1. Вычисление длин дуг

Основная формула: Длина l дуги кривой, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_0 \le t \le t_1)$, где $x(t), y(t)$ — кусочно-гладкие функции на отрезке $[t_0, t_1]$, вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'_t(t))^2 + (y'_t(t))^2}\, dt. \tag{1}$$

№2442. В этом примере границы изменения t не указаны, и нам прежде всего необходимо разобраться, какие же пределы следует взять. В своё время мы строили данную кривую, отметив, что $x, y \ge 0$ и $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (см. №370.1 в)). Проанализировав, какие значения принимают $x(t)$ и $y(t)$ при различных значениях параметра t, можно заключить, что дуга кривой пробегается один раз при изменении t от 0 до $\pi/2$. Вычислив значения x'_t и y'_t, получим:

$$l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{16\cos^6 t \sin^2 t + 16\sin^6 t \cos^2 t}\, dt = \int_0^{\pi/2} 4\sin t \cos t \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t}\, dt$$

(Интеграл можно не досчитывать.)

Если кривая представляет из себя график кусочно-гладкой функции $y = y(x)$ $(x_0 \le x \le x_1)$, то в качестве параметра можно взять x: $x = x$, $y = y(x)$ $(x_0 \le x \le x_1)$ и формула (1) переписывается тогда в виде:

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{2}$$

№2431.

№2435. Выражать y как функцию от x не нужно, да и сделать это не получится. А надо взять y в качестве параметра и использовать формулу аналогичную (2). После вычисления x'_y под знаком квадратного корня получается полный квадрат.

Если кривая задана в полярной системе координат, то следует перейти к декартовым координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. В случае, когда дуга кривой задается в полярной системе как $r = r(\varphi)$ $(\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1)$, в декартовой системе координат получаем параметрическое задание: $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$ $(\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1)$.

Вычисляем $x'_\varphi = r'_\varphi(\varphi)\cos(\varphi) - r(\varphi)\sin\varphi$, $y'_\varphi = r'_\varphi(\varphi)\sin(\varphi) + r(\varphi)\cos\varphi$. Подставляем в формулу (1):

$$l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2}\, d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'_\varphi(\varphi))^2}\, d\varphi. \tag{3}$$

№2446.

№2448. Воспользоваться симметрией кривой.

№2452 а). Вывести сначала общую формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной как $\varphi = \varphi(r)$ $(r_0 \leq r \leq r_1)$, получить, что

$$l = \int\limits_{r_0}^{r_1} \sqrt{r^2 {\varphi'_r}^2 + 1}\, dr,$$

а затем применить эту формулу к конкретному примеру.

Для выполнения задания по теме вам следует разобраться в решении задач 2431, 2435, 2446, 2448, 2452 а), а затем решить задачи 2433 (воспользоваться: $1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$), 2443, 2445 б) (в других изданиях 2445.1, т.е. $x = \operatorname{ch}^3 t \ldots$), 2450, 2452 б), в).