Л.Р. Секаева

Курс лекций по дисциплине «Дифференциальное и интегральное исчисление» для студентов Института фундаментальной медицины и биологии направления «Медицинская кибернетика»

Казань – 2022

Казанский федеральный университет
Кафедра общей математики

Л.Р. Секаева

Курс лекций по дисциплине «Дифференциальное и интегральное исчисление» для студентов Института фундаментальной медицины и биологии направления «Медицинская кибернетика»

Казань – 2022

УДК 517
ББК 22.143, 22.147, 22.161.1
ГРНТИ 27.17.29, 27.23.17
С 28

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

учебно-методической комиссии
Института математики и механики имени Н.И. Лобачевского КФУ
Протокол № 5 от 10 марта 2022 г.

заседания кафедры общей математики
Выписка № 3 из протокола № 5 от 04 марта 2022 г.

Автор
кандидат физико-математических наук, доцент Секаева Л.Р.

Научный редактор
доктор физико-математических наук, профессор Насыров С.Р.

Рецензент
доктор физико-математических наук, доцент Абзалилов Д.Ф.

С 28 **Курс лекций по дисциплине «Дифференциальное и интегральное исчисление» для студентов Института фундаментальной медицины и биологии направления «Медицинская кибернетика»**: учебное пособие / Л.Р. Секаева. – Казань: Казанский федеральный университет, 2022. – 102 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов Института фундаментальной медицины и биологии направления 30.05.03 «Медицинская кибернетика».

Пособие содержит следующие разделы: дифференциальные уравнения, ряды, а также включает разобранные решения задач вручную и с помощью пакета математических программ MAXIMA.

Содержание

Лекция 1

Дифференциальные уравнения

Определение 1. *Уравнение, в которое входят независимая переменная (независимые переменные), искомая функция и ее производные называется дифференциальным.*

Выделяют два класса дифференциальных уравнений – обыкновенные дифференциальные уравнения, если искомая функция зависит от одной переменной, и уравнения в частных производных, когда искомая функция является функцией многих переменных.

Будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения, их в дальнейшем будем называть просто «дифференциальными уравнениями».

Определение 2. *Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.*

Определение 3. *Решением (интегралом) дифференциального уравнения называют любую функцию, обращающую уравнение в тождество.*

Процедура нахождения искомой функции из дифференциального уравнения называется его решением или интегрированием.

Для решения дифференциального уравнения необходимо «избавиться» от входящих в уравнение производных, что возможно, как известно, только с помощью интегрирования, то есть вычисления неопределенных интегралов. При решении уравнения первого порядка необходимо одно интегрирование, уравнение второго порядка следует интегрировать дважды и так далее. Но при каждом интегрировании, то есть вычислении неопределенного интеграла, появляется постоянная интегрирования. Следовательно, в решение уравнения n-го порядка может входить n постоянных интегрирования. Другими словами, решений каждого дифференциального уравнения бесчисленное множество, отличаются они значениями постоянных интегрирования.

Выделяют два вида решений дифференциального уравнения. Частное его решение, представляющее в соответствии с определением 3 любую функцию, обращающую уравнение в тождество. Общее решение дифференциального уравнения – это множество всех частных решений данного уравнения. Частное решение может содержать, или не содержать, постоянные интегрирования. В общем решении число постоянных интегрирования должно совпадать с порядком уравнения.

Определение 4. *Задача Коши кроме дифференциального уравнения n-го порядка* $F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right)=0$ *содержит* n *дополнительных условий, задаваемых в одной точке (при одном значении независимой переменной), то есть в точке* x_0 *задается значение искомой функции* y *и ее производных до* $(n-1)$ *порядка. Часто эти условия называют начальными условиями задачи.*

Физически решение задачи Коши можно представить следующим образом. Задается информация об исследуемом явлении в некоторый (начальный) момент, с помощью решения дифференциального уравнения определяется развитие этого явления в последующем.

Определение 5. *Краевой (граничной) задачей для дифференциального уравнения называют задачу, в которой дополнительные условия задаются в более чем одной точке (на границах некоторого отрезка, на линиях или поверхностях для уравнений в частных производных). Дополнительные условия в этом случае называют краевыми или граничными условиями задачи. Общее число краевых условий, естественно, должно совпадать с порядком уравнения (числом постоянных интегрирования в общем решении уравнения).*

В отличие от задачи Коши, в краевой задаче задается информация о поведении искомой функции на границе некоторой области, решение дифференциального уравнения позволяет определить эту функцию внутри заданной области (или вне ее).

Поскольку дополнительные условия задачи Коши или краевой задачи позволяют определить конкретные значения всех постоянных интегрирования, входящих в общее решение уравнения, решения этих задач являются частными решениями дифференциального уравнения.

Замечание. Кроме общего и частного решений дифференциального уравнения, могут существовать, так называемые, особые решения, которые могут содержаться, или не содержаться в общем решении.

Уравнения первого порядка

Общий вид уравнения первого порядка имеет вид

$$F\left(x, y, y'\right)=0. \qquad (1)$$

Здесь $y\left(x\right)$ – функция, подлежащая определению (искомая функция).

Частным случаем такого уравнения является уравнение

$$y' = f(x, y). \qquad (2)$$

Это уравнение называется уравнением, разрешенным относительно производной.

Общим решением этих двух уравнений называют функцию

$$y = g(x, C), \qquad (3)$$

обращающую уравнения (1) или (2) в тождества, здесь C – произвольная постоянная интегрирования.

Если решение не удается представить в виде (3), но можно записать в неявной форме

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad (4)$$

то его называют общим интегралом уравнения.

Когда постоянная C принимает конкретное значение, функции (3) и (4) называют частным решением и интегралом уравнения соответственно.

Любое частное решение дифференциального уравнения представляет собой плоскую кривую, которую называют интегральной кривой. Общее решение – есть множество кривых на плоскости, уравнения которых $y = g(x, C)$.

Известно, что решение уравнения (2) и тем более уравнения (1) существует не всегда. Очевидно, прежде чем решать дифференциальное уравнение следует установить, существует ли его решение. На этот вопрос отвечает теорема Пеано,

которая утверждает, что решение задачи Коши для уравнения (2) существует, если правая часть уравнения $f(x, y)$ непрерывна.

Значительный интерес представляет теорема о существовании и **единственности** решения задачи Коши.

Теорема *(без доказательства). Решение задачи Коши* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ *существует и единственно в некоторой окрестности* R *точки* (x_0, y_0), *если в этой области выполняются следующие условия*

1) Функция $f(x, y)$ *непрерывна, а, следовательно, ограничена в области* R,

2) Функция $f(x, y)$ *имеет в этой области ограниченную частную производную по* y, *то есть*

$$\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \le K,$$

где K *– конечное положительное число.*

Итак, при выполнении условий теоремы через заданную точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая.

***Определение* 6.** *Особое решение дифференциального уравнения представляет собой интегральную кривую, в каждой точке которой*

нарушается единственность решения, то есть через каждую точку этой кривой проходит по крайней мере еще одна интегральная кривая.

Замечание. *Особое решение дифференциального уравнения может содержаться, а может и не содержаться в его общем решении.*

Для выяснения существования особого решения может быть использована теорема существования и единственности. С ее помощью устанавливается, на каких линиях не выполняются условия теоремы, а затем проверяется подстановкой в уравнение, не являются ли эти линии интегральными кривыми.

Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка

Здесь рассматриваются либо уравнения, разрешенные относительно производной $y' = f(x, y)$, либо уравнения, которые можно свести к этому классу.

Мы знаем, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения вида

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \qquad (5)$$

называются уравнениями с разделяющимися переменными. Их интегрирование осуществляется с помощью разделения переменных, то есть приведения уравнения к виду

$$\frac{Q(y)}{N(y)}dy = -\frac{M(x)}{P(x)}dx, \qquad (6)$$

то есть к уравнению с разделенными переменными. Эта процедура законна только при $P(x) \neq 0$ и $N(y) \neq 0$. Следовательно, при переходе от уравнения с разделяющимися переменными (5) к уравнению с разделенными переменными (6) могут быть потеряны решения уравнения (5) вида $P(x) = 0$ и $N(y) = 0$, если они существуют.

Переход от уравнения (6) к его решению

$$\int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = -\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + C$$

можно формально обосновать следующим образом. Уравнение (6) представляет собой равенство двух функций. Но если две функции равны, то их первообразные $\int \frac{Q(y)}{N(y)}dy$ и $= -\int \frac{M(x)}{P(x)}dx$ отличаются на постоянную.

Пример 1. Решить уравнение
$2ye^{2x}dx = \left(3+e^{2x}\right)dy.$

Решение.

Разделяем переменные, поделив обе части уравнения на $\left(3+e^{2x}\right)y$,

$$\frac{2e^{2x}}{\left(3+e^{2x}\right)}dx = \frac{dy}{y}.$$

Так как $3+e^{2x} \neq 0$, в результате деления может быть потеряно только решение $y=0$. Оно, действительно, является решением исходного уравнения поскольку $dy=0$.

Интегрируем уравнение с разделенными переменными

$$\int \frac{2e^{2x}}{\left(3+e^{2x}\right)}dx = \int \frac{dy}{y} + C_1,$$

откуда следует

$$\ln\left(3+e^{2x}\right) = \ln|y| + C_1.$$

Переобозначим постоянную интегрирования $C_1 = -\ln|C|$ и избавимся от логарифмов, тогда $y = C\left(3+e^{2x}\right)$. Отметим, что «потерянное» решение в данном случае входит в общее решение уравнения (при $C=0$).

Отметим, что в этом примере найдено общее решение дифференциального уравнения.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) 'diff(y,x)=2*y*%e^(2*x)/(3+%e^(2*x));
```

(%o1) $\frac{d}{dx}y=\frac{2\,\%e^{2x}\,y}{\%e^{2x}+3}$

```
(%i2) ode2(%,y,x);
```

(%o2) $y=\%c(\%e^{2x}+3)$

```
(%i3) ode2('diff(y,x)=2*y*(%e^(2*x))/(3+%e^(2*x)),y,x);
```

(%o3) $y=\%c(\%e^{2x}+3)$

Ответ. $y=C\left(3+e^{2x}\right)$.

Пример 2. Решить задачу Коши

$$y'\operatorname{ctg}x+y=2,\quad y(0)=1.$$

Решение.

Разделяем переменные с помощью следующих процедур

$$\frac{dy}{dx}\operatorname{ctg}x=2-y,$$

$$\frac{dy}{2-y}=\operatorname{tg}x dx,$$

$$\int\frac{dy}{y-2}=-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx+C_1,$$

$$\int\frac{dy}{y-2}=\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}+C_1.$$

Интегрируя, находим общее решение уравнения. Пусть $C_1=e^C$:

$$\ln|y-2|=\ln|\cos x|+C_1.$$

В итоге $y=2+C_1\cos x$. Из начального условия определяем значение постоянной интегрирования.

Из $y(0)=2+C_1\cos 0=1$ имеем $C_1=-1$. Решение задачи Коши: $y=2-\cos x$.

Проверка. $y'=\sin x$, $\sin x\,\mathrm{ctg}\,x+2-\cos x=2$. Следовательно, найденная функция является решением уравнения. Она удовлетворяет и начальному условию $y(0)=2-\cos 0=1$.

Ответ. $y=2-\cos x$.

Пример 3. Решить уравнение $y'-xy^2=2xy$.

Решение.

Разделяем переменные

$$\frac{dy}{dx}=xy^2+2xy,$$

$$\frac{dy}{dx}=x\left(y^2+2y\right),$$

$$\frac{dy}{\left(y^2+2y\right)}=xdx,$$

$$\frac{dy}{(y+1)^2-1}=xdx.$$

При разделении переменных обе части уравнения нужно было поделить на выражение $\left(y^2+2y\right)$, то есть могли быть потеряны решения $y=-2$ и $y=0$. Проверим, являются ли эти функции решением исходного уравнения. Если $y=-2$, то $y'=0$, и уравнение тождественно

выполняется. При $y=0$ также $y'=0$, и уравнение превращается в тождество. Следовательно, $y=-2$ и $y=0$ являются решениями исходного уравнения.

В результате интегрирования уравнения с разделенными переменными получаем

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+1-1}{y+1+1}\right|+\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}x^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{Cy}{y+2}=e^{x^2},$$

откуда следует $y=\dfrac{2e^{x^2}}{C-e^{x^2}}$.

Нетрудно заметить, что $y=-2$ входит в общее решение уравнения и реализуется при $C=0$. Функция $y=0$ не входит в общее решение уравнения, следовательно, является особым решением.

Ответ. $y=\dfrac{2e^{x^2}}{C-e^{x^2}}$, $\quad y=0$.

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОГРАММ MAXIMA

Система компьютерной математики MAXIMA решает дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, линейные, нелинейные уравнения, однородные, неоднородные. Виды уравнений второго порядка: с постоянными коэффициентами, линейные однородные с непостоянными коэффициентами, которые могут быть преобразованы к уравнению с постоянным коэффициентами и др.

Для нахождения общего решения дифференциального уравнения в системе MAXIMA используется функция ode2(уравнение, y, x), она предназначена для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядка и принимает три аргумента: само дифференциальное уравнение, зависимая переменная y – искомая функция, и независимая переменная x – аргумент. Данная функция может возвращать решение в явном и неявном виде. Функция и переменная обозначаются одиночными буквами, обозначения вида $y(x)$ не нужны.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $x^2 y' + y = 0$.

Решение в MAXIMA.

В ячейке ввода переменной eq присвоим значение данного уравнения. Следует иметь ввиду, что перед записью производной следует поставить апостроф --> 'diff(y,x) – это вывод ее на экран.

```
(%i1) eq:x^2*'diff(y,x)+y=0;
```

(%o1) $x^2\left(\frac{d}{d\,x}y\right)+y=0$

Теперь решим уравнение, набрав в ячейке ввода команду ode2(eq,*y*,*x*).

```
(%i2) ode2(eq,y,x);
```

(%o2) $y=\%c\ \%e^{1/x}$

Здесь произвольная константа обозначается через *%c*.

Ответ. $y = Ce^{\frac{1}{x}}$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

Решение в MAXIMA.

Набираем в ячейке ввода заданное уравнение.

```
(%i1) 'diff(y,x,2)+'diff(y,x)*tan(x)=sin(2*x);
```

(%o1) $\frac{d^2}{d\,x^2}y+\tan(x)\left(\frac{d}{d\,x}y\right)=\sin(2\,x)$

Решаем уравнение, указав его адрес как результат предыдущего действия.

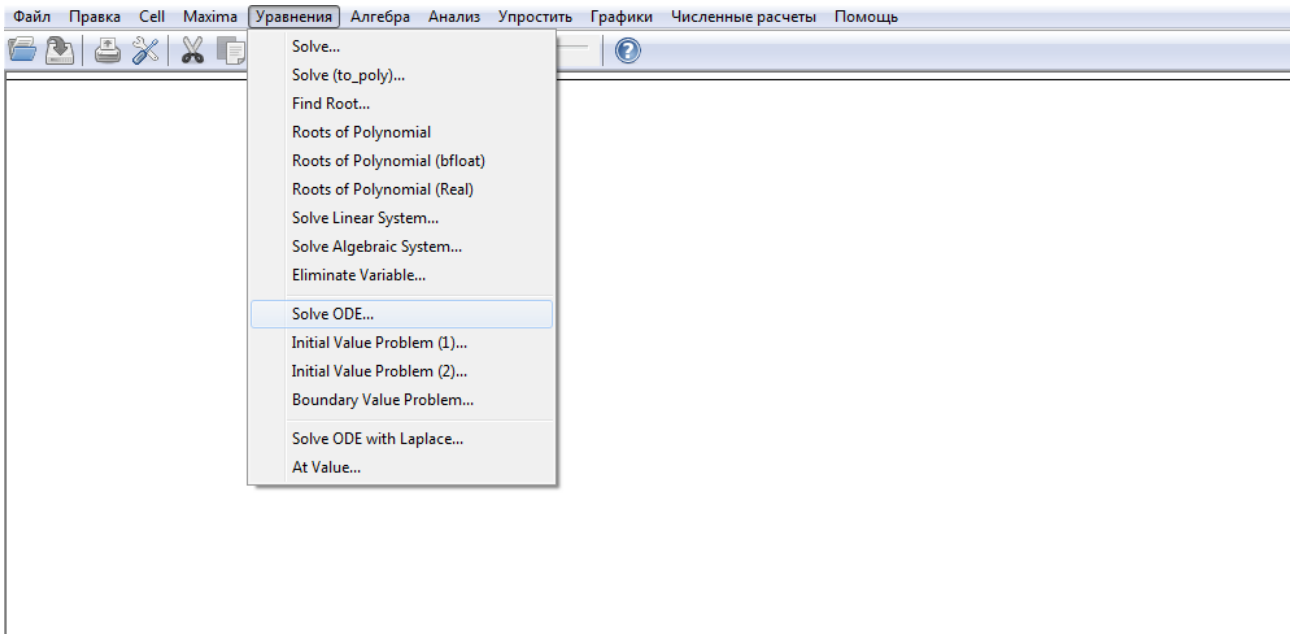
```
(%i2) ode2(%,y,x);
```

$$(\%o2)\quad y=-\frac{\sin(2\,x)}{2}+\%k1\,\sin(x)-x+\%k2$$

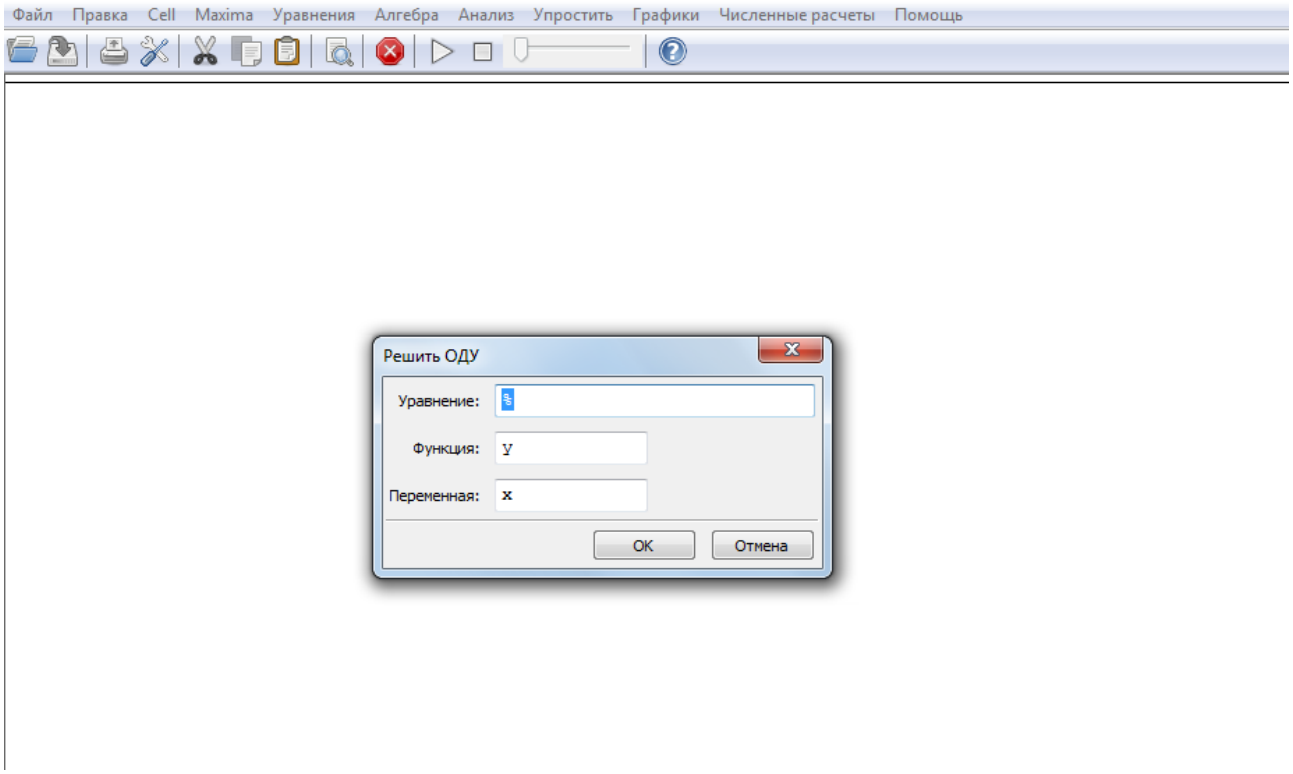
В полученном ответе символами *%k1* и *%k2* обозначены произвольные константы общего решения.

Ответ. $y=-\dfrac{\sin 2x}{2}-x+C_1\sin x+C_2$.

Можно пользоваться другим способом. Для этого на панели инструментов нужно нажать кнопки *уравнения/solve ODE* появится диалоговое окно,

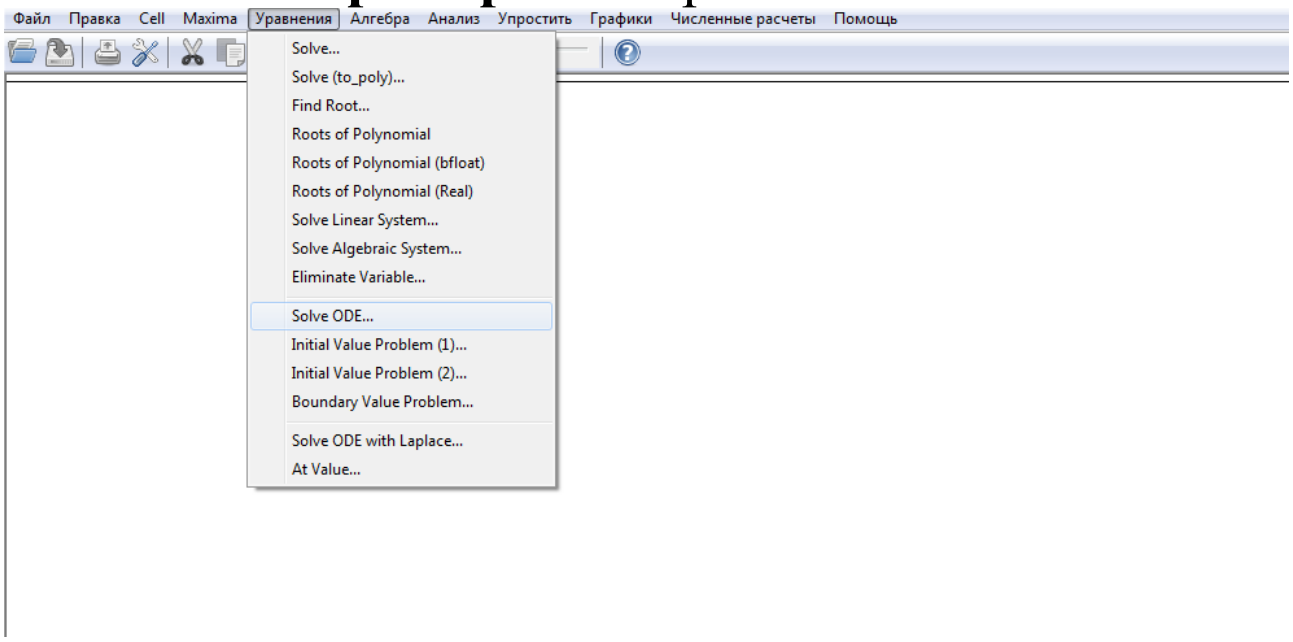


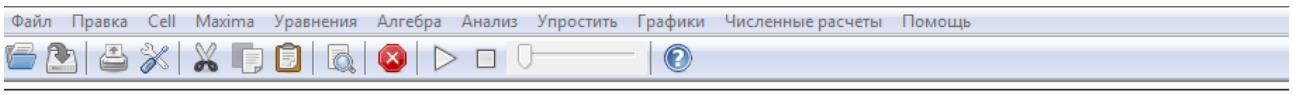
в котором в строке *Уравнение*

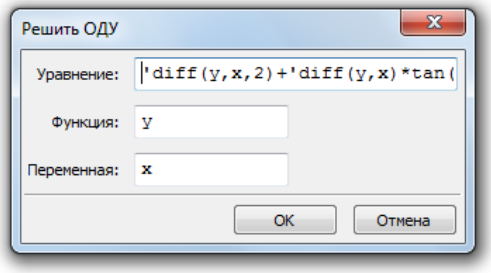


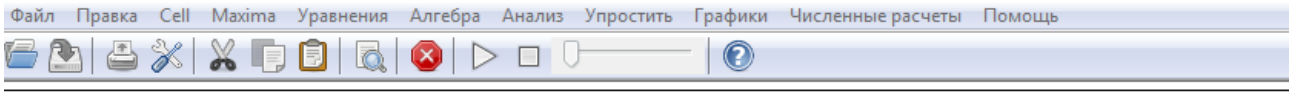
следует набрать данное уравнение и по нажатии кнопки OK получить ответ.

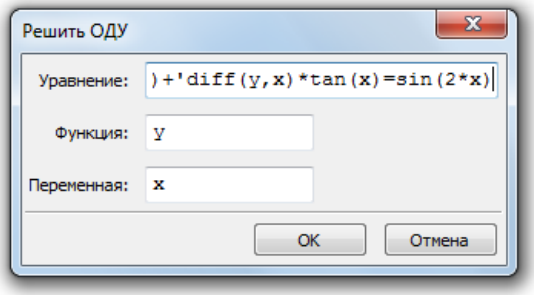
Решение **примера 2** вторым способом:

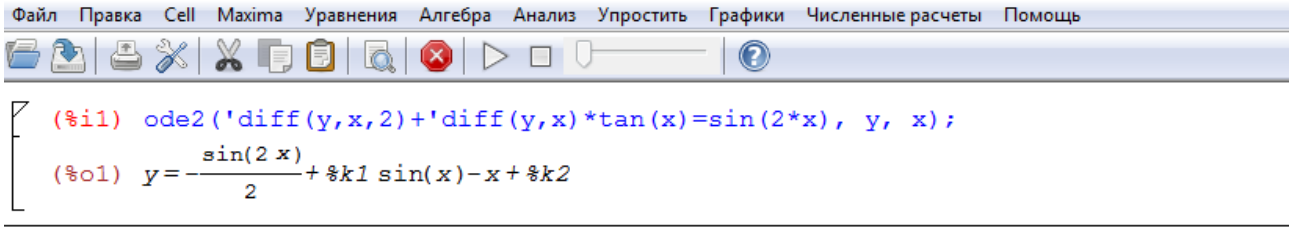



Файл Правка Cell Maxima Уравнения Алгебра Анализ Упростить Графики Численные расчеты Помощь


Решить ОДУ
Уравнение: 'diff(y,x,2)+'diff(y,x)*tan(
Функция: y
Переменная: x
OK
Отмена


Файл Правка Cell Maxima Уравнения Алгебра Анализ Упростить Графики Численные расчеты Помощь


Решить ОДУ
Уравнение:)+'diff(y,x)*tan(x)=sin(2*x)
Функция: y
Переменная: x
OK
Отмена



В дополнение к функции ode2 существуют три функции для поиска частных решений по заданным условиям. То есть, эти функции, получая конкретные условия относительно значения функции – решения в заданной точке находим исходя из этих значений соответствующие им величины интегральных констант.

1. Функция *ic1(решение,* $x = x_0, y = y_0$ *)* – предназначена для нахождения решения дифференциального уравнения первого порядка с начальными условиями. Она имеет три аргумента: первый – само общее решение, в том виде, в котором его находит функция *ode2*, второй – начальное значение независимой переменной в форме $x = x_0$, третий – значение функции при указанном значении $x = x_0$, в виде $y = y_0$. Находит частное решение, проходящее через точку с заданными координатами (x_0, y_0).

2. Функция *ic2(решение,* $x = x_0, y = y_0, 'diff(y,x) = y'_0$*)* предназначена для нахождения решения

дифференциального уравнения второго порядка с начальными условиями. Она имеет четыре аргумента: *решение* – общее решение уравнения, найденное с помощью функции ode2, $x = x_0$, – начальное значение независимой переменной, $y = y_0$ – начальное значение зависимой переменной и $'diff(y,x) = y'_0$ – начальное значение для первой производной зависимой переменной относительно независимой переменной.

3. Функция *bc2(решение,* $x = x_1$, $y = y_1$, $x = x_2$, $y = y_2$*)* предназначена для нахождения решения граничной задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Здесь *решение* – общее решение уравнения, найденное с помощью функции *ode2*, $x = x_1$ – значение независимой переменной в первой граничной точке, $y = y_1$ – соответственно значение зависимой переменной в точке x_1, также $x = x_2$, $y = y_2$ – вторая граничная точка, задается в той же форме, что и первая точка.

Пример 3. Найти решение уравнения $xy' - 2y = x$, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$.

Решение в MAXIMA.

Введем уравнение и решим его.

```
(%i1) eg:x*'diff(y,x)-2*y=x;
```

(%o1) $x\left(\frac{d}{d\,x}y\right)-2\,y=x$

```
(%i2) ode2(eg,y,x);
```

(%o2) $y=\left(\%c-\frac{1}{x}\right)x^2$

Далее применяя функцию *ic1*, и задавая начальные условия найдем частное решение.

```
(%i3) ic1(%,x=1,y=1);
```

(%o3) $y=2\,x^2-x$

Ответ. $y=2x^2-x$.

Пример 4. Найти решение дифференциального уравнения $y''+xy=0$, удовлетворяющее условию $y'=1$, $y=1$ при $x=0$.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) eg:'diff(y,x,2)+y=cos(x);
```

(%o1) $\frac{d^2}{d\,x^2}y+y=\cos(x)$

```
(%i2) ego:ode2(eg,y,x);
```

(%o2) $y=\frac{x\sin(x)+\cos(x)}{2}+\%k1\sin(x)+\%k2\cos(x)$

```
(%i3) ic2(ego,x=0,y=1,'diff(y,x)=1);
```

(%o3) $y=\frac{x\sin(x)+\cos(x)}{2}+\sin(x)+\frac{\cos(x)}{2}$

Ответ. $y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{2}+\sin x+\dfrac{\cos x}{2}$.

Пример 5. Найти решение уравнения $y''-4y'+4y=\sin x-e^x$, удовлетворяющее граничным условиям: $y=1$ при $x=0$ и $y=0$ при $x=0$.

Решение в MAXIMA.

Запишем уравнение, обозначив его g1.

```
(%i1) g1:'diff(y,x,2)-4*'diff(y,x)+4*y=sin(x)-%e^x;
```

(%o1) $\frac{d^2}{d\,x^2}y-4\left(\frac{d}{d\,x}y\right)+4\,y=\sin(x)-\%e^x$

Найдем его общее решение.

```
(%i2) ode2(g1,y,x);
```

(%o2) $y=\frac{3\sin(x)+4\cos(x)-25\,\%e^x}{25}+(\%k2\,x+\%k1)\,\%e^{2\,x}$

Используя функцию bc2, получим искомое решение.

```
(%i3) bc2(%,x=0,y=1,x=1,y=0);
```

(%o3) $y=\frac{3\sin(x)+4\cos(x)-25\,\%e^x}{25}+\left(\frac{46}{25}-\frac{\%e^{-2}(3\sin(1)+4\cos(1)+46\,\%e^2-25\,\%e)\,x}{25}\right)\%e^{2\,x}$

Ответ. $y=\frac{3\sin x+4\cos x-25e^x}{25}+$

$$+\left(\frac{46}{25}-\frac{e^{-2}\left(3\sin 1+\cos 1+46e^2-25e\right)x}{25}\right)e^{2x}.$$

Для нахождения частного решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка, а также для нахождения частного решения систем линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядка в MAXIMA имеется еще одна функция: *desolve*. Синтаксис её следующий:

desolve(egn,y(x))

или *desolve([egn_1,…,egn_n],[x(t)_1,…,x(t)_n])*.

Эта функция имеет два аргумента, первый – уравнение или список уравнений, второй – одна переменная или список переменных, относительно

которых решается задача. Следует иметь в виду, что переменная (функция, относительно которой решается уравнение) и ее производная должны быть записаны в виде *y(x)* и *'diff(y(x),x)* соответственно и прежде чем решать уравнение или систему уравнений, необходимо функцией *atvalue* задать начальные условия. *(atvalue(y(x),x=0,2)* задает условие, что $y(0)=2$).

Пример 6. Решить уравнение $y'-2y=e^{-x}$ при условии, что $y(0)=-1$.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) atvalue(y(x),x=0,-1);desolve('diff(y(x),x)-2*y(x)=%e^-x,y(x));
(%o1) -1
```

(%o2) $y(x)=-\frac{2\,\%e^{2x}}{3}-\frac{\%e^{-x}}{3}$

Команда (%i1) содержит две функции, первая *atvalue* – задает начальное условие $y(0)=-1$) и вторая *desolve* – находит частное решение уравнения $y'-2y=e^{-x}$.

Ответ. $y=-\dfrac{2e^{2x}+e^{-x}}{3}$.

Пример 7. Решить уравнение второго порядка $y''-2y'=x^2-x$ при $y(0)=-1$ и $y'(0)=1$.

Решение в MAXIMA.

Задаем начальные условия (%i1) и решаем уравнение (%i3)

```
(%i1) atvalue(y(x),x=0,-1);atvalue('diff(y(x),x),x=0,1);
(%o1) -1
(%o2) 1
(%i3) desolve('diff(y(x),x,2)-2*'diff(y(x),x)=x^2-x,y(x));
```

$$(\%o3)\quad y(x)=\frac{\%e^{2x}}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{3}{2}$$

Ответ. $y=\dfrac{e^{2x}}{2}-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{3}{2}$.

В MAXIMA имеется функция *contrib_ode(eng,y,x)*, которая позволяет решать нелинейные дифференциальные уравнения первого и второго порядка. Подключение ее производится командой *load(contrib_ode)* и она содержит три аргумента: *eng* – уравнение, которое нужно решить, *y* – имя зависимой переменной – искомой функции, *x* – имя независимой переменной – аргумента функции. Если система может решить уравнение, то она представляет решение или список решений в одном из видов: в явном, неявном или в параметрическом.

Пример 8. Найти решение уравнение $y'^2-(y+x)^2=0$.

Решение в MAXIMA.

Подключаем пакет *contrib_ode* и решаем уравнение.

```
(%i1) load(contrib_ode);
define: warning: redefining the built-in function lcm
(%o1)
C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.1-G/share/maxima/5.25.1/share/contrib/diffequations/contrib_ode.ma
```

```
(%i2) contrib_ode('diff(y,x)^2-(y+x)^2=0,y,x);
```

(%t2) $\left(\frac{d}{dx}y\right)^2-(y+x)^2=0$

first order equation not linear in y'

(%o2) $[y=\left((-x-1)\,\%e^{-x}+\%c\right)\%e^{x},\ y=\%e^{-x}\left(\%c-(x-1)\,\%e^{x}\right)]$.

Уравнение имеет два решения, которые записаны в явном виде.

Ответ. $y=\left(\left(-x-1\right)e^{-x}+C\right)e^{x}$,

$y=e^{-x}\left(C-\left(x-1\right)e^{x}\right)$.

Пример 9. Решить уравнение $y'^2+xy'+y=0$.

Решение в MAXIMA.

```
(%i3) contrib_ode('diff(y,x)^2+'diff(y,x)*x+y=0,y,x);
```

(%t3) $\left(\frac{d}{dx}y\right)^2+x\left(\frac{d}{dx}y\right)+y=0$

first order equation not linear in y'

(%o3) $\left[\left[x=\%e^{-\frac{\log(\%t)}{2}}\left(\%c-\frac{2\,\%e^{\frac{3\log(\%t)}{2}}}{3}\right),\ y=-\%t\,x-\%t^2\right]\right]$

Получено решение, представленное в параметрическом виде.

Пример 10. Найти решение уравнения $y'^2-xy^2=0$.

Решение в MAXIMA.

```
(%i4) contrib_ode('diff(y,x)^2-x*y^2=0,y,x);
```

(%t4) $\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2 - x\,y^2 = 0$

first order equation not linear in y'

(%o4) $\left[-\log\left(\%e^{\frac{2\,x^{3/2}}{3}}\,y - \%c\right) = \%c\right]$

Найден общий интеграл данного уравнения.

Лекция 2

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция $f(x, y)$ называется **однородной** функцией степени m, если при любом t имеет место тождество $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$.

Уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ *называется* ***однородным****, если функции* $P(x, y)$ *и* $Q(x, y)$ *являются однородными функциями одного порядка.*

Уравнение $y' = f(x, y)$ однородное, если функция $f(x, y)$ – однородная функция нулевого порядка, то есть $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Однородное уравнение первого порядка сводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи замены искомой функции $y = u\,x$. Покажем это.

Пусть $y' = f(x, y)$. Поскольку $y' = u'\,x + u$, решаемое уравнение принимает вид $u'\,x + u = f(x, ux)$. В силу однородности функции $f(x, ux) = f(1, u)$. В результате получаем:

$$u'\,x = f(1, u) - u,$$

$$\frac{du}{dx}x = f(1,u) - u,$$

$$\frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{f(1,u)-u} = \ln|x| + \ln C,\ C > 0.$$

Вычисляя интеграл в левой части уравнения и возвращаясь к функции y, получаем общее решение уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $y' = \dfrac{x+2y}{x}$.

Решение.

Проверим, что уравнение является однородным:

$$y' = \frac{tx+2ty}{tx} = \frac{t(x+2y)}{tx}.$$

Заменим $y = ux$, $y' = u'x + u$, тогда

$$u'x + u = \frac{x+2ux}{x},$$

$$u'x = 1 + 2u - u,$$

$$\frac{du}{dx}x = 1 + u.$$

Для разделения переменных необходимо поделить обе части уравнения на x и $u+1$, следовательно, можно считать $x \neq 0$ и $u+1 \neq 0$, при этом могут быть потеряны некоторые решения. В данном примере $x = 0$ не является решением уравнения, а

$u+1=0$ есть решение $(u=-1, du=0)$, то есть может быть потеряно решение уравнения $\frac{y}{x}=-1 \Rightarrow y=-x$. Продолжаем решение уравнения, разделяя переменные:

$$\frac{du}{u+1}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{u+1}=\int\frac{dx}{x}+C_1,$$

$$\ln|u+1|=\ln|x|+\ln C, \text{ где } C=e^{C_1},$$

$$u+1=Cx,$$

$$\frac{y}{x}+1=Cx.$$

Ответ: $y=Cx^2-x$, причем «потерянное» решение входит в общее решение уравнения (при $C=0$).

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) 'diff(y,x)=(x+2*y)/x;
```

(%o1) $\frac{d}{dx}y=\frac{2y+x}{x}$

```
(%i2) ode2(%,y,x);
```

(%o2) $y=\left(\%c-\frac{1}{x}\right)x^2$

```
(%i3) ratsimp(%);
```

(%o3) $y=\%c\,x^2-x$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (1)$$

называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Особенность ДУ: искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, нет произведения этих функций.

Решение уравнения (1) ищется в виде $y = uv$, то есть вместо одной искомой функции $y(x)$ вводим две функции $u(x)$ и $v(x)$. Ясно, что $y' = u'v + uv'$. Подставляем эти соотношения в уравнение

$$u'v + \underline{uv'} + \underline{p(x)uv} = q(x)$$

и группируем подчеркнутые члены уравнения (можно группировать и первый с третьим члены)

$$u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x).$$

Распорядимся функцией v так, чтобы выражение в круглых скобках равнялось нулю, тогда вместо одного уравнения получаем два:

$$v' + p(x)v = 0, \;\; u'v = q(x),$$

одно относительно v и второе относительно u. Поскольку в ходе решения каждого уравнения появляется постоянная интегрирования, их оказывается две. Но общее решение уравнения (1)

должно содержать одну произвольную постоянную, поэтому определяется любое частное решение первого уравнения (без постоянной интегрирования), а затем находится общее решение второго уравнения. Можно поступить по-другому – определить общее решение первого уравнения и частное решение второго, но это не удобно, поскольку при определении v приходится интегрировать произвольную постоянную, и интегралы могут принимать значения, зависящие от знака этой произвольной постоянной, это приходится учитывать при получении окончательного результата.

Итак,

$$v' + p(x)v = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln|v| = -\int p(x)dx,$$

откуда следует $v = e^{-\int p(x)dx}$. Второе уравнение решаем с учетом найденной функции u:

$$u'v = q(x)$$

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\frac{du}{dx}e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$du = q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

Тогда $u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$.

Ответ. $y = uv = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}$.

Пример 1. Определить общее решение уравнения $y' - y\sin x = \sin x\cos x$.

Решение.

Пусть $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Очевидно

$u'v + uv' - uv\sin x = \sin x\cos x \quad \Rightarrow$

$(u' - u\sin x)v + uv' = \sin x\cos x$, тогда

1) $u' - u\sin x = 0$, 2) $uv' = \sin x\cos x$.

Решаем первое уравнение

$$u' - u\sin x = 0,$$

$$\frac{du}{dx} = u\sin x,$$

$$\frac{du}{u} = \sin x dx,$$

$$\ln|u| = -\cos x.$$

Значит, $u = e^{-\cos x}$ – частное решение первого уравнения.

Теперь второе уравнение запишется следующим образом:

$$v'e^{-\cos x} = \sin x\cos x \;\Rightarrow\; v' = \sin x\cos x e^{\cos x}.$$

Отсюда имеем

$$v=\int \sin x\cos x e^{\cos x}dx=\left\{\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin x dx=dt\end{matrix}\right\}=-\int te^{t}dt=$$

$$=-\left\{\begin{matrix}u=t\,, & dv=e^{t}dt\\ du=dt, v=e^{t} & \end{matrix}\right\}=$$

$$=-te^{t}+\int e^{t}dt=-te^{t}+e^{t}+C=e^{\cos x}\left(1-\cos x\right)+C.$$

Очевидно $y=e^{-\cos x}\left[e^{\cos x}\left(1-\cos x\right)+C\right]$.

Проверка.

$$y'-y\sin x=\sin x+Ce^{-\cos x}\sin x-\sin x+$$

$$+\cos x\sin x-Ce^{-\cos x}\sin x\equiv\sin x\cos x.$$

Уравнение выполняется тождественно.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) 'diff(y,x)-y*sin(x)=sin(x)*cos(x);
```

(%o1) $\frac{d}{dx}y-\sin(x)y=\cos(x)\sin(x)$

```
(%i2) ode2(%,y,x);
```

(%o2) $y=\%e^{-\cos(x)}\left(\%c-\%e^{\cos(x)}(\cos(x)-1)\right)$

Ответ. $y=1-\cos x+Ce^{-\cos x}$.

Пример 2. Решить задачу Коши

$$\left(1+x^{2}\right)y'-2xy=\left(1+x^{2}\right)^{2},\ y\left(0\right)=2.$$

Решение.

Определим вначале общее решение этого уравнения, затем из начального условия найдем значение постоянной интегрирования. Отметим, что уравнение можно привести к виду (1)

делением на $\left(1+x^2\right)$, но это делать не обязательно. Итак, $y=uv$, $y'=u'v+uv'$, тогда

$$\left(1+x^2\right)\left(u'v+uv'\right)-2xuv=\left(1+x^2\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left[\left(1+x^2\right)u'-2xu\right]v+\left(1+x^2\right)uv'=\left(1+x^2\right)^2.$$

Решаем первое уравнение

$$\left(1+x^2\right)u'-2xu=0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(1+x^2\right)\frac{du}{dx}=2xu \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u}=\frac{2xdx}{\left(1+x^2\right)} \quad \Rightarrow$$

$$\ln|u|=\ln\left(1+x^2\right)$$

Очевидно, $u=\left(1+x^2\right)$. Далее решаем второе уравнение $\left(1+x^2\right)uv'=\left(1+x^2\right)^2$, из которого следует $v'=1$, $v=x+C$. Общее решение уравнения принимает вид $y=\left(1+x^2\right)\left(x+C\right)$. Выполним начальное условие $y\left(0\right)=C=2$.

Проверка.

$$\left(1+x^2\right)y'-2xy=2x\left(x+2\right)\left(1+x^2\right)+\left(1+x^2\right)^2-$$

$$-2x\left(1+x^2\right)\left(x+2\right)\equiv\left(1+x^2\right)^2.$$

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) eq:(1+x^2)*'diff(y,x)-2*x*y=(1+x^2)^2;
```

(%o1) $(x^2+1)\left(\frac{d}{dx}y\right)-2\,x\,y=(x^2+1)^2$

```
(%i2) ode2(eq,y,x);
```

(%o2) $y=(x+\%c)(x^2+1)$

```
(%i3) ic1(%, x=0, y=2);
```

(%o3) $y=x^3+2\,x^2+x+2$

Ответ. $y=\left(1+x^2\right)\left(x+2\right)$.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение $y'+2xy=2x$.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) 'diff(y,x)+2*x*y=2*x;
```

(%o1) $\frac{d}{dx}y+2\,x\,y=2\,x$

```
(%i2) ode2(%,y,x);
```

(%o2) $y=\%e^{-x^2}\left(\%e^{x^2}+\%c\right)$

```
(%i3) expand(%);
```

(%o3) $y=\%c\,\%e^{-x^2}+1$

Ответ. $y=Ce^{-x^2}+1$.

Лекция 3

Дифференциальные уравнения второго порядка

Общий вид уравнения второго порядка

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0. \qquad (1)$$

Вид, разрешенный относительно старшей производной:

$$y'' = f\left(x, y, y'\right). \qquad (2)$$

Решением дифференциального уравнения (2) *называется всякая функция* $y = g\left(x\right)$*, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.*

Общим решением дифференциального уравнения называют функцию

$$y = g\left(x, C_1, C_2\right), \qquad (3)$$

обращающую уравнения (1) и (2) в тождества, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Всякое решение $y = g\left(x, C_1^0, C_2^0\right)$ *уравнения (2), получающееся из общего решения (3) при конкретных значениях* $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$, *называется* ***частным решением****.*

Решения дифференциального уравнения (2), записанные в виде $\Phi\left(x, y, C_1, C_2\right) = 0$,

$\Phi\left(x, y, C_1^0, C_2^0\right) = 0$, *называют* ***общим*** *и* ***частным интегралом*** *соответственно.*

График всякого решения дифференциального уравнения второго порядка называется интегральной кривой. Общее решение дифференциального уравнения (2) – множество интегральных кривых; частное решение – одна интегральная кривая этого множества, проходящая через точку $\left(x_0, y_0\right)$ и $y'\left(x_0\right) = y'$.

Задача нахождения дифференциального уравнения (2), удовлетворяющего начальным условиям

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \qquad (4)$$

называется **задачей Коши** для уравнения второго порядка.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши) *(без доказательства). Решение задачи Коши (2), (4) существует и единственно в некоторой окрестности R точки* $\left(x_0, y_0, y'_0\right)$, *если функция* $f\left(x, y, y'\right)$ *и ее частные производные* f'_y *и* $f'_{y'}$ *непрерывны.*

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \qquad (1)$$

Теорема. *Если функции* $y_1 = y_1(x)$ *и* $y_2 = y_2(x)$ *являются частными решениями уравнения (1), то решением является также функция*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (2)$$

где C_1, C_2 *– произвольные постоянные.*

Доказательство. Подставим функцию $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ и ее производную в левую часть ЛОДУ (1):

$$\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right)'' + a_1(x)\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right)' +$$

$$+a_2(x)\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) =$$

$$= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + a_1(x)\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) +$$

$$+a_2(x)\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) =$$

$$= C_1\left(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right) +$$

$$+C_2\left(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right) =$$

$$= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0,$$

Так как функции y_1 и y_2 – решения уравнения (1) и, значит, выражения в скобках тождественно равны нулю. Таким образом, функция $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – решение.

Следствие. Если y_1 и y_2 – решения уравнения (1), то решениями его будут также функции $y = y_1 + y_2$ и $y = Cy_1$.

Функции $y_1 = y_1(x)$ *и* $y_2 = y_2(x)$ *называются* ***линейно независимыми*** *на интервале* $(a;b)$*, если равенство*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0, \qquad (3)$$

для них $x \in (a,b)$*, где* $\alpha_1, \alpha_2 \in R$*, выполняется тогда, когда* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Если хотя бы одно из чисел α_1 *или* α_2 *отлично от нуля и выполняется (3), то* y_1 *и* y_2 *называются* ***линейно зависимыми*** *на* $(a;b)$.

Средством изучения линейной зависимости системы функций является **определитель Вронского** или **вронскиан** (Ю. Вронский – польский математик). Для двух дифференцируемых функций $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ вронскиан имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Теорема. *Если дифференцируемые функции* $y_1 = y_1(x)$ *и* $y_2 = y_2(x)$ *– линейно зависимы на* $(a;b)$*, то определитель Вронского на этом интервале тождественно равен нулю.*

Доказательство. Так как функции y_1 и y_2 линейно зависимы, то в равенстве (3) значение α_1 или α_2 отлично от нуля. Пусть $\alpha_1 \neq 0$, тогда $y_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2$; поэтому для $\forall x \in (a;b)$

$$W(x)=\begin{vmatrix} -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2 & y_2 \\ -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2' & y_2' \end{vmatrix}=0.$$

Теорема *(без доказательства). Если функции* $y_1=y_1(x)$ *и* $y_2=y_2(x)$ *– линейно независимые решения уравнения (1) на* $(a;b)$*, то определитель Вронского на этом интервале нигде не обращается в нуль.*

Следствие из теорем. *Вронскиан не равен нулю ни в одной точке* $(a;b)$ *тогда, когда частные решения линейно независимы.*

По определению, совокупность любых двух линейно независимых на $(a;b)$ *частных решений* $y_1=y_1(x)$ *и* $y_2=y_2(x)$ *линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка определяет* ***фундаментальную систему решений*** *этого уравнения: любое произвольное решение может быть получено как комбинация* $y=\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)$.

Теорема *(структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка). Если два частных решения* $y_1=y_1(x)$ *и* $y_2=y_2(x)$ *линейного однородного дифференциального уравнения (1) образуют на* $(a;b)$ *фундаментальную систему, то*

общим решением этого уравнения является функция $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, *где* C_1, C_2 *– произвольные постоянные.*

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дано линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0, \qquad (4)$$

где p, q постоянны.

Ищем частные решения уравнения в виде $y = e^{kx}$, где k – некоторое число.

Найдем $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Подставим в уравнение (4):

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

т.е.

$$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0 \text{ или}$$

$$k^2 + pk + q = 0 \ (e^{kx} \neq 0) \qquad (5)$$

Уравнение (5) называется ***характеристическим уравнением*** *дифференциального уравнения (4).* При решении характеристического уравнения (5) возможны 3 случая:

1) Корни k_1 и k_2 действительные и различные:

$k_1 \neq k_2 \ \left(D = p^2 - 4q > 0\right)$.

Тогда $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

2) Корни k_1 и k_2 действительные и равные:

$$k_1 = k_2 \left(D = p^2 - 4q = 0,\ k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} \right).$$

Тогда $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$.

3) Корни k_1 и k_2 комплексные:

$k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$

$$\left(D = p^2 - 4q < 0,\ \alpha = -\frac{p}{2},\ \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2} \right),$$

i – мнимая единица.

Тогда $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$.

Примеры. Решить уравнения:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$.

$$k^2 - 5k + 6 = 0, \quad D = 25 - 4 \cdot 6 = 1 > 0, \quad k_1 = \frac{5+1}{2} = 3,$$

$$k_2 = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Случай 1): $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) ode2('diff(y,x,2)-5*'diff(y,x)+6*y, y, x);
(%o1) y=%k1 %e^3 x+%k2 %e^2 x
```

Ответ. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$.

2) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

$k^2-4k+4=0,\ D=16-4\cdot 4=0,\ k_1=k_2=\dfrac{4}{2}=2.$

Случай 2): $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$.

Решение в MAXIMA.

```
(%i2) ode2('diff(y,x,2)-4*'diff(y,x)+4*y, y, x);
(%o2) y=(%k2 x+%k1)%e^(2 x)
(%i3) expand(%);
(%o3) y=%k2 x %e^(2 x)+%k1 %e^(2 x)
```

Ответ. $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$.

3) $y''-6y'+13y=0$.

$k^2-6k+13=0,\ D=36-4\cdot 13=36-52=-16<0,$

$k_1=\dfrac{6+4i}{2}=3+2i,\ k_2=3-2i.$

Случай 3): $y=e^{3x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$.

Решение в MAXIMA.

```
(%i4) ode2('diff(y,x,2)-6*'diff(y,x)+13*y, y, x);
(%o4) y=%e^(3 x)(%k1 sin(2 x)+%k2 cos(2 x))
```

Ответ. $y=e^{3x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$.

4) $y''+16y=0$.

$k^2+16=0,\ k^2=-16,\ k_1=4i,\ k_2=-4i.$

Случай 3):

$y=e^{0\cdot x}\left(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x\right)=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x.$

Решение в MAXIMA.

```
(%i5) ode2('diff(y,x,2)+16*y, y, x);
(%o5) y=%k1 sin(4 x)+%k2 cos(4 x)
```

Ответ. $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x$.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейное неоднородное уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – заданные, непрерывные на $(a;b)$ функции.

Уравнение $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ *называют соответствующим ему* ***однородным уравнением***.

Рассмотрим ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x),$$

где p и q – некоторые числа.

Общее решение уравнения $y_{\text{общ.}} = y_{\text{одн.}} + y_{\text{част.}}$, где $y_{\text{одн.}}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$, $y_{\text{част.}}$ – частное решение уравнения.

I. Если $f(x) = ae^{kx}$, где a, k – постоянные, то

1) $y_{\text{част.}} = Ae^{kx}$, когда k не является корнем характеристического уравнения;

2) $y_{\text{част.}} = Axe^{kx}$, когда k – простой корень характеристического уравнения;

3) $y_{\text{част.}} = Ax^2e^{kx}$, когда k – кратный корень.

II. Если $f(x)=a\cos kx+b\sin kx$, где a,b,k – постоянные, то

1) $y_{\text{част.}}=A\cos kx+B\sin kx$, когда $p^2+(q-k^2)^2\neq 0$;

2) $y_{\text{част.}}=x(A\cos kx+B\sin kx)$, когда $p=0, q=k^2$.

III. Если $f(x)=P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, то

1) $y_{\text{част.}}=Q_n(x)$, когда $q\neq 0$;

2) $y_{\text{част.}}=xQ_n(x)$, когда $q=0$, $p\neq 0$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n.

Примеры. Решить дифференциальные уравнения:

1) $y''-2y'+y=10e^x$.

Решение.

$y_{\text{общ.}}=y_{\text{одн.}}+y_{\text{част.}}$,

$y''-2y'+y=0$,

$k^2-2k+1=0$,

$(k-1)^2=0$,

$k_{1,2}=1 \Rightarrow y_{\text{одн.}}=C_1e^x+C_2xe^x$,

$y_{\text{част.}}=Ax^2e^x$,

$y'_{\text{част.}}=A(2xe^x+x^2e^x)$,

$y''_{\text{част.}}=A(2(e^x+xe^x)+2xe^x+x^2e^x)=2Ae^x+\underline{2Axe^x}+$

$+\underline{2Axe^x}+Ax^2e^x=2Ae^x+4Axe^x+Ax^2e^x$,

$$2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x - 2(2Axe^x + Ax^2e^x) + Ax^2e^x = 10e^x,$$
$$2Ae^x = 10e^x,$$
$$2A = 10,$$
$$A = 5,$$
$$y_{\text{част.}} = 5x^2e^x,$$
$$y_{\text{общ.}} = C_1e^x + C_2xe^x + 5x^2e^x.$$

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) ode2('diff(y,x,2)-2*'diff(y,x)+y=10*%e^x, y, x);
(%o1) y=5 x^2 %e^x+(%k2 x+%k1)%e^x
(%i2) expand(%);
(%o2) y=5 x^2 %e^x+%k2 x %e^x+%k1 %e^x
```

Ответ. $y_{\text{общ.}} = C_1e^x + C_2xe^x + 5x^2e^x.$

2) $y'' - 4y' + 13y = 40\cos 3x.$

Решение.

$$y_{\text{общ.}} = y_{\text{одн.}} + y_{\text{част.}},$$
$$y'' - 4y' + 13y = 0,$$
$$k^2 - 4k + 13 = 0,\ D = 16 - 4\cdot 13 = 16 - 52 = -36 < 0,$$
$$k_1 = \frac{4+6i}{2} = 2 + 3i,\ k_2 = 2 - 3i \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 3,$$
$$y_{\text{одн.}} = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x),$$
$$p^2 + (q - k^2)^2 = 16 + (13-9)^2 = 32 \neq 0,$$
$$y_{\text{част.}} = A\cos 3x + B\sin 3x,$$
$$y'_{\text{част.}} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$
$$y''_{\text{част.}} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x,$$
$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 4(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) +$$
$$+13(A\cos 3x + B\sin 3x) = 40\cos 3x,$$

$$\underline{-9A\cos 3x}\underline{\underline{-9B\sin 3x}}\underline{\underline{+12A\sin 3x}}\underline{-12B\cos 3x}+$$

$$\underline{+13A\cos 3x}\underline{\underline{+13B\sin 3x}}=40\cos 3x,$$

$$(4A-12B)\cos 3x+(4B+12A)\sin 3x=40\cos 3x,$$

$$\begin{cases}4A-12B=40,\\ 4B+12A=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1,\\ B=-3.\end{cases}$$

$$y_{\text{част.}}=\cos 3x-3\sin 3x,$$

$$y_{\text{общ.}}=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\cos 3x-3\sin 3x.$$

Решение в MAXIMA.

```
(%i3) ode2('diff(y,x,2)-4*'diff(y,x)+13*y=40*cos(3*x), y, x);
(%o3) y=%e^2x(%k1 sin(3 x)+%k2 cos(3 x))-3 sin(3 x)+cos(3 x)
```

Ответ.

$$y_{\text{общ.}}=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\cos 3x-3\sin 3x.$$

3) $y''+3y'=9x.$

$$y_{\text{общ.}}=y_{\text{одн.}}+y_{\text{част.}},$$

$$y''+3y'=0,$$

$$k^2+3k=0\Rightarrow k(k+3)=0\Rightarrow k_1=0,\ k_2=-3,$$

$$y_{\text{одн.}}=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{-3x}=C_1+C_2e^{-3x},$$

$$q=0,\ p=3\neq 0,$$

$$y_{\text{част.}}=x(Ax+B)=Ax^2+Bx,$$

$$y'_{\text{част.}}=2Ax+B,$$

$$y''_{\text{част.}}=2A,$$

$$2A+3(2Ax+B)=9x,$$

$$6Ax+2A+3B=9x,$$

$$\begin{cases} 6A = 9, \\ 2A + 3B = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{3}{2}, \\ B = -1. \end{cases}$$

$$y_{\text{част.}} = \frac{3}{2}x^2 - x,$$

$$y_{\text{общ.}} = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x.$$

Решение в MAXIMA.

```
(%i4) ode2('diff(y,x,2)+3*'diff(y,x)=9*x, y, x);
```

(%o4) $y = \%k2\ \%e^{-3x} + \dfrac{9x^2 - 6x + 2}{6} + \%k1$

Ответ. $y_{\text{общ.}} = C_1 + C_2 e^{-3x} + \dfrac{3}{2}x^2 - x.$

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ И ПОЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Строить траектории и поле направлений дифференциального уравнения первого порядка и автономных систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка позволяет функция *plotdf*, которая подключается командой *load(plotdf)*. Эта функция установки модуля *Openmath*, который входит в пакет wxMAXIMA. Для построения поля направлений уравнение и система должны быть записаны в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases}$$

соответственно.

Синтаксис функции

plotdf(f(x,y),…options…);

plotdf([F(x,y),G(x,y),…options…],[x,y]).

Здесь *f(x,); F(x,y)* и *G(x,y)* – выражения содержащие *x* и *y*, а *options* – дополнительные опции,

которые можно брать в меню или набирать вручную.

Пример 1. Построить интегральную кривую уравнения $\dfrac{dy}{dt} = \cos x + y$, проходящую через точку $(2, -1)$ и поле направлений (Рис. 1).

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) load(plotdf);plotdf(cos(x)+y,[trajectory_at,2,-1]);
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.25.1/share/dynamics/plotdf.lisp
(%o2) Structure [EXTERNAL-PROCESS]
```

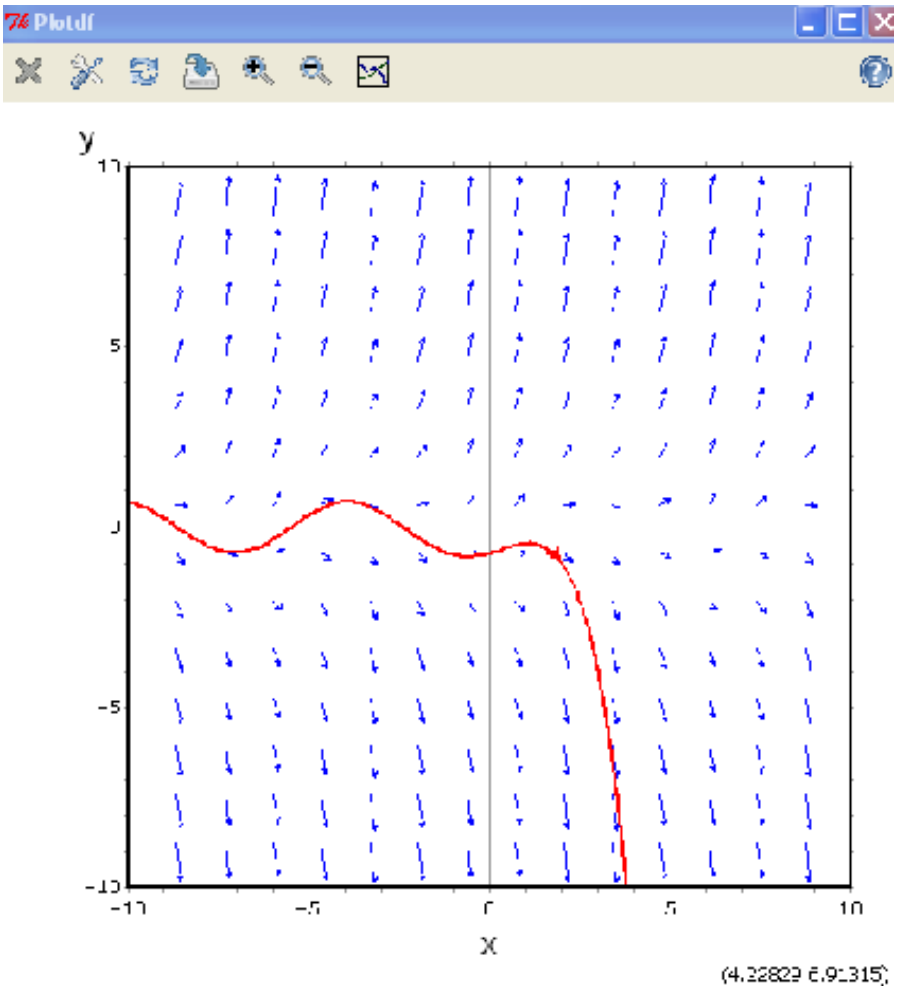


Рис. 1

Пример 2. Построить поле направлений системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y. \end{cases}$$

Решение в MAXIMA.

После ввода команды

```
(%i8) load(plotdf);plotdf([2*x-4*y,5*x-6*y]);
(%o8) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.25.1/share/dynamics/plotdf.lisp
 (%o9) Structure [EXTERNAL-PROCESS]
```

в окне появится изображение поля направлений системы (Рис. 2).

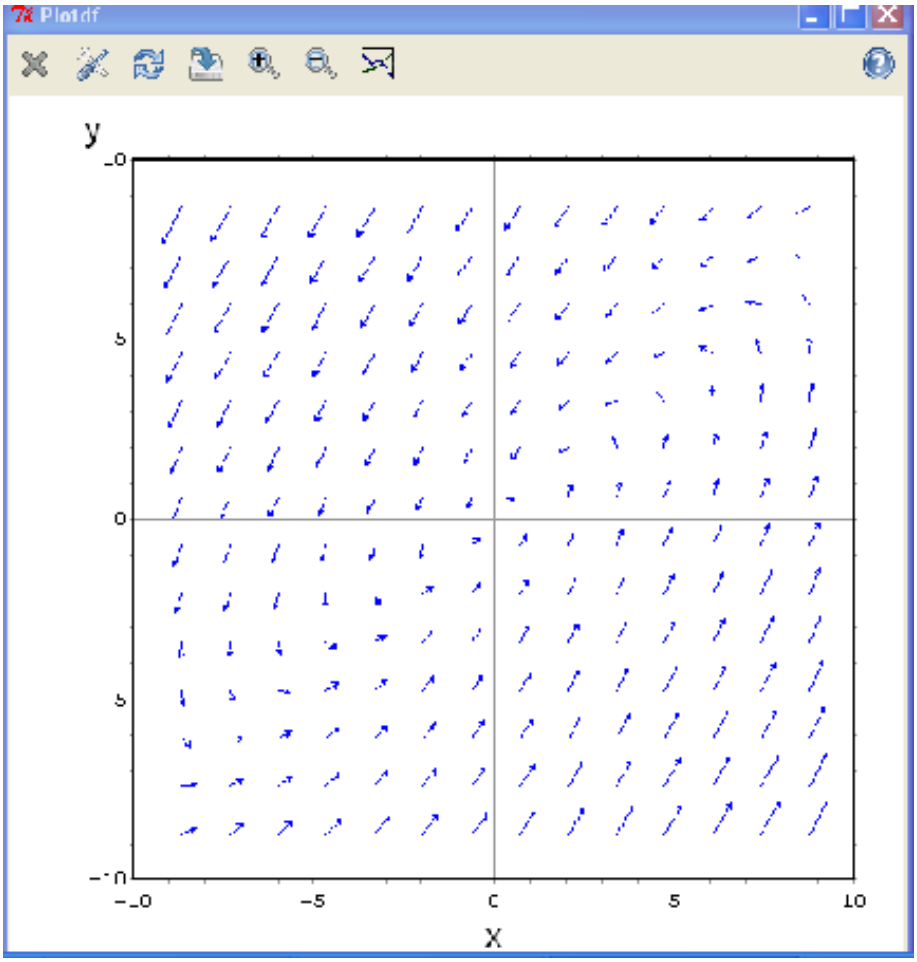


Рис. 2

Для построения траекторий решения, проходящих через заданные точки, нужно в опциях (как в примере 1) указать координаты точки или на изображении поля направлений подвести указатель к выбранной точке и щелкнуть левой кнопкой мыши. На приведенном ниже рисунке изображены несколько траекторий, проходящих через точки, отмеченные на линиях стрелками (Рис. 3).

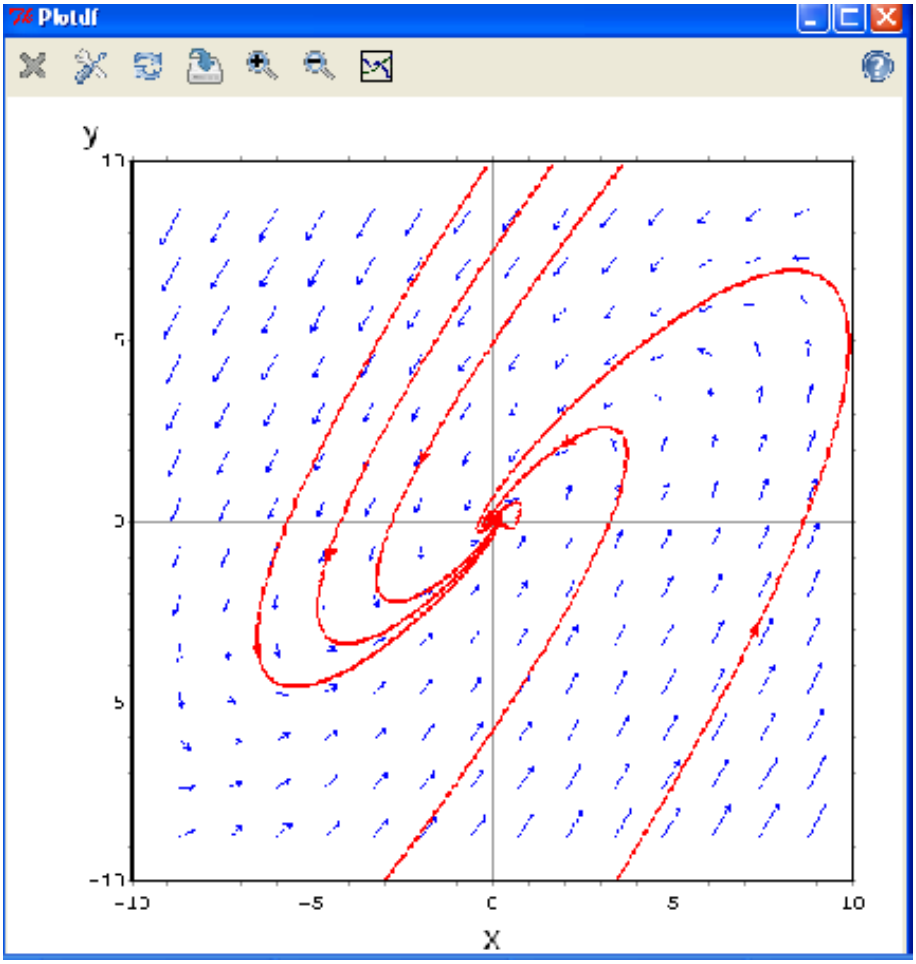


Рис. 3

Лекция 4

Несобственные интегралы

Несобственные интегралы бывают двух типов (классов): интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций.

Интегралы с бесконечными пределами

Таких интегралов – три вида, и вводятся они следующим образом.

I. $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$. Этот интеграл называется интегралом с бесконечным верхним пределом, $\int\limits_a^b f(x)dx$ собственным, $\forall b > a$. Его называют сходящимся, если предел существует и имеет конечное значение. В противном случае он – расходящийся.

II. $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^{b} f(x)dx$. Этот интеграл с бесконечным нижним пределом является сходящийся, $\int\limits_{-a}^{b} f(x)dx$ собственным, $\forall a > -b$,

если предел существует и конечен, и расходящийся в противном случае.

III. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$. Он сходится, если сходится каждый из интегралов, стоящих в правой части. Если хотя бы один из них расходящийся, расходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ при различных показателях степени p.

Пусть $p = 1$, тогда $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} =$ $= \lim\limits_{b\to\infty} [\ln b - \ln 1] = \infty$. Интеграл расходящийся.

Пусть $p \neq 1$, тогда

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_{1}^{b} = \frac{1}{(1-p)} \lim_{b\to\infty} \left[b^{1-p} - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{(1-p)} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right].$$

Если $p > 1$, то при $b \to \infty$ дробь $\frac{1}{b^{p-1}}$ стремится к нулю и интеграл равен $\frac{1}{p-1}$. Если $p < 1$, то

выражение b^{1-p} стремится к ∞, и интеграл – расходящийся. Итак,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, \text{ если } p > 1, \\ \text{расходится при } p \le 1. \end{cases}$$

Примеры:

1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \left[\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1\right] =$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} e^x dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{2} e^x dx = \lim_{a\to\infty} \left[e^2 - e^{-a}\right] =$

$\displaystyle = \lim_{a\to\infty} \left[e^2 - \frac{1}{e^a}\right] = e^2.$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+1} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+1}.$

Вычислим каждый из интегралов:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg} 1\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left[\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}(-a+1)\right] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Очевидно, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \pi$.

Интегралы от неотрицательных функций

Лемма. *Интеграл* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *от неотрицательной функции сходится, если интеграл* $\int_a^{z} f(x)dx$ *при возрастании* z *остается ограниченным, то есть существует* $L > 0$ такое что $\Phi(z) = \int_a^{z} f(x)dx \le L$ *(L – const) при любом* z.

Первая *теорема сравнения. Если* $0 \le f(x) \le g(x)$ *при* $x \in [a, \infty)$ *и*

а) если $\int_a^{\infty} g(x)dx$ *сходится, то* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *также сходится,*

b) если $\int_a^\infty f(x)dx$ *расходится, то* $\int_a^\infty g(x)dx$ *также расходится.*

Следствие. *Если при* $x \in [a, \infty)$ *функции связаны неравенством* $0 \le f(x) \le g(x)$, *то из сходимости интеграла* $\int_a^\infty g(x)dx$ *при* $b > a$ *следует сходимость интеграла* $\int_b^\infty f(x)dx$, *из расходимости интеграла* $\int_a^\infty f(x)dx$ *следует расходимость интеграла* $\int_b^\infty g(x)dx$.

Вторая *теорема сравнения. Если при* $x \in [a, \infty)$ *функции* $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ *ограничены и* $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, *причем* $0 < K < \infty$, *интегралы* $\int_a^\infty f(x)dx$ *и* $\int_a^\infty g(x)dx$ *ведут себя одинаково, то есть либо оба сходятся, либо оба расходятся. (Теорема дается в несколько упрощенной формулировке).*

Эти две теоремы очень удобны для использования, если нет необходимости вычислять значение несобственного интеграла, а

достаточно знать только, сходится он, или расходится.

Пример 1. Доказать сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+4x+5}$. Поскольку нет необходимости вычислять этот интеграл, воспользуемся первой теоремой сравнения интегралов от положительных функций. Сравним интегралы $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+4x+5}$ и $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$. Очевидно, на интервале $(1,\infty)$ имеет место неравенство $\frac{1}{x^2+4x+5} < \frac{1}{x^2}$, а интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ – сходящийся, что следует из выше рассмотренного интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p}$. На основании теоремы 1 интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+4x+5}$ – сходящийся.

Пример 2. Установить, сходится ли интеграл $\int\limits_4^\infty \frac{dx}{x^2-3x+2}$, если сходится – вычислить. Нетрудно заметить, что в указанных пределах $\frac{1}{x^2-3x+2} \geq 0$,

следовательно, можно попробовать сравнить интеграл с интегралом $\int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{x^2}$. Однако, оснований для использования первой теоремы сравнения нет, поэтому применим вторую теорему сравнения. Итак, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-3x+2} = 1$, следовательно, интеграл $\int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$ ведет себя так же, как $\int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{x^2}$, то есть сходится. Вычислим интеграл

$$\int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{(x-2)(x-1)} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_4^{b} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right] dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln|x-2| - \ln(x-1)\right]\Big|_4^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right]\Big|_4^b = \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left|\frac{b-2}{b-1}\right| - \ln\frac{2}{3}\right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\ln\left|\frac{1-2/b}{1-1/b}\right| + \ln\frac{3}{2}] = \ln\frac{3}{2}.$$

Лекция 5

Ряды

Определение 1. *Рядом называется формальная сумма членов некоторой последовательности, другими словами ряд – есть сумма бесконечного числа членов, каждый из которых является элементом заданной последовательности.*

Ряды бывают двух видов:

1) **числовые**, если каждый член ряда – число, в этом случае пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + ...,$$

причем в правой части записан числовой ряд, в левой части – его сокращенное обозначение, здесь $\sum_{n=1}^{\infty}$ – означает суммирование членов ряда от первого до сколь угодно большого, a_n – общий (n-й) член ряда.

2) **функциональные**, когда каждый член ряда есть функция:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ... + f_n(x) + ...$$

Определение 2. *Сумму m первых членов ряда называют m – частичной суммой ряда* $S_m = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_m$.

Определение 3. *Ряд называется сходящимся, если его сумма имеет конечное значение, если сумма ряда не существует, или равна бесконечности, ряд – расходящийся.*

Сумма ряда S определяется формулой $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ если предел существует. Однако применение этой формулы сопряжено с большими, порой непреодолимыми, трудностями. Далеко не всегда удается в компактной форме записать n-ю частичную сумму ряда, а, следовательно, вычислить ее предел. Почленное суммирование ряда – еще менее перспективная процедура, бесконечное число членов не просуммируешь.

Вследствие этого точное значение суммы ряда можно установить в очень небольшом числе случаев.

Приведем пример геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_0 q^{n-1} = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + a_0 q^3 + \ldots,$$

знаменатель которой q, $|q| < 1$.

Известна сумма первых n членов этого ряда $S_n = \dfrac{a_0\left(q^n - 1\right)}{\left(q - 1\right)}$. Вычислим ее предел

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0\left(q^n - 1\right)}{\left(q-1\right)}$. Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_0}{1-q}$. При $|q| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Ряд расходится. При $q = 1$ ряд также расходится $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_0 = \infty\right)$. Итак, подтверждается утверждение, что сумма геометрической прогрессии конечна при $|q| < 1$.

Необходимое условие сходимости ряда

Если ряд сходится, то предел его n-го члена равен нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Основное свойство рядов

Если ряд сходящийся, то его остаток $r_m = \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots,$ образованный отбрасыванием первых m членов ряда, тоже сходится. Если ряд расходящийся, то его остаток также является расходящимся рядом.
В самом деле,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_m + r_m = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n .$$

Если ряд сходится, то существует его конечная сумма S, а $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ – всегда конечна как сумма конечного числа членов. Тогда из $S = S_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ следует, что $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = S - S_m$ – конечное число, и остаток ряда – сходится. Когда ряд расходящийся, $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_m$. Поскольку сумма ряда в правой части равенства не существует (ряд расходящийся), а S_m имеет конечное значение, сумма ряда в левой части также не существует.

Знакоположительные числовые ряды

Первая теорема сравнения. *Даны два числовых ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *причем* $0 \le a_n \le b_n$. *Из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего ряда. Из расходимости меньшего ряда следует расходимость большего ряда.*

Вторая теорема сравнения. *Даны два знакоположительных ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n, b_n > 0$, $n \geq 1$, *причем* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \quad (0 < K < \infty)$, *в этом случае оба ряда ведут себя одинаково: либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

Признак Даламбера

Теорема. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0)$ *при условии* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *сходится, а при условии* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *он расходится. При условии* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ *признак Даламбера не работает.*

Рекомендация. *Часто удобно применять признак Даламбера, если общий член ряда содержит показательную функцию или факториалы.*

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Решение.

Очевидно, $a_n = \frac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)}{2^{n+1}}$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд сходится.

Решение в MAXIMA.

MAXIMA позволяет находить значение суммы конечного числа членов ряда с помощью оператора

sum(a_i, i, начальное значение i, конечное значение i)

```
(%i1) sum (n/(2^n), n, 1, inf);
```

(%o1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

```
(%i2) limit(((n+1)*(2^n))/((2^(n+1))*n), n, inf);
```

(%o2) $\frac{1}{2}$

Ответ. Ряд расходится.

Пример 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\left(n^2+1\right)}$.

Решение.

$$a_n=\frac{n!}{\left(n^2+1\right)},\quad a_{n+1}=\frac{\left(n+1\right)!}{\left(\left(n+1\right)^2+1\right)}=\frac{n!\left(n+1\right)}{\left(n^2+2n+2\right)}.$$

Чтобы решить этот пример, вспомним некоторые формулы для «факториала».

$4!=1\cdot2\cdot3\cdot4,\quad n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\dots\cdot n,$

$\left(n+1\right)!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\dots\cdot n\cdot\left(n+1\right)=n!\left(n+1\right).$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\left(n+1\right)\left(n^2+1\right)}{\left(n^2+2n+2\right)n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=\infty>1.$$

Ряд расходится.

Ответ. Ряд расходится.

Радикальный признак Коши

Теорема. *Дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0)$. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$. *Если* $k<1$, *то ряд сходится, если* $k>1$, *то ряд расходится, при* $k=1$ *признак не работает.*

Замечание. *Радикальный признак удобно применять, когда хорошо извлекается корень* $n-$*й степени из общего члена ряда.*

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$.

Решение.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0 < 1$, ряд сходится.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) sum ((3^n)/(n^n), n, 1, inf);
```

(%o1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$

```
(%i2) limit(((3^n)/(n^n))^(1/n), n, inf);
(%o2) 0
```

Ответ. Ряд сходится.

Пример 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\arcsin^n\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \arcsin\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} > 1,$$

ряд расходится.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) sum (((asin((n-1)/n)))^n, n, 1, inf);
```

(%o1) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{asin}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

```
(%i2) limit((((asin((n-1)/n)))^n)^(1/n), n, inf);
```

(%o2) $\frac{\pi}{2}$

Ответ. Ряд расходится.

Интегральный признак Маклорена – Коши

Теорема. *Знакоположительный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится (расходится), если сходится (расходится) интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$, *причем подынтегральная функция* $f(x)$ *положительна, монотонна получается из общего члена ряда заменой дискретно меняющейся переменной* n *на действительную переменную* x, *т.е.* $a_n = f(n)$.

Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ с помощью интегрального признака. Для этого необходимо исследовать сходимость интеграла $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ (пример приведен выше) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & \text{если } p>1,\\ \text{расходится при } p\le 1.\end{cases}$

Тогда и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) integrate(1/(x^p), x, 1, inf);
Is  p  positive, negative, or zero?positive;
 Is  p-1  positive, negative, or zero?positive
```

$$(\%o1)\ \frac{1}{p-1}$$

```
(%i2) integrate(1/(x^p), x, 1, inf);
Is  p  positive, negative, or zero?negative;
 defint: integral is divergent.
  -- an error. To debug this try: debugmode(true)
(%i3) integrate(1/(x^p), x, 1, inf);
Is  p  positive, negative, or zero?zero;
 defint: integral is divergent.
  -- an error. To debug this try: debugmode(true)
```

Пример. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^5 n}$.

Решение. Вычислим интеграл

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln^5 x} = \lim_{b \to \infty} \int_3^b \ln^{-5} x \, d(\ln x) =$$

$$= -\lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{4 \ln^4 b} - \frac{1}{4 \ln^4 3} \right] = \frac{1}{4 \ln^4 3},$$

интеграл сходится и ряд тоже.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) sum (1/(n*(log(n))^5), n, 3, inf);
```

(%o1) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^5}$

```
(%i2) integrate(1/(x*(log(x))^5), x, 3, inf);
```

(%o2) $\frac{1}{4 \log(3)^4}$

Ответ. Ряд сходится.

Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

Решение.

Очевидно, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Однако, ряд расходится.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) sum (1/n, n, 1, inf);
```

(%o1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

```
(%i2) sum (1/n, n, 1, inf), simpsum;
sum: sum is divergent.
  -- an error. To debug this try: debugmode(true)
```

Ответ. Ряд расходится.

Лекция 6

Знакопеременные ряды

Альтернативными знакоположительным рядам являются знакопеременные ряды.

Знакопеременные ряды бывают общего вида, когда часть членов ряда положительные, другая часть – отрицательные, и знакочередующиеся, когда знаки членов ряда чередуются, за положительным следует отрицательный член ряда, за отрицательным – положительный.

Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся****, если сходится ряд из абсолютных величин его членов.*

Знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся****, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.*

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, он сходится, следовательно, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ сходится абсолютно.

Знакочередующиеся ряды

Теорема Лейбница *условной сходимости знакочередующегося ряда. Пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, *причем* $a_n > 0$.

Если:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$ *и*

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *сходится.*

В отличие от знакоположительных рядов знакочередующиеся ряды могут сходиться абсолютно, условно и расходиться, причем абсолютно сходящийся ряд сходится и условно. Но не наоборот!

Примеры.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. Ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится $(p = 2)$, следовательно, рассматриваемый знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. Рассмотрим ряд из абсолютных величин членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$.

Он расходится $\left(p=\frac{1}{2}\right)$. Следовательно, исследуемый ряд не сходится абсолютно. Поскольку $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, ряд сходится условно.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n}$.

Поскольку $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, не выполняется и условие теоремы Лейбница, и необходимое условие сходимости ряда. Ряд расходящийся.

Степенные ряды

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+.....+a_nx^n+.....$, где a_n – постоянные коэффициенты, называется степенным.

Теорема. *Пусть существует* $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *Степенной ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *сходится абсолютно в области* $|x| < R$, *где, и расходится в области* $|x| > R$.

Доказательство. Поскольку x, да и a_n не обязательно положительны, ряд, вообще говоря, является знакопеременным. Чтобы доказать абсолютную сходимость ряда, необходимо рассмотреть ряд из абсолютных величин членов этого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n x^n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n||x|^n$. Теперь к знакоположительному числовому ряду применим признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{|x|}{R}$, где $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. В соответствии с признаком Даламбера рассматриваемый ряд сходится при $\dfrac{|x|}{R} < 1$ и расходится в области $\dfrac{|x|}{R} > 1$. Итак, область абсолютной сходимости степенного ряда $|x| < R$, где $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. В области $|x| > R$ ряд расходится.

Вследствие этого, промежуток $-R < x < R$ называется областью абсолютной сходимости степенного ряда, а R называют радиусом его сходимости.

Воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Замечания.

1) Примененный признак Даламбера не работает, когда $|x| = R$, то есть при $x = \pm R$. При необходимости сходимость рядов в этих точках следует рассматривать отдельно.

2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, то степенной ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой. В этом случае $R = \infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, то $R = 0$.

3) При выведении формулы радиуса сходимости степенной ряд считался «полным», то есть в нем присутствовали все целые, положительные степени x. Если ряд не содержит всех степеней x, формула для радиуса сходимости будет неверной. В этом случае при исследовании сходимости каждого конкретного степенного ряда следует составить ряд из модулей его членов,

после чего применить признак Даламбера. Очевидно, такую процедуру можно применять и при определении области сходимости «полных» рядов.

Пример 1.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left(n^2+1\right)}$. Определим, при каких x ряд сходится.

А) $a_n=\frac{1}{\left(n^2+1\right)}$, $a_{n+1}=\frac{1}{\left(\left(n+1\right)^2+1\right)}$,

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(n+1\right)^2+1\right)}{\left(n^2+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=1.$$

Итак, при $-1<x<1$ ряд сходится.

Исследуем граничные значения области сходимости.

При $x=1$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2+1\right)}$. Ряд знакоположительный, его члены меньше членов

сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, следовательно, он сходится.

При $x=-1$ имеем знакочередующийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+1)}$. Рассмотрим ряд из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n^2+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)}$, но это сходящийся ряд, что мы только что подтвердили, следовательно, знакочередующийся ряд сходится абсолютно. Следовательно, область абсолютной сходимости исследуемого ряда $-1\le x\le 1$. При остальных значениях x ряд расходится.

Пример 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)3^n}x^{2n-1}$ содержит только нечетные степени x. Рассмотрим ряд из абсолютных величин членов исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)3^n}|x|^{2n-1}$. Применим к нему признак

Даламбера. Общий член ряда $u_n = \dfrac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)3^n}$, тогда

$u_{n+1} = \dfrac{|x|^{2(n+1)-1}}{(2(n+1)-1)3^{n+1}}$. Подсчитаем предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}(2n-1)3^n}{(2n+1)3^{n+1}|x|^{2n-1}} =$$

$$= \frac{|x|^2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{|x|^2}{3} < 1.$$

Область сходимости $|x|^2 < 3 \Rightarrow |x| < \sqrt{3}$ или $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

Исследуем граничные точки: при $x = -\sqrt{3}$ имеем $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)3^n}\left(-\sqrt{3}\right)^{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}$.

Знакоположительный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}$ расходится, что следует из сравнения его с расходящимся рядом $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ с помощью второй теоремы сравнения. Предел отношения членов этих рядов

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(2n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}=\dfrac{1}{2}$. Поскольку $0<\dfrac{1}{2}<\infty$, ряды ведут себя одинаково, очевидно, расходится и получившийся на границе знакоотрицательный ряд;

при $x=\sqrt{3}$ имеем $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}$. Это знакочередующийся ряд, он сходится условно, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n-1)}=0$.

Итак, область сходимости ряда $-\sqrt{3}<x\le\sqrt{3}$.

Примечание. Часто встречаются степенные ряды более общего вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\ldots+$$

$$+a_n(x-a)^n+\ldots.$$

При исследовании их области сходимости делается замена $t=x-a$, приводящая ряд к уже известному $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$.

Лекция 7

Ряд Тейлора

Формула Тейлора имеет вид:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ – остаточный член в форме Лагранжа. Число c лежит между x_0 и x. Краткая запись $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$, где

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n-$$

многочлен Тейлора.

Если функция $f(x)$ имеет производные любых порядков (т.е. бесконечно дифференцируема) в окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, то из формулы Тейлора получается ***ряд Тейлора***:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0=0$, то получим разложение функции по степеням x ***ряд Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Разложение в ряд Тейлора – действие несложное, но часто трудоемкое. MAXIMA помогает ускорить этот процесс, а также упростить полученное выражение. Разложить в степенной ряд можно двумя способами: разложить функцию в ряд до заданной степени аргумента, либо получить общее выражение для всего ряда.

Первый способ выполняет оператор taylor*(f(x),x,a,n)*. Здесь $f(x)$ – раскладываемая функция, a – точка в окрестности которой находим разложение, число n определяет степень $(x-a)^n$ до которой производится разложение.

Пример 1.

```
(%i1) taylor(sin(x), x, 0, 8);
```

(%o1)/T/ $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\ldots$

Нахождение общего члена разложения и запись ряда в обычном виде производит оператор powerseries*(f (x), x, a)*, его лучше применять совместно с функцией niceindices, которая приводит индексы в нормальный вид.

Пример 2.

```
(%i2) niceindices(powerseries(sin(x), x,0));
```

(%o2) $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ x\in(-\infty;+\infty).$$

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) taylor(%e^x, x, 0, 10);
```

(%o1)/T/ $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40320}+\frac{x^9}{362880}+\frac{x^{10}}{3628800}+\ldots$

```
(%i2) niceindices(powerseries(%e^x, x, 0));
```

(%o2) $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$x \in (-\infty; +\infty)$.

Решение в MAXIMA.

```
(%i3) taylor(sin(x), x, 0, 10);
```

(%o3)/T/ $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + \ldots$

```
(%i4) niceindices(powerseries(sin(x), x, 0));
```

(%o4) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$x \in (-\infty; +\infty)$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

$$x \in \begin{cases} [-1;1], \text{ если } \alpha \geq 0, \\ (-1;1], \text{ если } -1 < \alpha < 0, \\ (-1;1), \text{ если } \alpha \leq -1, \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \ x \in (-1;1),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \ x \in (-1;1],$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \ x \in [-1;1],$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots +$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,\ x\in[-1;1].$$

Разложение в ряд функции e^x

Пусть $f(x) = e^x$.

Имеем $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$, $f^{IV}(x) = e^x$, ….

Полагая $x = 0$, получим:

$f(0) = e^0 = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$, $f'''(0) = 1$, $f^{IV}(0) = 1, \ldots$.

Подставим эти значения в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Здесь $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)n!}{n!}\right| = \infty$, т.е. ряд сходится абсолютно в интервале $x\in(-\infty;+\infty)$.

Лекция 8

Ряды Фурье

Рядом Фурье *функции* $f(x)$ *называется тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

где a_0, a_n, b_n – ***коэффициенты Фурье***

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ n=1,2,3,\ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\ n=1,2,3,\ldots.$$

Разложение в ряд Фурье 2π-периодических функций

Функции, имеющие период $T=2\pi$ называются 2π-периодическими.

Теорема Дирихле*: Пусть* 2π*-периодическая функция* $f(x)$ *удовлетворяет на* $[-\pi;\pi]$ *двум условиям:*

1. $f(x)$ *– кусочно-непрерывна, т.е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва 1-го рода;*

2. $f(x)$ – кусочно-монотонна, т.е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция была монотонна.

Тогда ряд Фурье сходится на этом отрезке и

1. сумма ряда $S(x) = f(x)$, в точках, где функция f непрерывна;
2. в каждой т. x_0 разрыва функции

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2};$$

3. $S(-\pi) = S(\pi) = \dfrac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$.

Для функции $f(x)$ на $[-\pi; \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right).$$

Если функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет условиям на $[0; 2\pi]$ Дирихле, то

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Если функция $f(x)$ ***четная***, то $b_n = 0,\ n \geq 1$ и

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{ где}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Если функция $f(x)$ ***нечетная***, то $a_n = 0$ и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ где}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Разложение в ряд Фурье $2l$-периодической функции

Если функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$, имеет период $2l$ ($f(x+2l) = f(x)$, l – произвольное положительное число) и удовлетворяет условиям Дирихле, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \text{ где}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Если функция $f(x)$ на $[-l;l]$ ***четная***, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$ где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

если функция $f(x)$ – ***нечетная***, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$ где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Нахождение коэффициентов ряда Фурье в Maxima выполняет оператор **fourier*(f(x),x,T)***. Его синтаксис: *f(x)* – функция, *x* –аргумент, *T* – период. Перед его использованием необходимо загрузить дополнительный модуль командой **load(fourie)**.

Пример. Разложить функцию $f(x)=(x-1)^2$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) load(fourie);
(%o1) C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.1-G/share/maxima/5.25.1/share/calculus/fourie.mac
(%i2) fourier((x-1)^2,x,%pi);
```

$$(\%t2)\quad a_0=\frac{\frac{2\pi^3}{3}+2\pi}{2\pi}$$

$$(\%t3)\quad a_n=\frac{\frac{2\pi^2\sin(\pi n)}{n}+\frac{2\sin(\pi n)}{n}-\frac{4\sin(\pi n)}{n^3}+\frac{4\pi\cos(\pi}{n^2}}{\pi}$$

$$(\%t4)\quad b_n=\frac{\frac{4\pi\cos(\pi n)}{n}-\frac{4\sin(\pi n)}{n^2}}{\pi}$$

```
(%o4) [%t2,%t3,%t4]
```

Для того чтобы не только вычислить коэффициенты ряда Фурье, но и получить разложение функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-T,T]$ и T – периодически продолженной на всю вещественную ось в ряд Фурье, следует ввести **load(fourie); totalfourier *(f(x),x,T)***.

```
(%i5) totalfourier((x-1)^2,x,%pi);
```

(%t5) $a_0=\dfrac{\frac{2\pi^3}{3}+2\pi}{2\pi}$

(%t6) $a_n=\dfrac{\frac{2\pi^2\sin(\pi n)}{n}+\frac{2\sin(\pi n)}{n}-\frac{4\sin(\pi n)}{n^3}+\frac{4\pi\cos(\pi n)}{n^2}}{\pi}$

(%t7) $b_n=\dfrac{\frac{4\pi\cos(\pi n)}{n}-\frac{4\sin(\pi n)}{n^2}}{\pi}$

(%t8) $a_0=\dfrac{\pi^2+3}{3}$

(%t9) $a_n=\dfrac{4(-1)^n}{n^2}$

(%t10) $b_n=\dfrac{4(-1)^n}{n}$

(%o10) $4\left(\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin(n x)}{n}\right)+4\left(\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos(n x)}{n^2}\right)+\dfrac{\pi^2+}{3}$

MAXIMA не только вычислила коэффициенты разложения, но и упростила их, а так же записала общий вид разложения.

Отметим, что частные суммы ряда Фурье приближают исходную функцию, в отличие от ряда Тейлора, не в конкретных точках, а «в среднем по отрезку».

Для примера рассмотрим разложение функции $f(x)=x\cdot e^x$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\pi]$ и ряд Тейлора в окрестности точки ноль. Построим графики, полученных разложений и сравним их с графиком $f(x)=x\cdot e^x$.

```
(%i2) totalfourier(x*%e^x,x,%pi);
```

(%t2) $a_0=\frac{-\%e^{\pi}+\pi\,\%e^{-\pi}+\%e^{-\pi}+\%e^{\pi}\,\pi}{2\,\pi}$

(%t3) $a_n=(-\frac{\pi\,n^3\sin(\pi\,n)}{\%e^{\pi}\,n^4+2\,\%e^{\pi}\,n^2+\%e^{\pi}}-\frac{\pi\,n\sin(\pi\,n)}{\%e^{\pi}\,n^4+2\,\%e^{\pi}\,n^2+\%e^{\pi}}-\frac{2\,n\sin(\pi\,n)}{\%e^{\pi}\,n^4+2\,\%e^{\pi}\,n^2+\%e^{\pi}}+\frac{\%e^{\pi}\,\pi\,n^3\sin(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}$
$\frac{\%e^{\pi}\,\pi\,n\sin(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}-\frac{2\,\%e^{\pi}\,n\sin(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\pi\,n^2\cos(\pi\,n)}{\%e^{\pi}\,n^4+2\,\%e^{\pi}\,n^2+\%e^{\pi}}-\frac{n^2\cos(\pi\,n)}{\%e^{\pi}\,n^4+2\,\%e^{\pi}\,n^2+\%e^{\pi}}+\frac{\pi\cos(\pi\,n)}{\%e^{\pi}\,n^4+2\,\%e^{\pi}\,n^2+\%e^{\pi}}-$
$\frac{\cos(\pi\,n)}{\%e^{\pi}\,n^4+2\,\%e^{\pi}\,n^2+\%e^{\pi}}+\frac{\%e^{\pi}\,\pi\,n^2\cos(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\%e^{\pi}\,n^2\cos(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\%e^{\pi}\,\pi\cos(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}-\frac{\%e^{\pi}\cos(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1})/\pi$

(%t4) $b_n=(-\frac{\pi\,n^2\sin(\pi\,n)}{\%e^{\pi}\,n^4+2\,\%e^{\pi}\,n^2+\%e^{\pi}}+\frac{n^2\sin(\pi\,n)}{\%e^{\pi}\,n^4+2\,\%e^{\pi}\,n^2+\%e^{\pi}}-\frac{\pi\sin(\pi\,n)}{\%e^{\pi}\,n^4+2\,\%e^{\pi}\,n^2+\%e^{\pi}}-$
$\frac{\sin(\pi\,n)}{\%e^{\pi}\,n^4+2\,\%e^{\pi}\,n^2+\%e^{\pi}}+\frac{\%e^{\pi}\,\pi\,n^2\sin(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\%e^{\pi}\,n^2\sin(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\%e^{\pi}\,\pi\sin(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}-\frac{\%e^{\pi}\sin(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}-$
$\frac{\pi\,n^3\cos(\pi\,n)}{\%e^{\pi}\,n^4+2\,\%e^{\pi}\,n^2+\%e^{\pi}}-\frac{\pi\,n\cos(\pi\,n)}{\%e^{\pi}\,n^4+2\,\%e^{\pi}\,n^2+\%e^{\pi}}-\frac{2\,n\cos(\pi\,n)}{\%e^{\pi}\,n^4+2\,\%e^{\pi}\,n^2+\%e^{\pi}}-\frac{\%e^{\pi}\,\pi\,n^3\cos(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}-\frac{\%e^{\pi}\,\pi\,n\cos(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}$
$\frac{2\,\%e^{\pi}\,n\cos(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1})/\pi$

(%t5) $a_0=\frac{\%e^{-\pi}(\pi\,\%e^{2\,\pi}-\%e^{2\,\pi}+\pi+1)}{2\,\pi}$

(%t6) $a_n=\frac{\%e^{-\pi}(\pi\,\%e^{2\,\pi}\,n^2+\%e^{2\,\pi}\,n^2+\pi\,n^2-n^2+\pi\,\%e^{2\,\pi}-\%e^{2\,\pi}+\pi+1)(-1)^n}{\pi\,(n^2+1)^2}$

(%t7) $b_n=-\frac{\%e^{-\pi}\,n(\pi\,\%e^{2\,\pi}\,n^2+\pi\,n^2+\pi\,\%e^{2\,\pi}-2\,\%e^{2\,\pi}+\pi+2)(-1)^n}{\pi\,(n^2+1)^2}$

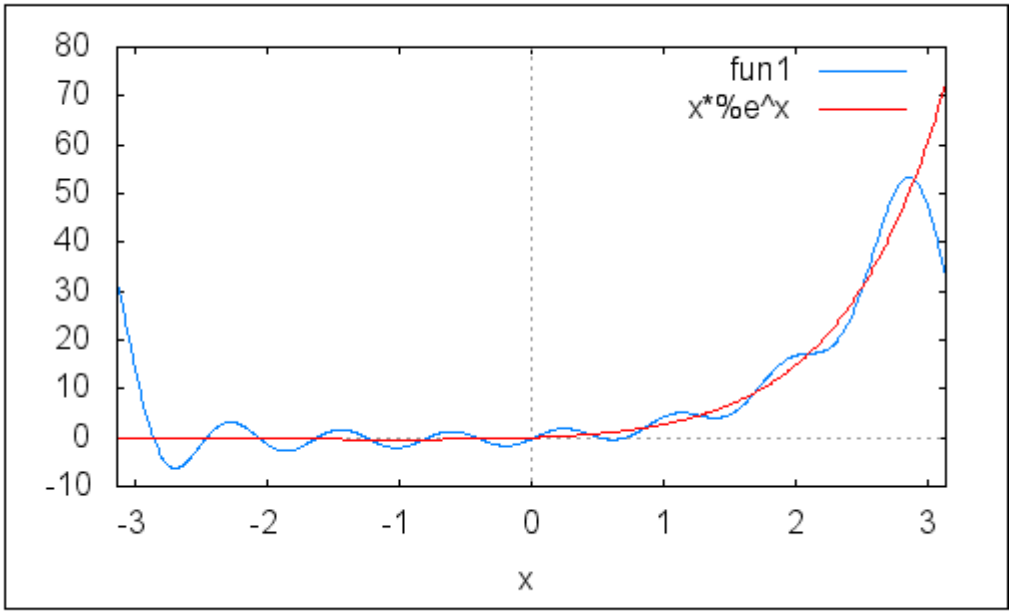
(%o7) $-\frac{\%e^{-\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(\pi\,\%e^{2\,\pi}\,n^2+\pi\,n^2+\pi\,\%e^{2\,\pi}-2\,\%e^{2\,\pi}+\pi+2)(-1)^n\sin(n\,x)}{(n^2+1)^2}}{\pi}+$
$\frac{\%e^{-\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi\,\%e^{2\,\pi}\,n^2+\%e^{2\,\pi}\,n^2+\pi\,n^2-n^2+\pi\,\%e^{2\,\pi}-\%e^{2\,\pi}+\pi+1)(-1)^n\cos(n\,x)}{(n^2+1)^2}}{\pi}+\frac{\%e^{-\pi}(\pi\,\%e^{2\,\pi}-\%e^{2\,\pi}+\pi+1)}{2\,\pi}$

```
(%i9) g(x):= -(%e^(-%pi)*sum((n*(%pi*%e^(2*%pi)*n^2+%pi*n^2+%pi*%e^(2*%pi)
      -2*%e^(2*%pi)+%pi+2)*(-1)^n*sin(n*x))/(n^2+1)^2,n,1,7))/%pi+
      (%e^(-%pi)*sum(((%pi*%e^(2*%pi)*n^2+%e^(2*%pi)*n^2+%pi*n^2-n^2+
      %pi*%e^(2*%pi)-%e^(2*%pi)+%pi+1)*(-1)^n*cos(n*x))/(n^2+1)^2,n,1,7))/
      %pi+(%e^(-%pi)*(%pi*%e^(2*%pi)-%e^(2*%pi)+%pi+1))/(2*%pi);
```

(%o9)
$$g(x):=\frac{-\%e^{-\pi}\sum_{n=1}^{7}\frac{n\left(\pi\,\%e^{2\pi}n^2+\pi n^2+\pi\,\%e^{2\pi}+(-2)\,\%e^{2\pi}+\pi+2\right)(-1)^n\sin(n\,x)}{(n^2+1)^2}}{\pi}+\frac{\%e^{-\pi}\sum_{n=1}^{7}\frac{\left(\pi\,\%e^{2\pi}n^2+\%e^{2\pi}n^2+\pi n^2-n^2+\pi\,\%e^{2\pi}-\%e^{2\pi}+\pi+1\right)(-1)^n\cos(n\,x)}{(n^2+1)^2}}{\pi}+\frac{\%e^{-\pi}\left(\pi\,\%e^{2\pi}-\%e^{2\pi}+\pi+1\right)}{2\,\pi}$$

```
(%i11) wxplot2d([g(x),x*%e^x],[x,-%pi,%pi]);
```

(%t11)



(%o11)

Здесь **(%i2)** находит разложение функции в ряд Фурье, **(%i9)** присваивает функции $g(x)$ значение частной суммы при $n=7$, **(%i11)** рисует графики функций $g(x)$ и $x\cdot e^x$.

Для ряда Тейлора последовательность действий аналогична.

```
(%i12) niceindices(powerseries(x*%e^x,x,0));
```

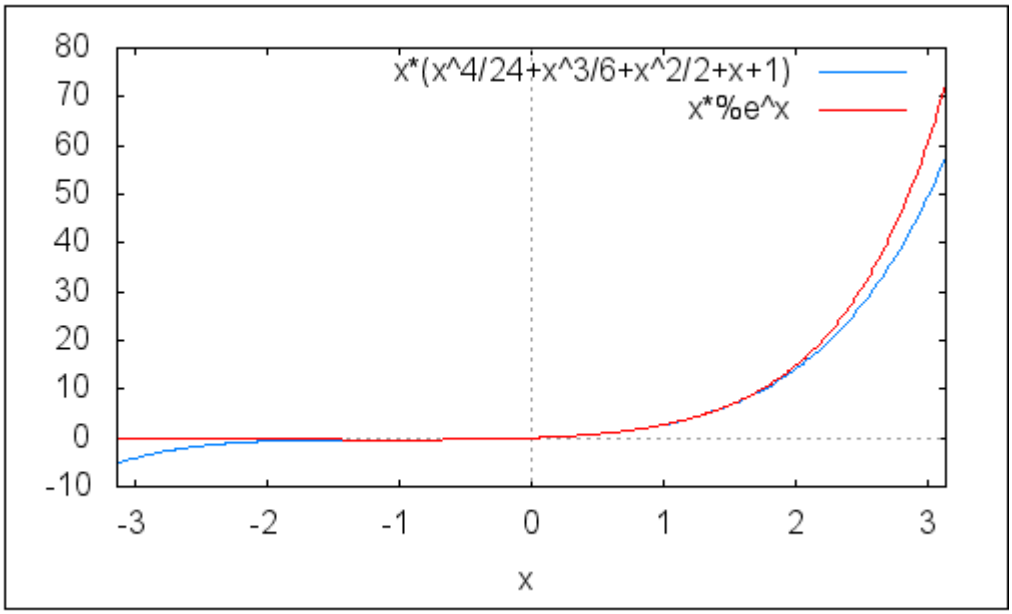
(%o12) $x\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$

```
(%i13) t(x):=x*sum(x^i/i!,i,0,4);
```

(%o13) $t(x):=x\sum_{i=0}^{4}\frac{x^i}{i!}$

```
(%i14) wxplot2d([t(x),x*%e^x],[x,-%pi,%pi]);
```

(%t14)



(%o14)

Замечание. Проверить, как приближаются графики при увеличении числа слагаемых.

Задачи по специальности

Задача 1.

Составьте дифференциальное уравнение и найдите частные решения: Концентрация лекарственного препарата в крови уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации пропорциональна концентрации вещества в данный момент. Определить зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если в начальный момент времени она была равна 0,2 мг/л, а через 23 часа уменьшилась вдвое.

Решение: https://znanija.com/task/19120682

Задача 2.

Для палочковидных клеток, у которых отношение поверхности клетки к её объёму сохраняется постоянным, скорость роста клетки $\frac{dl}{dt}$ пропорциональна длине клетки l в данный момент: $\frac{dl}{dt}=(a-b)l$, где a, b – постоянные, характеризующие процессы синтеза и распада. Найти зависимость изменения параметра l от времени.

Решение:
https://studfile.net/preview/1818136/page:24/

Задача 3.

Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент имелось 100 бактерий. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 часов.

Решение на странице 22:
https://www.amursma.ru/upload/iblock/c51/Differencialnye_uravneniya.pdf

Задача 4.

Ученые проводили длительные опыты по размножению особей вида Helix pomatia в искусственно созданных условиях, подсчитывая количество особей 10 числа каждого месяца, и установили, что их число возможно охарактеризовать следующей формулой: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(k+75\cdot k\cdot n\right)$, где n – месяц исследования, а k – изначальное число особей. Вычислить какое число особей будет в данной популяции через 1 год, если на начало опытов число Helix pomatia было равно 200? При решении данной задачи не учитывать параметр смертности.

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(k+75\cdot k\cdot n).$$

Нам известно, что $k=200$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(200+75\cdot 200\cdot n)=\sum_{n=1}^{\infty}(200+15000\cdot n).$$

Необходимо найти сумму ряда при $n=12$:

$$S=\frac{(200+15000)+(200+1500\cdot 12)}{2}\cdot 12,$$

$$S=(15200+180200)\cdot 6,$$

$$S=1172400.$$

Ответ: Итак, мы вычислили число особей (1172400) в данной популяции через 1 год.

Литература

1. Демидович Б.П., Моденов В.П. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. 3-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 288 с.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., и др. Вся высшая математика: Учебник. – Т. 3. Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 240 с.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 4 изд. – М., Наука, 1974. – 331 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – Часть 2. – М.: Айрис-пресс, 2003. - 256 с.
5. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 407 с.