

Математические модели теоретической физики

(математика и компьютерные науки)

Математические основы физики

(математика и информатика)

профессор **Игнатьев Юрий Геннадиевич**



Казанский федеральный университет
Институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Казань, VI семестр, 2015 г.

Лекция VI: Математическая модель нелинейных колебаний

Содержание лекции

- ▶ Механизм спонтанного нарушения симметрии
- ▶ Построение численной модели нелинейных колебаний
- ▶ Компьютерное тестирование модели нелинейных колебаний

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
3. Игнатъев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7.
http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf

Содержание лекции

- ▶ **Механизм спонтанного нарушения симметрии**
 - ▶ Построение численной модели нелинейных колебаний
 - ▶ Компьютерное тестирование модели нелинейных колебаний
-

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
3. Игнат'ев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7.
http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf

Лекция VI: Математическая модель нелинейных колебаний

Содержание лекции

- ▶ Механизм спонтанного нарушения симметрии
- ▶ Построение численной модели нелинейных колебаний
- ▶ Компьютерное тестирование модели нелинейных колебаний

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
3. Игнат'ев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7.
http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf

Лекция VI: Математическая модель нелинейных колебаний

Содержание лекции

- ▶ Механизм спонтанного нарушения симметрии
- ▶ Построение численной модели нелинейных колебаний
- ▶ Компьютерное тестирование модели нелинейных колебаний

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
3. Игнат'ев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7.
http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf

Лекция VI: Математическая модель нелинейных колебаний

Содержание лекции

- ▶ Механизм спонтанного нарушения симметрии
- ▶ Построение численной модели нелинейных колебаний
- ▶ Компьютерное тестирование модели нелинейных колебаний

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7.
http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf

Лекция VI: Математическая модель нелинейных колебаний

Содержание лекции

- ▶ Механизм спонтанного нарушения симметрии
- ▶ Построение численной модели нелинейных колебаний
- ▶ Компьютерное тестирование модели нелинейных колебаний

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7.
http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf

Лекция VI: Математическая модель нелинейных колебаний

Содержание лекции

- ▶ Механизм спонтанного нарушения симметрии
- ▶ Построение численной модели нелинейных колебаний
- ▶ Компьютерное тестирование модели нелинейных колебаний

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
3. Игнат'ев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7.
http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf

Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ При увеличении амплитуды колебаний вблизи точки равновесия начинают проявляться **нелинейные свойства** движения механической системы. Вернемся к формуле разложения потенциала вблизи точки равновесия.

```
> U3 := (a1, a2, a3, x) -> a1*x + a2/2*x^2 + a3/6*x^3;
```

$$U3 := (a1, a2, a3, x) \rightarrow a1 x + \frac{1}{2} a2 x^2 + \frac{1}{6} a3 x^3$$

```
> plot(U3(-1, -1, 1, x), x=-2.5..5, labels=[x, U(x)],  
numpoints=2000, labelfont=[TIMES, BOLD, 16]);
```

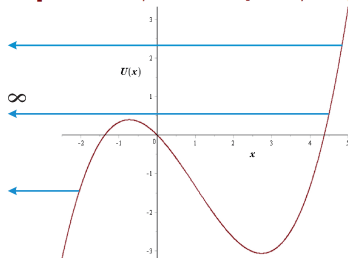


Figure 1. На рисунке приведен типичный график кубической параболы, полученный в СКМ Maple. На первый взгляд кажется, что следующим шагом обобщения должен быть учет кубического члена в разложении (1). Однако, это не так. В устойчивой механической системе этот член разложения должен быть равен нулю. Объяснить, почему.

Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ При увеличении амплитуды колебаний вблизи точки равновесия начинают проявляться **нелинейные свойства** движения механической системы. Возьмемся к формуле разложения потенциала вблизи точки равновесия.

$$U(x) = \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{6} a_2 (x-x_0)^3 + \frac{1}{24} a_3 (x-x_0)^4 + \dots \quad (1)$$

```
> U3 := (a1, a2, a3, x) -> a1*x + a2/2*x^2 + a3/6*x^3;
```

$$U3 := (a1, a2, a3, x) \rightarrow a1 x + \frac{1}{2} a2 x^2 + \frac{1}{6} a3 x^3$$

```
> plot(U3(-1, -1, 1, x), x=-2.5..5, labels=[x, U(x)],  
numpoints=2000, labelfont=[TIMES, BOLD, 16]);
```

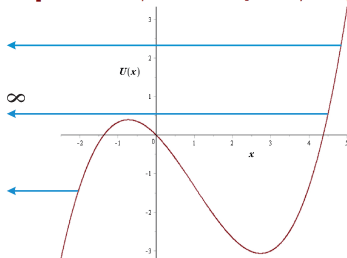


Figure 1. На рисунке приведен типичный график кубической параболы, полученный в СКМ Maple. На первый взгляд кажется, что следующим шагом обобщения должен быть учет кубического члена в разложении (1). Однако, это не так. В устойчивой механической системе этот член разложения должен быть равен нулю. Объяснить, почему.

Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ При увеличении амплитуды колебаний вблизи точки равновесия начинают проявляться **нелинейные свойства** движения механической системы. Возьмемся к формуле разложения потенциала вблизи точки равновесия.

- ▶
$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{6}U'''(0)x^3 + \frac{1}{24}U^{IV}(0)x^4 + \dots \quad (1)$$

- ▶

```
U3 := (a1, a2, a3, x) -> a1*x + a2/2*x^2 + a3/6*x^3;
```

$$U3 := (a1, a2, a3, x) \rightarrow a1x + \frac{1}{2}a2x^2 + \frac{1}{6}a3x^3$$

- ▶

```
plot(U3(-1, -1, 1, x), x=-2.5..5, labels=[x, U(x)],  
numpoints=2000, labelfont=[TIMES, BOLD, 16]);
```

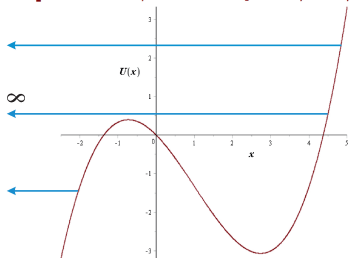


Figure 1. На рисунке приведен типичный график кубической параболы, полученный в СКМ Maple. На первый взгляд кажется, что следующим шагом обобщения должен быть учет кубического члена в разложении (1). Однако, это не так. В устойчивой механической системе этот член разложения должен быть равен нулю. Объяснить, почему.

- ▶ При увеличении амплитуды колебаний вблизи точки равновесия начинают проявляться **нелинейные свойства** движения механической системы. Возьмемся к формуле разложения потенциала вблизи точки равновесия.

- ▶
$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{6}U'''(0)x^3 + \frac{1}{24}U^{IV}(0)x^4 + \dots \quad (1)$$

> U3 := (a1, a2, a3, x) -> a1*x + a2/2*x^2 + a3/6*x^3;

$$U3 := (a1, a2, a3, x) \rightarrow a1x + \frac{1}{2}a2x^2 + \frac{1}{6}a3x^3$$

> plot(U3(-1, -1, 1, x), x=-2.5..5, labels=[x, U(x)], numpoints=2000, labelfont=[TIMES, BOLD, 16]);

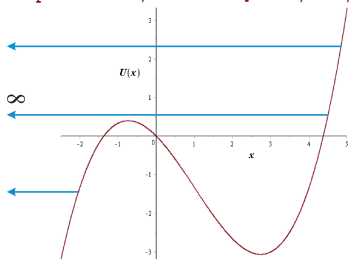


Figure 1. На рисунке приведен типичный график кубической параболы, полученный в СКМ Maple. На первый взгляд кажется, что следующим шагом обобщения должен быть учет кубического члена в разложении (1). Однако, это не так. В устойчивой механической системе этот член разложения должен быть равен нулю. Объяснить, почему.

Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ При увеличении амплитуды колебаний вблизи точки равновесия начинают проявляться **нелинейные свойства** движения механической системы. Возьмемся к формуле разложения потенциала вблизи точки равновесия.

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{6}U'''(0)x^3 + \frac{1}{24}U^{IV}(0)x^4 + \dots \quad (1)$$

- ▶
> U3 := (a1, a2, a3, x) -> a1*x + a2/2*x^2 + a3/6*x^3;
$$U3 := (a1, a2, a3, x) \rightarrow a1x + \frac{1}{2}a2x^2 + \frac{1}{6}a3x^3$$

> plot(U3(-1, -1, 1, x), x=-2.5..5, labels=[x, U(x)], numpoints=2000, labelfont=[TIMES, BOLD, 16]);

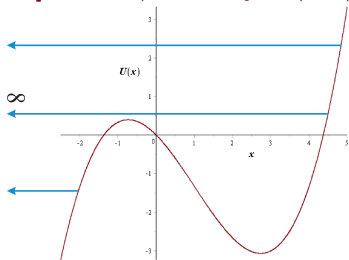


Figure 1. На рисунке приведен типичный график кубической параболы, полученный в СКМ Maple. На первый взгляд кажется, что следующим шагом обобщения должен быть учет кубического члена в разложении (1). Однако, это не так. В устойчивой механической системе этот член разложения должен быть равен нулю. **Объяснить, почему.**

Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ Рассмотрим разложение (1) до 4-го порядка, исключая теперь члены третьего порядка, полагая, что потенциал является четной функцией относительно точки равновесия симметрия физических систем, примеры.
- ▶ Итак, положим:

$$U(x) = U_0 + U_2 x^2 + U_4 x^4 + \dots$$

- ▶ Для того, чтобы получить потенциальную яму, необходимо, чтобы

$$U_2 > 0$$

- ▶ Вычисляя первую производную от $U(x)$, получим уравнение на точки экстремумов:

$$U'(x) = 2U_2 x + 4U_4 x^3 = 0$$

- ▶ Одна точка экстремума всегда существует: $x = 0$. В случае, если $a_2 > 0$, больше экстремумов нет, и мы имеем параболу 4-го порядка.
- ▶ Если $a_2 < 0$, имеются еще две симметричные точки минимумов, в этом случае $x = 0$ – точка максимума. Выбирая коэффициенты согласно (5), мы добьемся того, чтобы точки минимума находились в нуле потенциала.
- ▶ Тогда получим искомый потенциал 4-го порядка:

$$U(x) = \frac{1}{2} a_2 x^2 - \frac{1}{4} a_4 x^4$$

Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ Рассмотрим разложение (1) до 4-го порядка, исключая теперь члены третьего порядка, полагая, что потенциал является четной функцией относительно точки равновесия **симметрия физических систем, примеры**.

- ▶ Итак, положим:

$$U(x) = a_0 + \frac{1}{2} a_2 x^2 + \frac{1}{4} a_4 x^4 \quad (2)$$

- ▶ Для того, чтобы получить потенциальную яму, необходимо, чтобы

- ▶ Вычисляя первую производную от $U(x)$, получим уравнение на точки экстремумов:

- ▶ Одна точка экстремума всегда существует: $x = 0$. В случае, если $a_2 > 0$, больше экстремумов нет, и мы имеем параболу 4-го порядка.

- ▶ Если $a_2 < 0$, имеются еще две симметричные точки минимумов, в этом случае $x = 0$ – точка максимума. Выбирая коэффициенты согласно (5), мы добьемся того, чтобы чтобы точки минимума находились в нуле потенциала.

- ▶ Тогда получим искомый потенциал 4-го порядка:

- ▶

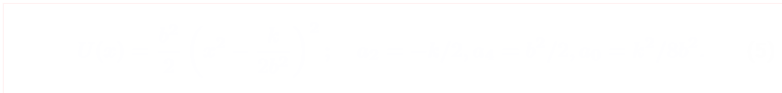


Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ Рассмотрим разложение (1) до 4-го порядка, исключая теперь члены третьего порядка, полагая, что потенциал является четной функцией относительно точки равновесия **симметрия физических систем, примеры**.
- ▶ Итак, положим:

$$U(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{4}a_4x^4. \quad (2)$$

- ▶ Для того, чтобы получить потенциальную яму, необходимо, чтобы
- ▶ Вычисляя первую производную от $U(x)$, получим уравнение на точки экстремумов:
- ▶ Одна точка экстремума всегда существует: $x = 0$. В случае, если $a_2 > 0$, больше экстремумов нет, и мы имеем параболу 4-го порядка.
- ▶ Если $a_2 < 0$, имеются еще две симметричные точки минимумов, в этом случае $x = 0$ – точка максимума. Выбирая коэффициенты согласно (5), мы добьемся того, чтобы чтобы точки минимума находились в нуле потенциала.
- ▶ Тогда получим искомый потенциал 4-го порядка:

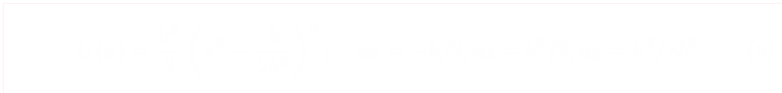


Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ Рассмотрим разложение (1) до 4-го порядка, исключая теперь члены третьего порядка, полагая, что потенциал является четной функцией относительно точки равновесия **симметрия физических систем, примеры**.
- ▶ Итак, положим:

$$U(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{4}a_4x^4. \quad (2)$$

- ▶ Для того, чтобы получить потенциальную яму, необходимо, чтобы $a_4 > 0$. (3)
- ▶ Вычисляя первую производную от $U(x)$, получим уравнение на точки экстремумов:
- ▶ Одна точка экстремума всегда существует: $x = 0$. В случае, если $a_2 > 0$, больше экстремумов нет, и мы имеем параболу 4-го порядка.
- ▶ Если $a_2 < 0$, имеются еще две симметричные точки минимумов, в этом случае $x = 0$ – точка максимума. Выбирая коэффициенты согласно (5), мы добьемся того, чтобы точки минимума находились в нуле потенциала.
- ▶ Тогда получим искомый потенциал 4-го порядка:
- ▶



Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ Рассмотрим разложение (1) до 4-го порядка, исключая теперь члены третьего порядка, полагая, что потенциал является четной функцией относительно точки равновесия **симметрия физических систем, примеры**.

- ▶ Итак, положим:

$$U(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{4}a_4x^4. \quad (2)$$

- ▶ Для того, чтобы получить потенциальную яму, необходимо, чтобы $a_4 > 0$. (3)

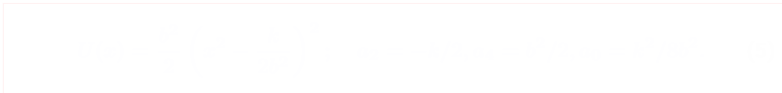
- ▶ Вычисляя первую производную от $U(x)$, получим уравнение на точки экстремумов:

- ▶ Одна точка экстремума всегда существует: $x = 0$. В случае, если $a_2 > 0$, больше экстремумов нет, и мы имеем параболу 4-го порядка.

- ▶ Если $a_2 < 0$, имеются еще две симметричные точки минимумов, в этом случае $x = 0$ – точка максимума. Выбирая коэффициенты согласно (5), мы добьемся того, чтобы точки минимума находились в нуле потенциала.

- ▶ Тогда получим искомый потенциал 4-го порядка:

- ▶



Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ Рассмотрим разложение (1) до 4-го порядка, исключая теперь члены третьего порядка, полагая, что потенциал является четной функцией относительно точки равновесия **симметрия физических систем, примеры.**

- ▶ Итак, положим:

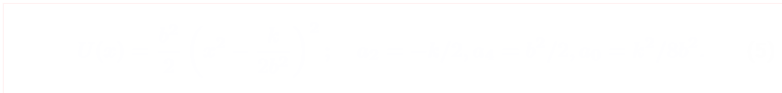
$$U(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{4}a_4x^4. \quad (2)$$

- ▶ Для того, чтобы получить потенциальную яму, необходимо, чтобы $a_4 > 0$. (3)

- ▶ Вычисляя первую производную от $U(x)$, получим уравнение на точки экстремумов:

$$x(a_2 + a_4x^2) = 0. \quad (4)$$

- ▶ Одна точка экстремума всегда существует: $x = 0$. В случае, если $a_2 > 0$, больше экстремумов нет, и мы имеем параболу 4-го порядка.
- ▶ Если $a_2 < 0$, имеются еще две симметричные точки минимумов, в этом случае $x = 0$ – точка максимума. Выбирая коэффициенты согласно (5), мы добьемся того, чтобы чтобы точки минимума находились в нуле потенциала.
- ▶ Тогда получим искомый потенциал 4-го порядка:
- ▶



Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ Рассмотрим разложение (1) до 4-го порядка, исключая теперь члены третьего порядка, полагая, что потенциал является четной функцией относительно точки равновесия **симметрия физических систем, примеры**.

- ▶ Итак, положим:

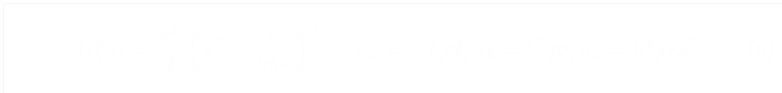
$$U(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{4}a_4x^4. \quad (2)$$

- ▶ Для того, чтобы получить потенциальную яму, необходимо, чтобы $a_4 > 0$. (3)

- ▶ Вычисляя первую производную от $U(x)$, получим уравнение на точки экстремумов:

$$x(a_2 + a_4x^2) = 0. \quad (4)$$

- ▶ Одна точка экстремума всегда существует: $x = 0$. В случае, если $a_2 > 0$, больше экстремумов нет, и мы имеем параболу 4-го порядка.
- ▶ Если $a_2 < 0$, имеются еще две симметричные точки минимумов, в этом случае $x = 0$ – точка максимума. Выбирая коэффициенты согласно (5), мы добьемся того, чтобы чтобы точки минимума находились в нуле потенциала.
- ▶ Тогда получим искомый потенциал 4-го порядка:
- ▶



Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ Рассмотрим разложение (1) до 4-го порядка, исключая теперь члены третьего порядка, полагая, что потенциал является четной функцией относительно точки равновесия **симметрия физических систем, примеры**.

- ▶ Итак, положим:

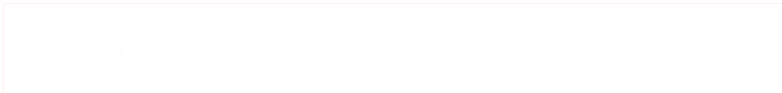
$$U(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{4}a_4x^4. \quad (2)$$

- ▶ Для того, чтобы получить потенциальную яму, необходимо, чтобы $a_4 > 0$. (3)

- ▶ Вычисляя первую производную от $U(x)$, получим уравнение на точки экстремумов:

$$x(a_2 + a_4x^2) = 0. \quad (4)$$

- ▶ Одна точка экстремума всегда существует: $x = 0$. В случае, если $a_2 > 0$, больше экстремумов нет, и мы имеем параболу 4-го порядка.
- ▶ Если $a_2 < 0$, имеются еще две симметричные точки минимумов, в этом случае $x = 0$ – точка максимума. Выбирая коэффициенты согласно (5), мы добьемся того, чтобы точки минимума находились в нуле потенциала.
- ▶ Тогда получим искомый потенциал 4-го порядка:



Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ Рассмотрим разложение (1) до 4-го порядка, исключая теперь члены третьего порядка, полагая, что потенциал является четной функцией относительно точки равновесия **симметрия физических систем, примеры**.

- ▶ Итак, положим:

$$U(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{4}a_4x^4. \quad (2)$$

- ▶ Для того, чтобы получить потенциальную яму, необходимо, чтобы $a_4 > 0$. (3)

- ▶ Вычисляя первую производную от $U(x)$, получим уравнение на точки экстремумов:

$$x(a_2 + a_4x^2) = 0. \quad (4)$$

- ▶ Одна точка экстремума всегда существует: $x = 0$. В случае, если $a_2 > 0$, больше экстремумов нет, и мы имеем параболу 4-го порядка.

- ▶ Если $a_2 < 0$, имеются еще две симметричные точки минимумов, в этом случае $x = 0$ – точка максимума. Выбирая коэффициенты согласно (5), мы добьемся того, чтобы чтобы точки минимума находились в нуле потенциала.

- ▶ Тогда получим искомый потенциал 4-го порядка:



Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ Рассмотрим разложение (1) до 4-го порядка, исключая теперь члены третьего порядка, полагая, что потенциал является четной функцией относительно точки равновесия **симметрия физических систем, примеры**.

- ▶ Итак, положим:

$$U(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{4}a_4x^4. \quad (2)$$

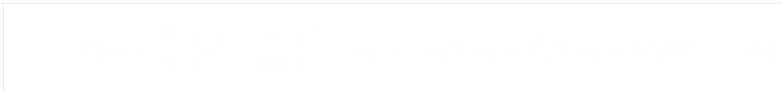
- ▶ Для того, чтобы получить потенциальную яму, необходимо, чтобы $a_4 > 0$. (3)

- ▶ Вычисляя первую производную от $U(x)$, получим уравнение на точки экстремумов:

$$x(a_2 + a_4x^2) = 0. \quad (4)$$

- ▶ Одна точка экстремума всегда существует: $x = 0$. В случае, если $a_2 > 0$, больше экстремумов нет, и мы имеем параболу 4-го порядка.
- ▶ Если $a_2 < 0$, имеются еще две симметричные точки минимумов, в этом случае $x = 0$ – точка максимума. Выбирая коэффициенты согласно (5), мы добьемся того, чтобы точки минимума находились в нуле потенциала.

- ▶ Тогда получим искомый потенциал 4-го порядка:



Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ Рассмотрим разложение (1) до 4-го порядка, исключая теперь члены третьего порядка, полагая, что потенциал является четной функцией относительно точки равновесия **симметрия физических систем, примеры**.

- ▶ Итак, положим:

$$U(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{4}a_4x^4. \quad (2)$$

- ▶ Для того, чтобы получить потенциальную яму, необходимо, чтобы $a_4 > 0$. (3)

- ▶ Вычисляя первую производную от $U(x)$, получим уравнение на точки экстремумов:

$$x(a_2 + a_4x^2) = 0. \quad (4)$$

- ▶ Одна точка экстремума всегда существует: $x = 0$. В случае, если $a_2 > 0$, больше экстремумов нет, и мы имеем параболу 4-го порядка.
- ▶ Если $a_2 < 0$, имеются еще две симметричные точки минимумов, в этом случае $x = 0$ – точка максимума. Выбирая коэффициенты согласно (5), мы добьемся того, чтобы точки минимума находились в нуле потенциала.
- ▶ Тогда получим искомый потенциал 4-го порядка:

$$U(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_4}{2} \right) x^2 - \frac{1}{4} a_4 x^4 \quad (5)$$

Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ Рассмотрим разложение (1) до 4-го порядка, исключая теперь члены третьего порядка, полагая, что потенциал является четной функцией относительно точки равновесия **симметрия физических систем, примеры**.

- ▶ Итак, положим:

$$U(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{4}a_4x^4. \quad (2)$$

- ▶ Для того, чтобы получить потенциальную яму, необходимо, чтобы $a_4 > 0$. (3)

- ▶ Вычисляя первую производную от $U(x)$, получим уравнение на точки экстремумов:

$$x(a_2 + a_4x^2) = 0. \quad (4)$$

- ▶ Одна точка экстремума всегда существует: $x = 0$. В случае, если $a_2 > 0$, больше экстремумов нет, и мы имеем параболу 4-го порядка.
- ▶ Если $a_2 < 0$, имеются еще две симметричные точки минимумов, в этом случае $x = 0$ – точка максимума. Выбирая коэффициенты согласно (5), мы добьемся того, чтобы точки минимума находились в нуле потенциала.
- ▶ Тогда получим искомый потенциал 4-го порядка:
- ▶

$$U(x) = \frac{b^2}{2} \left(x^2 - \frac{k}{2b^2} \right)^2; \quad a_2 = -k/2, a_4 = b^2/2, a_0 = k^2/8b^2. \quad (5)$$

Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия

- ▶ Рассмотрим разложение (1) до 4-го порядка, исключая теперь члены третьего порядка, полагая, что потенциал является четной функцией относительно точки равновесия **симметрия физических систем, примеры**.

- ▶ Итак, положим:

$$U(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{4}a_4x^4. \quad (2)$$

- ▶ Для того, чтобы получить потенциальную яму, необходимо, чтобы $a_4 > 0$. (3)

- ▶ Вычисляя первую производную от $U(x)$, получим уравнение на точки экстремумов:

$$x(a_2 + a_4x^2) = 0. \quad (4)$$

- ▶ Одна точка экстремума всегда существует: $x = 0$. В случае, если $a_2 > 0$, больше экстремумов нет, и мы имеем параболу 4-го порядка.
- ▶ Если $a_2 < 0$, имеются еще две симметричные точки минимумов, в этом случае $x = 0$ – точка максимума. Выбирая коэффициенты согласно (5), мы добьемся того, чтобы точки минимума находились в нуле потенциала.
- ▶ Тогда получим искомый потенциал 4-го порядка:
- ▶

$$U(x) = \frac{b^2}{2} \left(x^2 - \frac{k}{2b^2} \right)^2; \quad a_2 = -k/2, a_4 = b^2/2, a_0 = k^2/8b^2. \quad (5)$$

Механизм спонтанного нарушения симметрии

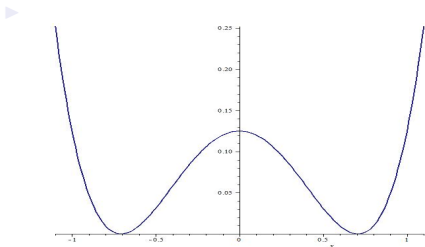


Figure 2. На рисунке приведен график потенциала 4-го порядка (5), полученный в СКМ Maple.

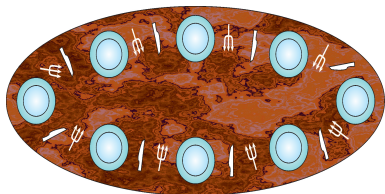


Figure 3. Спонтанное нарушение симметрии

- ▶ Уравнение свободных колебаний с потенциалом 4-го порядка с учетом диссипативных процессов принимает вид:
- ▶ Это нелинейное дифференциальное уравнение с кубической нелинейностью. Его решение можно получить только численным интегрированием.
- ▶ Численное моделирование

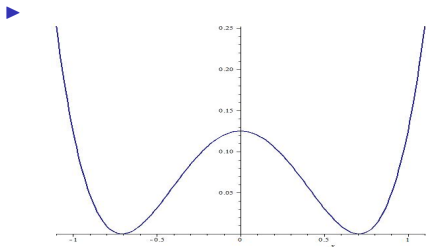


Figure 2. На рисунке приведен график потенциала 4-го порядка (5), полученный в СКМ Maple.

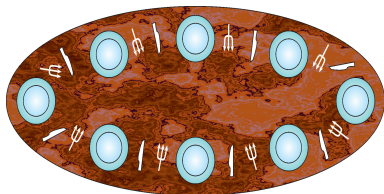


Figure 3. Спонтанное нарушение симметрии

- Уравнение свободных колебаний с потенциалом 4-го порядка с учетом диссипативных процессов принимает вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \frac{d\psi}{dx} + \gamma x^3 = 0, \quad (6)$$

- Это нелинейное дифференциальное уравнение с кубической нелинейностью. Его решение можно получить только численным интегрированием.
- Численное моделирование

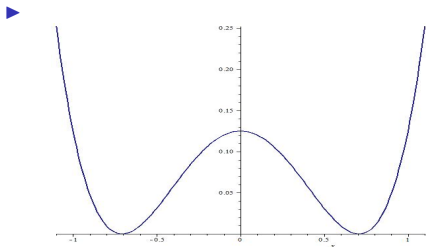


Figure 2. На рисунке приведен график потенциала 4-го порядка (5), полученный в СКМ Maple.

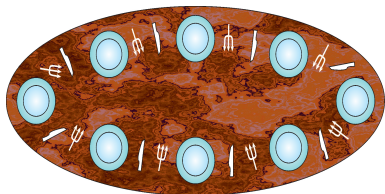


Figure 3. Спонтанное нарушение симметрии

- ▶ Уравнение свободных колебаний с потенциалом 4-го порядка с учетом диссипативных процессов принимает вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_0 \frac{dx}{dt} - \frac{k}{m}x + 2\frac{b^2}{m}x^3 = 0. \quad (6)$$

- ▶ Это нелинейное дифференциальное уравнение с кубической нелинейностью. Его решение можно получить только численным интегрированием.
- ▶ Численное моделирование

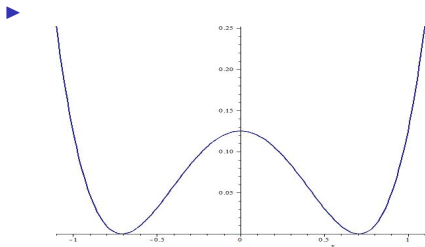


Figure 2. На рисунке приведен график потенциала 4-го порядка (5), полученный в СКМ Maple.

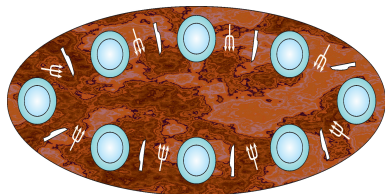


Figure 3. Спонтанное нарушение симметрии

- ▶ Уравнение свободных колебаний с потенциалом 4-го порядка с учетом диссипативных процессов принимает вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_0 \frac{dx}{dt} - \frac{k}{m}x + 2\frac{b^2}{m}x^3 = 0. \quad (6)$$

- ▶ Это нелинейное дифференциальное уравнение с кубической нелинейностью. Его решение можно получить только численным интегрированием.
- ▶ [Численное моделирование](#)

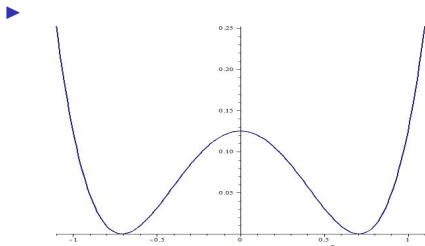


Figure 2. На рисунке приведен график потенциала 4-го порядка (5), полученный в СКМ Maple.

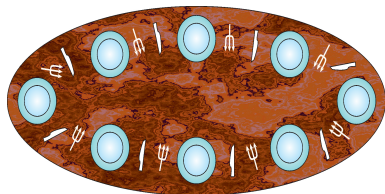


Figure 3. Спонтанное нарушение симметрии

- ▶ Уравнение свободных колебаний с потенциалом 4-го порядка с учетом диссипативных процессов принимает вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta_0 \frac{dx}{dt} - \frac{k}{m} x + 2 \frac{b^2}{m} x^3 = 0. \quad (6)$$

- ▶ Это нелинейное дифференциальное уравнение с кубической нелинейностью. Его решение можно получить только численным интегрированием.

- ▶ [Численное моделирование](#)

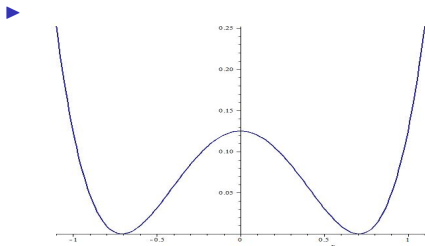


Figure 2. На рисунке приведен график потенциала 4-го порядка (5), полученный в СКМ Maple.

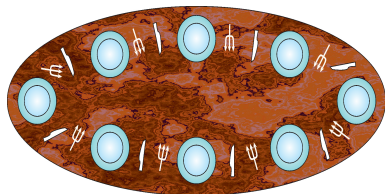


Figure 3. Спонтанное нарушение симметрии

- ▶ Уравнение свободных колебаний с потенциалом 4-го порядка с учетом диссипативных процессов принимает вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta_0 \frac{dx}{dt} - \frac{k}{m} x + 2 \frac{b^2}{m} x^3 = 0. \quad (6)$$

- ▶ Это нелинейное дифференциальное уравнение с кубической нелинейностью. Его решение можно получить только численным интегрированием.
- ▶ Численное моделирование