КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д.Х. Гиниятова, Е.В. Рунг

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Часть 2

Учебное пособие

Казань
2019

Оглавление

Введение

Настоящее пособие представляет собой вторую часть сборника задач по курсу линейной алгебры. Назначение данного пособия состоит в том, чтобы активизировать самостоятельную работу студентов при изучении курса, помочь активному и неформальному усвоению этого предмета.

Весь материал пособия разбит на три части. Части разбиты на разделы. Каждый раздел – это отдельная тема и его материал может использоваться при проведении практических занятий. Каждый раздел также содержит два пункта: ”Основные понятия и теоремы”, "Задачи для самостоятельного решения".

Заметим, что основная работа над теоретическим материалом с проработкой доказательств теорем должна осуществляться студентами по одному из учебников (например, [1]) или конспектам лекций. Однако для решения задач часто достаточно понять смысл теоремы, формулы или определения. С этой целью в разделе ”Основные понятия и теоремы” приводятся без доказательства основные теоретические сведения, необходимые для решения задач. Эти сведения иногда сопровождаются поясняющими примерами или замечаниями, направленными на то, чтобы облегчить студентам восприятие новых понятий.

Назначение пункта ”Задачи для самостоятельного решения” отражено в его названии. В этом разделе приведен определенный минимум упражнений, достаточный для усвоения основных приемов решения задач по каждой теме. Из данного пункта преподаватель может черпать упражнения и задачи для проведения практических занятий.

Теоретической поддержкой данного учебно-методического пособия является учебник А.Г. Куроша [1], в котором заложены методические основы курса алгебры. При подборе задач и упражнений использовались различные источники, в том числе известные задачники по алгебре И.В. Проскурякова [2], Д.К. Фадеева, И.С. Соминского [3], В.Д. Кряквина [4] и Е.М. Карчевского, Е.Е. Лаврентьевой, И.Л. Александровой [5].

Пособие будет полезным как для студентов, так и для преподавателей, ведущих занятия по курсу "Линейная алгебра".

Линейные пространства

1. Линейные пространства

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 1. Говорят, что множество $\boldsymbol{V}$ является *вещественным линейным пространством*, если для любых элементов $x, y \in \boldsymbol{V}$ определена операция сложения, т. е. определен элемент $z = x+y \in \boldsymbol{V}$, называемый *суммой* элементов x, y; для любого элемента $x \in \boldsymbol{V}$ и любого вещественного числа α определен элемент $\alpha x \in \boldsymbol{V}$, называемый *произведением* α и x. Предполагается, что для этих двух операций выполнены *аксиомы линейного пространства*:

1) $x + y = y + x$ — *коммутативность* операции сложения;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ — *ассоциативность* операции сложения;

3) существует элемент $0 \in \boldsymbol{V}$ такой, что $x+0 = x$ для любого элемента $x \in \boldsymbol{V}$; элемент 0 называют *нулевым элементом* пространства $\boldsymbol{V}$;

4) для любого элемента $x \in \boldsymbol{V}$ существует элемент x' такой, что $x + x' = 0$; элемент x' называют *противоположным* элементу x;

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ — *дистрибутивность* по сложению векторов;

6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ — *дистрибутивность* по сложению скаляров;

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — *ассоциативность* по умножению скаляров;

8) $1x = x$ — *нейтральность* единичного скаляра.

Если в определении линейного пространства взять комплексные числа α, β, то множество $\boldsymbol{V}$ называется *комплексным линейным пространством.*

Основные линейные пространства

1. Вещественное пространство $\boldsymbol{R}^n$ – множество всех вектор-столбцов с вещественными координатами вида

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

где $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число. Линейные операции на пространстве $\boldsymbol{R}^n$ вводятся следующим образом. По определению для любого вещественного числа α и любого $x \in \boldsymbol{R}^n$ положим

$$\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \dots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

Для любых $x, y \in \boldsymbol{R}^n$ по определению

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

2. Множество всех вещественных матриц размера $m \times n$ с введенными на нем операциями умножения матрицы на число и сложения двух матриц $\boldsymbol{M}^{mn}$ является вещественным линейным пространством.

3. Множество $\mathbf{P}_n$ всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше n, где $n \geqslant 0$, есть фиксированное целое число, является вещественным линейным пространством.

Задачи для самостоятельного решения

Множества из пространства $\boldsymbol{R}^n$

1. Пусть $\boldsymbol{G}$ — множество всех вектор-столбцов линейного пространства $\boldsymbol{R}^n$ с положительными элементами, то есть

$$\boldsymbol{G} = \{x : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Проверить, является ли линейным пространством множество $\boldsymbol{G}$, если операции сложения векторов и умножения вектора на число определяются следующим образом

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_2 \\ \dots \\ x_n \cdot y_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \alpha x = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \\ \dots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

2. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция суммы векторов определяется следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

3. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция произведения вектора на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha x = \begin{pmatrix} |\alpha|x_1 \\ |\alpha|x_2 \\ \dots \\ |\alpha|x_n \end{pmatrix} \qquad \forall \alpha \in \boldsymbol{R} \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция суммы векторов задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

4. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция суммы векторов определяется следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 \\ x_2 + 2y_2 \\ \dots \\ x_n + 2y_n \end{pmatrix} \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

5. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция суммы векторов определяется следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ \dots \\ x_n y_n \end{pmatrix} \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

6. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция произведения вектора на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha x = x \qquad \forall \alpha \in \boldsymbol{R} \text{ и } \forall x \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция суммы векторов задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

7. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция произведения вектора на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha x = \begin{pmatrix} e^{\alpha-1}x_1 \\ \dots \\ e^{\alpha-1}x_n \end{pmatrix} \qquad \forall \alpha \in \boldsymbol{R} \text{ и } \forall x \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция суммы векторов задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

8. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция суммы векторов определяется следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_n + y_n \\ x_{n-1} + y_{n-1} \\ \dots \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} \qquad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

9. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция суммы векторов определяется следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \dots \\ x_n - y_n \end{pmatrix} \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

Множества из пространства $\boldsymbol{M}^{mn}$

10. Пусть задано множество $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{M}^{mn}$, а операция сложения матриц вводится следующим образом: для любых матриц $A, B \in \boldsymbol{G}$ с элементами a_{ij} и b_{ij} соответственно их сумма $C = A + B$ есть матрица того же размера с элементами $c_{ij} = -a_{ij} - b_{ij}$, где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Операция произведения матрицы на вещественное число определяется так же, как и в пространстве $\boldsymbol{M}^{mn}$. Выяснить, является ли множество $\boldsymbol{G}$ линейным пространством.

11. Выяснить, является ли множество всех невырожденных квадратных матриц $\boldsymbol{M}^{nn}$ линейным пространством, если операция сложения матриц определяется следующим образом:

$$A + B = A \cdot B \qquad \forall A, B \in \boldsymbol{M}^{nn},$$

а операция умножения на число вводится также, как в пространстве $\boldsymbol{M}^{nn}$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

12. Выяснить, является ли множество всех квадратных диагональных матриц $\boldsymbol{M}^{nn}$ линейным пространством, если операция сложения матриц введена следующим образом:

$$A + B = A \cdot B \qquad \forall A, B \in \boldsymbol{M}^{nn},$$

а операция умножения на число определена также, как в пространстве $\boldsymbol{M}^{nn}$.

Множества из пространства $\boldsymbol{P_n}$

13. Выяснить, является ли множество всех многочленов с вещественными коэффициентами из пространства $\boldsymbol{P}_n$ линейным пространством, если операция суммы многочленов задается так же как и в пространстве $\boldsymbol{P}_n$ и для $\forall\alpha \in \boldsymbol{R}$ и $\forall f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \in \boldsymbol{P}_n$ операция умножения на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha f(x) = \alpha a_1 x^{n-1} + \alpha a_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha a_n.$$

14. Выяснить, является ли множество всех многочленов с вещественными коэффициентами из пространства $\boldsymbol{P}_n$ линейным пространством, если операция суммы многчленов определяется так же как и в пространстве $\boldsymbol{P}_n$, а операция умножения на вещественное число вводится иначе:

$$\alpha f(x) = (\alpha + a_n)x^n + (\alpha + a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (\alpha + a_0),$$

здесь $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ — произвольный многочлен из пространства $\boldsymbol{P}_n$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

15. Выяснить, является ли множество всех многочленов с вещественными коэффициентами из пространства $\boldsymbol{P}_n$ линейным пространством, если операция суммы многочленов определена так же как и в пространстве $\boldsymbol{P}_n$, а операция умножения на вещественное число определена иначе:

$$\alpha f(x) = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha a_1 x.$$

здесь $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ — произвольный многочлен из пространства $\boldsymbol{P}_n$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

16. Выяснить, является ли множество всех многочленов с вещественными коэффициентами из пространства $\boldsymbol{P}_n$ линейным пространством, если операция суммы многочленов определена так же как и в пространстве $\boldsymbol{P}_n$, а операция умножения на вещественное число определена иначе:

$$\alpha f(x) = \alpha a_0 x^n + \alpha a_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha a_{n-1} x + \alpha a_n,$$

здесь $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — произвольный многочлен из пространства $\boldsymbol{P}_n$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

2. Линейная зависимость и линейная независимость систем векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 2. Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$, $m \geq 1$ линейного пространства $\mathbf{V}$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \ldots + x_n a^n = 0. \tag{1}$$

Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$, $m \geq 1$ называется *линейно независимой*, если равенство (1) имеет место только тогда, когда $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Системы векторов имеют следующие свойства.

1. Система, состоящая из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор равен нулю.

2. Система, состоящая из двух векторов a^1 и a^2, линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы, пропорциональны, то есть либо $a^1 = \alpha a^2$ для некоторого числа α, либо $a^2 = \beta a^1$ для некоторого числа

β (если оба вектора отличны от нуля, то имеет место и первое и второе равенство).

4. Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, является линейно зависимой.

5. Любая подсистема линейно независимой системы векторов является линейно независимой.

6. Система, содержащая более одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда один из ее элементов является линейной комбинацией остальных.

Определение 3. Будем говорить, что вектор $a \in \mathbf{V}$ *линейно выражается* через векторы b^1, b^2, ... , b^p, $p > 1$ (является *линейной комбинацией* этих векторов), если существуют числа $x_1, x_2, \ldots, x_p$ такие, что

$$a = x_1 b^1 + x_2 b^2 + \ldots + x_p b^p. \tag{2}$$

Задачи для самостоятельного решения

17. Исследовать на линейную зависимость в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ следующие системы векторов

$a)$ $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};$

$b)$ $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix};$

$c)$ $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

$d)$ $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix};$

e) $a^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

18. Проверить, будут ли следующие матрицы линейно независимыми в соответствующем линейном пространстве $\boldsymbol{M}^{mn}$.

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A^6 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A^1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$;

d) $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

e) $A^1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

19. Проверить, будут ли следующие системы полиномов линейно независимыми в линейном пространстве $\mathbf{P_3}$:

a) $p^1(x) = 1$, $p^2(x) = x - 1$, $p^3(x) = (x+3)^2$;

b) $p^1(x) = x^2 + 4x$, $p^2(x) = 2x^2 - x + 4$, $p^3(x) = 4x^2 - 4x + 1$;

c) $p^1(x) = 4x^2 - 3x - 1$, $p^2(x) = 4x - 3$, $p^3(x) = 4x^2 + 9x - 10$;

d) $p^1(x) = 4x^2 - 3x + 2$, $p^2(x) = -3x^2 + 2x + 3$, $p^3(x) = 7x^2 - 5x - 1$;

e) $p^1(x) = 3x - 4$, $p^2(x) = 3x^2 - 2x - 3$, $p^3(x) = x^2 + 3x + 3$.

20. Найти максимальные линейно независимые подсистемы следующих систем векторов

a) $a^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$,

$$a^5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a^6 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix};$$

$b)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix},\ a^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a^4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$

$$a^5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ a^6 = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

21. Найти максимальные линейно независимые подсистемы следующих систем многочленов:

$a)$ $p^1(x) = -x^2 - x - 1$, $p^2(x) = 2x^2 + 2x + 2$, $p^3(x) = x^2 + x + 1$, $p^4(x) = -x^2 + 3x + 1$, $p^5(x) = -2x^2 + 2x$;

$b)$ $p^1(x) = x^2 + x + 2$, $p^2(x) = -2x^2 - 2x - 4$, $p^3(x) = -x^2 + x - 1$, $p^4(x) = 2x^2 + 4x + 5$, $p^5(x) = 3x^2 - x - 1$.

22. Найти максимальные линейно независимые подсистемы следующих систем матриц:

$a)\ A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$

$$A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$b)\ A^1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$

$$A^5 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

23. Известно, что вектор a^4 линейно выражается через векторы a^1, a^2, a^3. Найти линейное выражение a^4 через a^1, a^2, a^3, если

$$a)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$b)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Базисы. Конечномерные пространства

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 4. Система векторов $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ называется *базисом линейного пространства* $\boldsymbol{V}$, если e линейно независима и любой вектор $x \in \boldsymbol{V}$ представим в виде линейной комбинации

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n. \tag{3}$$

Вектор-столбец $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ называеся *координатами вектора* x в базисе e.

Определение 5. Число векторов в базисе $\boldsymbol{V}$ называется *размерностью линейного пространства* $\boldsymbol{V}$ и обозначается через $\dim \boldsymbol{V}$.

Определение 6. Линейное пространство $\boldsymbol{V}$ называется *конечномерным*, если число векторов в базисе конечное число, иначе $\boldsymbol{V}$ – *бесконечномерное пространство.*

Естественные базисы основных линейных пространств

1. Система вектор-столбцов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

называется естественным базисом пространства $\boldsymbol{R}^n$. Размерность пространства $\boldsymbol{R}^n$ равна n.

2. Система прямоугольных матриц размерности $m \times n$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, e_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется естественным базисом пространства $\boldsymbol{M}^{mn}$. Таким образом, размерность пространства $\boldsymbol{M}^{mn}$ равна mn.

3. Система многочленов

$$e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3, \dots, e_{n+1} = x^n$$

называется естественным базисом пространства $\mathbf{P}_n$. Размерность пространства $\mathbf{P}_n$ равна $n+1$.

Задачи для самостоятельного решения

24. Проверить, является ли система векторов e_1, e_2, e_3 базисом в линейном пространстве $\mathbf{R}^3$.

$a)\quad e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix};$

$b)\quad e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix};$

$c)\quad e_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}-6\\-5\\1\end{pmatrix};$

$d)\quad e_1=\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}.$

25. Проверить, является ли система многочленов p_1, p_2, p_3 базисом в линейном пространстве $\mathbf{P}_2$.

$a)\quad p_1 = 1-3x-2x^2, p_2 = 2-4x+x^2, p_3 = 2+3x+2x^2;$

$b)\quad p_1 = -2+2x+3x^2, p_2 = x-2x^2, p_3 = -2+x+5x^2;$

$c)\quad p_1 = -4+2x-x^2, p_2 = 4+x+4x^2, p_3 = -3-3x-2x^2;$

$d)\quad p_1 = -1+2x+x^2, p_2 = -2-x+x^2, p_3 = -7+4x+5x^2.$

26. Проверить, является ли система матриц A_1, A_2, A_3, A_4 базисом в линейном пространстве $\mathbf{M}^{22}$.

$a)\quad A_1=\begin{pmatrix}-1&3\\3&-2\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}3&1\\-1&-1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix};$

$b)\quad A_1=\begin{pmatrix}2&3\\1&-1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}-1&3\\-2&3\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}3&4\\1&-3\end{pmatrix};$

$c)\quad A_1=\begin{pmatrix}3&-2\\-3&3\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-3\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}1&-1\\1&3\end{pmatrix};$

$d)\quad A_1=\begin{pmatrix}3&2\\3&3\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}-2&5\\3&-4\end{pmatrix}.$

27. Проверить, является ли система векторов e_1, e_2, e_3 базисом в линейном пространстве $\mathbf{R}^3$, и найти координаты вектора x в этом базисе. По известному координатному вектору y_e найти вектор y:

$a) e_1=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}-4\\3\\-7\end{pmatrix}, y_e=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix};$

$$b) e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$c) e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

28. Проверить, является ли система матриц A_1, A_2, A_3, A_4 базисом в линейном пространстве $\mathbf{M}^{22}$ и найти в этом базисе координаты матрицы Y. По известному координатному вектору X_A найти матрицу X.

$$a)\ A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$X_A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix};$$

$$b)\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$c)\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$X_A = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix};$$

29. Проверить, является ли система многочленов p_1, p_2, p_3 базисом в линейном пространстве $\mathbf{P}_2$ и найти координаты многочлена h в этом базисе. По известному координатному вектору g_p найти многочлен g.

$a)\quad p_1 = 4 + 4x + 2x^2, p_2 = -3 - 2x^2, p_3 = -1 - x + x^2, g_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$

$h(x) = 5 - 4x + 4x^2;$

$b)\quad p_1 = -3 + 2x^2, p_2 = 2 + x + 2x^2, p_3 = 4 + 4x - 2x^2, g_f = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$

$h(x) = 5 + x;$

$c)\quad p_1 = 2 + 4x - 2x^2, p_2 = -1 + 2x + x^2, p_3 = -2 - 2x - x^2,$

$g_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, h(x) = 2 + 4x^2.$

4. Линейное подпространство

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 7. *Линейным подпространством* линейного пространства $\boldsymbol{V}$ называется непустое множество $\boldsymbol{L}$ векторов из $\boldsymbol{V}$, обладающее следующими свойствами:

1) сумма $x + y$ двух любых векторов из $\boldsymbol{L}$ снова принадлежит $\boldsymbol{L}$;

2) произведение $\alpha \cdot x$ любого вектора x из $\boldsymbol{L}$ на любое число α снова принадлежит $\boldsymbol{L}$.

Любое линейное подпространство является линейным пространством.

Определение 8. *Размерностью* линейного подпространства $\boldsymbol{L}$ называется число векторов в базисе. Размерность линейного подпространства $\boldsymbol{L}$ обозначается через $\dim L$.

Определение 9. Рассмотрим систему векторов a_1, a_2, ..., a_k из векторного пространства $\boldsymbol{V}$. Множество всевозможных линейных комбинаций векторов a_1, a_2, ..., a_k называется *линейным подпространством, на-*

тянутым на систему векторов a_1, a_2, $\ldots$, a_k или *линейной оболочкой* $\ell(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Таким образом

$$\ell(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \{x \in \boldsymbol{V} \mid x = c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_ka_k\}$$

Определение 10. *Суммой* двух линейных подпространств $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ называется совокупность $\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2$ всех векторов из $\boldsymbol{V}$, каждый из которых представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \boldsymbol{L}_1$ и $x_2 \in \boldsymbol{L}_2$.

Определение 11. *Пересечением* двух линейных подпространств $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ называется совокупность $\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2$ всех векторов из $\boldsymbol{V}$, каждый из которых принадлежит как $\boldsymbol{L}_1$, так и $\boldsymbol{L}_2$.

Теорема 1 (Грассмана). *Пусть* $\boldsymbol{L}_1$ *и* $\boldsymbol{L}_2$ *– линейные подпространства пространства* $\boldsymbol{V}$*, тогда*

$$\dim(\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2) = -\dim(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2) + \dim(\boldsymbol{L}_1) + \dim(\boldsymbol{L}_2), \qquad (4)$$

здесь $\dim(\boldsymbol{L}_1)$, $\dim(\boldsymbol{L}_2)$ *– размерности линейных подпространств* $\boldsymbol{L}_1$ *и* $\boldsymbol{L}_2$*, а* $\dim(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2)$, $\dim(\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2)$ *– размерности суммы и пересечения этих линейных подпространств соответственно.*

Задачи для самостоятельного решения

30. Является ли линейным подпространством линейного пространства $\boldsymbol{R}^n$ каждая из следующих совокупностей векторов:

a) Множество всех векторов, у которых сумма первого и второго элементов неотрицательна: $x_1 + x_2 \geq 0$;

b) Множество всех векторов с рациональными коэффициентами: $\forall i$ $x_i \in \mathbb{Q}$;

c) Множество всех векторов с нулевыми первыми двумя коэффициентами: $x_1 = x_2 = 0$.

31. Является ли подпространством линейного пространства $\mathbf{M}^{nn}, n \geq 2$, следующие множества матриц n-го порядка:

$a)$ Множество всех трехдиагональных матриц, то есть матриц, у которых $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$;

$b)$ Множество всех матриц, квадрат которых равен нулю: $A^2 = 0$;

$c)$ Множество всех вырожденных матриц: $|A| = 0$.

32. Является ли подпространством линейного пространства $\mathbf{P}_n, n \geq 1$, следующие множества многочленов степени не выше n:

$a)$ Множество $\mathbf{P}_m, m < n$;

$b)$ Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n, для которых числа 2 и 3 являются корнями;

$c)$ Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n, для которых $f(0) = f(1)$.

33. Найти базис в подпространстве $\ell(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ и коэффициенты разложения остальных векторов системы по этому базису.

$a)$ $a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},$

$a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, a_6 = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix};$

$b)$ $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$

$a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, a_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix};$

$c)\quad a_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}0\\2\\4\\-2\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1\\5\\-3\\-3\end{pmatrix},$

$a_4=\begin{pmatrix}-1\\-7\\-1\\5\end{pmatrix}, a_5=\begin{pmatrix}-1\\-5\\3\\3\end{pmatrix}, a_6=\begin{pmatrix}1\\7\\1\\-5\end{pmatrix}.$

34. Найти однородную систему линейных алгебраических уравнений, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой $\ell(a_1, a_2, ..., a_k)$, порожденной следующими системами векторов:

$a)\quad a_1=\begin{pmatrix}3\\-3\\1\\-3\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}-6\\6\\-2\\6\end{pmatrix};$

$b)\quad a_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\-3\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\12\end{pmatrix};$

$c)\quad a_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}3\\2\\2\\1\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}7\\0\\4\\-1\end{pmatrix};$

35. Найти базисы суммы и пересечения линейных подпространств, натянутых на системы векторов $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_l$:

$a)\quad a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix},$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$b) \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

5. Преобразование базиса и координат

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть $\boldsymbol{V}$ – линейное пространство размерности n.

Определение 12. *Матрицей перехода* от базиса $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ к базису $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ называется квадратная матрица $T_{e\to u} = (t_{ij})$ размера $n \times n$, по столбцам которой стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе.

Таким образом, базисы e и u связаны матричным равенством

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n) \cdot T_{e\to u}. \tag{5}$$

Равенство (5) можно переписать в следующем виде:

$$(e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot T_{u\to e}. \tag{6}$$

Сравнивая равенства (5) и (6) получаем, что две матрицы перехода $T_{e\to u}$ и $T_{u\to e}$ являются обратными к друг другу, то есть

$$T_{u\to e} = T^{-1}_{e\to u}, \qquad T_{e\to u} = T^{-1}_{u\to e}. \tag{7}$$

При таких обозначениях координаты x_e вектора x в базисе e связаны с координатами x_u того же вектора в базисе u равенствами

$$x_e = T_{e\to u} \cdot x_u \tag{8}$$

или

$$x_u = T_{e\to u}^{-1} \cdot x_e \tag{9}$$

либо

$$x_u = T_{u\to e} \cdot x_e. \tag{10}$$

Задачи для самостоятельного решения

36. Найти матрицу перехода от базиса $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ в линейном пространстве $\boldsymbol{R}^3$. По известным координатам векторов x, y в одном базисе найти их координаты в другом базисе:

$a)\quad e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_e = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$

$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, y_u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$b)\quad e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$

$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$c)\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$

$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, x_u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$

37. Найти матрицу перехода от базиса $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ к базису $g = \{g_1, g_2, g_3\}$ линейного пространства $\boldsymbol{P}_2$:

$a)$ $f_1(x) = 1 + x - 2x^2, f_2(x) = x - x^2, f_3(x) = -2 - 2x + 2x^2,$

$g_1(x) = -3 - 2x + 3x^2, g_2(x) = 2 + x - x^2, g_3(x) = 1 - x - 2x^2.$

$b)$ $f_1(x) = -1 - x^2, f_2(x) = 2 + x - x^2, f_3(x) = -2 - x + 3x^2,$

$g_1(x) = 1 + 2x - 3x^2, g_2(x) = 3 + 2x - x^2, g_3(x) = 3 + 2x - 3x^2.$

$c)$ $f_1(x) = 1 + 2x + 3x^2, f_2(x) = 1 + x + 2x^2, f_3(x) = 1 - x^2,$

$g_1(x) = -2 - x + x^2, g_2(x) = 2 - x - x^2, g_3(x) = -2 - x - x^2.$

38. Найти матрицу перехода от базиса $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ к базису $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ линейного пространства $\boldsymbol{M}^{22}$:

$a)$ $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$

$B_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$

$b)$ $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$

$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

$c)$ $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$

39. Найти координаты вектора x в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, если он задан в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$a) \begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ u_2 = 2e_1 - e_2, \\ u_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} \quad x_e = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$b) \begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ u_2 = (3/2)e_1 - e_2, \\ u_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} \quad x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$c)\ \begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + 4e_3, \\ u_2 = (4/3)e_1 - e_2, \\ u_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}, \qquad x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

40. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

$a)$ поменять местами два элемента первого базиса;

$b)$ поменять местами два элемента второго базиса;

$c)$ записать элементы обоих базисов в обратном порядке?

41. Даны базисы $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, $g = \{g_1, g_2, g_3\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и матрица A. Найти базисы $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ и $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ такие, что матрицы перехода $T_{e\to u} = A$ и $T_{f\to g} = A$:

$$a)\ e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$b)\ e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$c)\ e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Линейный оператор

6. Определение линейного оператора. Матрица линейного оператора

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 13. *Оператором*, действующим в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, называется правило φ, по которому каждому элементу x из $\boldsymbol{V}$ ставится в соответствие некоторый элемент y из $\boldsymbol{V}$. Элемент y называется *образом* элемента x, а элемент x – *прообразом* элемента y. Тот факт, что элемент y соответствует элементу x при действии оператора φ, записывается так:

$$y = \varphi(x). \tag{11}$$

Определение 14. Оператор φ, действующий в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, называется *линейным*, если для любых двух элементов x_1 и x_2 из $\boldsymbol{V}$ и любого числа α выполняются равенства:

$$1)\ \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2); \qquad 2)\ \varphi(\alpha x_1) = \alpha\varphi(x_1). \tag{12}$$

Определение 15. Пусть $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – базис пространства $\boldsymbol{V}$. Тогда векторы

$$\varphi(e_1) = v_1, \varphi(e_2) = v_2, \ldots, \varphi(e_n) = v_n$$

принадлежат пространству $\boldsymbol{V}$ и могут быть разложены по базису:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\varphi(e_1) & = & a_{11}e_1 & + & a_{21}e_2 & + & \ldots & + & a_{n1}e_n, \\
\varphi(e_2) & = & a_{12}e_1 & + & a_{22}e_2 & + & \ldots & + & a_{n2}e_n, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\varphi(e_n) & = & a_{1n}e_1 & + & a_{2n}e_2 & + & \ldots & + & a_{nn}e_n,
\end{array} \tag{13}$$

Квадратная матрица

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

порядка n называется *матрицей линейного оператора φ в базисе e*. Равенство (13) можно переписать в следующем матричном виде

$$\varphi(e) = e \cdot A_e. \tag{14}$$

Определение 16. *Определителем оператора* φ называется определитель его матрицы в каком-нибудь базисе e. Определитель оператора φ обозначается через $|\varphi|$. Таким образом, по определению

$$|\varphi| = |A_e|.$$

Задачи для самостоятельного решения

42. Будет ли линейным оператором, действующим в линейном пространстве $\boldsymbol{M}^{22}$ всех матриц второго порядка с вещественными элементами, каждое из следующих отображений.

Для любой матрицы $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}^{22}$:

a) $\varphi(M) = |M| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $|M|$ – определитель матрицы M.

b) $\varphi(M) = tr(M) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, где $tr(M) = m_{11} + m_{22}$ – след матрицы M.

c) $\varphi(M) = rang(M) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, где $rang(M)$ – ранг матрицы M.

d) $\varphi(M) = m_{11} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$e)\ \varphi(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot M + M \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$

$f)\ \varphi(M) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - M.$

$g)\ \varphi(M) = |M| \cdot M,$ где $|M|$ – определитель матрицыM.

$h)\ \varphi(M) = \begin{pmatrix} m_{22} & m_{21} \\ m_{12} & m_{11} \end{pmatrix}.$

$i)\ \varphi(M) = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{22} & m_{12} + m_{21} \\ m_{21} - m_{12} & m_{21} \end{pmatrix}.$

$j)\ \varphi(M) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & 1 \end{pmatrix}.$

$k)\ \varphi(M) = (m_{12} + m_{22} - m_{21}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$l)\ \varphi(M) = \begin{pmatrix} m_{11}m_{22} & m_{12}m_{21} \\ m_{21}m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$

$m)\ \varphi(M) = |m_{11}| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

43. Будет ли линейным оператором, действующим в линейном пространстве $\boldsymbol{P}_2$ всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше n, каждое из следующих отображений.

Для любого многочлена $f(x) \in \boldsymbol{P}_2$:

$a)\ \varphi(f) = f'(x) + 3f''(x).$ $b)\ \varphi(f) = (x+1)f''(x).$

$c)\ \varphi(f) = f(0)f'(x).$ $d)\ \varphi(f) = (f(1) + f(2))f'(x).$

$e)\ \varphi(f) = 3f'' + f' - f.$ $f)\ \varphi(f) = f'' - f' + 5.$

$g)\ \varphi(f) = f(x+1).$ $h)\ \varphi(f) = xf(x).$

44. Выяснить, какие из следующих операторов, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ являются линейными, и в случае линейности найти их матрицы в естественном базисе e и в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, где $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Для любого вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$:

$a)$ $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 6 - 5x_2 - 4x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix}$,

$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} x_3^4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$;

$b)$ $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ 0 \\ x_2^4 + 2x_3 \end{pmatrix}$,

$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$;

$c)$ $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 \\ x_1 + 2x_2^4 + 3x_3) \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$,

$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3 \end{pmatrix}$;

45. Для следующих линейных операторов, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{P}_2$ найти матрицы в естественном базисе e и в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, где $u_1 = x + 1, u_2 = x^2 + 1, u_3 = (x - 1)^2$, а также найти определитель оператора.

Для любого многочлена $f \in \boldsymbol{P}_2$:

a) $\varphi(f) = -3f''(x) + 3f'(x)$. *b*) $\varphi(f) = f(-2) + f(2)x + f(3)x^2$.
c) $\varphi(f) = f(x+2) + f(0)x + f'(x)$. *d*) $\varphi(f) = f(x) + f(2)x + f'(x)$.
e) $\varphi(f) = 2f'' + 3f$. *f*) $\varphi(f) = f(x+2) + f(-3)x + f'(x)$.

46. Для следующих линейных операторов, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{M}^{22}$ найти матрицы в естественном базисе и определитель.

Для любой матрицы $M \in \boldsymbol{M}^{22}$:

a) $\varphi(M) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M + M \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

b) $\varphi(M) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + 2M$.

c) $\varphi(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot M + M \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\varphi(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 2M$.

e) $\varphi(M) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + M$.

47. Докажите, что оператор дифференцирования $\hat{D}$, действующий в пространстве P_n многочленов степени не выше n ($n \geq 1$), является линейным оператором. Найдите матрицу линейного оператора в базисе:

a) $1, x, \ldots, x^n$;
b) $1, \dfrac{x}{1!}, \ldots, \dfrac{x^n}{n!}$;
c) $1, 1+x, \ldots, 1+x+x^2+\ldots+x^n$; *d*) $1, x-1, x^2-x, \ldots, x^n-x^{n-1}$.

7. Преобразование матрицы линейного оператора

Основные понятия, формулы и теоремы

Будем предполагать, что линейный оператор φ действует в конечномерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ размерности n.

Пусть в базисе $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ заданы элемент x_e и его образ $y_e = \varphi(x_e)$ линейного оператора φ, тогда

$$\varphi(x_e) = y_e = A_e \cdot x_e, \tag{15}$$

где A_e – матрица линейного оператора φ. Формула (15) позволяет определить координаты образа $y_e = \varphi(x_e)$ через координаты прообраза x_e в данном базисе e, если известна матрица A_e оператора φ в этом базисе.

Матрица A_e оператора φ в базисе $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и матрица A_u того же оператора в базисе $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ связаны соотношением

$$A_u = T^{-1} \cdot A_e \cdot T, \tag{16}$$

где T – матрица перехода от базиса e к базису u: $u = e \cdot T$.

Равенство (16) может быть переписано в следующем виде:

$$A_e = T \cdot A_u \cdot T^{-1}. \tag{17}$$

Задачи для самостоятельного решения

48. Доказать, что существует единственный линейный оператор, действующий в трехмерном линейном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ и переводящий векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в b_1, b_2, b_3. Найти его матрицу в базисе, в котором даны координаты всех векторов:

$$a)\ a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$b)\ a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$c)\ a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$

$b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$

49. Линейный оператор φ в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u линейного оператора φ в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$:

$a)\ A_e = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$

$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$b)\ A_e = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$

$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$

$c)\ A_e = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

50. Линейный оператор φ в базисе $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ имеет матрицу A_f. Найти матрицу A_g линейного оператора φ в базисе $g = \{g_1, g_2, g_3\}$:

$a)$ $A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{array}{l} g_1(x) = 1 + 2x, \\ g_2(x) = -1 + 2x + x^2, \\ g_3(x) = -1 + x + x^2. \end{array}$

$b)$ $A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{array}{l} g_1(x) = -3 + x + 2x^2, \\ g_2(x) = -2 + x + x^2, \\ g_3(x) = -2 + x^2. \end{array}$

$c)$ $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{array}{l} g_1(x) = -1 + 2x - 2x^2, \\ g_2(x) = -1 + x, \\ g_3(x) = 2 - 2x + x^2. \end{array}$

51. Линейный оператор φ в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u линейного оператора φ в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, если известно разложение векторов базиса u в линейные комбинации по базису e:

$a)$ $A_e = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{array}{lcl} u_1 & = & 2e_1 + 3e_2 + e_3, \\ u_2 & = & 3e_1 + 4e_2 + e_3, \\ u_3 & = & e_1 + 2e_2 + 2e_3. \end{array}$

$b)$ $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{array}{lcl} u_1 & = & e_1 - e_2 + e_3, \\ u_2 & = & -e_1 + e_2 - 2e_3, \\ u_3 & = & -e_1 + 2e_2 + e_3. \end{array}$

$c)$ $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{array}{lcl} u_1 & = & e_1 + 2e_2 - 3e_3, \\ u_2 & = & e_2 - e_3, \\ u_3 & = & -e_1 - e_2 + 3e_3. \end{array}$

52. Линейный оператор φ в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u оператора φ в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, если известно разложение векторов базиса e в линейные комбинации по базису u:

$$a)\ A_e = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{rcl} e_1 & = & u_1 - 2u_2 - u_3, \\ e_2 & = & -u_1 + 3u_2 + 2u_3, \\ e_3 & = & -2u_2 - u_3. \end{array}$$

$$b)\ A_e = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{rcl} e_1 & = & u_1 - 2u_2 + u_3, \\ e_2 & = & 2u_1 - 3u_2 + u_3, \\ e_3 & = & -u_1 + 2u_2. \end{array}$$

$$c)\ A_e = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{rcl} e_1 & = & u_1 - 2u_2 + 2u_3, \\ e_2 & = & -u_1 + 3u_2 - 3u_3, \\ e_3 & = & -u_2 + 2u_3. \end{array}$$

8. Действия над линейными операторами. Обратный оператор

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть линейный оператор φ действует в конечномерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ размерности n.

Определение 17. *Суммой $\varphi + \psi$ линейных операторов φ и ψ,* действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, называется оператор ϕ, действие которого на любой элемент $x \in \boldsymbol{V}$ задается равенством $\phi(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. Сумма двух линейных операторов является линейным оператором, а матрица суммы линейных операторов (в любом базисе) равна сумме матриц этих операторов.

Определение 18. *Произведением $\alpha\varphi$ линейного оператора φ*, действующего в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, на число α называется оператор ϕ, действие которого на любой элемент $x \in \boldsymbol{V}$ задается равенством $\phi(x) = \alpha(\varphi(x))$. Произведение линейного оператора φ на число α является линейным оператором, а матрица этого оператора (в любом базисе) равна произведению матрицы оператора на число α.

Определение 19. *Произведением $\varphi \cdot \psi$ линейных операторов φ и ψ,* действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, называется оператор ϕ, действие которого на любой элемент $x \in \boldsymbol{V}$ задается равенством $\phi(x) = \varphi(\psi(x))$. Произведение двух линейных операторов является линейным оператором, а матрица произведения линейных операторов (в любом базисе) равна произведению матриц этих операторов.

Определение 20. *Тождественным или единичным оператором* I называется оператор, который каждому элементу $x \in \boldsymbol{V}$ сопоставляет этот же элемент: $I(x) = x$.

Определение 21. Линейный оператор φ^{-1} называется *обратным* к линейному оператору φ, если выполняются равенства $\varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi = I$, где I – тождественный оператор.

Если A – матрица оператора φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то матрица обратного оператора φ^{-1} в том же базисе равна A^{-1}, то есть является обратной по отношению к матрице A.

Определение 22. Если определитель линейного оператора $|\varphi| \neq 0$, то оператор называется *невырожденным*. В противном случае – *вырожденным*.

Теорема 1 (Критерий обратимости оператора). *Для того чтобы существовал обратный оператор к линейному оператору φ, необходимо и достаточно, чтобы оператор был невырожденным.*

Задачи для самостоятельного решения

53. Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$. Для двух линейных операторов $\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}, \psi(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$, действующих в пространстве $\boldsymbol{R}^3$, найти:

a) $(3\psi + 2\varphi^2)x$. *b*) $(\varphi^2 - \psi)x$. *c*) $\psi(2\varphi - \psi)x$. *d*) $\psi^3 x$.

54. Линейный оператор φ в базисе $e = \{e_1, e_2\}$ имеет матрицу A_e. Линейный оператор ψ в базисе $u = \{u_1, u_2\}$ имеет матрицу B_u. Найти матрицы линейных операторов $\varphi + \psi$ и $\varphi - 2\psi$ в базисе u:

$a)$ $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$

$e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$b)$ $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$

$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$c)$ $A_e = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$

$e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

55. Линейный оператор φ в базисе $v = \{v_1, v_2\}$ имеет матрицу A_v. Линейный оператор ψ в базисе $u = \{u_1, u_2\}$ имеет матрицу B_u. Найти матрицы линейных операторов $\varphi \cdot \psi$ и $\varphi^2 + \psi$ в базисе, в котором даны координаты векторов:

$a)$ $A_v = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$

$v_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$b)$ $A_v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$

$v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$c)$ $A_v = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$

$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

56. Для следующих линейных операторов φ, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{R}^3$, выяснить их обратимость. В случае их обратимости найти обратные операторы:

$a)\ \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix},$

$c)\ \varphi(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$

57. Выяснить обратимость линейных операторов φ, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{Q}_2$ всех многочленов степени не выше второй с вещественными коэффициентами. В случае их обратимости найти обратные операторы. Для любого многочлена $f \in \boldsymbol{Q}_2$, линейные операторы φ задаются по следующим правилам:

$a)\ \varphi(f) = f'' - 3f' + f. \qquad b)\ \varphi(f) = 2f'' - 3f' + f. \qquad c)\ \varphi(f) = -2f' + f.$

58. Пусть φ и ψ – линейные операторы, действующие в линейном пространстве $\boldsymbol{R}_2$. В базисе e_1, e_2 оператор φ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. В базисе f_1, f_2 оператор ψ имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, причем $f = eC$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу:

$a)$ оператора $\varphi^2 + 6\varphi + 9I$ в базисе e_1, e_2 (I – тождественный оператор);

$b)$ оператора $\psi^2 + 4\psi + 4I$ в базисе f_1, f_2;

$c)$ оператора $\varphi^2 - \psi^2$ в базисе e_1, e_2;

$d)$ оператора $\varphi \cdot \psi^{-1}$ в базисе f_1, f_2.

9. Ядро, область значений, собственные числа и собственные векторы линейного оператора

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть линейный оператор φ действует в конечномерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ размерности n.

Определение 23. Множество $Im(\varphi)$ образов всех векторов из $\boldsymbol{V}$ при действии оператора φ называется *областью значений* или *образом* линейного оператора φ, то есть

$$Im(\varphi) = \Big\{ y \in \boldsymbol{V} \;\Big|\; y = \varphi(x) \Big\}.$$

Размерность подпространства $Im(\varphi)$ называется *рангом оператора* φ и обозначается через $rank(\varphi)$.

Определение 24. Множество $Ker(\varphi)$ всех векторов линейного пространства $\boldsymbol{V}$, которые переводятся линейным оператором φ в нулевой вектор называется *ядром оператора*, то есть

$$Ker(\varphi) = \Big\{ x \in \boldsymbol{V} \;\Big|\; \varphi(x) = 0 \Big\}. \tag{18}$$

Размерность подпространства $Ker(\varphi)$ называется *дефектом оператора* φ и обозначается через $def(\varphi)$.

Имеет место следующее равенство:

$$rank(\varphi) + def(\varphi) = n.$$

Определение 25. Ненулевой элемент x из $\boldsymbol{V}$ называется *собственным вектором* линейного оператора φ, если существует число λ такое, что $\varphi(x) = \lambda x$. Число λ при этом называется *собственным значением* оператора φ. Говорят также, что собственный вектор x отвечает (или соответствует) собственному значению λ.

Алгоритм отыскания собственных векторов и собственных значений линейного оператора φ.

Пусть A – матрица линейного оператора φ, E – единичная матрица. Тогда для того, чтобы найти собственные значения и собственные векторы, нужно выполнить следующие действия:

1. Найти собственные значения оператора, решая характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{19}$$

Обозначим их λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k, $k \leq n$.

2. Для каждого собственного значения λ_p найти все ненулевые решения однородной системы уравнений

$$(A - \lambda_p E)X = \Theta. \tag{20}$$

Правило для решения характеристических уравнений в одном частном случае.

Пусть дана матрица A размера 3×3, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В этом случае характеристическое уравнение (19) имеет вид

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \tag{21}$$

где I_1, I_2, I_3 – вещественные числа, которые называются *инвариантами* и вычисляются по следующим формулам:

$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$;

$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;

$I_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Теорема 1. *Линейный оператор φ, действующий в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, тогда и только тогда задается в базе e_1, e_2, …, e_n диагональной матрицей, если все векторы этой базы являются собственными векторами линейного оператора φ.*

На основании теоремы 1 можно составить *алгоритм приведения матрицы к диагональному виду.* Для того, чтобы привести данную квадратную матрицу A размерности n к диагональному виду необходимо:

1. Найти λ_1, λ_2, …, λ_n собственные числа матрицы A.

2. Для каждого собственного значения λ_i найти соответствующий ему собственный вектор. Если в результате вычисления мы получим систему из n линейно независимых собственных векторов U_1, U_2, …, U_n, то матрицу A можно привести к следующему диагональному виду:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{22}$$

3. Записать собственные векторы как столбцы новой матрицы T. Полученная матрица T является базисом, в котором матрица A имеет диагональный вид (22).

Задачи для самостоятельного решения

59. Найти ранг, базисы ядра и образа линейного оператора φ, действующего в линейном пространстве $\boldsymbol{R}^4$ по правилу $\varphi(x) = M \cdot x$, где матрица M дана ниже:

$a)\ M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. $\quad b)\ M = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$c)\ M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

60. Найти ранг, базисы ядра и образа линейного оператора φ, действующего в линейном пространстве $\boldsymbol{M}^{22}$ всех вещественных матриц M второго порядка по правилу:

$a)\ \varphi(M) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} M + M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

$b)\ \varphi(M) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M + M \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

$c)\ \varphi(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} M + M \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

61. Найти ранг, базисы ядра и образа линейного оператора φ, действующего в линейном пространстве $\boldsymbol{P}_3$ всех многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами по правилу:

$a)\ \varphi(f) = (-3 + 2x^3)f''' + (3 + 3x - x^2)f'' - (1 + x)f' + f.$

$b)\ \varphi(f) = (2x + 2x^2)f''' - 2(1 + x)f''.$

$c)\ \varphi(f) = (1 + x^2)f''' - (2 + x - x^2)f'' - (1 + 3x)f' + 3f.$

62. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе следующими матрицами:

$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad c)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$

$d)\ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\quad e)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\quad f)\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

63. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе следующими матрицами:

$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\quad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad c)\ \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix},$

$$d)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad e)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \qquad f)\ \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

64. Выяснить, какие из следующих матриц линейных операторов можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу:

$$a)\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad c)\ \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad e)\ \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Евклидово пространство. Квадратичные формы

10. Евклидово пространство

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть $\boldsymbol{E}_n$ – линейное пространство размерности n.

Определение 26. *Скалярным произведением* элементов x и y из $\boldsymbol{E}_n$ называется правило, ставящее в соответствие вещественное число (будем обозначать это число (x, y)), причем указанное правило удовлетворяет для любых x, y, z из $\boldsymbol{E}_n$ и любого вещественного числа α следующим требованиям (они называются *аксиомами скалярного произведения*).

1^0. $(x, y) = (y, x)$ (перестановочность или коммутативность сомножителей).

2^0. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (распределительное свойство).

3^0. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

4^0. $(x, x) > 0,$ если $x \neq 0$ и $(x, x) = 0,$ если $x = 0$.

Определение 27. Вещественное линейное пространство $\boldsymbol{E}_n$ называется *евклидовым пространством*, если в нем введено скалярное произведение векторов.

Определение 28. *Нормой* элемента $x \in \boldsymbol{E}_n$ (обозначение $\|x\|$) называется вещественное число, определяемое по формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{23}$$

Определение 29. Вектор x называется *нормированным*, если его норма $\|x\| = 1$.

Определение 30. Углом между ненулевыми векторами $x, y \in \boldsymbol{E}_n$ называется число φ, удовлетворяющее условиям

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\,\|y\|}, \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi. \tag{24}$$

Определение 31. Элементы x и y из $\boldsymbol{E}_n$ называются *ортогональными* (обозначение: $x \perp y$), если их скалярное произведение равно нулю, то есть

$$x \perp y, \text{ тогда и только тогда, когда } (x, y) = 0. \tag{25}$$

Определение 32. Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \boldsymbol{E}_n$ называется *ортогональным*, если элементы базиса попарно ортогональны, то есть

$$(e_i, e_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{26}$$

Определение 33. Ортогональный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \boldsymbol{E}_n$ называется *ортонормированным*, если

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{27}$$

Пусть координаты элементов x, y из евклидова пространства $\boldsymbol{E}_n$ заданы в ортонормированном базисе, тогда скалярное произведение и норму можно вычислить по формулам

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{28}$$

Процедура ортогонализации Грамма-Шмидта

Ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}_n$ можно построить на основе произвольного базиса с помощью процедуры ортогонализации. Опишем эту процедуру.

Пусть даны k линейно независимых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ евклидова пространства $\boldsymbol{E}_n$. Построим попарно ортогональные элементы $e_1, e_2, \ldots, e_k$, представляющие собой линейные комбинации элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ следующим образом.

Положим

$$e_1 = x_1, \quad e_2 = x_2 - a_{12} e_1, \qquad \text{где } a_{12} = \frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)}. \tag{29}$$

Такой выбор коэффициента a_{12} обеспечивает ортогональность e_1 и e_2: $(e_1, e_2) = 0$. Далее, положим

$$e_3 = x_3 - a_{13}e_1 - a_{23}e_2 = x_3 - \sum_{i=1}^{2} a_{i3}e_i, \tag{30}$$

где $a_{13} = \dfrac{(x_3, e_1)}{(e_1, e_1)}$, $a_{23} = \dfrac{(x_3, e_2)}{(e_2, e_2)}$. Такой выбор коэффициентов a_{13} и a_{23} обеспечивает ортогональность e_3 к элементам e_1 и e_2. И так далее.

На m-м шаге $m \leq k$ полагаем

$$e_m = x_m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{im}e_i, \qquad \text{где } \; a_{im} = \frac{(x_m, e_i)}{(e_i, e_i)}. \tag{31}$$

Такой выбор коэффициентов a_{im} обеспечивает ортогональность e_m к элементам e_1, e_2, …, e_{m-1}. В результате k шагов описанная процедура дает ортогональную систему векторов e_1, e_2, …, e_k.

Нормирование системы векторов

Чтобы сделать ортогональную систему векторов e_1, e_2, …, e_k ортонормированной, нужно каждый элемент e_i умножить на число $\dfrac{1}{\|e_i\|}$. Полученные в результате элементы $g_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$, …, $g_k = \dfrac{e_k}{\|e_k\|}$ образуют ортонормированную систему векторов.

Ортогональное дополнение

Определение 34. *Вектор x ортогонален подпространству L* (обозначение $x \perp L$), если вектор x ортогонален любому вектору y подпространства L, то есть $(x, y) = 0$, $\forall y \in L$.

Определение 35. *Ортогональным дополнением $L^{\perp}$* линейного подпространства L называется множество всех векторов из евклидова пространства E_n, ортогональных к L, то есть

$$L^{\perp} = \{x \in E_n \;\big|\; x \perp L\}. \tag{32}$$

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая

Определение 36. Вектор y подпространства L называется *ортогональной проекцией вектора x на подпространство L*, если вектор $x-y$ ортогонален подпространству L. В этом случае используется обозначение $y = pr_L x$. Вектор $z = x - pr_L x$ называется *ортогональной составляющей вектора x относительно подпространства L*.

Из определения 36, следует справедливость равенства

$$x = y + z, \tag{33}$$

где y – ортогональная проекция вектора x на подпространство L, а z – ортогональная составляющая вектора x относительно подпространства L.

Алгоритм построения ортогональной проекции y и ортогональной составляющей z

1. Построить базис подпространства L: $f = \{f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_k\}$.

2. Вычислить скалярные произведения векторов базиса f:

$$\begin{array}{llllll}
(f_1, f_1), & (f_1, f_2), & (f_1, f_3), & \ldots, & (f_1, f_k), & (f_1, x), \\
(f_2, f_1), & (f_2, f_2), & (f_2, f_3), & \ldots, & (f_2, f_k), & (f_2, x), \\
\multicolumn{6}{l}{\dotfill} \\
(f_k, f_1), & (f_k, f_2), & (f_k, f_3), & \ldots, & (f_k, f_k), & (f_k, x).
\end{array} \tag{34}$$

3. Вычислить неизвестные c_1, c_2, c_3, …, c_k, решая систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{array}{lllll}
c_1(f_1, f_1) & + \; c_2(f_1, f_2) & + \; c_3(f_1, f_3) & + \ldots + & c_k(f_1, f_k) = (x, f_1), \\
c_1(f_2, f_1) & + \; c_2(f_2, f_2) & + \; c_3(f_2, f_3) & + \ldots + & c_k(f_2, f_k) = (x, f_2), \\
\multicolumn{5}{l}{\dotfill} \\
c_1(f_k, f_1) & + \; c_2(f_k, f_2) & + \; c_3(f_k, f_3) & + \ldots + & c_k(f_k, f_k) = (x, f_k).
\end{array} \tag{35}$$

4. Построить ортогональную проекцию вектора x на подпространство L, применяя формулу

$$y = pr_L x = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + \ldots + c_k f_k. \tag{36}$$

5. Построить ортогональную составляющую вектора x относительно подпространства L, применяя формулу $z = x - y$.

Задачи для самостоятельного решения

65. Найти нормы векторов a, b и угол между ними в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}_4$:

$$a)\quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad b)\quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$c)\quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad d)\quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

66. Проверить, что векторы следующих систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов пространства $\boldsymbol{E}_4$:

$$a)\quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad b)\quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

67. Найти векторы, дополняющие следующие системы векторов до ортонормированных базисов пространства $\boldsymbol{E}_n$:

$$a)\ x_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}. \quad b)\ x_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

68. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов:

$$a)\ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$b)\ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$

69. Найти базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$ подпространства L, натянутого на векторы:

$a)\ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$b)\ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$c)\ x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$

70. Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x на линейное подпространство L, которое натянуто на систему векторов a_1, a_2, a_3 :

$a)\quad x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},\ a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$b)\quad x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$

11. Квадратичные формы. Метод Лагранжа

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 37. *Квадратичной формой* называется функция числовых переменных x_1, x_2, …, x_n следующего вида:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{37}$$

где a_{ij} – вещественные числа (*коэффициенты квадратичной формы*), удовлетворяющие условию

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{38}$$

Матрица $A = (a_{ij})$ с размером $n \times n$ называется *матрицей квадратичной формы.* Из равенства (38) следует, что матрица квадратичной формы A является симметрической.

Квадратичную форму (37) можно записать в матричном виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T A X,$$

где X – столбец переменных x_1, x_2, …, x_n, X^T – строка, полученная транспонированием столбца X, A – матрица квадратичная формы.

Любую квадратичную форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

невырожденным линейным преобразованием $X = Q \cdot Y$ можно привести к виду

$$\widetilde{f} = \sum_{i=1}^{n} c_i \bigl(y_i\bigr)^2. \tag{39}$$

Определение 38. Выражение (39) называется *каноническим видом квадратичной формы*, а числа c_i $(i = 1, \ldots, n)$ – ее *каноническими коэффициентами.* Матрица квадратичной формы $\widetilde{f}$, имеющей канонический вид, является диагональной матрицей с элементами c_i на главной диагонали. Если в квадратичной форме (39) все канонические коэффициенты

$c_i = \pm 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, то ее также называют *нормальным видом квадратичной формы.*

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду (метод Лагранжа):

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица квадратичной формы. Для того чтобы привести квадратичную форму к каноническому виду необходимо выполнить следующие действия:

1. Если существует ненулевой элемент $a_{ij} \neq 0$, $i \neq j$ и на главной диагонали матрицы $a_{ii} \neq 0$, то необходимо выполнить преобразование $X = Q_1 Y$, где

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & x_1 \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ y_{i-1} & = & x_{i-1} \\ y_i & = & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \\ y_{i+1} & = & x_{i+1} \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ y_n & = & x_n \end{array}\right. \tag{40}$$

2. Если все элементы на главной диагонали равны нулю, то найти любой ненулевой элемент матрицы $a_{ij} \neq 0$ и выполнить преобразование $X = Q_2 Z$, где

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_i & = & z_i - z_j \\ x_j & = & z_i + z_j \\ x_k & = & z_k, \ k \neq i, j. \end{array}\right. \tag{41}$$

Выполнение преобразований (40) и (41) приведет квадратичную форму (37) к каноническому виду (39).

Задачи для самостоятельного решения

71. Найти канонический вид и матрицу линейного преобразования, которое приведет квадратичную форму к этому виду:

а) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

b) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

c) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

d) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

e) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

f) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

g) $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$;

h) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

12. Приведение квадратичной формы к главным осям. Критерий Сильвестра

Основные понятия, формулы и теоремы

Приведение квадратичной формы к главным осям

Определение 39. Квадратная матрица Q называется *ортогональной*, если выполняется равенство

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Определение 40. Линейное преобразование переменных $X = QY$, называется *ортогональным*, если его матрица Q ортогональная.

Теорема 1. *Для любой квадратичной формы f*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{42}$$

существует ортогональное преобразование $X = QY$, приводящее ее к каноническому виду:

$$\tilde{f} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2. \tag{43}$$

При этом λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ – собственные значения матрицы квадратичной формы A, а столбцы матрицы Q – ортонормированная система собственных векторов матрицы A (норма каждого из них равна 1).

Пусть дана квадратичная форма (42) с матрицей $A = (a_{ij})$. Тогда *алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям* состоит в следующем:

1. Найти собственные значения матрицы A, решая характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Обозначим их λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n.

2. Для каждого собственного значения λ_p, $1 \leq p \leq n$ найти все ненулевые решения однородной системы уравнений

$$(A - \lambda_p E)X = 0.$$

Найденные решения будут собственными векторами, соответствующие собственному значению λ_p.

3. Используя процеду ортогонализации, ортогонализировать и нормировать систему из собственных векторов матрицы A (если это необходимо).

4. Составить ортогональную матрицу Q, столбцами которой являются ортонормированные векторы матрицы A.

5. Записать канонический вид квадратичной формы:

$$\tilde{f} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

6. Записать ортогональное преобразование переменных $X = QY$, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

Критерий Сильвестра

Определение 41. Квадратичная форма f называется *положительно определенной,* если ее нормальный вид следующий

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

Определение 42. Определители

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix},\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются *главными минорами* матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$.

Теорема 2. *(критерий Сильвестра). Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительны, то есть*

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

72. Найти канонический вид, к которому приводятся следующие квадратичные формы посредством ортогонального преобразования, не находя самого этого преобразования:

a) $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

b) $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

c) $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

73. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие формы к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический вид:

a) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

c) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;

d) $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

e) $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

f) $8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$.

74. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

a) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;

c) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$;

e) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;

Программа к экзамену

1 сесместр

1. Определение комплексных чисел. Число i. Основные операции над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

2. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня из комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.

3. Перестановки. Доказать теорему об общем количестве перестановок из n символов.

4. Определение инверсии и транспозиции. Определение четности и нечетности перестановок. Доказать, что любая транспозиция меняет четность перестановки. Доказать, что число четных перестановок равно числу нечетных перестановок из n символов.

5. Общее определение определителя n-го порядка. Вывести из определения определителя n-го порядка формулы для вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.

6. Доказать, что определитель не изменяется при транспонировании.

7. Доказать, что определитель изменит свой знак, если в нем поменять местами две строки или два столбца.

8. Доказать, что определитель равен нулю, если он содержит две одинаковые строки (или два одинаковых столбца).

9. Доказать, если все элементы некоторой строки (или столбца) умножить на некоторое число k, то определитель умножится на это число.

10. Доказать, что определитель, содержащий две пропорциональные строки (или два пропорциональных столбца), равен нулю.

11. Доказать, что определитель, содержащий нулевую строку (или нулевой столбец) равен нулю.

12. Доказать, что если одна из строк определителя есть сумма других строк, то определитель равен нулю. То же самое справедливо и для столбцов.

13. Доказать, что определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить другую строку, умноженную на произвольное число. То же самое справедливо и для столбцов.

14. Определение миноров, дополнительных миноров и алгебраических дополнений.

15. Доказать, что если все элементы последней строки (или столбца) определителя, кроме последнего, равны нулю, то определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение.

16. Доказать, что если все элементы какой-либо строки (или столбца) определителя, кроме a_{ij}, равны нулю, то определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение.

17. Доказать теорему о разложении по строке или столбцу.

18. Сформулировать теорему Лапласа (без доказательства).

19. Сформулировать при каких условиях справедливо и доказать следующее свойство умножения матриц: $A \cdot (B + C) = AB + AC$.

20. Сформулировать при каких условиях справедливо и доказать следующее свойство умножения матриц: $(A + B) \cdot C = AC + BC$.

21. Сформулировать при каких условиях справедливо и доказать следующее свойство умножения матриц: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

22. Сформулировать при каких условиях справедливо и доказать следующее свойство умножения матриц: $A \cdot E = E \cdot A = A$.

23. Сформулировать при каких условиях справедливо свойство о транспонировании произведения матриц.

24. Доказать теорему об определителе произведения квадратных матриц.

25. Определение обратной матрицы. Доказать теорему о единственности обратной матрицы.

26. Доказать теорему о существовании обратной матрицы.

27. Определение линейной зависимости и линейной независимости систем векторов.

28. Доказать, что если система векторов содержит хотя бы один нулевой вектор, то она линейно зависима.

29. Доказать свойство о линейной зависимости системы векторов, содержащей линейно зависимую подсистему.

30. Доказать, что если система векторов содержит хотя два пропорциональных столбца, то она является линейно зависимой.

31. Доказать, что система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее векторов есть линейная комбинация остальных векторов системы.

32. Определение и свойства максимальных линейно-независимых систем.

33. Определение ранга матрицы.

34. Сформулировать и доказать основную теорему о ранге матрицы.

35. Следствия из основной теоремы о ранге матрицы.

36. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

37. Сформулировать и доказать теорему Крамера.

38. Определения элементарных преобразований и элементарных матриц. Определители элементарных матриц. Доказать, что любое элементарное преобразование эквивалентно умножению слева на соответствующую элементарную матрицу.

39. Определение расширенной матрицы системы. Доказать, что выполнение любого элементарного преобразования над расширенной матрицей системы не изменяет множество решений системы.

40. Определение эквивалентных матриц. Доказать, что если определитель матрицы не равен нулю, то она эквивалентна единичной матрице.

41. Определение совместности систем. Сформулировать и доказать теорему Кронекера-Капелли.

42. Определение однородных систем линейных уравнений. Свойство решений однородных систем.

43. Определение ФСР. Доказать теорему о числе векторов в ФСР.

44. Сформулировать и доказать теорему о связи между решениями однородной и неоднородной систем уравнений.

2 сесместр

1. Определение линейного пространства. Аксиоматика и примеры.

2. Базис линейного пространства.

3. Конечномерные линейные пространства.

4. Матрица перехода. Доказать, что матрица перехода является невырожденной.

5. Доказать теорему о связи между базисами линейного пространства.

6. Привести и доказать формулу о преобразовании координат вектора при переходе от одного базиса к другому базису.
7. Определение линейного подпространства. Доказать, что любое линейное подпространство само является пространством.
8. Определение линейной оболочки. Доказать, что линейная оболочка является линейным подпространством.
9. Доказать, что линейное подпространство порождается конечной системой векторов и наоборот.
10. Определение суммы и пересечения двух линейных подпространств.
11. Теорема о размерности суммы и пересечения подпространств с доказательством.
12. Определение линейного оператора.
13. Доказать теорему о том, что линейный оператор оставляет неподвижным нулевой вектор.
14. Доказать теорему о соответствии линейному оператору квадратной матрицы.
15. Определение подобных матриц. Свойства подобных матриц.
16. Определение суммы линейных операторов. Доказать теорему о матрице суммы линейных операторов.
17. Определение произведения линейных операторов. Доказать теорему о матрице произведения линейных операторов.
18. Определение произведения оператора на число. Доказать теорему о матрице произведения на число.
19. Определение невырожденного линейного оператора.

20. Определение обратного оператора.

21. Доказать, что у любого невырожденного оператора существует обратный оператор.

22. Матрица обратного оператора.

23. Определение характеристического многочлена и характеристических корней квадратной матрицы.

24. Доказать, что подобные матрицы обладают равными характеристическими корнями.

25. Определение характеристического корня и собственного значения линейного оператора.

26. Доказать, что характеристические корни и только они служат собственными значениями линейного оператора.

27. Операторы простого спектра.

28. Доказать, что множество собственных векторов, относящихся к одному и тому же собственному значению вместе с нулевым вектором образуют линейное подпространство.

29. Доказать, что линейный оператор имеет не более n собственных значений.

30. Доказать критерий о вырожденности линейного оператора.

31. Доказать, что собственные векторы, относящиеся к различным собственным значениям, линейно независимы.

32. Определение скалярного произведения и примеры.

33. Определение ортогональных систем.

34. Доказать, что любая ортогональная система линейно независима.

35. Определение ортонормированной системы векторов.
36. Доказать теорему о вычислении скалярного произведения в ортонормированных системах.
37. Обосновать процесс ортогонализации.
38. Доказать, что евклидово пространство обладает ортонормированными базами.
39. Определение ортогональных матриц и их свойства с доказательством.
40. Доказать, что матрица перехода от одной ортонормированной базы к другой является ортогональной и наоборот.
41. Определение ортогонального оператора.
42. Доказать, что ортогональный оператор переводит одну ортонормированную базу в другую и наоборот.
43. Доказать теорему о связи ортогональной матрицы и ортогонального оператор.
44. Определение симметрического оператора и примеры.
45. Доказать свойства симметрических операторов.
46. Доказать теорему о связи симметрического оператора и симметрической матрицы.
47. Доказать, что все собственные значения симметрического оператора есть действительные числа.
48. Доказать, что собственные векторы симметрической матрицы, относящиеся к различным собственным значениям, ортогональны.
49. Доказать теорему о связи симметрического оператора и ортонормированной базы из собственных векторов.

50. Определение квадратичной формы, матрица квадратичной формы.
51. Линейное преобразование переменных.
52. Преобразование матрицы квадратичной формы при линейном преобразовании переменных.
53. Ранг квадратичной формы.
54. Сформулировать и доказать теорему метода Лагранжа.
55. Сформулировать и доказать закон инерции.
56. Определение положительно определенных квадратичных форм.
57. Первый критерий положительноопределенности с доказательством.
58. Критерий Сильвестра.

Ответы и указания к решению задач

1. *Решение.* Операции сложения векторов и умножения вектора на число определены корректно, так как произведение положительных чисел положительно и положительна (по определению) любая вещественная степень положительного числа. Проверим теперь условия 1)–8) определения линейного пространства.

1) Сложение векторов коммутативно потому, что умножение вещественных чисел обладает этим свойством. Действительно, коммутативность сложения векторов следует из цепочки равенств:

$$x + y = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n) =$$

$$= (y_1 \cdot x_1, y_2 \cdot x_2, \ldots, y_n \cdot x_n) = y + x$$

для любых $x, y \in \boldsymbol{G}$.

2) Аналогично проверяется ассоциативность сложения векторов. Для любых x, y, $z \in \boldsymbol{G}$ имеем

$$(x + y) + z = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n) + z =$$

$$= (x_1 \cdot y_1 \cdot z_1, x_2 \cdot y_2 \cdot z_2, \ldots, x_n \cdot y_n \cdot z_n) =$$

$$= x + (y_1 \cdot z_1, y_2 \cdot z_2, \ldots, y_n \cdot z_n) = x + (y + z).$$

3) В качестве ноль-вектора нужно взять вектор $0 = (1, 1, \ldots, 1)$. Действительно,

$$x + 0 = (x_1 \cdot 1, x_2 \cdot 1, \ldots, x_n \cdot 1) = x$$

для любого вектора $x \in \boldsymbol{G}$.

4) Для любого вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ противоположным элементом будет вектор

$$x' = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}),$$

так как

$$x + y = (x_1 \cdot x_1^{-1}, x_2 \cdot x_2^{-1}, \ldots, x_n \cdot x_n^{-1}) = (1, 1, \ldots, 1) = 0.$$

5) Для любых $x, y \in \boldsymbol{G}$ и любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$ имеем

$$\alpha(x + y) = \alpha(x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n) =$$

$$= ((x_1 y_1)^\alpha, (x_2 y_2)^\alpha, \ldots, (x_n y_n)^\alpha) = (x_1^\alpha y_1^\alpha, x_2^\alpha y_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha y_n^\alpha) =$$

$$= (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) + (y_1^\alpha, y_2^\alpha, \ldots, y_n^\alpha) = \alpha x + \alpha y.$$

6) Для любого $x \in \boldsymbol{G}$ и любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ имеем

$$(\alpha + \beta)x = (x_1^{\alpha+\beta}, x_2^{\alpha+\beta}, \ldots, x_n^{\alpha+\beta}) = (x_1^\alpha x_1^\beta, x_2^\alpha x_2^\beta, \ldots, x_n^\alpha x_n^\beta) =$$

$$= (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) + (x_1^\beta, x_2^\beta, \ldots, x_n^\beta) = \alpha x + \beta x.$$

7) Для любого $x \in \boldsymbol{G}$ и любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ имеем

$$(\alpha\beta)x = (x_1^{\alpha\beta}, x_2^{\alpha\beta}, \ldots, x_n^{\alpha\beta}) =$$

$$= ((x_1^\beta)^\alpha, (x_2^\beta)^\alpha, \ldots, (x_n^\beta)^\alpha) = \alpha(x_1^\beta, x_2^\beta, \ldots, x_n^\beta) = \alpha(\beta x).$$

8) Наконец, для любого $x \in \boldsymbol{G}$

$$1 \cdot x = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) = x.$$

Следовательно, данное множество $\boldsymbol{G}$ с данными операциями сложения векторов и умножения вектора на вещественное число является вещественным линейным пространством.

2. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 3) и 6).

3. Не является линейным пространством, так как не выполняется аксиома 6).

4. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 1), 2) и 6).

5. Не является линейным пространством, так как противоположный элемент $x' = (1/x_1, ..., 1/x_n)$ не определен, например, для элемента $(0, 0, ..., 0)$.

6. Не является линейным пространством, так как не выполняется аксиома 6).

7. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 6) и 7).

8. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 2), 3), 4), 6) при $n > 1$.

9. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 1), 2) и 6).

10. *Решение.* Легко видеть, что обе операции определены корректно. Проверим условия 1)–8) линейного пространства.

1) Операция сложения коммутативна. Действительно, так как

$$-a_{ij} - b_{ij} = -b_{ij} - a_{ij}, \quad \text{для} \quad \forall i = \overline{1,m},\ \forall j = \overline{1,n}.$$

то

$$A + B = B + A, \quad \text{для любых} \quad A, B \in \boldsymbol{G}.$$

2) Проверим ассоциативность операции сложения.

Пусть A, B, C — три произвольные матрицы из множества $\boldsymbol{G}$ с элементами a_{ij}, b_{ij} и c_{ij} соответственно. Тогда матрица $(A + B) + C$ состоит из элементов

$$-(-a_{ij} - b_{ij}) - c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} - c_{ij}, \quad \text{для} \quad \forall i = \overline{1,m},\ \forall j = \overline{1,n},$$

а матрица $A + (B + C)$ — из элементов

$$-a_{ij} - (-b_{ij} - c_{ij}) = -a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}, \quad \text{для} \quad \forall i = \overline{1,m},\ \forall j = \overline{1,n}.$$

Отсюда следует, что равенство

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

не может выполняться для всех $A, B, C \in \boldsymbol{G}$. Так, если A и B — нулевые матрицы, а все элементы матрицы C равны единице, то любой элемент матрицы $(A+B)+C$ равен -1, а произвольный элемент матрицы $A+(B+C)$ равен 1. Таким образом, операция сложения не ассоциативна, множество $\boldsymbol{G}$ с данными операциями не является линейным пространством.

11. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиома 1).

12. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиома 4).

13. *Решение.* Для любых полиномов f и g степени не выше n и любого $\alpha \in C$ сумма $f+g$ и произведение αf являются многочленами с комплексными коэффициентами степени не выше n, поэтому обе операции определены корректно. Нетрудно проверить, что условия 1)–7) выполняются для данных операций. Однако, если у многочлена f старший коэффициент a_0 отличен от нуля, то многочлен $(1 \cdot f)(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ не равен многочлену $f(x)$ и, следовательно, условие 8) не выполняется. Таким образом, данное множество с введенными операциями сложения и умножения на число не является линейным пространством.

14. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 5), 6), 7) и 8).

15. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиома 8).

16. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 7) и 8).

17. **а)** *Решение.* Составим линейную комбинацию (1) данных векторов и приравняем ее нулевому элементу:

$$x_1a^1 + x_2a^2 + x_3a^3 = 0$$

или

$$x_1\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем следующую однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0,\\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0,\\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 0.\end{cases}$$

Ранг матрицы системы $r(A)$ равен 2 и меньше числа неизвестных $n = 3$, поэтому однородная система имеет бесконечно много решений и, следовательно, существуют ненулевые числа x_1, x_2, x_n в системе (1). Следовательно, система векторов a^1, a^2, a^3 линейно зависима; **b)** линейно зависимая система; **c)** линейно независимая система; **d)** линейно независимая система; **e)** линейно зависимая система.

18. *Решение.* Нулевым элементом в пространстве $\mathbf{M^{32}}$ является нулевая матрица размера 2×3. Составим линейную комбинацию (1) данных матриц и приравняем ее нулевому элементу:

$$x_1A^1 + x_2A^2 + x_3A^3 + x_4A^4 + x_5A^5 + x_6A^6 = 0$$

или

$$x_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-3&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}+$$

$$+x_4\begin{pmatrix}4&-5&3\\2&0&0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}5&2&-1\\3&2&0\end{pmatrix}+x_6\begin{pmatrix}6&1&2\\-2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что после выполнения несложных преобразований, левая и правая части данного равенства будут матрицами размера 2×3. Две матрицы равны тогда и только тогда, когда равны все соответствующие друг другу элементы матриц. Таким образом, имеем систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 0, \\ \quad - x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 2x_5 + x_6 = 0, \\ \quad\quad 2x_3 + 3x_4 - x_5 + 2x_6 = 0, \\ \quad\quad\quad 2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 0, \\ \quad\quad\quad\quad 2x_5 + 3x_6 = 0, \\ \quad\quad\quad\quad\quad x_6 = 0 \end{cases}$$

Пусть A – матрица данной системы. Найдем ранг матрицы системы $r(A) = 6$. Получаем, что ранг $r(A)$ равен числу неизвестных n. Следовательно, однородная система имеет только единственное нулевое решение, а это и означает, что векторы $A^1, \ldots, A^6$ в линейном пространстве $\mathbf{M^{32}}$ являются линейно независимыми; **b)** линейно независимая система; **c)** линейно зависимая система; **d)** линейно независимая система; **e)** линейно зависимая система.

19. a) *Решение.* Нулевым элементом в пространстве $\mathbf{Q_2}$ является полином, тождественно равный нулю. Составим линейную комбинацию трех данных полиномов и приравняем ее нулевому элементу:

$$x_1 \cdot p^1(x) + x_2 \cdot p^2(x) + x_3 \cdot p^3(x) = 0.$$

Преобразуя данное соотношение, получаем

$$(x_1 - x_2 + 9x_3) + (x_2 + 6x_3)x + x_3x^2 = 0.$$

Это равенство справедливо для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ только в том случае, когда коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x равны нулю. Таким образом, приходим к следующей системе линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 9x_3 = 0, \\ \quad x_2 + 6x_3 = 0, \\ \quad\quad x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен числу неизвестных поэтому получаем, что данная система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Следовательно, система полиномов $p^1(x)$, $p^2(x)$, $p^3(x)$ является линейно независимой; **b)** линейно независимая система; **c)** линейно зависимая система; **d)** линейно зависимая система; **e)** линейно независимая система.

20. **a)** a^2, a^5; **b)** a^1, a^3, a^5.

21. **a)** p^1, p^4; **b)** p^1, p^3, p^5.

22. **a)** A^1, A^3; **b)** A^1, A^4.

23. **a)** $a^4 = -a^1 + a^2 + 2a^3$; **b)** $a^4 = 2a^1 - a^2 + 3a^3$.

24. **a)** *Решение.* Да. Согласно свойству базиса, достаточно вычислить определитель, построенный из элементов векторов по столбцам

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ -4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-8) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-8) \cdot (-11) = 88 \neq 0.$$

Значит, система векторов e_1, e_2, e_3 является базисом в пространстве $\mathbf{R}^3$. **b)** Нет. **c)** Нет. **d)** Да.

25. **a)** *Решение.* Да. Так как любая линейно независимая система, число векторов в которой совпадает с размерностью пространства ($\dim \mathbf{P}_2 = 3$) является базисом в нем, то достаточно проверить линейную независимость системы многочленов p_1, p_2, p_3. Следуя определению, запишем линейную комбинацию многочленов и приравняем ее нулевому многочлену. $\alpha_1(1 - 3x - 2x^2) + \alpha_2(2 - 4x + x^2) + \alpha_3(2 + 3x + 2x^2) = 0 + 0x + 0x^2$. Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и приравняем коэффициенты многочленов при одинаковых степенях x. Получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов α_1, α_2, α_3:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Линейная зависимость системы равносильна существованию нетривиального решения данной однородной системы. Для того, чтобы система имела нетривиальное решение необходимо и достаточно чтобы ранг ее матрицы был меньше числа неизвестных. Найдем ранг системы с помощью приведения матрицы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4.5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4.5 \\ 0 & 0 & -16.5 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $rank = 3$ и, следовательно, однородная система алгебраических уравнений имеет только тривиальное решение, что доказывает линейную независимость системы многочленов p_1, p_2, p_3. **b)** Нет. **c)** Да. **d)** Нет.

26. a) Да. Размерность линейного пространства $\mathbf{M}^{22}$ всех матриц второго порядка равна четырем. Матриц в системе тоже четыре. Достаточно проверить линейную независимость. Запишем линейную комбинацию матриц системы и приравняем ее нулевому элементу (нулевой матрице):

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Складывая и приравнивая нулю соответствующие элементы матриц, получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов α_i:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Линейная зависимость системы равносильна существованию нетривиального решения данной однородной системы. Для того, чтобы система имела нетривиальное решение необходимо и достаточно чтобы ранг ее матрицы был меньше числа неизвестных. Найдем ранг системы с помощью приведения матрицы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -39 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{17} \end{pmatrix}$$

Таким образом, $rank = 4$, следовательно, однородная система алгебраических уравнений имеет только тривиальное решение, что доказывает линейную независимость системы матриц A_1, A_2, A_3, A_4. **b)** Нет. **c)** Да. **d)** Нет.

27. a) Да. Согласно свойству базиса, достаточно вычислить определитель, построенный из элементов векторов по столбцам

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -24 \neq 0.$$

Значит, система векторов e_1, e_2, e_3 является базисом в пространстве $\mathbf{R}^3$. Для нахождения координат вектора x в базисе $\mathbf{e}$ нужно из векторного уравнения $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x$ найти неизвестные координаты x_1, x_2, x_3. После подстановки векторов получим

$$x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Это уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_1 - 3x_2 = 3 \\ 4x_2 - 3x_3 = -7, \end{cases}$$

решая которую, например, методом Гаусса, найдем неизвестные координаты вектора x в базисе $\mathbf{e}$. $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Наконец, найдем вектор y. По определению $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 = 4\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$. **b)** Да. $x_e = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$. **c)** Да. $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

28. **a)** Да, является. $Y_A = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$; **b)** Да, является. $Y_A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **c)** Да, является. $Y_A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

29. **a)** Да, является. $h_p = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(x) = 1 - 2x + 4x^2$; **b)** Да, является. $h_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(x) = 3 - 2x + 4x^2$; **c)** Да, является.

$h_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, g(x) = 5 + 2x + x^2.$

30. **a)** Нет; **b)** Нет; **c)** Да.

31. **a)** Да; **b)** Нет; **c)** Нет.

32. **a)** Да; **b)** Да; **c)** Да.

33. **a)** В базис входят вектора a_1, a_4. Коэффициенты разложения векторов $a_2 = 2a_1, a_3 = -a_1, a_5 = -a_1 + a_4, a_6 = -2a_1 + a_4$; **b)** В базис входят вектора a_1, a_3. Коэффициенты разложения векторов $a_2 = -3a_1$, $a_4 = -a_1 - 2a_3, a_5 = 2a_1 + a_3, a_6 = 3a_1 + a_3$; **c)** В базис входят вектора a_1, a_3. Коэффициенты разложения векторов $a_2 = -2a_1, a_4 = 2a_1 - a_3$, $a_5 = -a_3, a_6 = -2a_1 + a_3$.

34. **a)** $\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_3 = 0. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 7x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

35. **a)** базис суммы образуют, например, векторы a_1, a_2, b_1. Базис пересечения состоит из одного вектора $c = 2a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = (3; 5; 1)$; **b)** базис суммы образуют, например, векторы a_1, a_2, a_3, b_2. Базис пересечения, например, $b_1 = -2a_1 + a_2 + a_3$, $b_3 = 5a_1 - a_2 - 2a_3$.

36. **a)** $T_{e \to u} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $x_u = (0, 2, -2)$, $y_e = (-1, -3, -1)$,

b) $T_{e \to u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $y_u = (2, -2, 0)$, $x_e = (-5, -7, -4)$;

c) $T_{e\to u} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y_u = (-1, 0, -2)$, $x_e = (-1, -6, 3)$.

37. **a)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

38. **a)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

39. **a)** $X = (1; 3; 1)$. **b)** $X = (2; -2; -2)$. **c)** $X = (3; -6; -6)$.

40. **a)** поменяются местами две строки; **b)** поменяются местами два столбца; **c)** произойдет симметричное отражение матрицы относительно ее центра.

41. **a)** $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. **b)** $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

42. **a)**, **c)**, **g)**, **j)**, **l)**, **m)** Нет. **b)**, **d)**, **e)**, **f)**, **h)**, **i)**, **k)** Да.

43. **a)** Да. **b)** Да. **c)** Нет. **d)** Нет. **e)** Да. **f)** Нет. **g)** Да. **h)** Да.

44. **a)** φ_1 – линейный оператор, $A_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **b)** φ_3 – линейный оператор, $A_{\varphi_3} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **c)** φ_2 – линейный оператор, $A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

45. **a)** $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, |A_e| = 0$. **b)** $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $|A_e| = 20$. **c)** $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |A_e| = -2$. **d)** $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |A_e| = 2$. **e)** $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, |A_e| = 27$. **f)** $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |A_e| = -5$.

46.

47. **a)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

48. a) $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

49. a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

50. a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

51. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} 29 & -41 & -9 \\ 19 & -27 & -6 \\ 7 & -9 & -4 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -11 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

52. a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

53. a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; **b)** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; **d)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

54. a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

55. a) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.
c) $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

56. a) $\varphi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 \\ -x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}$. **b)** $\varphi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}$.

c) $\varphi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$.

57. a) $\varphi^{-1}(f) = 8f'' + 3f' + f$. **b)** $\varphi^{-1}(f) = 7f'' + 3f' + f$.
c) $\varphi^{-1}(f) = 4f'' + 2f' + f$.

58. a) $\begin{pmatrix} 60 & -12 \\ 48 & 12 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 25 & -10 \\ 40 & -15 \end{pmatrix}$; **d)** $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$.

59. a) $rank(\varphi) = 1$; базис ядра $Ker(\varphi)$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

базис образа $Im(\varphi)$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. **b)** $rank(\varphi) = 2$; базис ядра $Ker(\varphi)$:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; базис образа $Im(\varphi)$: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. **c)** $rank(\varphi) = 3$;

базис ядра $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; базис образа $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

60. **a)** $rank(\varphi) = 3$; базис ядра $Ker(\varphi)$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; базис образа $Im(\varphi)$: $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. **b)** $rank(\varphi) = 2$; базис ядра $Ker(\varphi)$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; базис образа $Im(\varphi)$: $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. **c)** $rank(\varphi) = 2$; базис ядра $Ker(\varphi)$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; базис образа $Im(\varphi)$: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

61. **a)** $rank(\varphi) = 3$; базис ядра: $1+x$; базис образа: $1, 6+4x-3x^2, -18+18x+15x^2+4x^3$. **b)** $rank(\varphi) = 1$; базис ядра: $1, x, x^2$; базис образа: $1+x$. **c)** $rank(\varphi) = 2$; базис ядра: $1+3x, 6+3x^2-x^3$; базис образа: $1, 4x+x^2$.

62. **a)** $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Собственные векторы имеют вид $c(1,-1)$, где $c \neq 0$; **b)** $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 0$ имеют вид $c(1,-1)$, а для $\lambda_2 = 2$ – вид $c(1,1)$, где $c \neq 0$; **c)** $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Собственные векторы имеют вид $c(1,-1)$, где $c \neq 0$; **d)** $\lambda_1 = -2+i$, $\lambda_2 = -2-i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = -2+i$ имеют вид $c(1,i)$, а для $\lambda_2 = -2-i$ – вид $c(1,-i)$, где $c \neq 0$; **e)** $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = i$ имеют вид $c(1,1+i)$, а для $\lambda_2 = -i$ – вид $c(1,1-i)$, где $c \neq 0$; **f)** $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 2i$ имеют вид $c(1,i)$, а для $\lambda_2 = -2i$ – вид $c(i,1)$, где $c \neq 0$;

63. **a)** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы имеют вид $c(1;1;-1)$, где $c \neq 0$; **b)** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Собственные векторы имеют вид $c_1(1;2;0) + c_2(0;0;1)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно;

c) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 1$ имеют вид $c(1;1;1)$, а для $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ – вид $c(1;2;3)$, где $c \neq 0$; **d)** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Собственные векторы имеют вид $c(3;1;1)$, где $c \neq 0$; **e)** $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 3$ имеют вид $c(1;2;2)$, а для $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ – вид $c(1;2;1)$, где $c \neq 0$; **f)** $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 5$ имеют вид $c(1;-1;1)$, для значения $\lambda_1 = 3$ имеют вид $c(1;1;-1)$, для значения $\lambda_1 = 1$ имеют вид $c(1;1;1)$, где $c \neq 0$.

64. **a)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (3;1;3)$, $a_2 = (0;1;3)$, $a_3 = (1;2;1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; **b)** матрица к диагональному виду не приводится; **c)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1;-1;1)$, $a_2 = (1;1;-1)$, $a_3 = (1;1;1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **d)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1;1;-1)$, $a_2 = (1;-1;1)$, $a_3 = (1;1;1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **e)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1;1;-1)$, $a_2 = (1;-1;1)$, $a_3 = (1;1;1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

65. **a)** $5\pi/6$; **b)** $3\pi/4$; **a)** $2\pi/3$; **a)** $\pi/2$.

66. **a)** Можно добавить векторы $(2;2;1;0)$, $(5;-2;-6;-1)$; **b)** Можно добавить векторы $(1;-2;1;0)$, $(25;4;-17;-6)$.

67. **a)** Один из векторов $\pm\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$; **b)** Например, $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

68. **a)** $(1;2;2;-1)$, $(2;3;-3;2)$, $(2;-1;-1;-2)$; **b)** $(1;1;-1;-2)$,

$(2; 5; 1; 3)$.

69. **a)** Например, $b_1 = (2; -2; -1; 0)$, $b_2 = (1; 1; 0; -1)$. **b)** **c)**

70. **a)** $y = 3a_1 - 2a_2 = (1; -1; -1; 5)$, $z = (3; 0; -2; -1)$; **b)** $y = 2a_1 - a_2 = (3; 1; -1; -2)$, $z = (2; 1; -1; 4)$.

72. **a)** $4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$; **b)** $6y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; **c)** $y_1^2 + \sqrt{3}y_2^2 - \sqrt{3}y_3^2$.

73. **a)** $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$; $x_3 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; **b)** $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$; $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_2$; **c)** $9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$; $x_2 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; **d)** $9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$; **e)** $3y_1^2 - 6y_2^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_3$; $x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}y_2$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_3$; **f)** $9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_2 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$; $x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_2 - \frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$.

74. **a)** $\lambda > 2$; **b)** $|\lambda| < \sqrt{\dfrac{5}{3}}$; **c)** $-0.8 < \lambda < 0$; **d)** требуемых значений λ не существует; **e)** требуемых значений λ не существует.

Литература

[1] Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – СПб.: Лань, 2007. – 431 с.

[2] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2006. – 382 с.

[3] Фадеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д.К. Фадеев, И.С. Соминский. – СПб.: Лань, 2004. – 287 с.

[4] Кряквин В.Д. Линейная алгебра в задачах и упражнениях / В.Д. Кряквин. – М.: Вузовская книга, 2007. – 588 с.

[5] Карчевский Е.М. Линейные операторы в конечномерных пространствах: учеб. пособие для практических занятий по алгебре и геометрии / Е.М. Карчевский, Е.Е. Лаврентьева, И.Л. Александрова. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. - 116 с.

Гиниятова Динара Халиловна

Рунг Елена Владимировна

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ
Часть 2

Учебное пособие