту константу численным коэффициентом для соответствия ее так называемой гауссовой системе единиц, получим окончательно

$$\boxed{S_f = \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} F_{ik}F^{ik}dV_4. \qquad (15)}$$

- Вычислим вариацию этого действия, учитывая что динамическими переменными поля являются не функции одного переменного, а функции четырех переменных, в качестве которых можно выбрать компоненты векторного потенциала $A_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Варьируя действие поля (15), получим, переставляя порядок варьирования и дифференцирования:

$$\delta S_f = \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}\delta F_{ik} \equiv \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}\delta(\partial_i A_k - \partial_k A_i)$$

$$= \frac{1}{16\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ 2F^{ik}(\partial_i \delta A_k - \partial_k \delta A_i). \qquad (16)$$

- Интегрируя по частям в (16), получим:

$$\delta S_f = \frac{1}{8\pi c}\int\limits_{\Sigma_i} d\Sigma_i F^{ik}\delta A_k\Bigg|_{x_i=-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{8\pi c}\int\limits_{\Sigma_k} d\Sigma_k F^{ik}\delta A_i\Bigg|_{x_k=-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{8\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\,\left(\partial_i F^{ik}\delta A_k - \partial_k F^{ik}\delta A_i\right), \quad (17)$$

  где Σ_i – трехмерные гиперповерхности в V_4.

- Граничные точки всего пространства Минковского имеют такие координаты, из которых хотя бы одна обращается в $\pm\infty$. Полагая, что на границах V_4 вариации потенциалов обращаются в нуль, переставляя немые индексы $i \leftrightarrow k$ во втором члене оставшегося интеграла и учитывая антисимметричность тензора Максвелла (благодаря которой результат удваивается), получим окончательно для вариации действия электромагнитного поля:

$$\boxed{\delta S_f = \frac{1}{4\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\,\partial_i F^{ik}\delta A_k \equiv \frac{1}{4\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\,\nabla_i F^{ik}\delta A_k. \quad (18)}$$

Последнее равенство как ковариантное обобщение справедливо и для произвольных криволинейных координат.

Вариация действия поля

- Интегрируя по частям в (16), получим:

$$\delta S_f = \frac{1}{8\pi c}\int\limits_{\Sigma_i} d\Sigma_i F^{ik}\delta A_k\Bigg|_{x_i=-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{8\pi c}\int\limits_{\Sigma_k} d\Sigma_k F^{ik}\delta A_i\Bigg|_{x_k=-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{8\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ (\partial_i F^{ik}\delta A_k - \partial_k F^{ik}\delta A_i), \quad (17)$$

где Σ_i – трехмерные гиперповерхности в V_4.

- Граничные точки всего пространства Минковского имеют такие координаты, из которых хотя бы одна обращается в $\pm\infty$. Полагая, что на границах V_4 вариации потенциалов обращаются в нуль, переставляя немые индексы $i \leftrightarrow k$ во втором члене оставшегося интеграла и учитывая антисимметричность тензора Максвелла (благодаря которой результат удваивается), получим окончательно для вариации действия электромагнитного поля:

$$\boxed{\delta S_f = \frac{1}{4\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ \partial_i F^{ik}\delta A_k \equiv \frac{1}{4\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ \nabla_i F^{ik}\delta A_k. \quad (18)}$$

Последнее равенство как ковариантное обобщение справедливо и для произвольных криволинейных координат.

- Интегрируя по частям в (16), получим:

$$\delta S_f = \frac{1}{8\pi c}\int\limits_{\Sigma_i} d\Sigma_i F^{ik}\delta A_k\Big|_{x_i=-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{8\pi c}\int\limits_{\Sigma_k} d\Sigma_k F^{ik}\delta A_i\Big|_{x_k=-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{8\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ (\partial_i F^{ik}\delta A_k - \partial_k F^{ik}\delta A_i), \quad (17)$$

где Σ_i – трехмерные гиперповерхности в V_4.

- Граничные точки всего пространства Минковского имеют такие координаты, из которых хотя бы одна обращается в $\pm\infty$. Полагая, что на границах V_4 вариации потенциалов обращаются в нуль, переставляя немые индексы $i \leftrightarrow k$ во втором члене оставшегося интеграла и учитывая антисимметричность тензора Максвелла (благодаря которой результат удваивается), получим окончательно для вариации действия электромагнитного поля:

$$\boxed{\delta S_f = \frac{1}{4\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ \partial_i F^{ik}\delta A_k \equiv \frac{1}{4\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ \nabla_i F^{ik}\delta A_k. \quad (18)}$$

Последнее равенство как ковариантное обобщение справедливо и для произвольных криволинейных координат.

- Интегрируя по частям в (16), получим:

$$\delta S_f = \frac{1}{8\pi c}\int\limits_{\Sigma_i} d\Sigma_i F^{ik}\delta A_k\Bigg|_{x_i=-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{8\pi c}\int\limits_{\Sigma_k} d\Sigma_k F^{ik}\delta A_i\Bigg|_{x_k=-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{8\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ (\partial_i F^{ik}\delta A_k - \partial_k F^{ik}\delta A_i), \quad (17)$$

где Σ_i – трехмерные гиперповерхности в V_4.

- Граничные точки всего пространства Минковского имеют такие координаты, из которых хотя бы одна обращается в $\pm\infty$. Полагая, что на границах V_4 вариации потенциалов обращаются в нуль, переставляя немые индексы $i \leftrightarrow k$ во втором члене оставшегося интеграла и учитывая антисимметричность тензора Максвелла (благодаря которой результат удваивается), получим окончательно для вариации действия электромагнитного поля:

$$\boxed{\delta S_f = \frac{1}{4\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ \partial_i F^{ik}\delta A_k \equiv \frac{1}{4\pi c}\int\limits_{V_4} dV_4\ \nabla_i F^{ik}\delta A_k. \qquad (18)}$$

Последнее равенство как ковариантное обобщение справедливо и для произвольных криволинейных координат.