

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*Институт физики*

Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

**Гидродинамические возмущения в космологии**

*Учебно-методическое пособие*

Казань – 2023

*Печатается по решению Учебно-методической комиссии*

*Института физики КФУ*

*Протокол № 1 от 18 сентября 2023 г.*

*Рецензент – д.ф.-м.н., доцент Ситдиков А. С.*

**Мухарлямов Р. К., Панкратьева Т. Н.**

**Гидродинамические возмущения в космологии:** учебно-методическое пособие / Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева – Казань: Издательство Казанского университета, 2023. — 29 с.

В учебно-методическом пособии излагаются элементы релятивистской теории гидродинамических возмущений применительно к космологии. Рассматриваются модели возмущений на различных стадиях эволюции Вселенной. Учебно-методическое пособие предназначено для студентов института физики Казанского федерального университета, обучающихся по направлению "03.03.02 Физика" и является методическим обеспечением дисциплины "Астрофизика и космология", "Теория поля", а также по специальности "03.05.01 Астрономия" для дисциплин "Космология", "Теория поля" и "Теория гравитации".

© Казанский университет, 2023

© Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева, 2023

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Возмущения метрики</b>	<b>5</b>
2.1	Классификация . . . . .	5
2.2	Калибровочная инвариантность и преобразование координат . .	7
<b>3</b>	<b>Уравнения для космологических возмущений</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Гидродинамические возмущения. Скалярный случай</b>	<b>13</b>
4.1	Адиабатические (изоэнтропийные) возмущения . . . . .	16
4.2	Энтропийные возмущения . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Гидродинамические возмущения. Векторный и тензорный случаи</b>	<b>26</b>

# 1 Введение

Наблюдения реликтового излучения говорят о том, что во время рекомбинации Вселенная была в большой степени однородной и изотропной. Но сегодня Вселенная имеет хорошо развитую неоднородную структуру. Эта структура принимает форму галактик, скоплений и сверхскоплений галактик, а в более крупных масштабах — пустот, листов и нитей галактик. Тем не менее при усреднении по нескольким сотням мегапарсек неоднородности в распределении плотности остаются небольшими. Простое объяснение того, как такая структура могла возникнуть из-за малых начальных возмущений, основано на факте гравитационной неустойчивости, которая является предметом изучения теории возмущения в гравитационных теориях.

Гравитационная неустойчивость проявляется в том, что материя притягивается к областям с высокой плотностью, тем самым усиливая уже существующие неоднородности. Согласно современным представлениям небольшие начальные неоднородности, присутствующие при рекомбинации, создают наблюдаемую сегодня неоднородную структуру Вселенной, поэтому возникает необходимость изучить, насколько быстро они растут в расширяющейся Вселенной. Теория космологических возмущений является одним из важных разделов космологии для объяснения свойств современной Вселенной. На данный момент эта теория хорошо развита и обширна. В данном учебно-методическом пособии мы ограничиваемся изложением элементов релятивистской теории гидродинамических возмущений применительно к космологии. Рассматриваются модели возмущений на различных стадиях эволюции Вселенной. Предполагается, что читатель знаком с основами тензорного анализа и космологии.

## 2 Возмущения метрики

### 2.1 Классификация

При рассмотрении возмущений, полный линейный элемент представляется в виде:

$$ds^2 = [{}^{(0)}g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}(x^\gamma)]dx^\alpha dx^\beta. \quad (1)$$

Слагаемое  ${}^{(0)}g_{\alpha\beta}$  есть фоновый метрический тензор, а  $\delta g_{\alpha\beta}$  описывает возмущение фоновой метрики. Далее будем полагать  $|\delta g_{\alpha\beta}| \ll |{}^{(0)}g_{\alpha\beta}|$ .

В качестве фоновой рассмотрим метрику Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ) с конформным временем  $\eta$  ( $d\eta = a^{-1}(t)dt$ ):

$$\begin{aligned} {}^{(0)}g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta &= a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij}dx^i dx^j), \\ \gamma_{ij} &= \delta_{ij} \left(1 + \frac{k}{4}[x^2 + y^2 + z^2]\right)^{-2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где значения  $k = 0, 1, -1$  соответствуют плоскому, закрытому и открытому мирам ФРУ. Предполагается такая система единиц измерения, где скорость света в вакууме равна  $c = 1$ .

Метрические возмущения подразделяют на скалярные, векторные и тензорные возмущения. Такая классификация связана с законами преобразования скаляров, векторов и тензоров, входящих в возмущения  $\delta g_{\alpha\beta}$ , при трёхмерных координатных трансформаций на гиперповерхности  $\eta = \text{const}$ . В линейном приближении любое возмущение метрики можно представить в виде разложения по скалярным, векторным и тензорным модам, которые не взаимодействуют между собой, и их можно рассматривать отдельно.

#### Скалярные возмущения

Скалярные величины могут входить в  $\delta g_{\alpha\beta}$  умножением скаляра на пространственный фоновый метрический тензор  $\gamma_{ij}$  или ковариантными производными от скалярных функций. Ковариантная производная  $f_{;i}$  соотносится с трёхмерной метрикой  $\gamma_{ij}$  на гиперповерхности  $\eta = \text{const}$ . Для плоской Вселенной

( $k = 0$ ) ковариантные производные превращаются в частные производные, обозначаемые  $f_{,i}$ . Наиболее общая форма скалярных возмущений метрики содержит четыре скалярные величины  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $B$  и  $E$ , зависящие от координат:

$$\delta g_{\alpha\beta}^{(s)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 2\phi & -B_{|i} \\ -B_{|i} & 2(\psi\gamma_{ij} - E_{|ij}) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

а линейный элемент имеет вид:

$$ds^2 = a^2(\eta)\{(1 + 2\phi)d\eta^2 - 2B_{|i}dx^i d\eta - [(1 - 2\psi)\gamma_{ij} + 2E_{|ij}]dx^i dx^j\}.$$

Скалярные возмущения индуцируются неоднородностями материи во Вселенной. Они вызывают наибольший интерес в космологии, поскольку лежат в основе образования структур во Вселенной.

### Векторные (вихревые) возмущения

Общая форма векторных возмущений конструируется из двух 3-векторов  $S_i$  и  $F_i$ :

$$ds^2 = a^2[d\eta^2 + 2S_i dx^i d\eta - (\gamma_{ij} - F_{i|j} - F_{j|i})dx^i dx^j]. \quad (4)$$

Векторные возмущения связаны с вращательными движениями материи и в ходе расширения вселенной они быстро распадаются (уменьшаются). Дивергенция векторов  $S_i$ ,  $F_i$  равна нулю:

$$S_i^{||i} = F_i^{||i} = 0. \quad (5)$$

Это означает, что с их помощью не удастся построить ненулевой скаляр в первом порядке по амплитуде  $S_i$ ,  $F_i$ . Следовательно, будем иметь чисто векторные возмущения. В силу условий (5) они содержат четыре независимые компоненты.

### Тензорные возмущения

Тензорные возмущения имеют вид:

$$\delta g_{ij}^{(t)} = a^2 h_{ij}, \quad (6)$$

где  $h_{ij}$  — симметричный 3-тензор с условиями

$$h_i^i = 0, h_{ij}^{|j} = 0, \quad (7)$$

которые исключают содержание в  $h_{ij}$  частей, преобразующихся как скаляры и векторы. Симметричный тензор  $h_{ij}$  имеет шесть независимых компонент и четыре ограничения (7). Таким образом, получаем две независимые функции. Тензорные возмущения не имеют аналога в ньютоновской теории и они описывают гравитационные волны, являющиеся степенями свободы самого гравитационного поля.

Возмущения  $\delta g_{\alpha\beta}$  содержат в общем счёте десять независимых функций.

## 2.2 Калибровочная инвариантность и преобразование координат

Разбиение геометрического объекта на фон и возмущение неоднозначно. При малом преобразовании координат

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha, \quad \xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\beta) = (\xi^0, \xi^i) \quad (8)$$

мы получим новый фон и новое возмущение, хотя сам объект не меняется. Следуя идеи ковариантной формулировки законов физики и инвариантности, возникает необходимость исключения координатных эффектов, которые могут проявляться в так называемых "фиктивных" возмущениях. Они не имеют физического смысла.

Пространственная часть  $\xi^i$  может быть записана как

$$\xi^i = \zeta^i + \gamma^{ij} \xi_{|j},$$

где функция  $\xi$  есть решение уравнения

$$\xi_{|j}^{|j} = \xi^i_{|i}.$$

Ковариантная производная  $\xi_{|j}$  связана с трёхмерной метрикой  $\gamma_{ij}$ . "Поперечный" 3-вектор  $\zeta^i$  удовлетворяет условию

$$\zeta^i_{|i} = 0,$$

и даёт вклад в преобразованиях только векторных возмущений метрики:

$$S_i \rightarrow \tilde{S}_i = S_i + (\zeta_i)', \quad F_i \rightarrow \tilde{F}_i = F_i + \zeta_i.$$

Тензорная часть метрического возмущения  $h_{ij}$  инвариантна относительно преобразований координат (8) в силу равенств (7). Следовательно, только две функции  $\xi^0$  и  $\xi$  сохраняют скалярный характер метрического возмущения. Таким образом, наиболее общие бесконечно-малые преобразования, сохраняющие скалярную природу метрических флуктуаций, имеют вид:

$$\eta \rightarrow \tilde{\eta} = \eta + \xi^0(\eta, \mathbf{x}), \quad x^i \rightarrow \tilde{x}^i = x^i + \gamma^{ij}\xi_{|j}(\eta, \mathbf{x}), \quad (9)$$

где  $\xi^0, \xi$  — независимые функции.

Новые функции для скалярного возмущения принимают следующий вид:

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{a'}{a}\xi^0 - (\xi^0)', \quad \tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a}\xi^0, \quad \tilde{B} = B + \xi^0 - \xi', \quad \tilde{E} = E - \xi, \quad (10)$$

где штрих (') означает производную по переменной  $\eta$ . Определяя функции  $(\xi^0, \xi)$ , мы фиксируем систему или класс систем координат. Выбор пары  $(\xi^0, \xi)$  позволяет наложить два условия на функции  $\phi, \psi, B$  и  $E$ . Это называется калибровочной свободой. Сам выбор называют выбором калибровки. Можно, например, обнулить максимум две функции из четырёх. В калибровке могут быть использованы функции возмущения тензора энергии-импульса, например, плотности энергии  $\delta\varepsilon$  и потенциальные возмущения 4-вектор скорости жидкости.

Зная закон преобразования (10), мы можем составить комбинации их функций  $\phi, \psi, B$  и  $E$ , которые не меняются при преобразовании (9), и тем самым отделить "фиктивные" возмущения. Такие комбинации называют калибровочно-инвариантными переменными (КИП). Например, независимые КИП вида

$$\Phi = \phi + \frac{1}{a}[(B - E')a]', \quad \Psi = \psi - \frac{a'}{a}(B - E') \quad (11)$$

впервые были предложены Бардином [5]. Определить независимые КИП можно бесконечным числом способов.



Для векторных возмущений разница

$$\bar{V}_i = S_i - (F_i)' \quad (12)$$

есть КИП. Среди четырёх независимых компонент  $S_i, F_i$  только две характеризуют физические возмущения, а остальные две определяются координатной степенью свободы.

Далее рассмотрим различные примеры калибровки.

### Синхронная калибровка

Такая калибровка определяется условиями  $\phi = B = 0$ . Эти условия означают, что возмущения  $g_{00}$  и  $g_{0j}$  компонент метрического тензора отсутствуют. Если положить  $\tilde{\phi} = 0, \tilde{B} = 0$  в (10), то получим закон перехода из любой первоначальной системы координат к системе с синхронной калибровкой:

$$\eta_s = \eta + a^{-1} \int a \phi d\eta, \quad x_s^i = x^i + \gamma^{ij} \left( \int B d\eta + \int a^{-1} d\eta \int^\eta a \phi d\bar{\eta} \right)_{|j}. \quad (13)$$

Синхронная калибровка имеет координатную степень свободы, то есть существуют преобразования координат

$$\eta \rightarrow \tilde{\eta} = \eta + a^{-1} C_1(\mathbf{x}), \quad x^i \rightarrow \tilde{x}^i = x^i + \gamma^{ij} C_{1|j}(\mathbf{x}) \int a^{-1} d\eta + \gamma^{ij} C_{2|j}(\mathbf{x}),$$

которые сохраняют свойство синхронности. Здесь  $C_1(\mathbf{x}), C_2(\mathbf{x})$  — произвольные функции от пространственных координат. Эта остаточная свобода выбора координат приводит к появлению мод "фиктивных" возмущений, которые затрудняют интерпретацию результатов.

**Упражнение.** Доказать, что преобразования координат (13) приводит к равенствам  $\tilde{\phi} = 0, \tilde{B} = 0$ .

### Продольная (ньютоновская) калибровка

Эта калибровка определяется условиями  $B = E = 0$ , которые полностью фиксируют систему координат в отличие от синхронной калибровки. Условия продольной калибровки могут быть получены преобразованием координат

$$\eta \rightarrow \eta_l = \eta - (B - E'), \quad x^i \rightarrow x_l^i = x^i + \gamma^{ij} E_{|j}. \quad (14)$$

Метрические возмущения меняются следующим образом:

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi_l = \phi + a^{-1}[a(B - E')] \equiv \Phi, \quad \psi \rightarrow \psi_l = \psi - \frac{a'}{a}(B - E') \equiv \Psi, \\ B &\rightarrow B_l = 0, \quad E \rightarrow E_l = 0.\end{aligned}$$

Сравнивая с формулами (11), мы видим, что в продольной калибровке функции  $\phi$ ,  $\psi$  совпадают с КИП. В продольной калибровке возмущённая метрика принимает вид

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 - 2\Psi)\gamma_{ij}dx^i dx^j]. \quad (15)$$

Структура метрики (15) позволяет физически интерпретировать КИП  $\Phi$  и  $\Psi$  как амплитуды метрических скалярных возмущений. Другое название "ньютоновская калибровка" объясняется видом (15), где  $\Phi$  ассоциируется с ньютоновским потенциалом.

**Упражнение.** Убедиться, что преобразование координат (14) приводит к продольной калибровке.

### 3 Уравнения для космологических возмущений

В этом разделе рассматриваются уравнения, описывающие малые космологические возмущения. Уравнения Гильберта-Эйнштейна имеют вид

$$G^\mu{}_\nu = 8\pi G T^\mu{}_\nu, \quad G^\mu{}_\nu \equiv R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R. \quad (16)$$

Здесь  $G$  — ньютоновская гравитационная постоянная,  $G^\mu{}_\nu$  — тензор Эйнштейна,  $R^\mu{}_\nu$  — тензор Риччи,  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  — скаляр Риччи,  $T^\mu{}_\nu$  — тензор энергии-импульса (ТЭИ).

Фоновой метрике  ${}^{(0)}g_{\alpha\beta}$  соответствуют фоновые уравнения

$${}^{(0)}G^\mu{}_\nu = 8\pi G \cdot {}^{(0)}T^\mu{}_\nu, \quad (17)$$

где  ${}^{(0)}G^\mu{}_\nu$  и  ${}^{(0)}T^\mu{}_\nu$  — фоновые объекты. В случае метрики ФРУ (2) имеем

$${}^{(0)}G^0{}_0 = 3a^{-2}(\mathcal{H}^2 + k), \quad {}^{(0)}G^0{}_i = 0, \quad {}^{(0)}G^i{}_j = a^{-2}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + k)\delta^i{}_j, \quad (18)$$

где  $\mathcal{H} \equiv a'/a$ . В силу симметрии (18) ТЭИ должен удовлетворять условиям симметрии:

$${}^{(0)}T_i^0 = {}^{(0)}T_0^i = 0, \quad {}^{(0)}T_j^i \propto \delta_j^i.$$

Более детальный вид  ${}^{(0)}T_\nu^\mu$  зависит от типа материи, поля. Система уравнений (17) сводится к двум независимым уравнениям:

$$a'^2 + ka^2 = \frac{8}{3}\pi GT_0^0 a^4, \quad a'' + ka = \frac{4}{3}\pi GTa^3, \quad (19)$$

где  $T \equiv T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3$ .

Для метрики с малыми возмущениями (1) объекты  $G_\nu^\mu$  и  $T_\nu^\mu$  можно записать так:

$$G_\nu^\mu = {}^{(0)}G_\nu^\mu + \delta G_\nu^\mu + \dots, \quad T_\nu^\mu = {}^{(0)}T_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu + \dots$$

Уравнения для малых возмущений, линеаризованные относительно фоновой метрики, имеют вид

$$\delta G_\nu^\mu = 8\pi G \delta T_\nu^\mu, \quad (20)$$

где  $\delta$  означает слагаемые, линейные по метрическим и материальным флуктуациям. Объекты  $\delta G_\nu^\mu$ ,  $\delta T_\nu^\mu$  не являются калибровочно-инвариантными. Но, комбинируя их с метрическими возмущениями, мы можем построить соответствующие КИП.

### Скалярные возмущения

В результате вычислений для скалярных возмущений могут быть получены уравнения

$$\begin{aligned} \delta G_0^0 &= 2a^{-2} \{-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\phi + \psi') + \nabla^2[\psi - \mathcal{H}(B - E')] + 3k\psi\} = 8\pi G \delta T_0^0, \\ \delta G_i^0 &= 2a^{-2} [\mathcal{H}\phi + \psi' - k(B - E')]_{|i} = 8\pi G \delta T_i^0, \\ \delta G_j^i &= -2a^{-2} \left\{ \left[ (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi + \mathcal{H}\phi' + \psi'' + 2\mathcal{H}\psi' - k\psi + \frac{1}{2}\nabla^2 D \right] \delta_j^i - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\gamma^{ik} D_{|kj} \right\} = 8\pi G \delta T_j^i, \quad D \equiv \phi - \psi + 2\mathcal{H}(B - E') + (B - E)'. \end{aligned} \quad (21)$$

Для  $\delta G^\mu_\nu$  и  $\delta T^\mu_\nu$  легко построить соответствующие КИП:

$$\begin{aligned}\overline{\delta G}_0^0 &= \delta G_0^0 + ({}^{(0)}G_0^0)'(B - E'), \\ \overline{\delta G}_i^0 &= \delta G_i^0 + ({}^{(0)}G_0^0 - {}^{(0)}G_k^k/3)(B - E')_{|i}, \quad {}^{(0)}G_k^k \equiv {}^{(0)}G_1^1 + {}^{(0)}G_2^2 + {}^{(0)}G_3^3, \\ \overline{\delta G}_j^i &= \delta G_j^i + ({}^{(0)}G_j^i)'(B - E');\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}\overline{\delta T}_0^0 &= \delta T_0^0 + ({}^{(0)}T_0^0)'(B - E'), \\ \overline{\delta T}_i^0 &= \delta T_i^0 + ({}^{(0)}T_0^0 - {}^{(0)}T_k^k/3)(B - E')_{|i}, \quad {}^{(0)}T_k^k \equiv {}^{(0)}T_1^1 + {}^{(0)}T_2^2 + {}^{(0)}T_3^3, \\ \overline{\delta T}_j^i &= \delta T_j^i + ({}^{(0)}T_j^i)'(B - E').\end{aligned}\tag{23}$$

В результате уравнения (20) могут быть переписаны в форме

$$\overline{\delta G}^\mu_\nu = 8\pi G \overline{\delta T}^\mu_\nu.\tag{24}$$

Левая и правые части теперь калибровочно-инвариантны.

Величины  $\delta G^\mu_\nu$  могут быть переписаны через КИП (11):

$$\begin{aligned}\delta G_0^0 &= 2a^{-2}\{-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + \nabla^2\Psi + 3k\Psi + 3\mathcal{H}(-\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + k)(B - E')\}, \\ \delta G_i^0 &= 2a^{-2}[\mathcal{H}\Phi + \Psi' + (\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 - k)(B - E')]_{,i}, \\ \delta G_j^i &= -2a^{-2}\left\{\left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' - k\Psi + \frac{1}{2}\nabla^2 D\right]\delta_j^i + \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{H}'' - \mathcal{H}\mathcal{H}' - \mathcal{H}^3 - k\mathcal{H})(B - E')\delta_j^i - \frac{1}{2}\gamma^{ik}D_{|kj}\right\},\end{aligned}\tag{25}$$

где  $D = \Phi - \Psi$ . Тогда из системы (24) с учётом (22), (23) и (25) получаем калибровочно-инвариантные уравнения для скалярных возмущений:

$$\begin{aligned}-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + \nabla^2\Psi + 3k\Psi &= 4\pi G a^2 \overline{\delta T}_0^0, \\ (\mathcal{H}\Phi + \Psi')_{,i} &= 4\pi G a^2 \overline{\delta T}_i^0, \\ \left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' - k\Psi + \frac{1}{2}\nabla^2 D\right]\delta_j^i - \frac{1}{2}\gamma^{ik}D_{|kj} &= \\ &= -4\pi G a^2 \overline{\delta T}_j^i.\end{aligned}\tag{26}$$

## Векторные возмущения

Уравнения для векторных возмущений в пространственно-плоской Вселенной принимают форму

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{V}_i &= 16\pi G a^2 \overline{\delta T^0}_{i(V)}, \\ (\bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{j,i})' + 2\mathcal{H}(\bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{j,i}) &= -16\pi G a^2 \overline{\delta T^i}_{j(V)},\end{aligned}\quad (27)$$

где  $\bar{V}_i$  определяются формулой (12), а  $\overline{\delta T^i}_{j(V)}$  — векторная часть возмущений ТЭИ. В случае пространственно-плоской Вселенной пространственные индексы всегда поднимаются и понижаются с единичной метрикой  $\delta_{ij}$ .

## Тензорные возмущения

Уравнения для тензорных возмущений в пространственно-плоской Вселенной принимают форму

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}h'_{ij} - \nabla^2 h_{ij} = 16\pi G a^2 \overline{\delta T^i}_{j(T)},\quad (28)$$

где  $\overline{\delta T^i}_{j(T)}$  — тензорная часть возмущений ТЭИ.

Правые части систем (26), (27) и (28) описывают возмущения в материи. По этой причине, чтобы замкнуть системы, необходимо знать уравнения движения материи.

## 4 Гидродинамические возмущения. Скалярный случай

В космологии распространена модель гидродинамической материи. Согласно теории большого взрыва, в ранние времена во вселенной преобладало излучение. С некоторого момента начинает преобладать материя. Поэтому интересно изучить развитие гидродинамических возмущений на разных фазах эволюции Вселенной. Рассмотрим возмущения ТЭИ жидкости [5]:

$$\delta T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \delta\varepsilon & -(\varepsilon_0 + p_0)a^{-1}\delta u_i \\ (\varepsilon_0 + p_0)a\delta u_i & -\delta p \delta_{ij} + \sigma_{|ij} \end{pmatrix},\quad (29)$$

где  $\delta\varepsilon$  — возмущение плотности энергии  $\varepsilon_0$ ,  $\delta p$  — возмущение давления  $p_0$ , функция  $\sigma$  определяет анизотропное напряжение. Возмущение  $\delta u_i$  3-вектор скорости  $u_i$  может быть представлено в виде

$$\delta u_i = \delta u_{\perp i} + \mathcal{V}_{,i}.$$

Первое слагаемое соответствует векторному возмущению, а второе — скалярному, где  $\mathcal{V}$  — потенциал 3-вектор скорости  $u_i$ . Таким образом, скалярное возмущение ТЭИ жидкости описывается скалярными функциями  $\delta\varepsilon$ ,  $\delta p$ ,  $\mathcal{V}$  и  $\sigma$ :

$$\delta T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \delta\varepsilon & -(\varepsilon_0 + p_0)a^{-1}\mathcal{V}_{,i} \\ (\varepsilon_0 + p_0)a\mathcal{V}_{,i} & -\delta p \delta_{ij} + \sigma_{|ij} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Дальше будем рассматривать идеальную жидкость:

$$T^\alpha{}_\beta = (\varepsilon_0 + p_0)u^\alpha u_\beta - p_0\delta^\alpha{}_\beta.$$

В этом случае  $\sigma = 0$ , то есть недиагональные элементы в пространственном блоке  $\delta T^i{}_j$  отсутствуют. Уравнения (19) приобретают вид

$$\mathcal{H}^2 + k = \frac{8}{3}\pi G a^2 \varepsilon_0, \quad \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + k = 4\pi G a^2 (\varepsilon_0 + p_0). \quad (31)$$

Калибровочно-инвариантные компоненты возмущения ТЭИ имеют вид (23). Им соответствуют КИП для идеальной жидкости:

$$\begin{aligned} \overline{\delta\varepsilon} &= \delta\varepsilon + \varepsilon'_0(B - E'), & \overline{\delta p} &= \delta p + p'_0(B - E'), \\ \overline{\delta u_i} &= \delta u_i + a(B - E')_{|i}. \end{aligned} \quad (32)$$

Они имеют простой физический смысл: в продольной калибровке данные КИП совпадают, соответственно, с возмущениями плотности энергии, давления и скорости.

Предполагая зависимость давления  $p(\varepsilon, S)$ , где  $S$  — энтропия, возмущение  $\overline{\delta p}$  выражается через возмущения  $\overline{\delta\varepsilon}$ ,  $\delta S$ :

$$\overline{\delta p} = c_s^2 \overline{\delta\varepsilon} + \tau \delta S, \quad c_s^2 \equiv (\partial p / \partial \varepsilon)_S, \quad \tau \equiv (\partial p / \partial S)_\varepsilon, \quad (33)$$

где  $c_s^2$  интерпретируется для гидродинамической материи как квадрат скорости звука. В однокомпонентном идеальном газе возмущения энтропии отсутствуют. В случае неоднородного газа возмущения энтропии могут иметь важное значение.

Из системы (26) следуют калибровочно-инвариантные уравнения движения для гидродинамических возмущений:

$$\begin{aligned}
-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + \nabla^2\Psi + 3k\Psi &= 4\pi G a^2 \overline{\delta\varepsilon}, \\
(\mathcal{H}\Phi + \Psi')_{,i} &= 4\pi G a (\varepsilon_0 + p_0) \overline{\delta u_i}, \\
\left[ (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' - k\Psi + \frac{1}{2}\nabla^2 D \right] \delta_j^i - \frac{1}{2}\gamma^{ik} D_{|kj} &= \\
&= 4\pi G a^2 \delta p \delta_j^i. \tag{34}
\end{aligned}$$

Можно показать, что из последнего уравнения при  $i \neq j$  следует  $\Phi = \Psi$ . Уравнения упрощаются:

$$\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}\Phi' - 3(\mathcal{H}^2 - k)\Phi = 4\pi G a^2 \overline{\delta\varepsilon}, \tag{35}$$

$$(a\Phi)'_{,i} = 4\pi G a^2 (\varepsilon_0 + p_0) \overline{\delta u_i}, \tag{36}$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 - k)\Phi = 4\pi G a^2 \overline{\delta p}. \tag{37}$$

В ньютоновском пределе (35) представляет собой уравнение Пуассона для гравитационного потенциала, индуцированного некоторым возмущением плотности энергии. Поэтому  $\Phi$  интерпретируется как релятивистское обобщение ньютоновского гравитационного потенциала  $\phi$ . Уравнение (35) обобщает уравнение Пуассона, учитывая расширение Вселенной, и оно справедливо в линейной теории возмущения, то есть должно быть  $|\Phi| \ll 1$ . Для этого необязательно условие  $|\delta\varepsilon/\varepsilon| \ll 1$  (смотрите, например, [6]). На масштабах больше хаббловского радиуса может быть верным  $|\Phi| \ll 1$ , даже если  $|\delta\varepsilon/\varepsilon| > 1$ .

Для сравнения рассмотрим уравнения на возмущения в синхронной калибровке ( $\phi = B = 0$ ):

$$\nabla^2(\psi_s + \mathcal{H}E'_s) - 3\mathcal{H}\psi'_s = 4\pi G a^2 \delta\varepsilon_s, \quad \psi'_{s,i} = 4\pi G a^3 (\varepsilon_0 + p_0) \delta u_{si},$$

$$\psi_s'' + 2\mathcal{H}\psi_s' + \frac{1}{2}(\nabla^2 D_s - D_{s|ii}) = 4\pi G\delta p_s; \quad D_{s|ij} = 0, \quad i \neq j,$$

где  $D_s = -\psi_s - E_s'' - 2\mathcal{H}E_s'$ . Из последнего уравнения ( $i \neq j$ ) выражается  $\psi_s$  через единственную функцию  $E_s$ . Оставшиеся уравнения будут содержать функцию  $E_s$  и её производные до третьего порядка включительно. Таким образом, уравнения для космологических возмущений в синхронной калибровке явно сложнее калибровочно-инвариантных уравнений (35)-(37). В дальнейшем будем рассматривать эти уравнения для возмущений.

Уравнения (35) и (36) дают

$$\frac{\overline{\delta\varepsilon}}{\varepsilon_0} = 2[3(\mathcal{H}^2 + k)]^{-1}[\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}\Phi' - 3(\mathcal{H}^2 - k)\Phi], \quad (38)$$

$$\overline{\delta u_i} = -a^{-2}(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + k)^{-1}(a\Phi)'_{,i}.$$

Используя (33) и комбинируя уравнения (35) и (37), получим

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' - c_s^2\nabla^2\Phi + [2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2)(\mathcal{H}^2 - k)]\Phi = 4\pi G a^2 \tau \delta S. \quad (39)$$

Второе слагаемое в уравнении можно исключить. Для этого делается замена

$$\Phi = 4\pi G(\varepsilon_0 + p_0)^{1/2}u = (4\pi G)^{1/2}[(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + k)/a^2]^{1/2}u \quad (40)$$

и получаем

$$u'' - c_s^2\nabla^2u - (\theta''/\theta)u = \mathcal{N}, \quad (41)$$

$$\theta \equiv \frac{1}{a} \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + p_0} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{3k}{8\pi G a^2 \varepsilon_0} \right)^{1/2} = (\mathcal{H}/a) \left[ \frac{2}{3}(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + k) \right]^{-1/2}, \quad (42)$$

$$\mathcal{N} \equiv a^2(\varepsilon_0 + p_0)^{-1/2}\tau\delta S = (4\pi G)^{1/2}a^3(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + k)^{-1/2}\tau\delta S.$$

Если найдём функцию  $u$ , то получим остальные неизвестные функции.

#### 4.1 Адиабатические (изоэнтропийные) возмущения

Здесь мы рассмотрим адиабатические возмущения, то есть  $\delta S = 0$ . В дальнейшем будем предполагать, что Вселенная пространственно плоская ( $k = 0$ ).



## Возмущения в нерелятивистской материи

Сначала рассмотрим модель Вселенной с нерелятивистской материей ( $p = 0$ ). Тогда уравнения (31) имеют решение

$$a(\eta) = a_m \eta^2 / 2, \quad (43)$$

где  $a_m$  — постоянная. Так как  $p = 0$ , то  $c_s = 0$ . Следовательно, уравнение (39) принимает вид

$$\Phi'' + \frac{6}{\eta} \Phi = 0,$$

которое имеет решение

$$\Phi = C_1(x) + C_2(x) \eta^{-5},$$

где  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  — произвольные функции от пространственных координат. Остальные неизвестные функции равны

$$\frac{\overline{\delta\varepsilon}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{6} [\nabla^2 C_1 \eta^2 - 12C_1 + (\nabla^2 C_2 \eta^2 + 18C_2) \eta^{-5}],$$

$$\overline{\delta u_i} = a_m^{-1} (2C_{2,i} \eta^{-6} - \frac{4}{3} C_{1,i} \eta^{-1}).$$

Гравитационный потенциал  $\Phi$  остаётся постоянным, если пренебречь затухающей модой  $C_2(x) \eta^{-5}$ , независимо от относительного размера масштаба неоднородности относительно хаббловского радиуса. Однако поведение возмущений плотности энергии существенно зависит от масштаба в силу множителей  $\nabla^2 C_{1,2}$ . Рассмотрим плосковолновое возмущение с сопутствующим волновым числом  $n \equiv |\mathbf{n}|$ , для которого  $C_{1,2} \propto \exp(i\mathbf{n}\mathbf{x})$ , и, следовательно,  $\nabla^2 C_{1,2} \propto -n^2 \exp(i\mathbf{n}\mathbf{x})$ . Если физический масштаб  $\lambda_{\text{физ}} \sim a/n$  много больше хаббловского масштаба  $H^{-1} \sim a\eta$ , иными словами,  $n\eta \ll 1$  (длинноволновое возмущение), то

$$\frac{\overline{\delta\varepsilon}}{\varepsilon_0} \approx -2C_1 + \frac{3C_2}{\eta^5}.$$

В пренебрежении затухающей модой относительное возмущение плотности энергии остается постоянным и  $\overline{\delta\varepsilon}/\varepsilon_0 \simeq -2\Phi$ . Для коротковолнового предела

с  $n\eta \gg 1$  возмущение растёт по модулю как  $\eta^2$ :

$$\frac{\overline{\delta\varepsilon}}{\varepsilon_0} \simeq -\frac{n^2}{6}(C_1\eta^2 + C_2\eta^{-3}).$$

Возмущение скорости уменьшается по модулю как  $\eta^{-1}$ .

### Возмущения в релятивистской материи с линейным уравнением состояния

Изучим теперь более общий случай адиабатических возмущений во Вселенной, в которой доминирует релятивистская материя, с линейным уравнением состояния  $p = w\varepsilon$ , где  $w$  — положительная постоянная. В этом случае масштабный коэффициент увеличивается по закону  $a \propto \eta^{2/(1+3w)}$ . Для возмущения в форме плоской волны  $\Phi = \Phi_n(\eta) \exp(i\mathbf{n}\mathbf{x})$  уравнение (39) приобретает вид

$$\Phi_n'' + \frac{6(1+w)}{1+3w} \frac{1}{\eta} \Phi_n' + wn^2\Phi_n = 0.$$

Оно имеет решение

$$\Phi_n = \eta^{-\nu} [C_1 J_\nu(\sqrt{wn}\eta) + C_2 Y_\nu(\sqrt{wn}\eta)], \quad \nu \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{5+3w}{1+3w} \right),$$

где  $J_\nu$  и  $Y_\nu$  — функции Бесселя порядка  $\nu$ .

Учитывая длинноволновое приближение  $\sqrt{wn}\eta \ll 1$  и используя разложение функций Бесселя по малому аргументу, видно, что в этом пределе незатухающая мода  $\Phi$  постоянна. Из равенства (38) следует

$$\overline{\delta\varepsilon}/\varepsilon_0 \simeq -2\Phi \sim \text{const.}$$

Коротковолновые возмущения ( $\sqrt{wn}\eta \gg 1$ ) ведут себя как звуковые волны с затухающей амплитудой

$$\Phi_n \propto \eta^{-\nu-\frac{1}{2}} \exp(\pm i\sqrt{wn}\eta).$$

Рассмотрим частный случай — Вселенную, в которой доминирует излучение ( $p = \varepsilon/3$ ,  $a = a_r\eta$ ). Тогда порядок функций Бесселя равен  $\nu = 3/2$  и они могут быть выражены через элементарные функции. Получаем

$$\Phi_n = x^{-2} \left[ C_{1n} \left( \frac{\sin x}{x} - \cos x \right) + C_{2n} \left( \frac{\cos x}{x} + \sin x \right) \right], \quad x \equiv n\eta/\sqrt{3}.$$

Соответствующие возмущения плотности энергии равны

$$\begin{aligned} \overline{\delta\varepsilon}/\varepsilon_0 = & 2C_{1n} \left[ \frac{2-x^2}{x^2} \left( \frac{\sin x}{x} - \cos x \right) - \frac{\sin x}{x} \right] + \\ & + 4C_{2n} \left[ \frac{1-x^2}{x^2} \left( \frac{\cos x}{x} + \sin x \right) + \frac{\sin x}{2} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

**Упражнение.** Вывести формулу (44) для возмущений плотности энергии.

### Возмущения материи с произвольным уравнением состояния

Уравнение (41) точно не решается для произвольного случая  $p = p(\varepsilon)$ , но можно найти асимптотические решения. Из (33) следует  $c_s^2 = p'_0/\varepsilon'_0$ . Для плоско волнового возмущения  $u \propto \exp(i\mathbf{n}\mathbf{x})$  получаем

$$u'' + c_s^2 n^2 u - (\theta''/\theta)u = 0. \quad (45)$$

Для длинноволнового приближения  $c_s n \eta \ll 1$  можно опустить второе слагаемое в уравнении и получить приближённо

$$u \simeq \theta \left( C_1 + C_2 \int_{\eta_0} \frac{d\eta}{\theta^2} \right) = C_2 \int_{\bar{\eta}_0} \frac{d\eta}{\theta^2},$$

где последнее равенство получается изменением нижнего предела интегрирования с  $\eta_0$  на  $\bar{\eta}_0$  и, таким образом, поглощением моды  $C_1$ . Используя (42) и интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{d\eta}{\theta^2} = \frac{2}{3} \left( \frac{a^2}{\mathcal{H}} - \int a^2 d\eta \right),$$

В результате потенциал равен

$$\Phi = A \left( 1 - \frac{\mathcal{H}}{a^2} \int a^2 d\eta \right), \quad A = \text{const}. \quad (46)$$

Применим полученный результат для Вселенной со смесью излучения и нерелятивистской материи. В этом случае масштабный фактор растёт по закону

$$a(\eta) = a_{eq}(\xi^2 + 2\xi), \quad \xi \equiv \eta/\eta_*, \quad \eta_* = \eta_{eq}/(\sqrt{2} - 1), \quad (47)$$

где  $\eta_{eq}$ ,  $a_{eq}$  — конформное время и масштабный фактор, рассчитанные в момент времени  $t_{eq}$  равенства плотностей энергий излучения и материи,  $\varepsilon_r = \varepsilon_m$ . Подставим  $a(\eta)$  в (46):

$$\Phi = \frac{\xi + 1}{(\xi + 2)^3} \left[ C_{1n} \left( \frac{3}{5}\xi^2 + 3\xi + \frac{1}{\xi + 1} + \frac{13}{3} \right) + \frac{C_{2n}}{\xi^3} \right]. \quad (48)$$

Возмущения плотности равны

$$\begin{aligned} \bar{\delta\varepsilon}/\varepsilon_0 = -2 \left[ \left( \frac{(n\eta_{eq})^2 \xi^2 (\xi + 2)^2}{12(\xi + 1)^2} - \frac{3\xi^2 + 6\xi + 4}{2(\xi + 1)^2} \right) \Phi + \right. \\ \left. + C_{1n} \frac{3\xi^4 + 4\xi^3 + 18\xi^2 + 30\xi + 16}{2(\xi + 1)^2(\xi + 2)^2} \right]. \end{aligned}$$

Поведение гравитационного потенциала и возмущения плотности энергии показано на рисунке 1, где пренебрегается затухающая мода. Видно, что  $\bar{\delta\varepsilon}/\varepsilon_0$  и  $\Phi$  постоянны как в ранние, так и в поздние моменты времени относительно  $\eta \sim \eta_{eq}$ . После перехода от эпохи радиации к эпохе доминирования нерелятивистского материи амплитуда  $\bar{\delta\varepsilon}/\varepsilon_0$  уменьшается в 9/10 раза. В период доминирования материи, потенциал  $\Phi$  остаётся постоянным, а  $\bar{\delta\varepsilon}/\varepsilon_0$  начинает возрастать после выхода возмущения на горизонт  $\eta \sim n^{-1}$ . Видно, что на масштабах за этим горизонтом амплитуда  $\bar{\delta\varepsilon}/\varepsilon_0$  всегда равна  $-2\Phi$  для постоянного потенциала  $\Phi$ .

Для длинноволнового приближения  $c_s n \eta \gg 1$  можно опустить последнее слагаемое в уравнении (45):

$$u'' + c_s^2 n^2 u = 0.$$

Данное уравнение решается асимптотическим методом ВКБ для медленно меняющейся скорости звука  $c_s$  (см., например, [8]), и его решение описывает звуковые волны с зависящей от времени амплитудой.

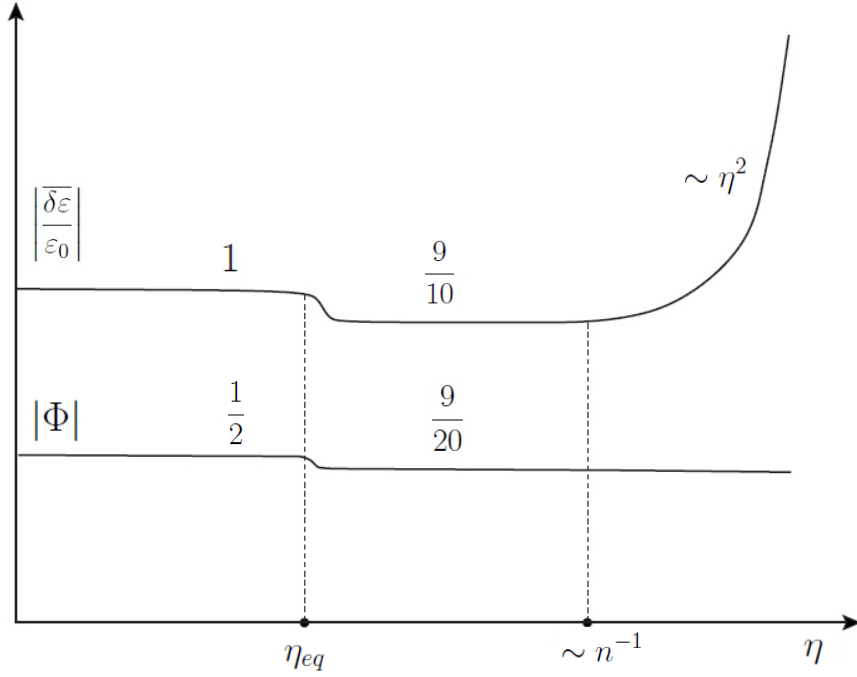


Рис. 1. Эволюция адиабатических возмущений

## 4.2 Энтروпийные возмущения

До сих пор мы рассматривали адиабатические возмущения в изоэнтропической жидкости, где давление зависит только от плотности энергии. В многокомпонентных средах могут возникать как адиабатические, так и энтропийные возмущения. Во Вселенной есть как минимум две компоненты: плазма и излучение. Следовательно, возмущения энтропии могут иметь важное значение. Здесь мы ограничиваемся изучением жидкости нерелятивистских барионов, тесно связанных с излучением. Будем использовать приближение однокомпонентной идеальной жидкости. В этом случае давление зависит не только от плотности энергии, но и от распределения барион-излучения, характеризуемого энтропией, приходящейся на один барион,  $S \sim T_\gamma^3/n_b$ , где  $T_\gamma$  — температура излучения,  $n_b$  — плотность числа барионов.

Определим вид (33) возмущения давления  $\delta p$ . Нерелятивистские ба-

рионы не вносят вклада в давление, и, следовательно, возмущения полного давления полностью обусловлены излучением:

$$\delta p = \delta p_\gamma = \frac{1}{3} \delta \varepsilon_\gamma. \quad (49)$$

Выразим  $\delta \varepsilon_\gamma$  через возмущение полной плотности энергии

$$\delta \varepsilon = \delta \varepsilon_\gamma + \delta \varepsilon_b \quad (50)$$

и возмущение энтропии  $\delta S$ . Так как  $\varepsilon_\gamma \propto T_\gamma^4$  и  $\varepsilon_b \propto n_b$ , то  $S \propto \varepsilon_\gamma^{3/4} / \varepsilon_b$ .

Следовательно,

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{3}{4} \frac{\delta \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma} - \frac{\delta \varepsilon_b}{\varepsilon_b}. \quad (51)$$

Решая систему (50)-(51) относительно  $\delta \varepsilon_\gamma$  через величины  $\delta \varepsilon$ ,  $\delta S$  и подставляя результат в (49), получим

$$\delta p = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{3 \varepsilon_b}{4 \varepsilon_\gamma} \right)^{-1} \delta \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon_b \left( 1 + \frac{3 \varepsilon_b}{4 \varepsilon_\gamma} \right)^{-1} \frac{\delta S}{S}. \quad (52)$$

Сравнивая выражение с (33), мы можем выписать скорость звука  $c_s$  и  $\tau$ :

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{3 \varepsilon_b}{4 \varepsilon_\gamma} \right)^{-1}, \quad \tau = \frac{c_s^2 \varepsilon_b}{S}.$$

Данная модель описывает плавный переход от периода доминирования излучения ( $\varepsilon_\gamma \gg \varepsilon_b$ ) с  $c_s^2 = 1/3$  к эпохе доминирования нерелятивистской материи ( $\varepsilon_\gamma \ll \varepsilon_b$ ) с  $c_s^2 = 0$ .

**Упражнение.** Убедиться в справедливости равенства (52).

### Длинноволновые возмущения $c_s n \eta \ll 1$

В этом приближении пренебрегаем слагаемым  $c_s^2 \nabla^2 \Phi$  в уравнении (39). Для  $\delta S \neq 0$  общее решение уравнения (39) есть сумма частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения ( $\delta S = 0$ ). Для длинноволновых возмущений выражение

$$\Phi = 2 \frac{\delta S}{S} = \text{const} \quad (53)$$

есть частное решение этого уравнения. Это очевидно, если учесть

$$2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2)\mathcal{H}^2 = 8\pi G a^2 (c_s^2 \varepsilon - p) = 2\pi G c_s^2 \varepsilon_b.$$

Физически, общее решение уравнения (39), когда  $\delta S \neq 0$ , описывает сумму адиабатических и энтропийных мод. Как их различать — вопрос определения. Основываясь на интуитивной идее о том, что в ранней Вселенной энтропийная мода должна описывать неоднородности в распределении барионов на почти однородном фоне излучения, здесь энтропийная мода определяется с начальными условиями

$$\Phi \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow 0. \quad (54)$$

Очевидно, что частное решение (53) этому условию не удовлетворяет. Решение, которое это дает, получается добавлением к (53) общего решения (48) и выбором констант интегрирования так, чтобы (54) выполнялось. В результате,

$$\Phi = \frac{\xi}{5} \cdot \frac{\xi^2 + 6\xi + 10}{(\xi + 2)^3} \cdot \frac{\delta S}{S},$$

$$\overline{\delta\varepsilon}/\varepsilon_0 = - \left[ \frac{(n\eta_{eq})^2 \xi^3 (\xi^2 + 6\xi + 10)}{30 (\xi + 1)^2 (\xi + 2)} + \frac{2\xi (\xi^3 + 7\xi^2 + 18\xi + 20)}{5(\xi + 2)^3 (\xi + 1)} \right] \frac{\delta S}{S}.$$

На рисунке 2 показаны графики функций  $\Phi$ ,  $\delta\varepsilon/\varepsilon_0$  и  $\delta\varepsilon_b/\varepsilon_b$  для энтропийных мод. Амплитуды  $\Phi$  и  $\delta\varepsilon/\varepsilon_0$  линейно возрастают до момента  $\eta_{eq}$ , тогда как для адиабатических возмущений они постоянны. Возмущения плотности нерелятивистского вещества  $\delta\varepsilon_b/\varepsilon_b$  несколько замораживаются перед  $\eta_{eq}$  и уменьшаются до  $2/5$  от своих начальных значений к моменту равенства. При  $\eta > \eta_{eq}$  энтропийные возмущения развиваются подобно незатухающей моде адиабатических возмущений. Есть ключевое отличие: из (51) следует, что для адиабатических возмущений ( $\delta S = 0$ ) всегда имеем

$$\frac{\delta\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma} = \frac{4}{3} \frac{\delta\varepsilon_b}{\varepsilon_b},$$

тогда как для энтропийных возмущений выполняется

$$\frac{\delta\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma} \simeq -2\frac{\delta\varepsilon_b}{\varepsilon_b}$$

после момента  $\eta = \eta_{eq}$ .

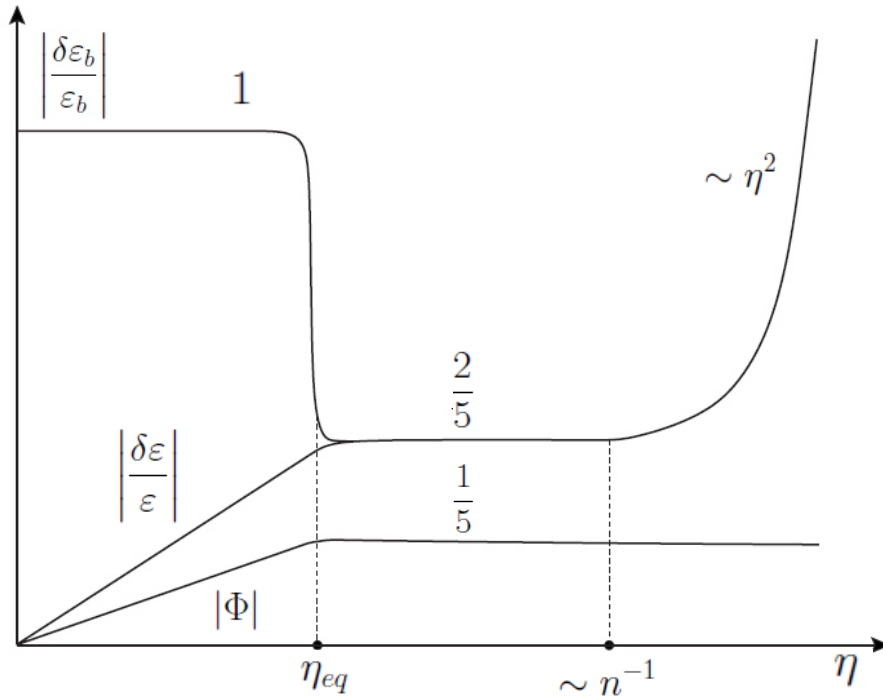


Рис. 2. Эволюция энтропийных возмущений



## Коротковолновые возмущения $c_s n \eta \gg 1$

Сначала исследуем времена  $\eta < \eta_{eq}$ . В этом случае  $c_s^2 = 1/3$  и  $a = a_r \eta$ . Следовательно, уравнение (41) примет вид

$$u'' - \frac{1}{3} \nabla^2 u - \frac{2a_{eq}^2}{a^2} u = \frac{a_{eq} \eta}{\sqrt{2\pi G \eta_{eq}^2}} \frac{\delta S}{S}.$$

Для  $\eta \ll \eta_{eq}$  это уравнение справедливо для произвольных  $n$ . Решение, удовлетворяющее начальным условиям (54), пересчитанным для  $\Phi$  с помощью (40), имеет вид

$$\Phi_n = \frac{\delta S}{S} \frac{\eta}{\eta_{eq}} \frac{1}{(\omega \eta_{eq})^3} \left[ \omega \eta + \frac{2}{\omega \eta} + 2\eta \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\cos \omega \eta}{\omega \eta} \right) \right], \quad \omega \equiv \frac{n}{\sqrt{3}}. \quad (55)$$

Важно подчеркнуть, что данное решение на ранних временах  $\eta \ll \eta_{eq}$  справедливо как для коротковолновых, так и для длинноволновых возмущений. Далее рассмотрим коротковолновые возмущения на интервале  $\eta_r > \eta \gg 1/n$ , где  $\eta_r$  — момент рекомбинации. Для них последний член в (41) пренебрежимо мал, и для нахождения решения можно использовать приближение ВКБ. В результате имеем

$$\Phi_n = F(\eta) + c_s^{-3/2} \frac{a_{eq}^2}{a^2} \left[ A_n \sin \left( \int c_s n d\eta \right) + B_n \cos \left( \int c_s n d\eta \right) \right], \quad (56)$$

где  $F$  не содержит осциллирующих членов ведущего порядка  $(n\eta)^{-1}$ . Коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  можно получить сопоставлением (56) с (55) в интервале  $\eta_{eq} \gg \eta \gg 1/n$ , когда оба решения верны. В интервале  $\eta_r \gg \eta \gg 1/n$  справедливо

$$\frac{\overline{\delta \varepsilon}}{\varepsilon_0} \simeq \frac{3^{7/4} c_s^{1/2}}{n \eta_{eq}} \frac{\delta S}{S} \sin \left( \int_0^\eta c_s n d\eta \right).$$

В данном разделе подробно анализировались скалярные возмущения в пространственно-плоской Вселенной. Например, в работе [2] можно ознакомиться со случаем возмущений в открытой и закрытой Вселенных.

## 5 Гидродинамические возмущения. Векторный и тензорный случаи

### Векторные возмущения

Для идеальной жидкости векторной части возмущения ТЭИ соответствуют ненулевые компоненты вида  $\delta T^0_i = (\varepsilon_0 + p_0)a^{-1}\delta u_{\perp i}$ . Уравнения (27) принимают вид

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{V}_i &= 16\pi G(\varepsilon_0 + p_0)a\delta u_{\perp i}, \\ (\bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{j,i})' + 2\mathcal{H}(\bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{j,i}) &= 0.\end{aligned}\tag{57}$$

Второе уравнение имеет решение

$$\bar{V}_i = \frac{C_{\perp i}}{a^2},\tag{58}$$

где  $C_{\perp i}$  — постоянные интегрирования. Принимая во внимание, что физическая скорость есть  $\delta v^i = a(dx^i/ds) = -a^{-1}\delta u_{\perp i}$ , мы получаем

$$\delta v^i \propto \frac{1}{a^4(\varepsilon_0 + p_0)}.$$

Таким образом, во вселенной, где доминирует нерелятивистская материя ( $\varepsilon_0 \sim a^{-3}$ ), скорости вращения затухают обратно пропорционально масштабному фактору, что согласуется с результатом теории Ньютона. Во Вселенной с преобладанием излучения ( $\varepsilon_0, p_0 \sim a^{-4}$ )  $\delta v = \text{const}$ . В обоих случаях метрические возмущения, определяемые (58), затухают очень быстро, и первичные векторные флуктуации имеют в настоящее время значительные амплитуды лишь в том случае, если они изначально были очень большими. Нет никаких оснований ожидать таких больших первичных векторных возмущений.

### Тензорные возмущения

Для идеальной жидкости  $\overline{\delta T^i_{j(T)}} = 0$ , поэтому уравнение (28) примет вид

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}h'_{ij} - \nabla^2 h_{ij} = 0.\tag{59}$$

Вводя новую переменную  $v$ :

$$h_{ij} = \frac{v}{a} e_{ij},$$

где  $e_{ij}$  — тензор поляризации, и рассматривая плоские волны с волновым числом  $n$ , уравнение (59) преобразуется:

$$v'' + \left( n^2 - \frac{a''}{a} \right) v = 0. \quad (60)$$

Во Вселенной, где доминирует радиация,  $a \propto \eta$ , следовательно,  $a'' = 0$  и  $v \propto \exp(\pm inn\eta)$ . В этом случае решение уравнения (59) есть

$$h_{ij} = \frac{1}{\eta} (C_1 \sin(n\eta) + C_2 \cos(n\eta)) e_{ij}.$$

Незатухающая мода гравитационной волны с длиной волны больше масштаба Хаббла ( $n\eta \ll 1$ ) является постоянной. Это общий результат, справедливый для любого уравнения состояния. Действительно, для длинноволновых возмущений с  $n\eta \ll 1$  можно пренебречь членом  $n^2$  в (60), и его решение будет иметь вид

$$v \simeq C_1 a + C_2 a \int \frac{d\eta}{a^2}.$$

Следовательно,

$$h_{ij} = \left( C_1 + C_2 \int \frac{d\eta}{a^2} \right) e_{ij}.$$

Для  $p < \varepsilon$  второе слагаемое описывает падающую моду.

Для коротковолнового возмущения ( $n\eta \gg 1$ ), мы имеем  $n^2 \gg a''/a$  и  $h_{ij} \propto \exp(\pm inn\eta)/a$ .

## Список литературы

- [1] Mukhanov V. F. Physical foundations of cosmology / V. F. Mukhanov — Cambridge: Cambridge University Press, 2005. — 442 p.
- [2] Mukhanov V. F. Theory of cosmological perturbations / V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, R. N. Brandenberger // Phys. Rept. — 1992.— Vol.215. — P.203
- [3] Вайнберг С. Космология / С. Вайнберг — Пер. с англ. / Под ред. и с предисл. И. Я. Арефьевой, В. И. Санюка — М.: УРСС: Книжный дом "ЛИБРОКОМ" , 2013. — 608 с.
- [4] Горбунов Д. С. Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков — М. КРАСНАД, 2010. — 568 с.
- [5] Bardeen J. Gauge-invariant cosmological perturbations / J. Bardeen // Phys. Rev. D. — 1980. — Vol. 22, № 8. — P.1882
- [6] Kodama H. Evolution of isocurvature perturbations I: photon-baryon universe / H. Kodama, M. Sasaki // Inter. J. Mod. Phys. A. — 1986. — Vol. 1, № 1. — P.265
- [7] Kodama H. Evolution of isocurvature perturbations II: radiation-dust universe / H. Kodama, M. Sasaki // Inter. J. Mod. Phys. A. — 1987. — Vol. 2, № 2. — P.491
- [8] Мухарлямов Р. К. Асимптотические методы в теоретической физике. Часть I / Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева — Казань: Изд. КФУ, 2016. — 47 с.

Мухарлямов Руслан Камилевич, Панкратьева Татьяна Николаевна

**Гидродинамические возмущения в космологии**

*Учебно-методическое пособие*

Отпечатано в полном соответствии с предоставленным оригинал-макетом