БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА И ПОЯВЛЕНИЕ ХАОСА В ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

<u>отображение</u>– это функция, которая показывает зависимость последующих значений параметров системы от предыдущих значений.

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Свойства динамической системы определяется свойствами порождаемого ей отображения

Они удобны ввиду их наглядности.

отображение– это функция, которая показывает зависимость последующих значений параметров системы от предыдущих значений.

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

С помощью точечных отображений изучают объекты не с непрерывным, а с дискретным временем.

При переходе к отображению размерность изучаемой системы может уменьшаться.

- Ферхюльст (1845 год) - исследование популяции бабочек в замкнутой среде.

$$x_{n+1} = f(x_n) = r\,x_n(1 - x_n)$$

Это квадратичное отображение, где

x_n – численность популяции на n–шаге (в n год) $(0 \le x \le 1)$;

$(1 - x_n)$ – "свободные" места;

r – коэффициент "плодовитости" $(0 \le r \le 4)$

- Ферхюльст (1845 год) - исследование популяции бабочек в замкнутой среде.

$$x_{n+1} = f(x_n) = r\, x_n(1 - x_n)$$

- Задача о банковских процентах

$$z_{n+1} = (1+\varepsilon)z_n = \ldots = (1+\varepsilon)^{n+1} z_0$$

z_n – сумма вклада на n–шаге (в n месяц);
ε – процент роста вклада

- Ферхюльст (1845 год) - исследование популяции бабочек в замкнутой среде.

$$x_{n+1} = f(x_n) = r\, x_n(1 - x_n)$$

- Задача о банковских процентах

$$z_{n+1} = (1 + \varepsilon)z_n = \ldots = (1 + \varepsilon)^{n+1} z_0$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0(1 - z_n/z_{max})$$

$$z_{n+1} = [1 + \varepsilon_0(1 - z_n/ z_{max})]z_n$$

$$x_n = z_n\, \varepsilon_0/z_{max}(1 + \varepsilon_0)$$

$$r = z_{max}(1 + \varepsilon_0)^2/\varepsilon_0$$

При изменении внешнего параметра r точечные отображения демонстрируют довольно сложное поведение, которое становится ***хаотическим*** при достаточно больших r

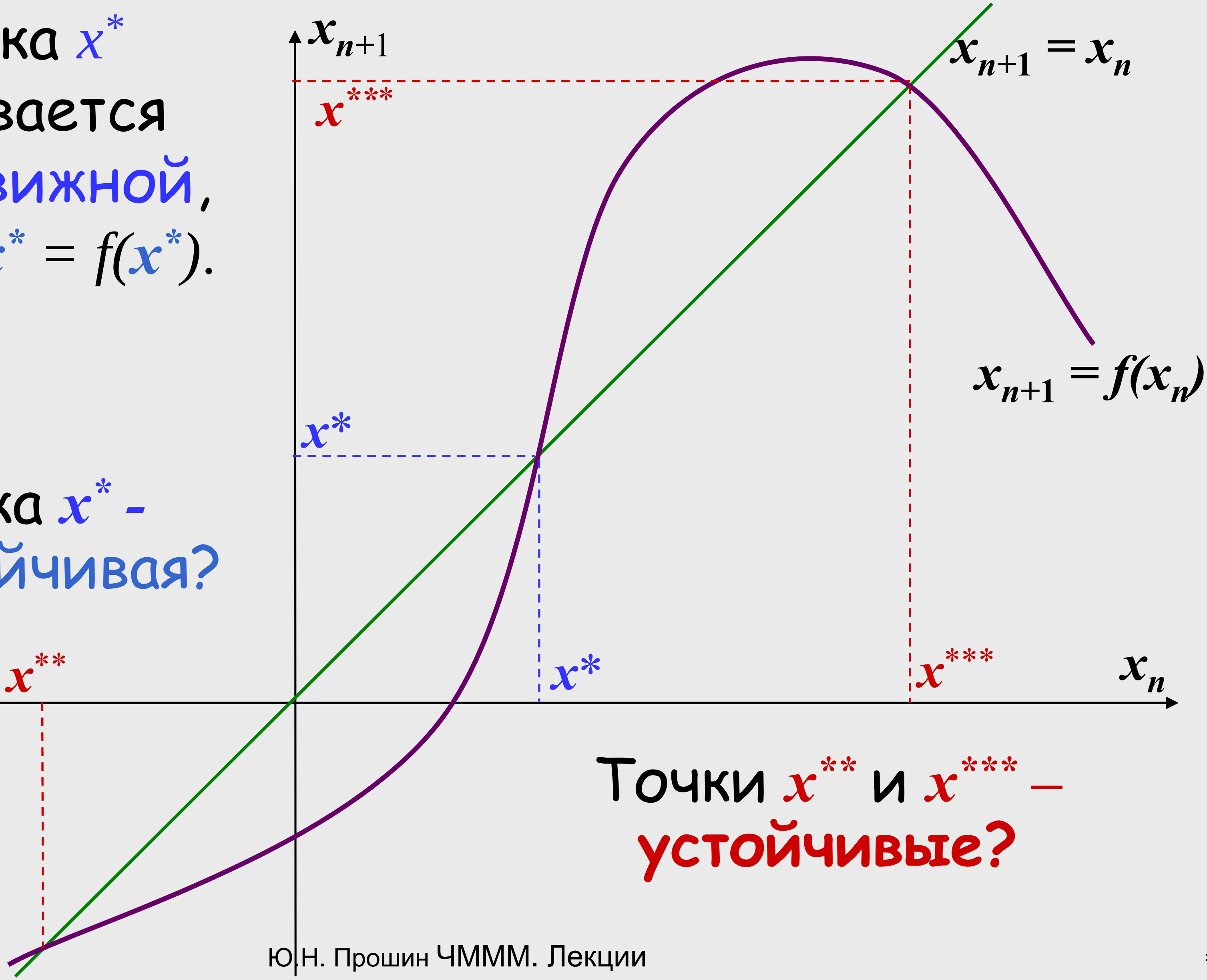
Что такое **ХАОС** ?

Это очень быстрое разбегание изначально очень близких траекторий в фазовом пространстве

Свойства точечных отображений

Точка x^* называется **неподвижной**, если $x^* = f(x^*)$.

Точка x^* - **не**устойчивая?

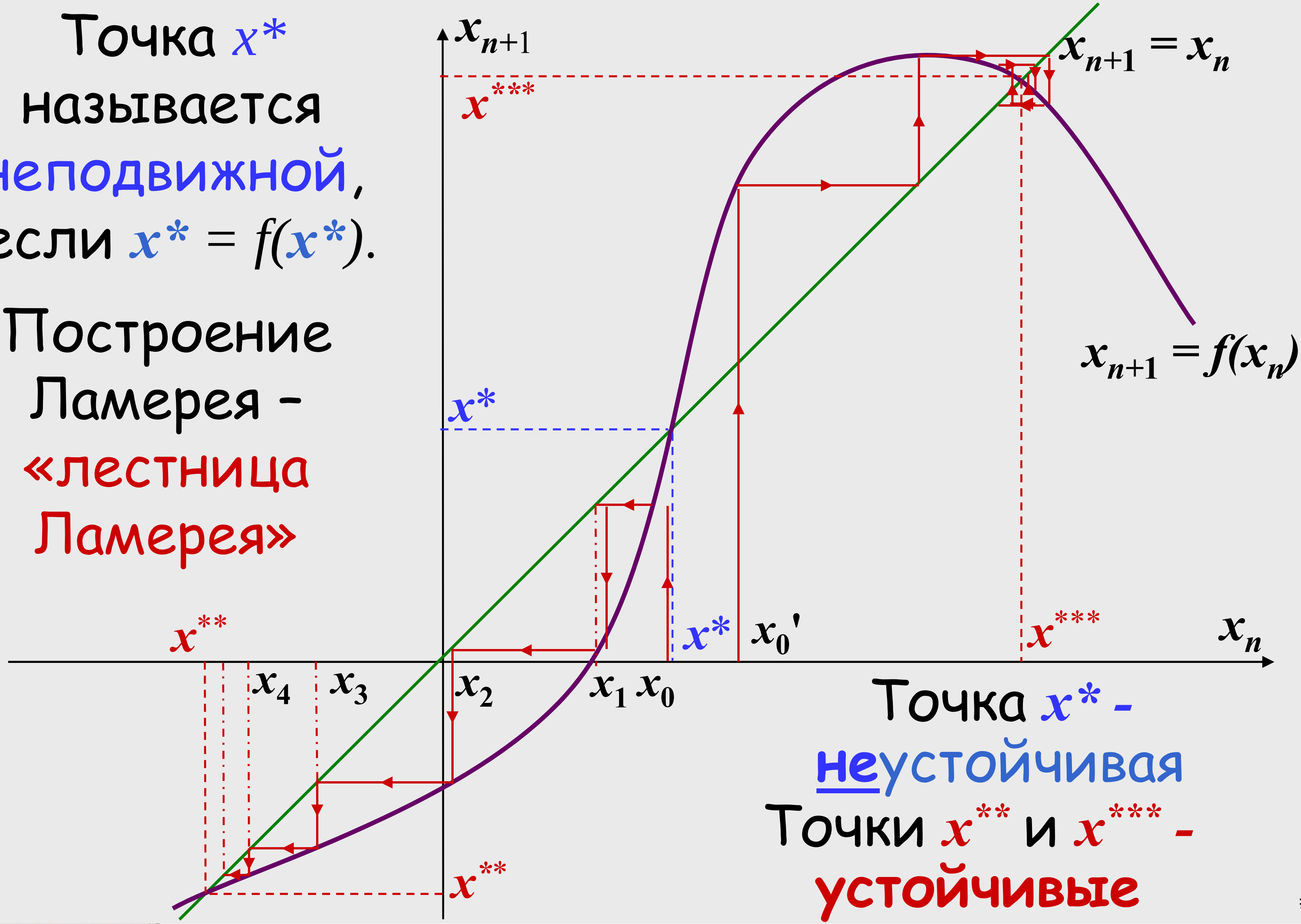


Точки x^{**} и x^{***} – **устойчивые?**

Свойства точечных отображений

Точка x^* называется **неподвижной**, если $x^* = f(x^*)$.

Построение Ламерея – «лестница Ламерея»



Точка x^* - **не**устойчивая

Точки x^{**} и x^{***} - **устойчивые**

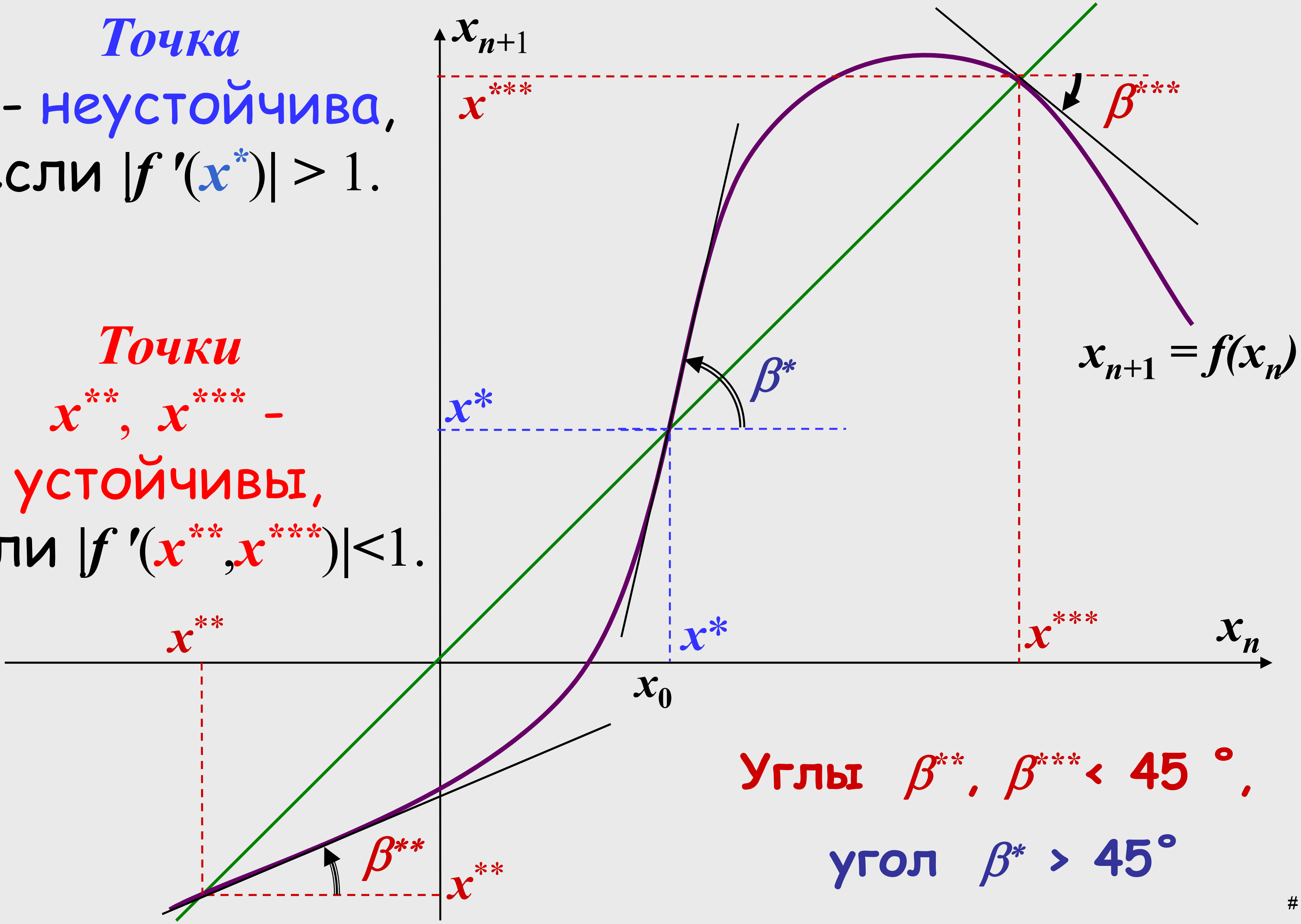
Свойства точечных отображений

Точка

x^* - неустойчива,
если $|f'(x^*)| > 1$.

Точки

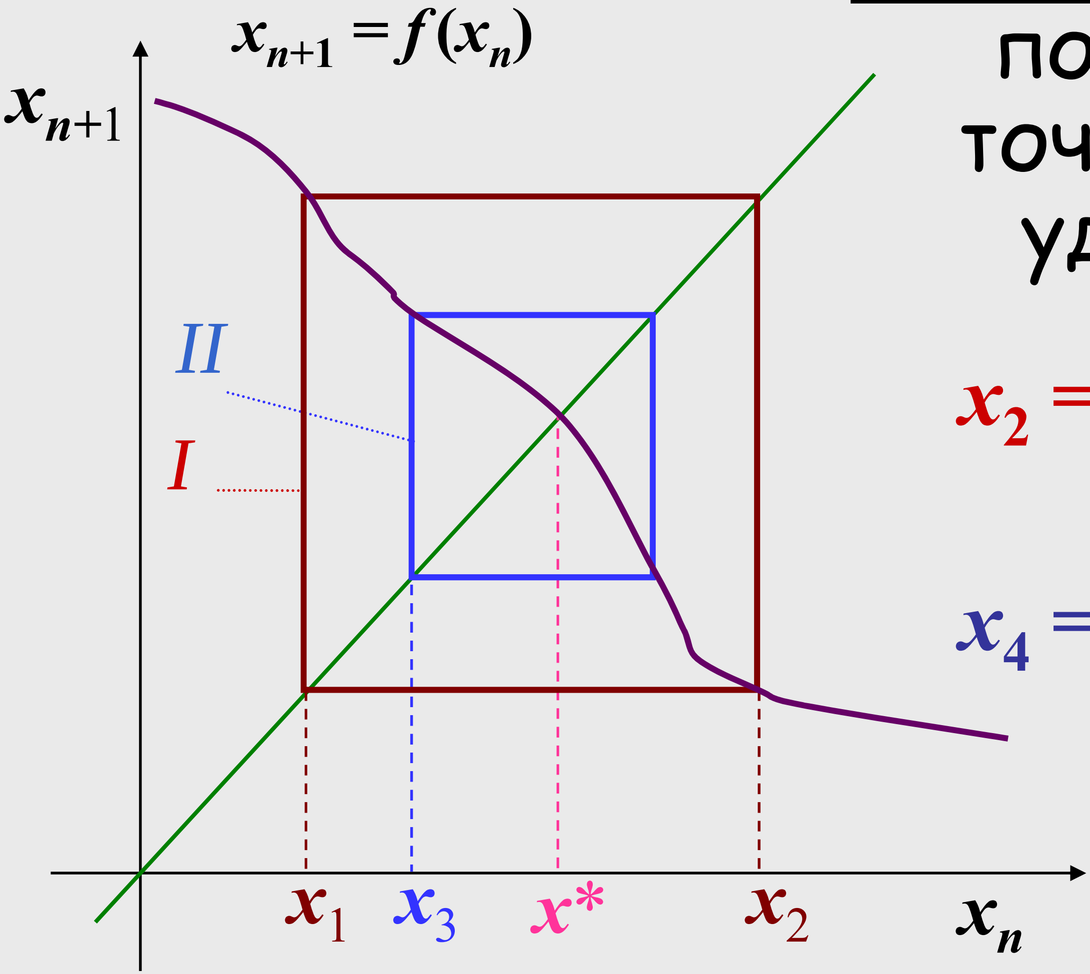
x^{**}, x^{***} -
устойчивы,
если $|f'(x^{**}, x^{***})| < 1$.



Углы β^{**}, β^{***} < 45 °,

угол β^* > 45°

Свойства точечных отображений



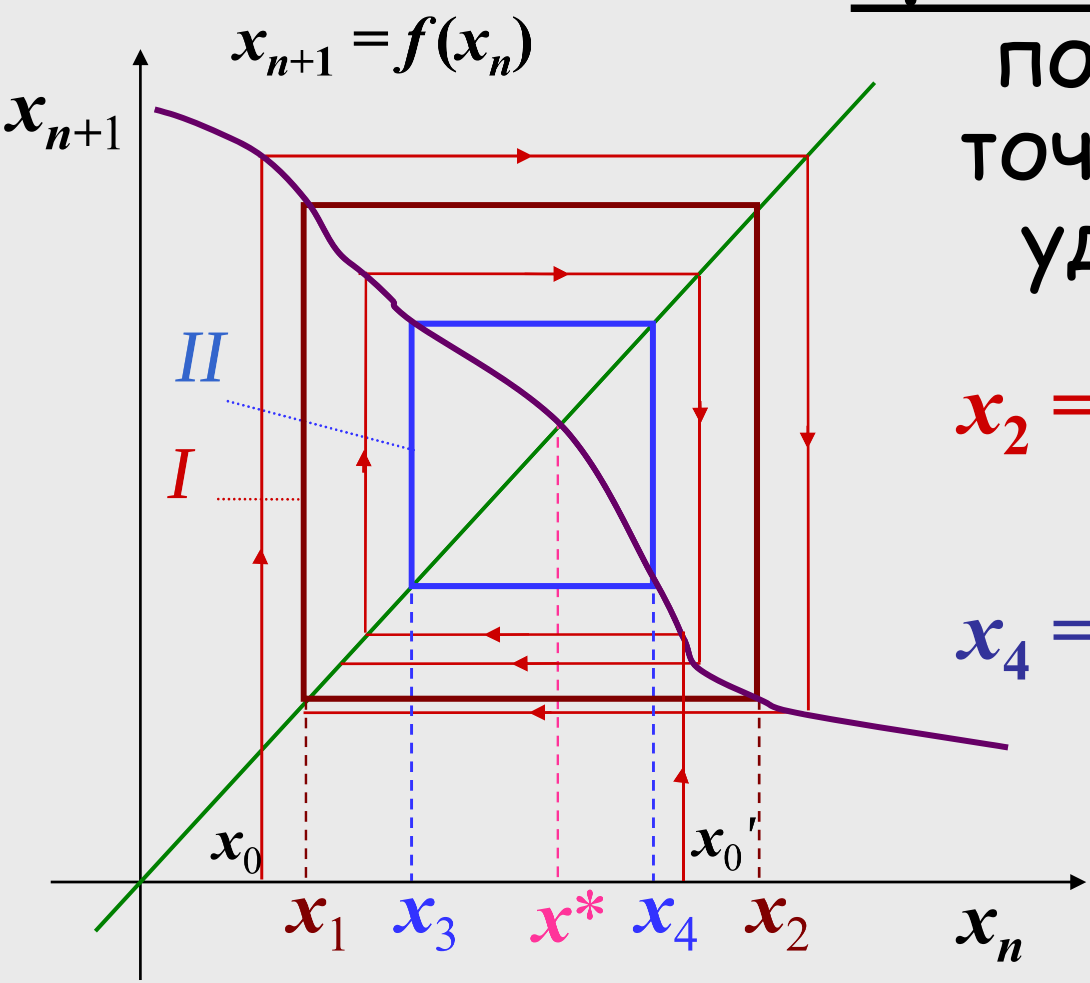
Цикл 2 порядка образует последовательность точек x_1, x_2 (или x_3, x_4), удовлетворяющих:

$$x_2 = f(x_1), x_1 = f(x_2)$$

или

$$x_4 = f(x_3), x_3 = f(x_4)$$

Свойства точечных отображений



Цикл 2 порядка образует последовательность точек x_1, x_2 (или x_3, x_4), удовлетворяющих:

$$x_2 = f(x_1),\ x_1 = f(x_2) \text{ - } \textit{уст.}$$

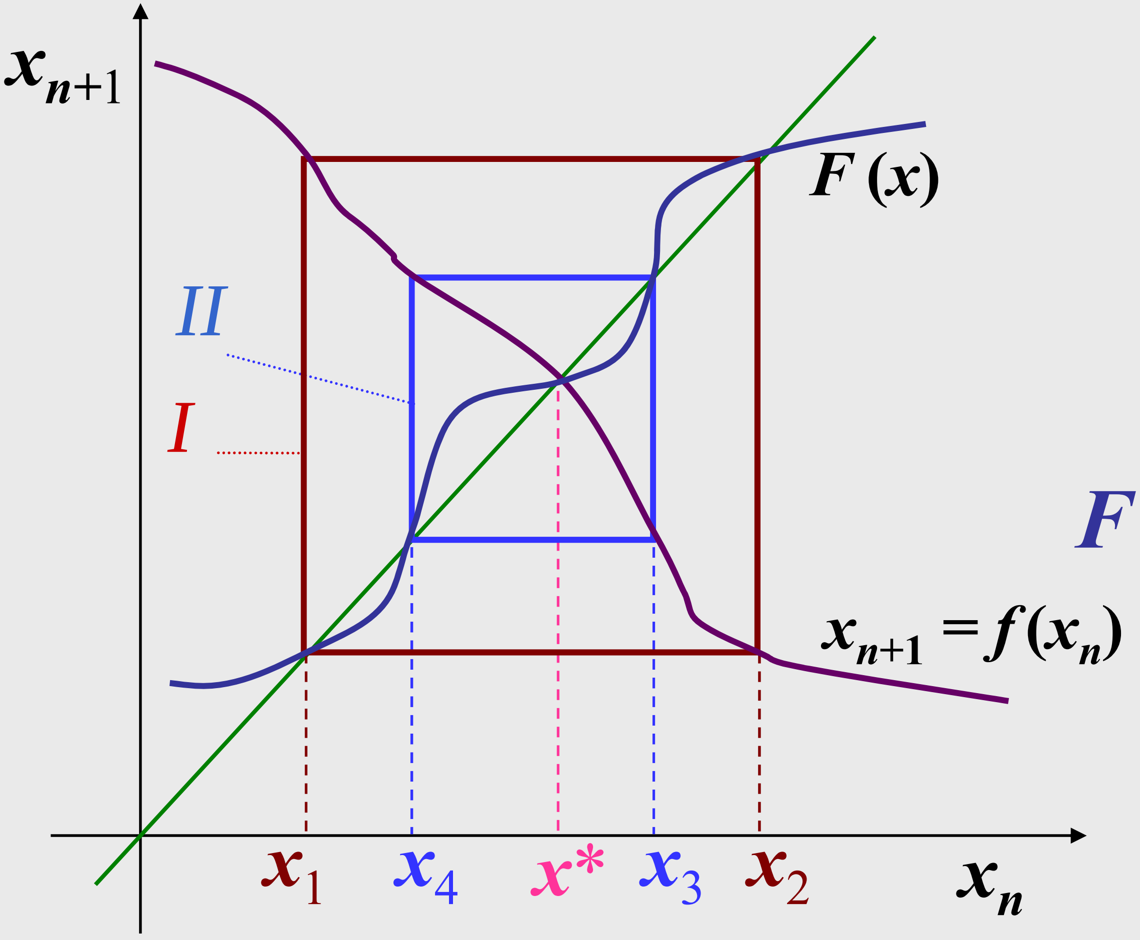
или

$$x_4 = f(x_3),\ x_3 = f(x_4) \text{ -} \textit{неуст.}$$

В принципе, могут быть **циклы любого порядка**

Свойства точечных отображений

$$F(x) = f(f(x))$$



Точки циклов отображения

$$y = f(x)$$

являются неподвижными точками для

$$F(x) = f(f(x)) \equiv f^2(x):$$

$$F(x_1) = F(x_1);$$
$$F(x_2) = F(x_2)$$

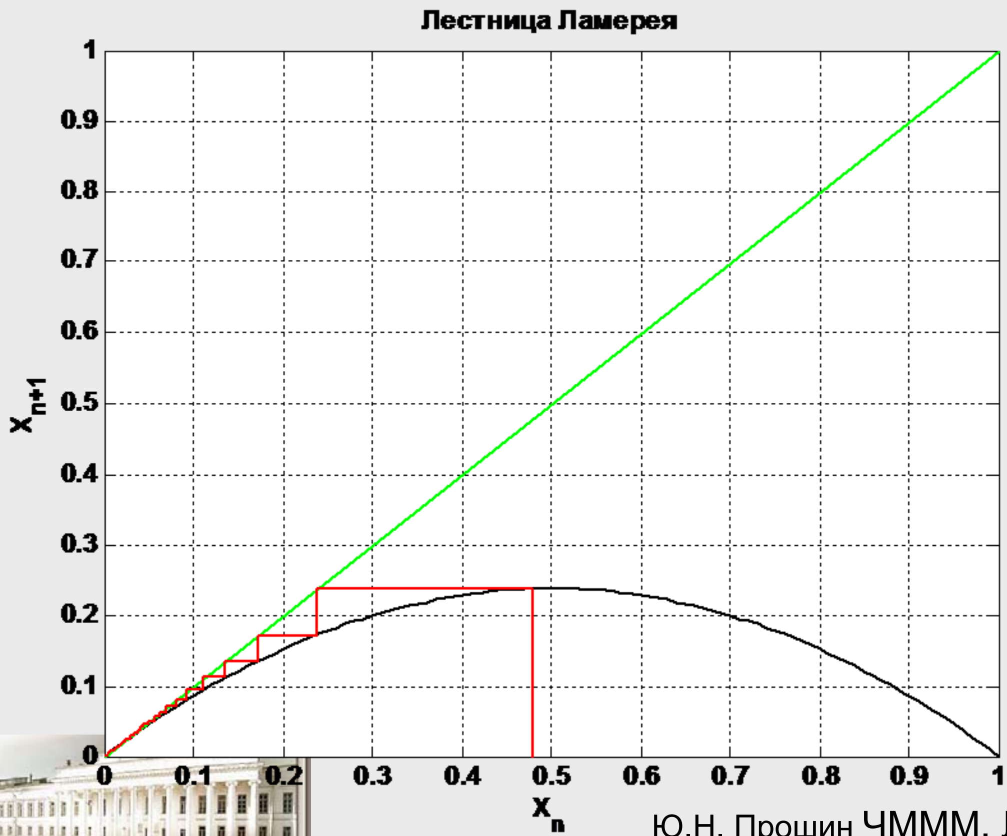
Бифуркация

Бифуркация – эти качественная перестройка картины движения. Значения управляющего параметра, при которых происходят бифуркации, называются критическими или бифуркационными значениями.

$$x_{n+1} = r\, x_n (1 - x_n)$$

$$x_{n+1} = r\,x_n(1 - x_n)$$

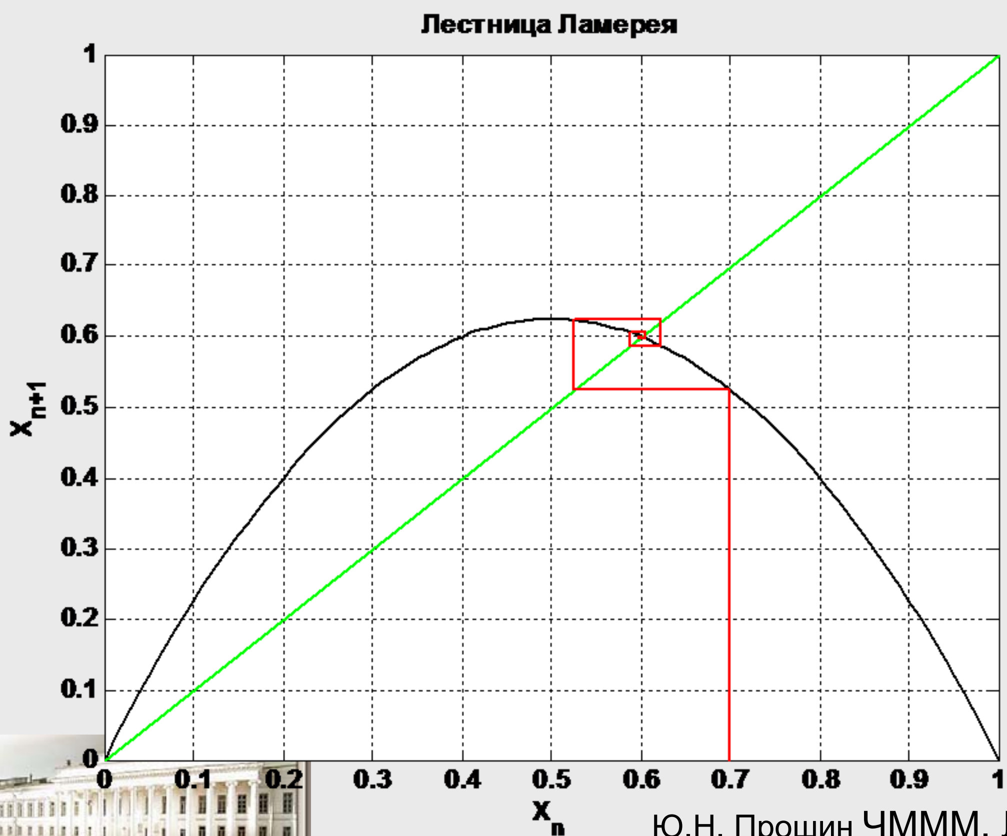
$r = 0.95,\ x_0=0.47$



1) $0 < r < 1$.
В этом случае отображение имеет единственную неподвижную точку $x^* = 0$, которая является устойчивой

$$x_{n+1} = r\, x_n(1 - x_n)$$

$r = 2.5,\ x_0 = 0.7$

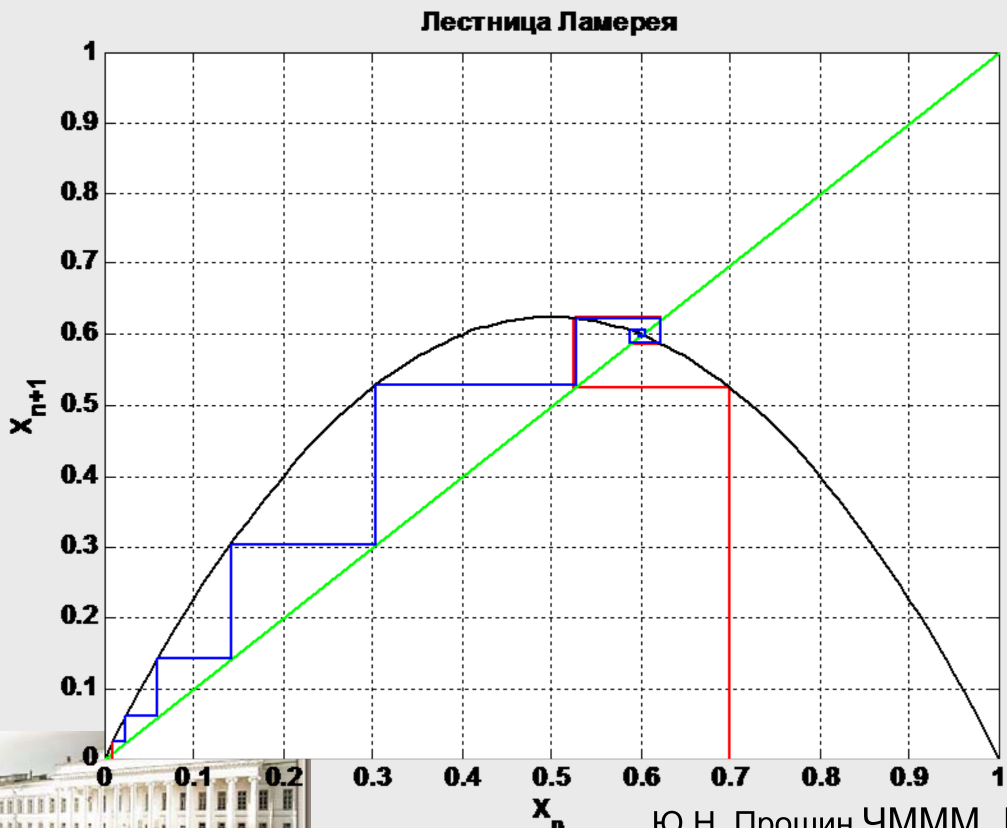


2) $1 < r \leq 3$.
На отрезке [0, 1] появляется еще одна неподвижная **устойчивая** точка $x^*_1 = 1 - 1/r$.

$$x_{n+1} = r\,x_n(1 - x_n)$$

$r = 2.5,\ x_0=0.7$

$r = 2.5,\ x_0=0.01$



2) $1 < r \le 3$.

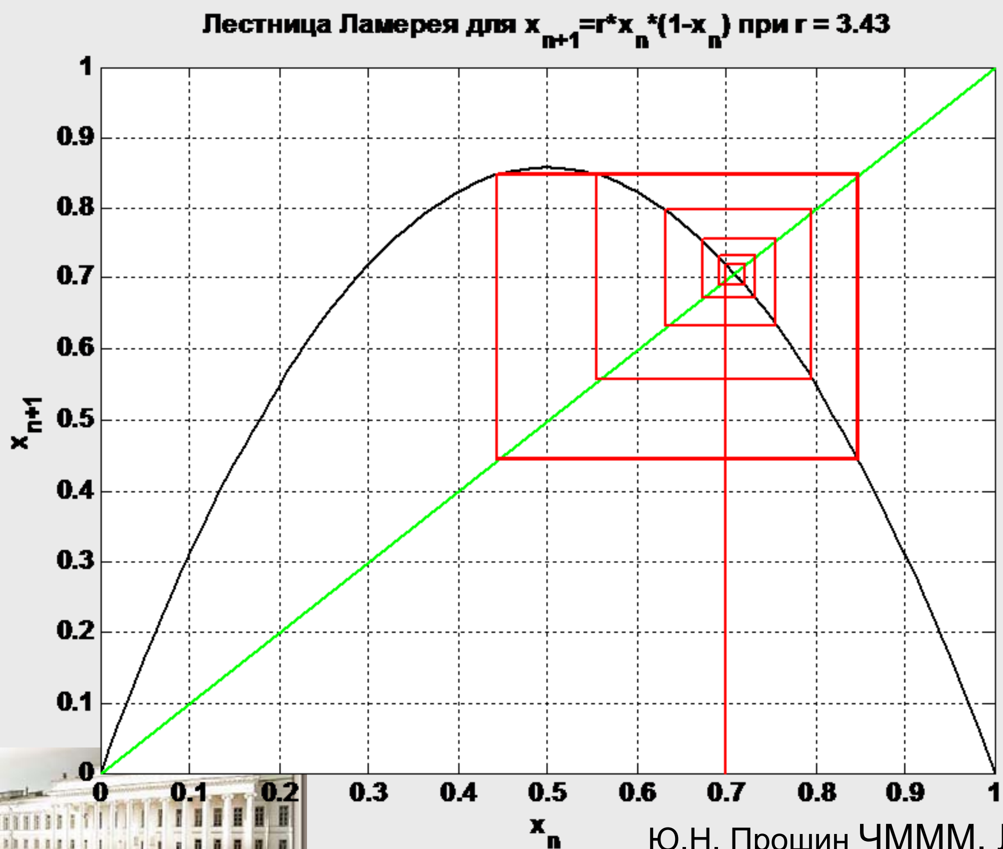
На отрезке [0, 1] появляется еще одна неподвижная **устойчивая** точка $x^*_1 = 1-1/r$.

Неподвижная точка $x^* = 0$ теряет устойчивость.

$$x_{n+1} = r\, x_n(1 - x_n)$$

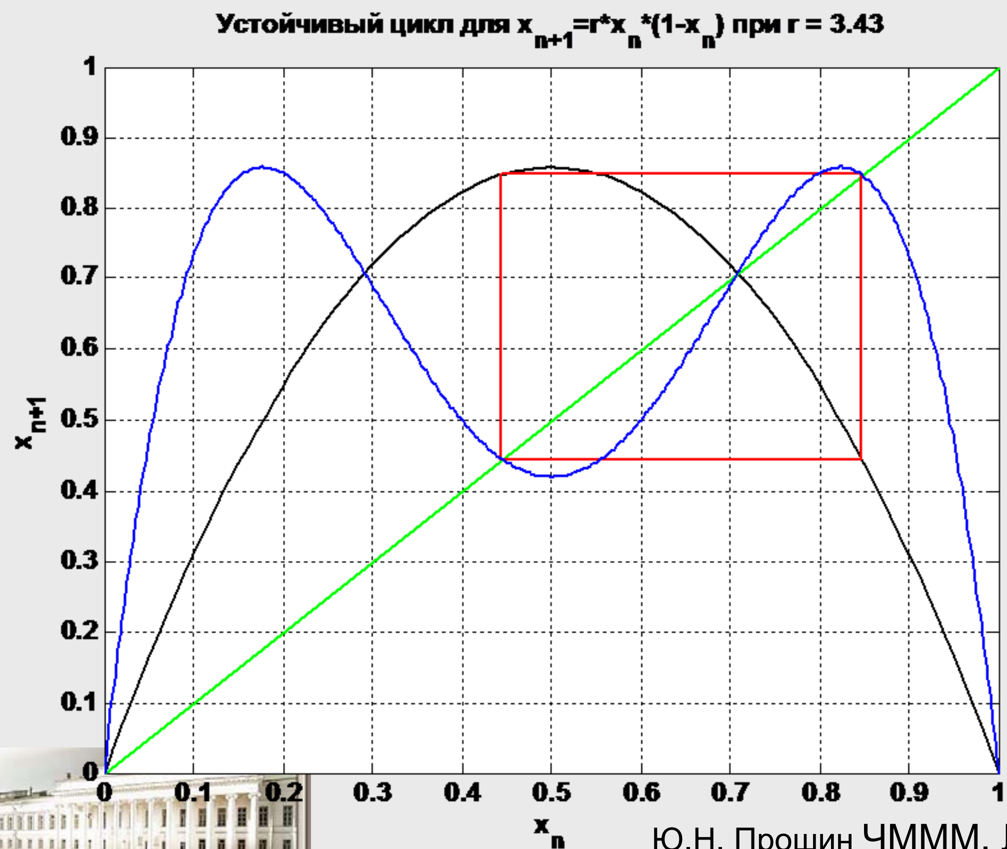
3) $3 < r \leq 1+\sqrt{6} \approx 3.45$ Отображение претерпевает бифуркацию: неподвижная точка x^*_1 становится неустойчивой, и вместо нее появляется двукратный цикл.

$r = 3.43,\ x_0 = 0.7$



$$x_{n+1} = r\, x_n(1 - x_n)$$

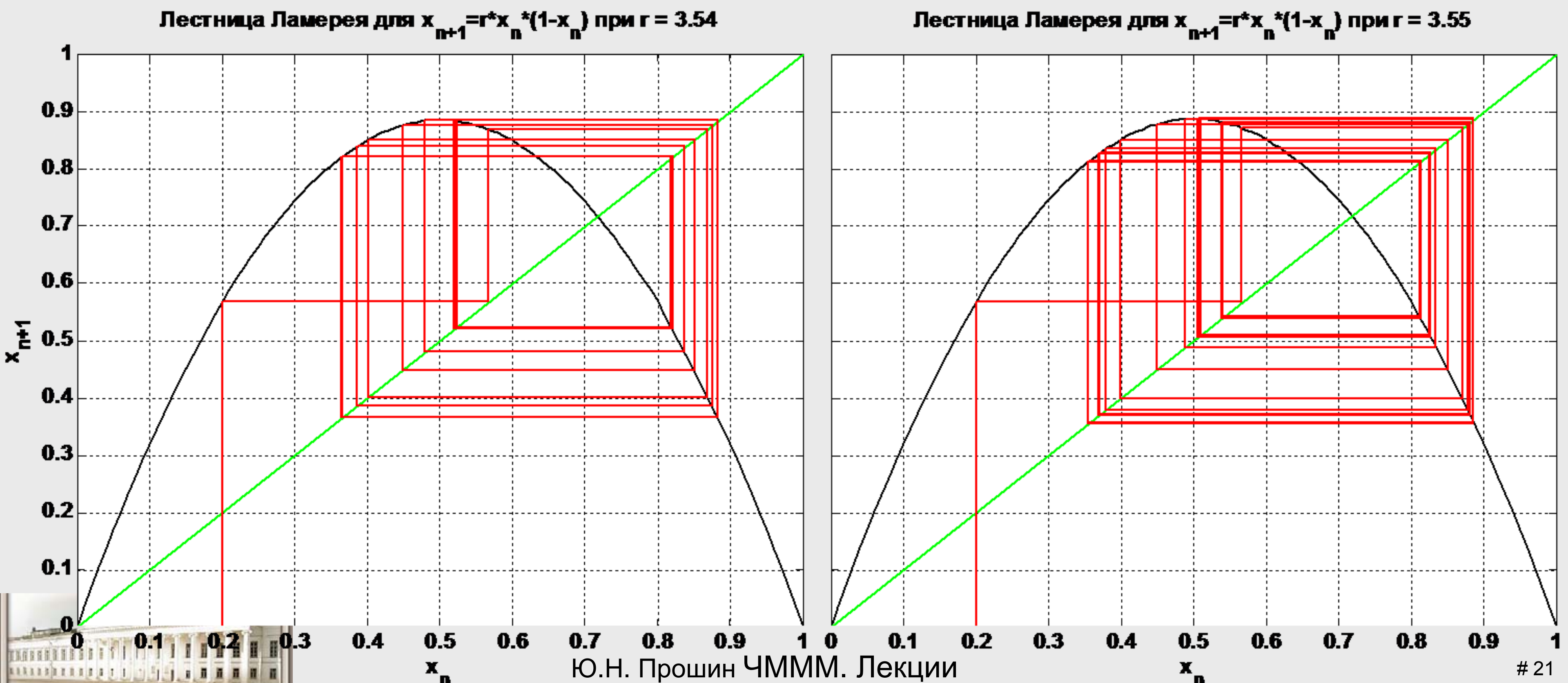
$r = 3.43,\ x_0=0.7$



3) $3 < r \le 1+\sqrt{6} \approx 3.45$
Отображение претерпевает бифуркацию: неподвижная точка x^*_1 становится неустойчивой, и вместо нее появляется двукратный цикл.

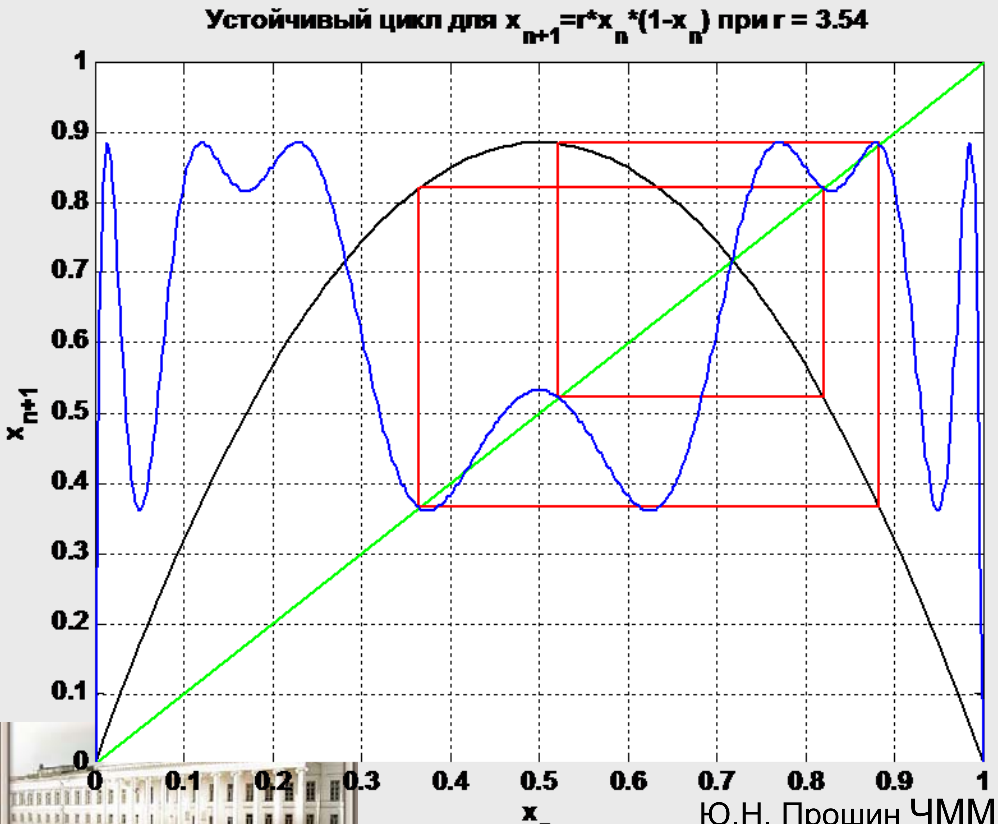
$$x_{n+1} = r\, x_n(1 - x_n)$$

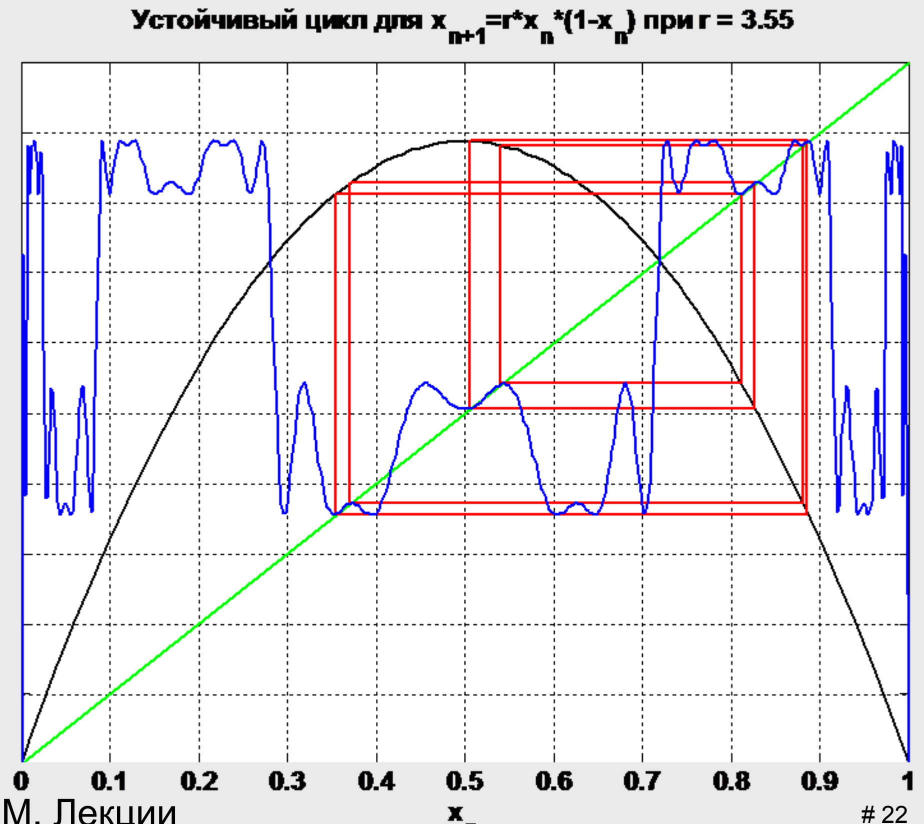
4) При переходе параметра *r* через значение 1+√6≈3.45, 2-кратный цикл становится 4-кратным, и т.д.



$$x_{n+1} = r\,x_n(1 - x_n)$$

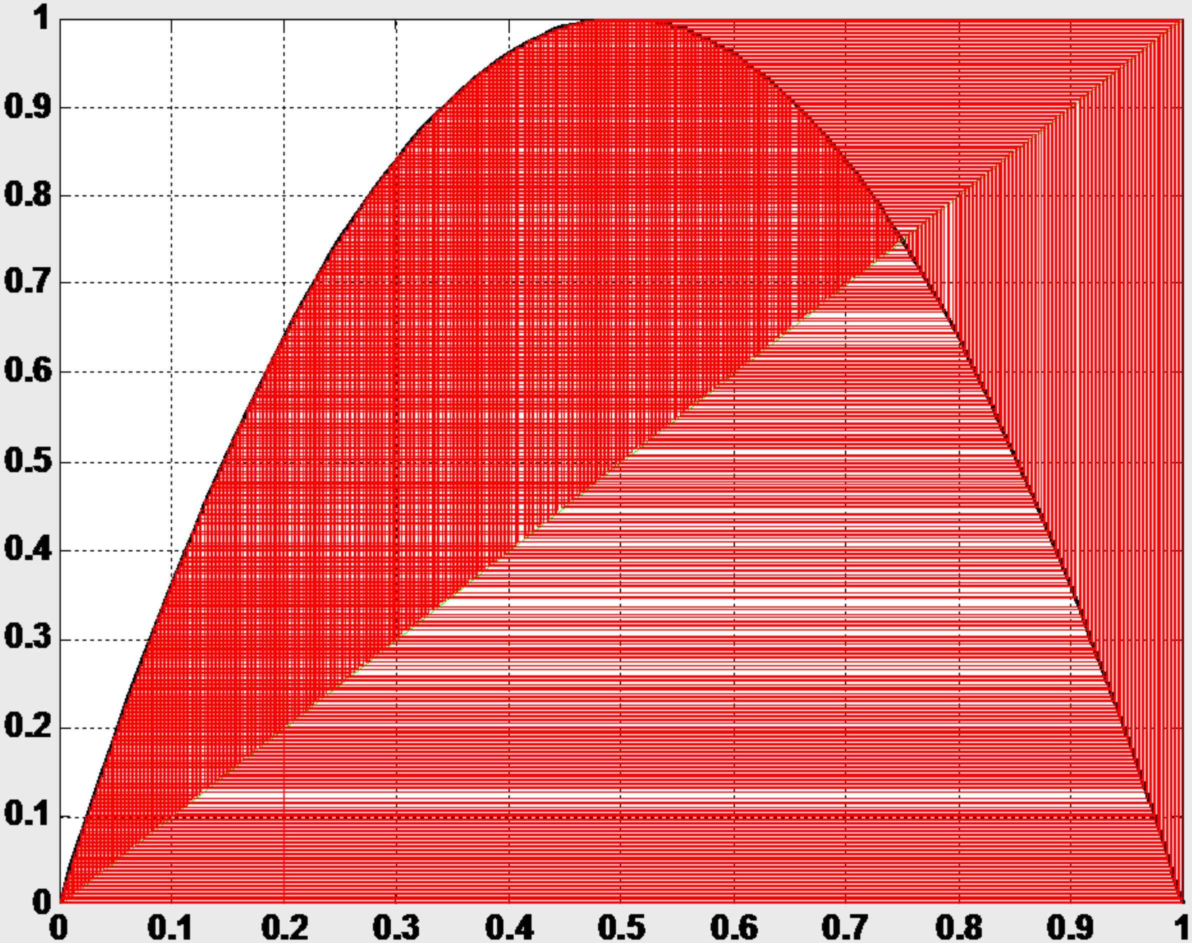
4) При переходе параметра *r* через значение $1+\sqrt{6}\approx 3.45$, 2-кратный цикл становится 4-кратным, и т.д.





$$x_{n+1} = r\,x_n(1 - x_n)$$

5) При $r = r_\infty \approx 3.5699456...$ возникает **устойчивый** цикл **бесконечного** (?!) порядка, при $r_\infty < r \leq 4$ отображение в основном ведет себя хаотически.



Например, при **конечном** значении $r = 4$ в системе имеются **неустойчивые** циклы всех возможных порядков

Бифуркационная диаграмма

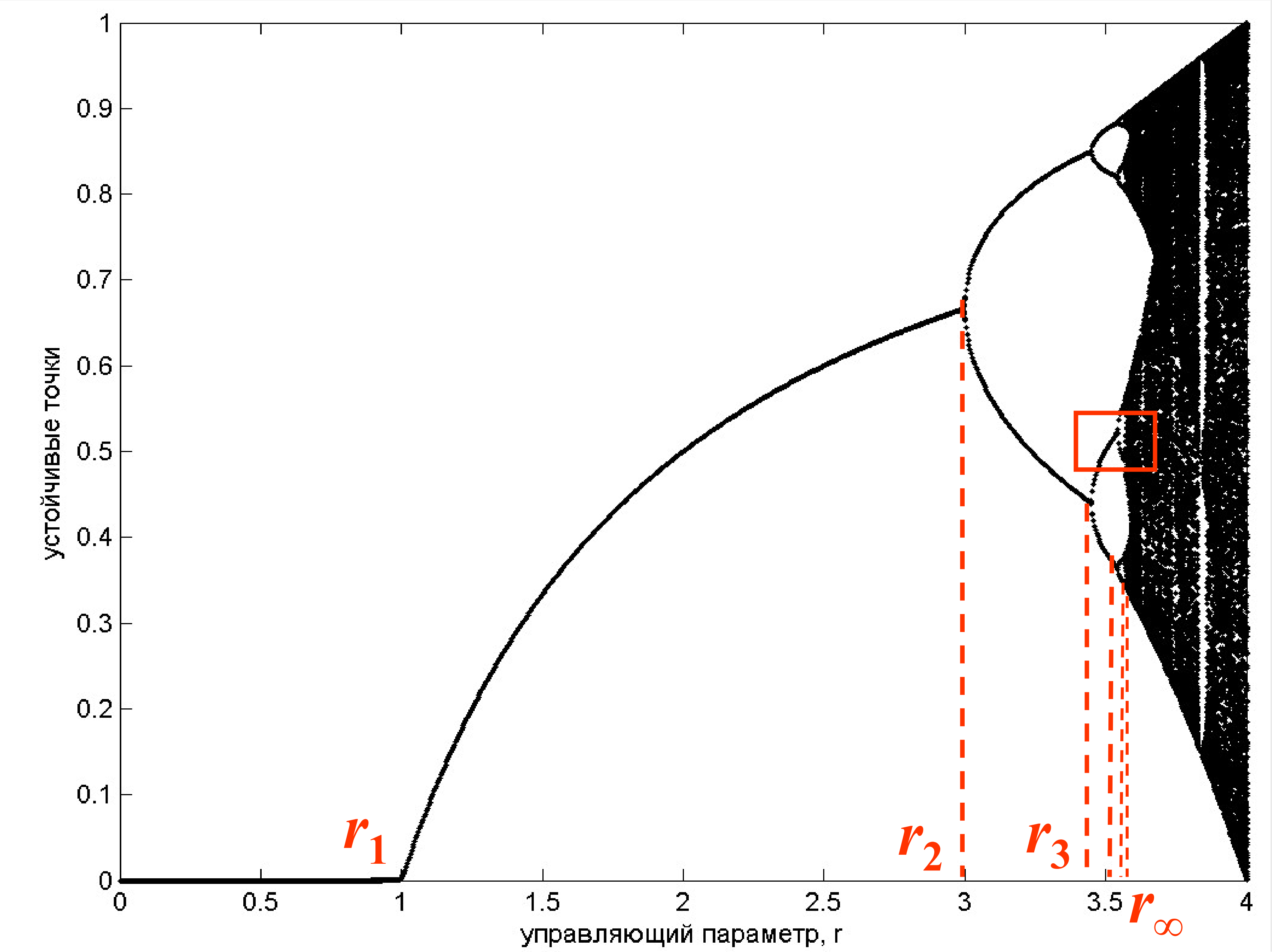
Бифуркационная диаграмма – это зависимость положения устойчивых состояний x (либо неподвижных точек, либо точек циклов) от значения параметра r. При переходе параметра через критические значения

$$r_2,\ r_3,\ \dots\ ,\ r_\infty,\ \dots,\ r_{\text{конечное}}$$

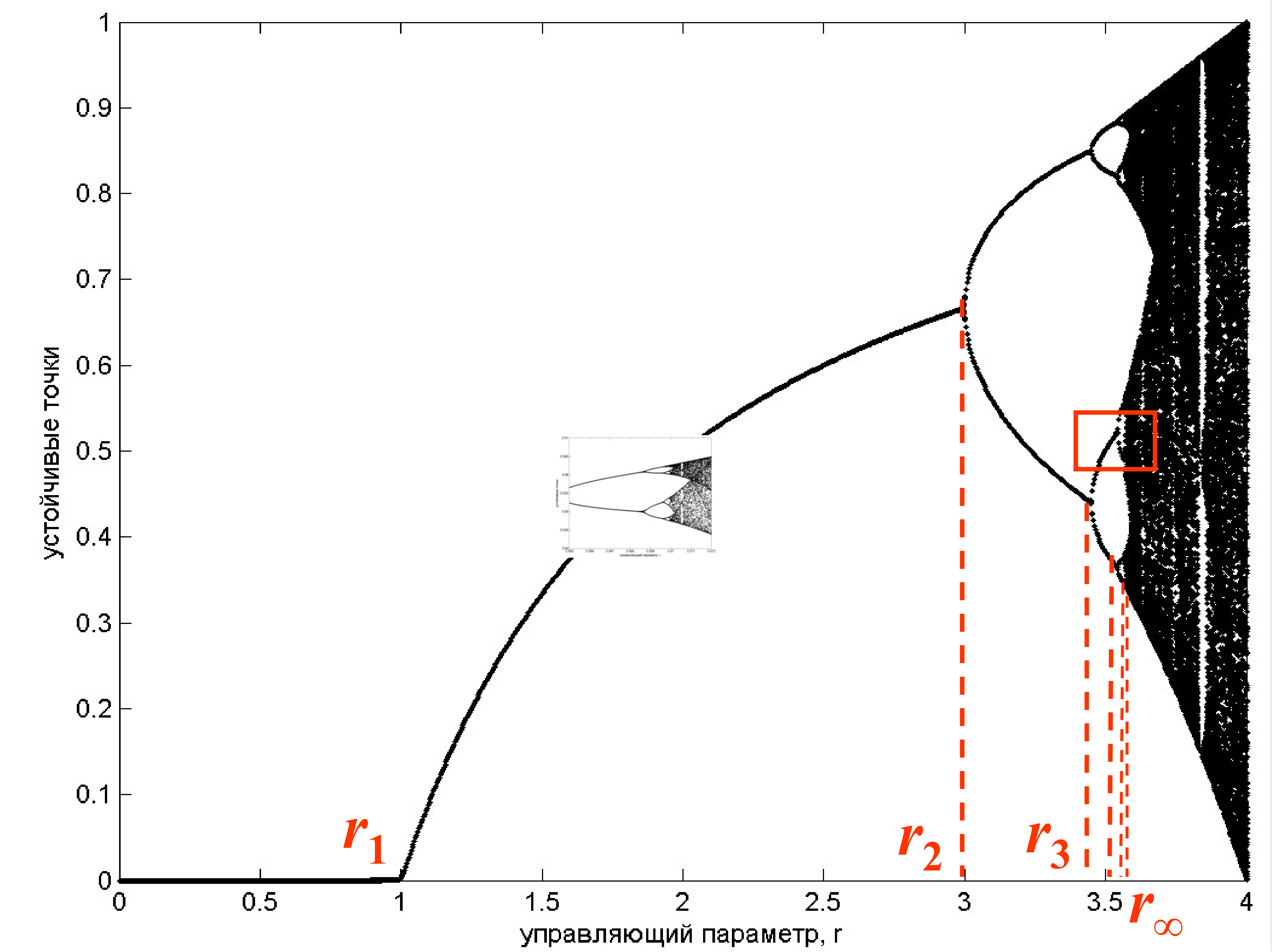
происходят бифуркации "удвоения периода"

Нажми меня (Program!) →

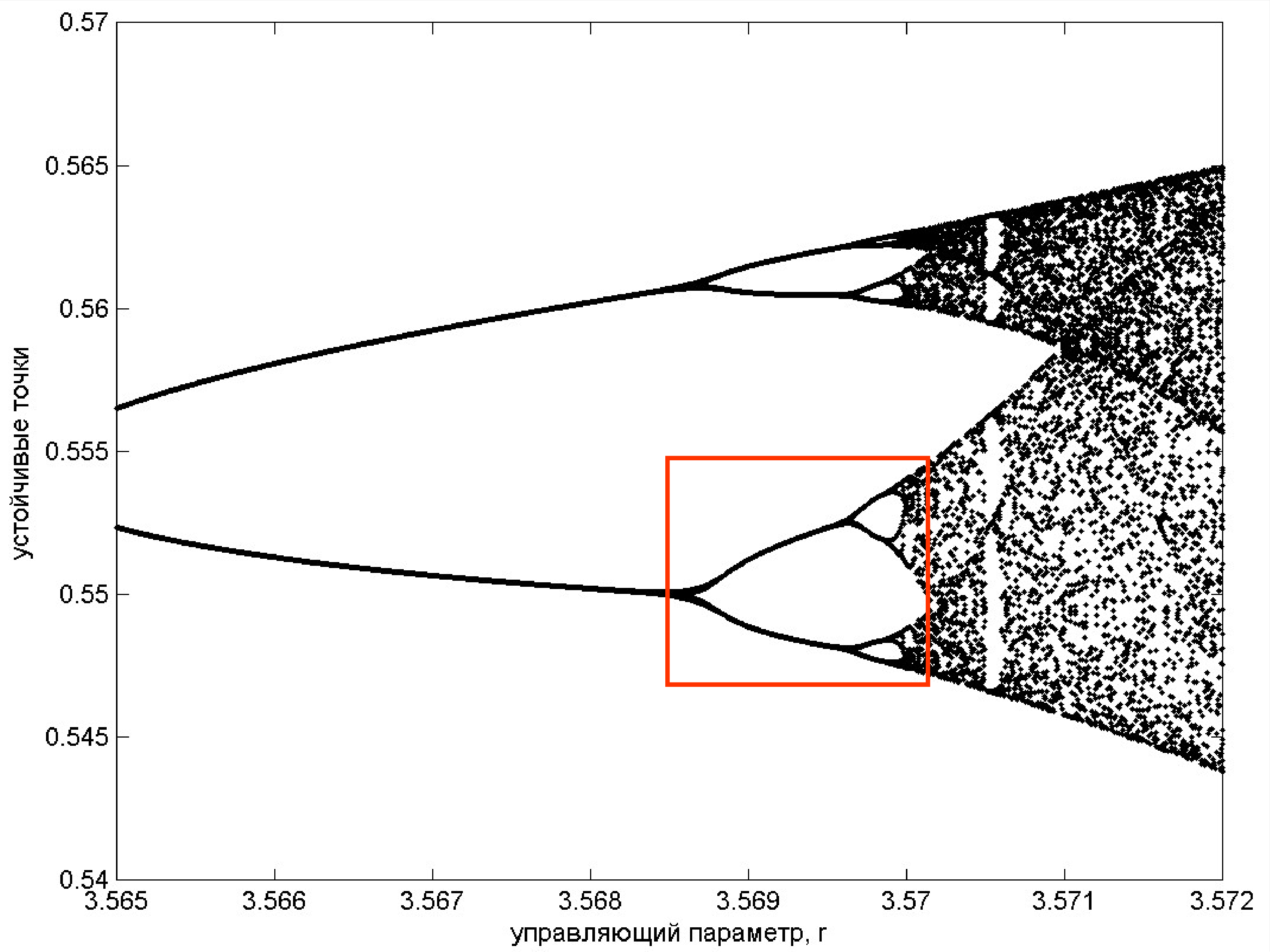
Бифуркационная диаграмма



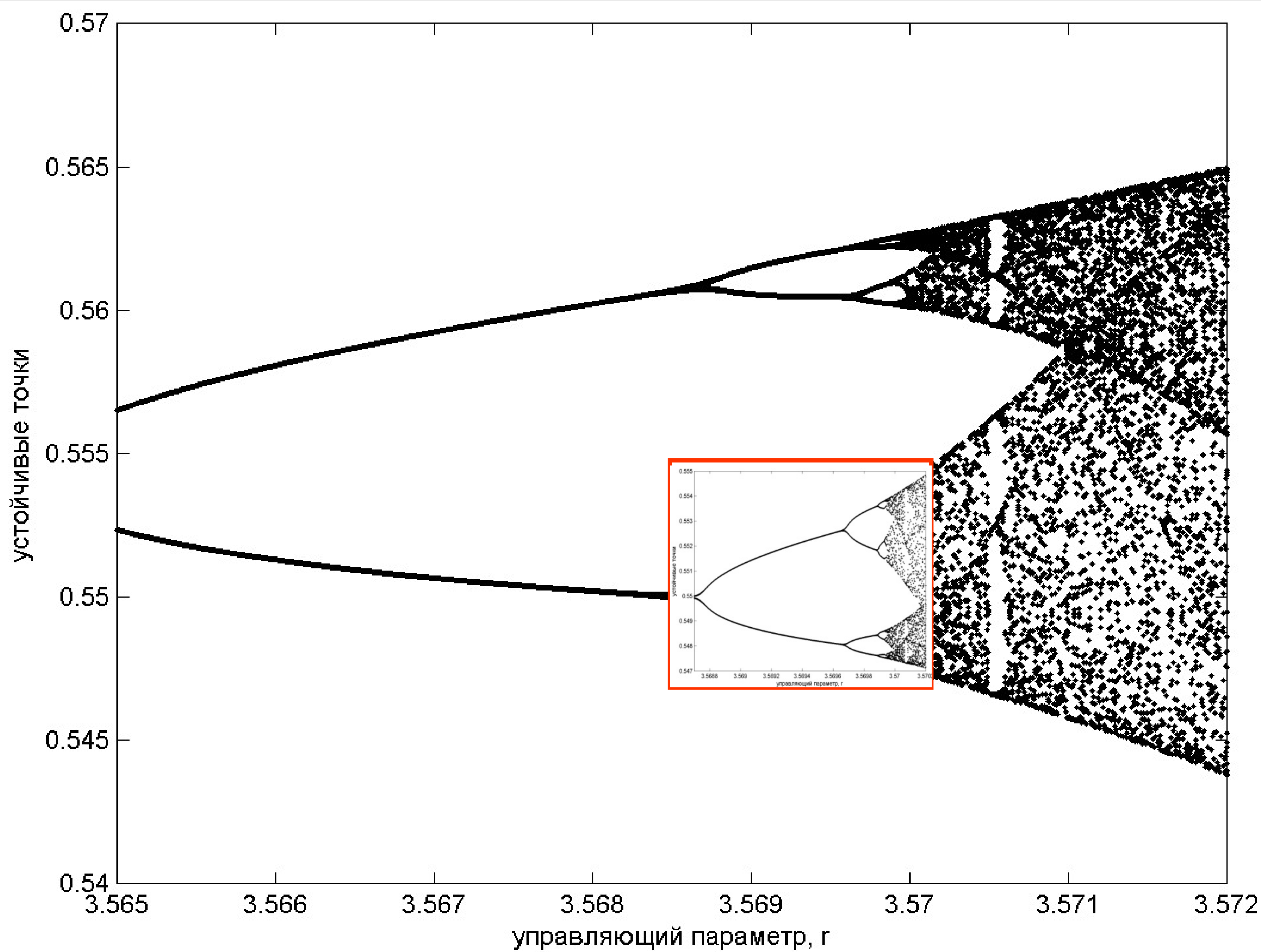
Бифуркационная диаграмма



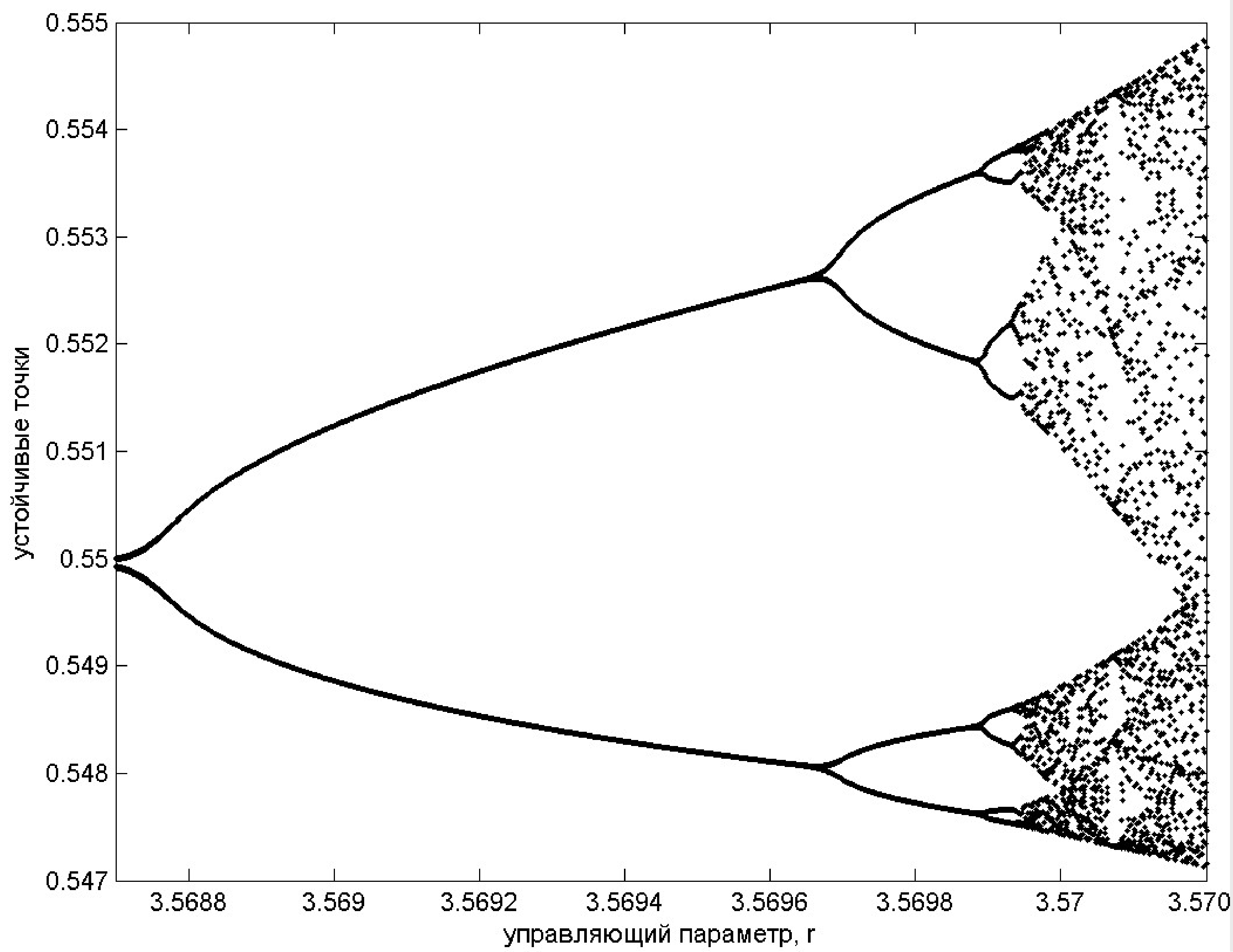
Бифуркационная диаграмма



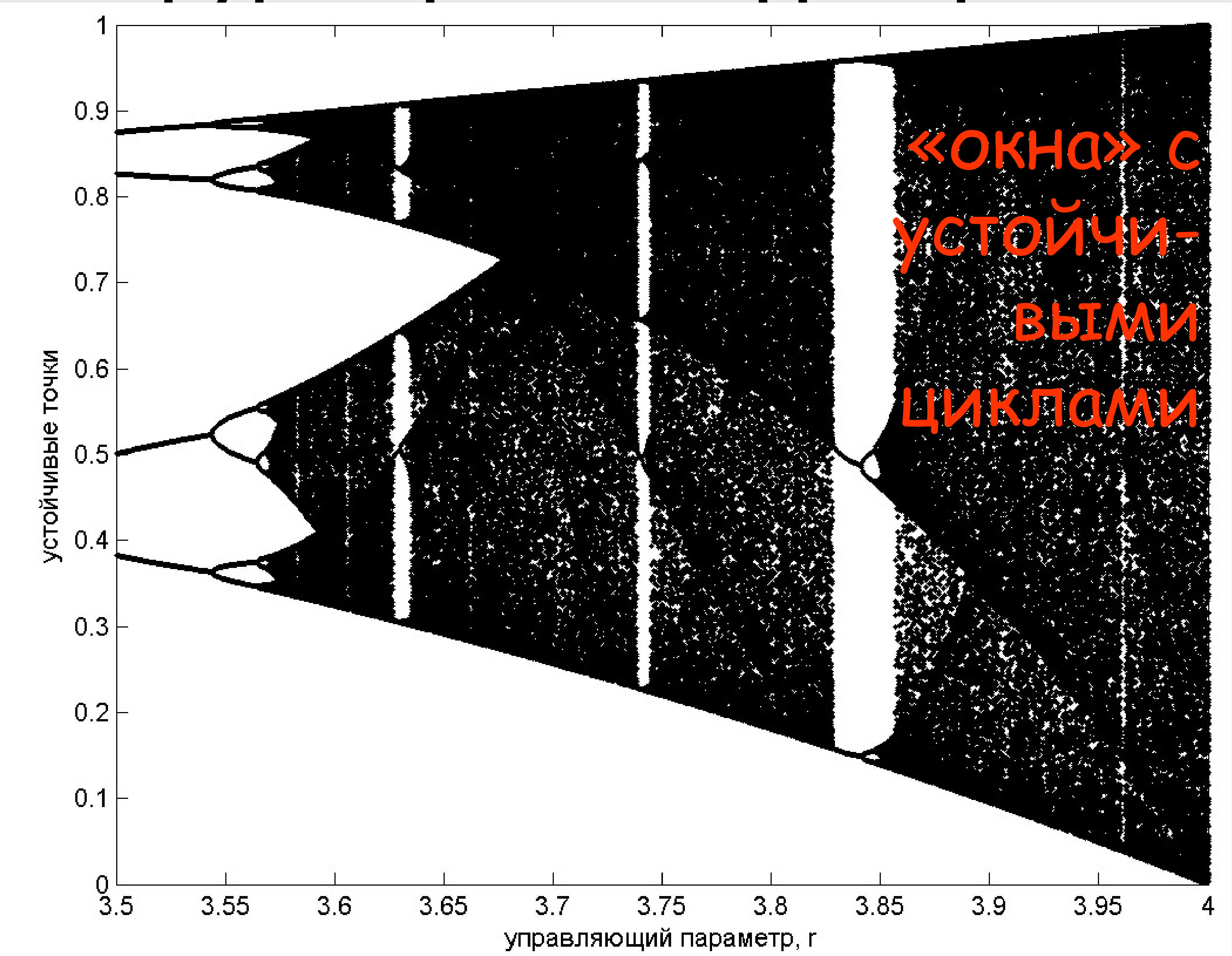
Бифуркационная диаграмма



Бифуркационная диаграмма



Бифуркационная диаграмма:



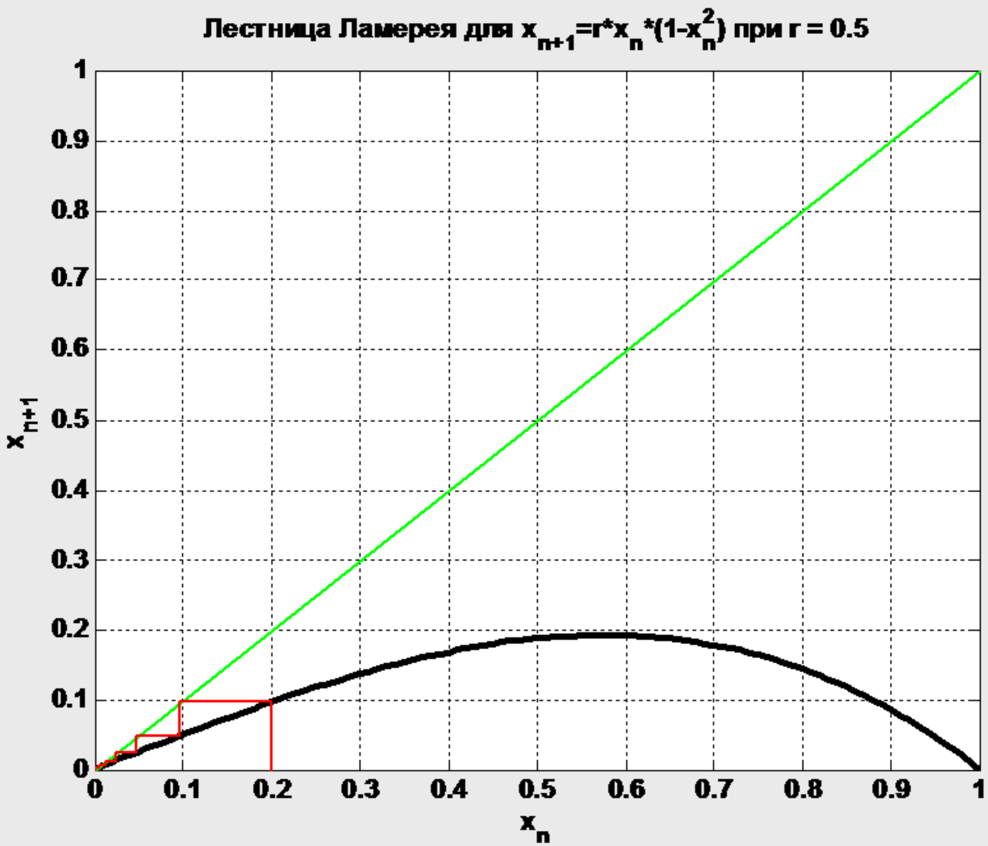
Универсальное число Фейгенбаума

$$\delta = \lim_{m\to\infty} \frac{r_m - r_{m-1}}{r_{m+1} - r_m}$$

δ = 4,669201609…

$$x_{n+1} = r\, x_n(1 - x_n^2)$$

$r = 0.5,\ x_0 = 0.2$



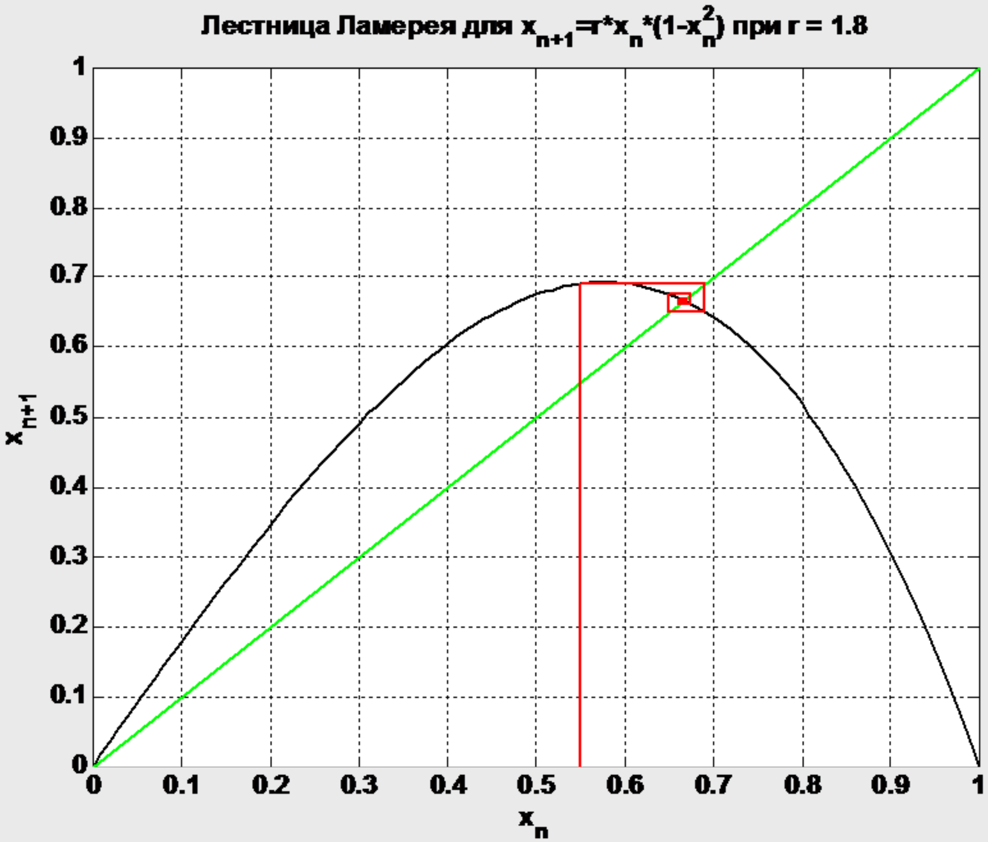
1) $0 < r \le 1$.
отображение имеет единственную неподвижную точку $x^* = 0$, которая является устойчивой.

$$x_{n+1} = r\, x_n(1 - x_n^2)$$

2) $1 < r \leq 1.998...$

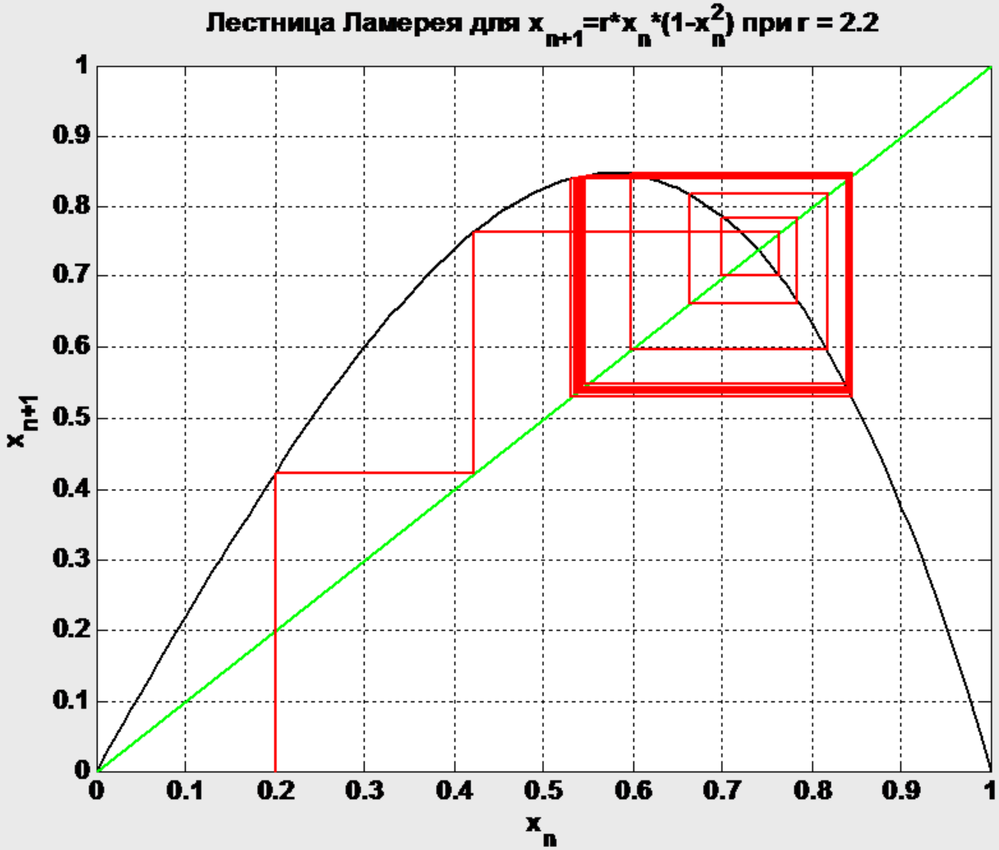
точка $x^*_1 = 0$ теряет устойчивость, появляется новая устойчивая точка x^*_2

$r = 1.8, x_0=0.55$



$$x_{n+1} = r\, x_n(1 - x_n^2)$$

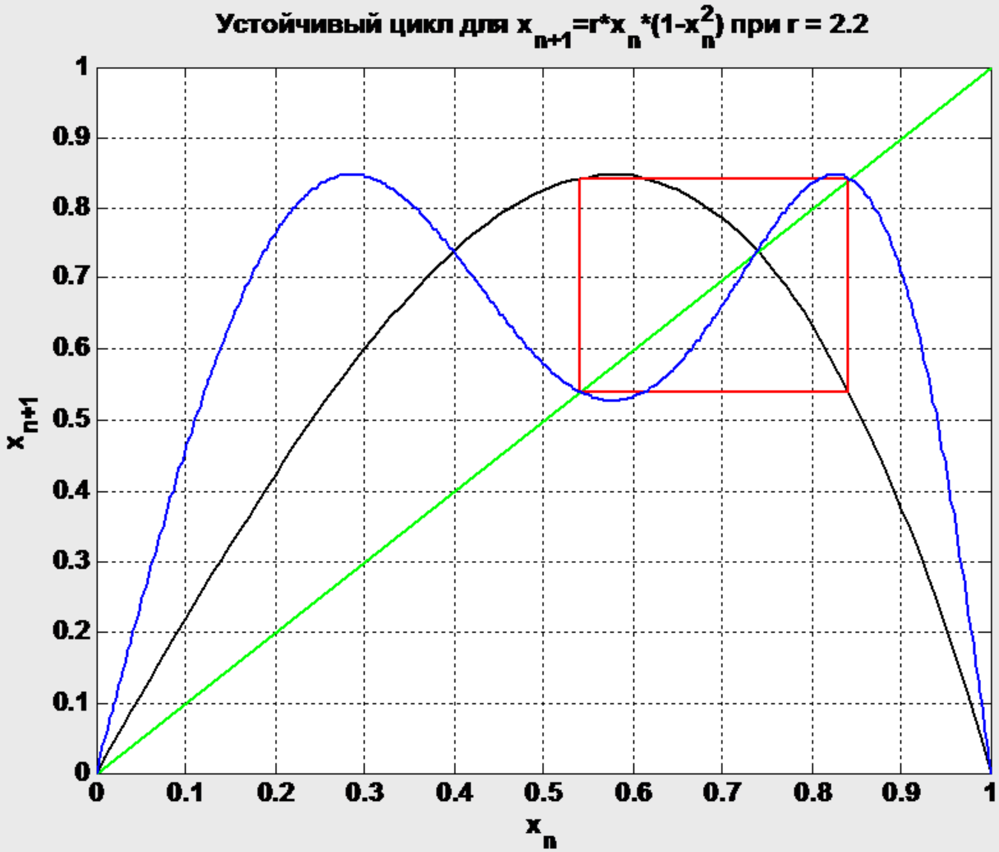
$r = 2.2,\ x_0 = 0.2$



3) 1.99… < $r \leq$ 2.235… происходит бифуркация удвоения периода, появляется 2-кратный цикл

$$x_{n+1} = r\, x_n(1 - x_n^{\,2})$$

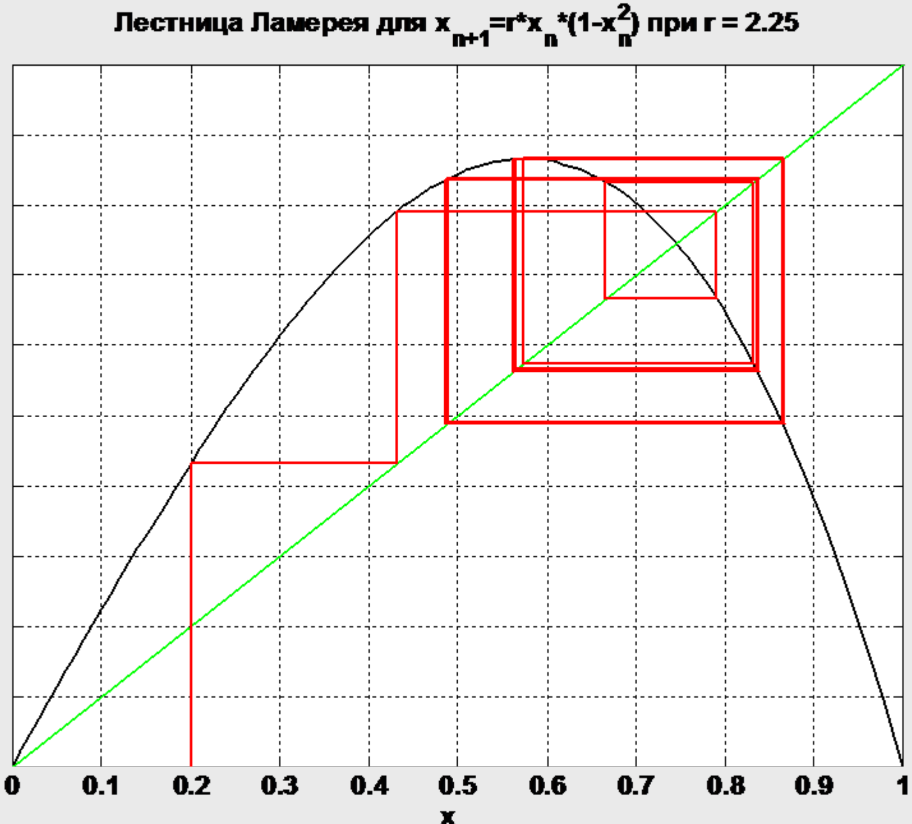
$r = 2.2,\ x_0 = 0.2$

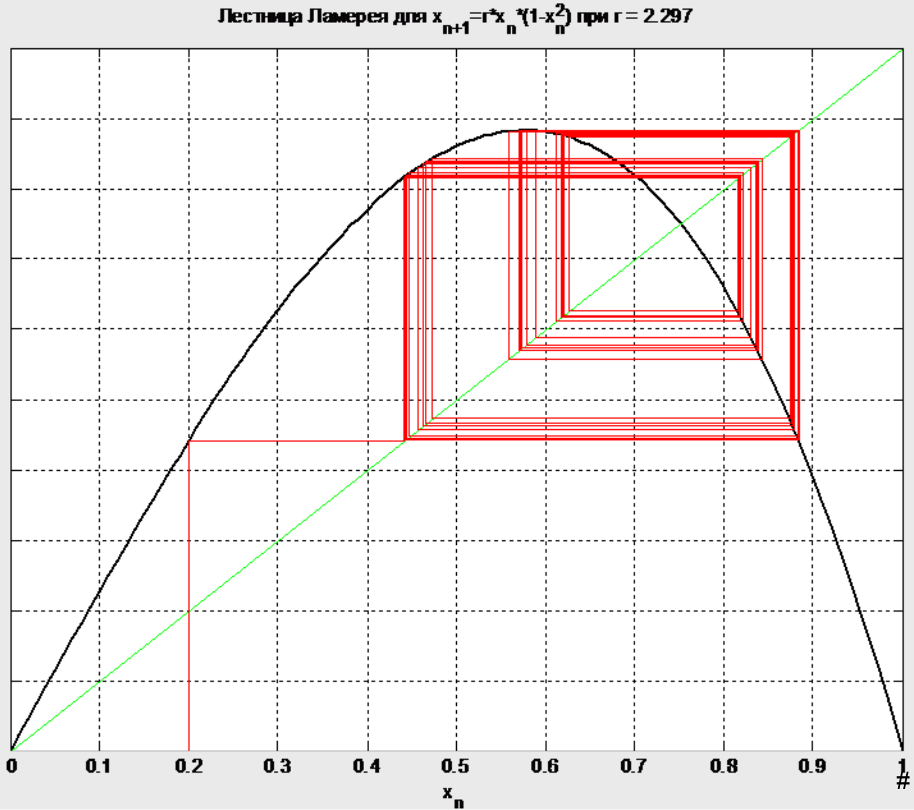


3) $1.99\ldots < r \leq 2.235\ldots$ происходит бифуркация удвоения периода, появляется 2-кратный цикл

$$x_{n+1} = r\,x_n(1 - x_n^2)$$

4) Дальнейшее увеличение r ведет к каскаду бифуркаций удвоения периода

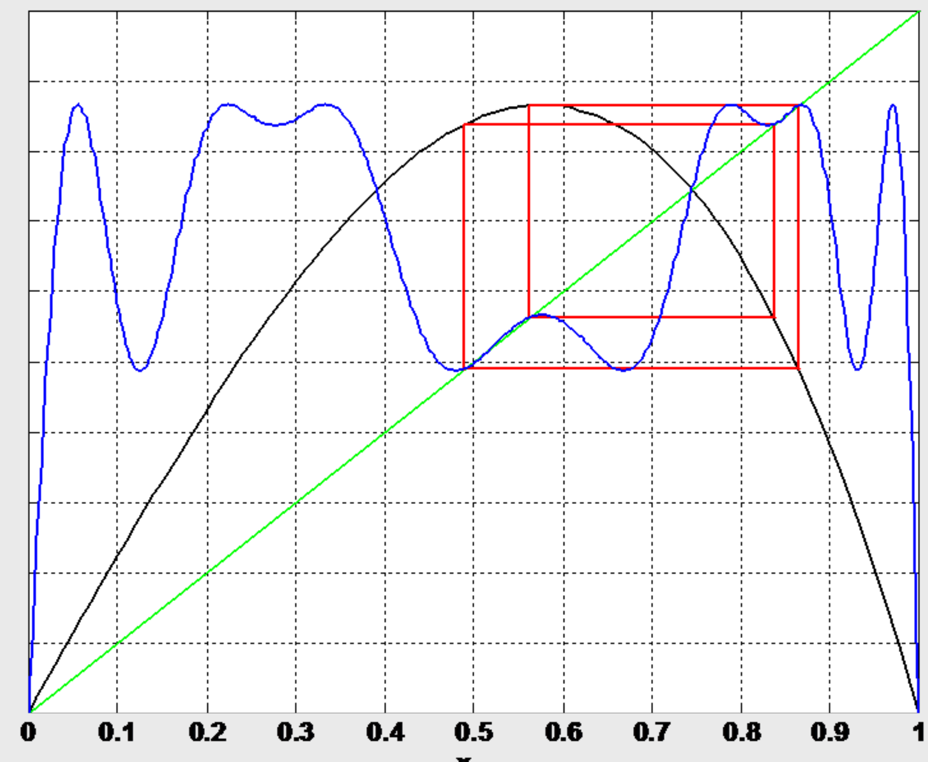




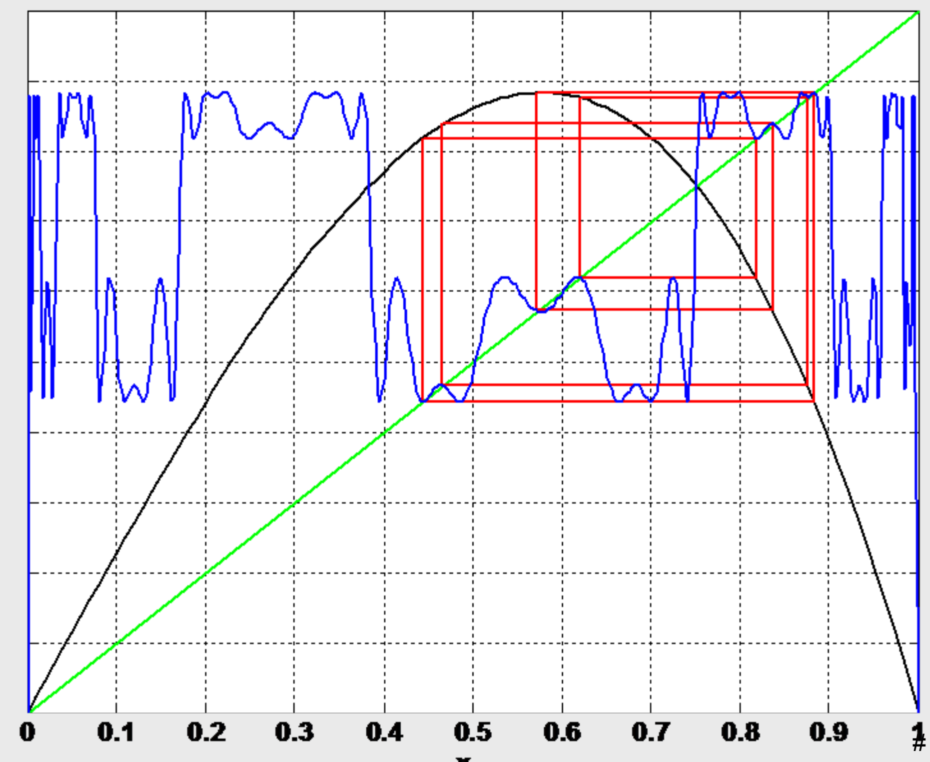
$$x_{n+1} = r\, x_n(1 - x_n^2)$$

4) Дальнейшее увеличение r ведет к каскаду бифуркаций удвоения периода

Устойчивый цикл для $x_{n+1}=r*x_n*(1-x_n^2)$ при r = 2.25

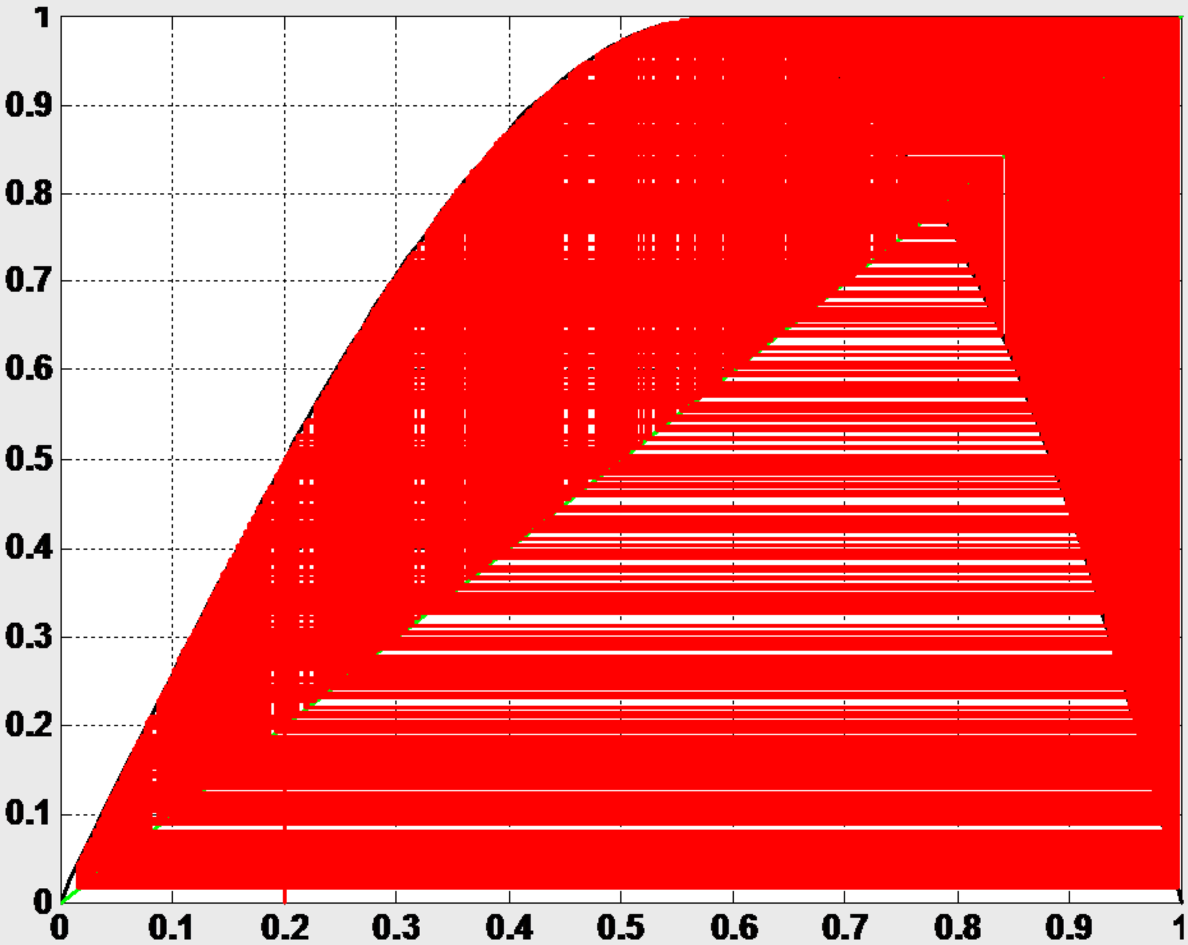


Устойчивый цикл для $x_{n+1}=r*x_n*(1-x_n^2)$ при r = 2.297



$$x_{n+1} = r\,x_n(1 - x_n{}^2)$$

5) При $r_\infty < r \le 2.5980\ldots$ отображение для большинства значений r ведет себя хаотически.



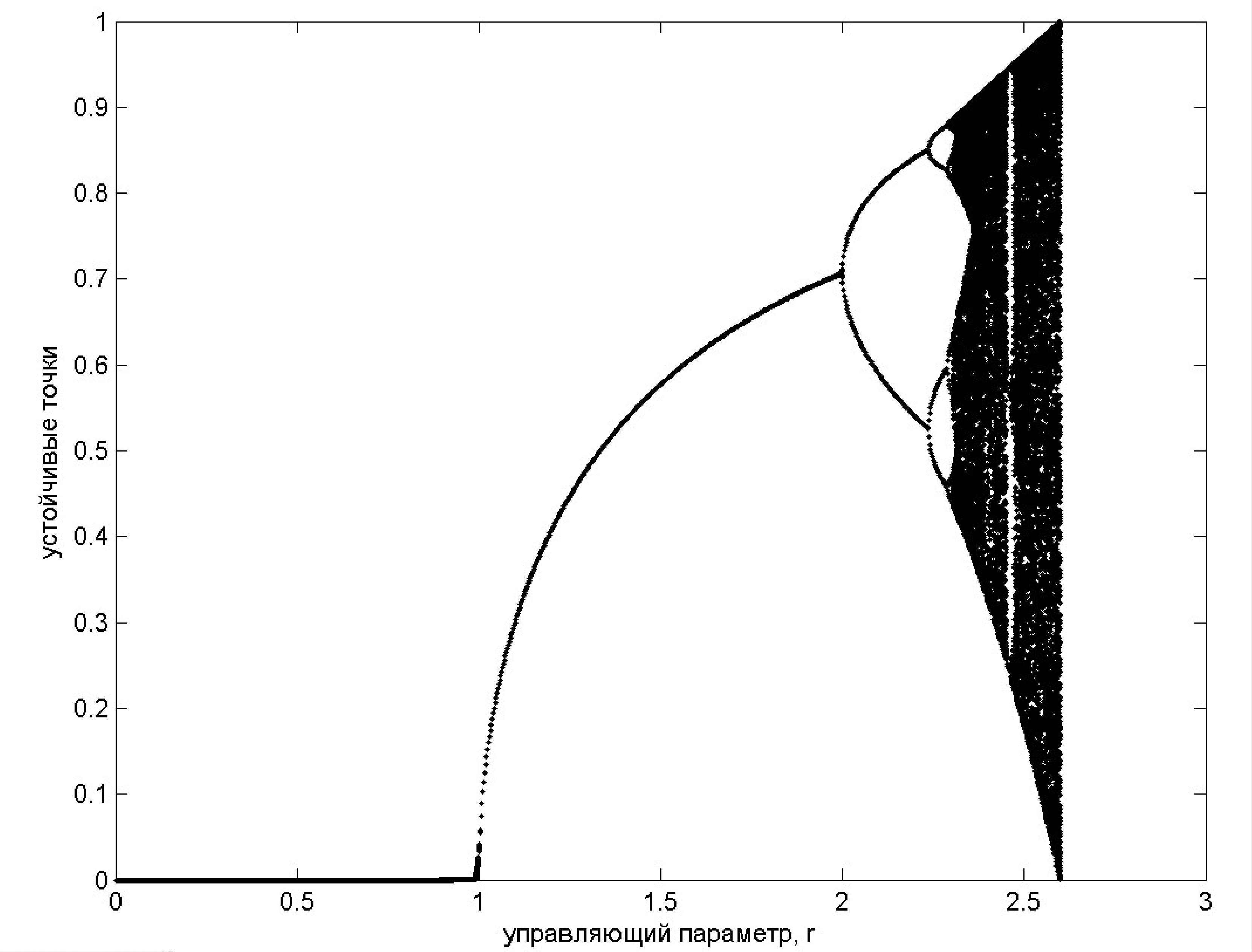
Например, при $r = 2.59$ в системе имеются неустойчивые циклы всех возможных периодов

Бифуркационные значения параметра r

2-кратный цикл r = 1.998…
4-кратный цикл r = 2.2355...
8-кратный цикл r = 2.28825...
16-кратный цикл r = 2.29925…
32-кратный цикл r = 2.3017…
64-кратный цикл r = 2.302225…
128-кратный цикл r = 2.3022276...
256-кратный цикл r = 2.3022282...

$r_{\text{конечное}} \approx 2.59807612$

Бифуркационная диаграмма



Выводы

универсальность свойств при анализе квадратичного и **<u>кубического</u>** точечных отображений (Pascal, MatLab, PowerPoint...)

- ✓ наличие критического значения управляющего параметра: при $r_\infty < r_{\text{конечное}}$, выполнение соотношения Фейгенбаума с универсальной константой δ;
- ✓ самоподобие диаграмм при последовательном изменении масштаба, т.е. качественное воспроизведение ветвистой структуры диаграммы на все более мелких масштабах r. Это яркий пример фрактальности этих структур;
- ✓ появление внутри "хаоса" областей с устойчивыми циклами различного порядка.

Литература

[1] Шустер Г. "Детерминированный хаос", Москва "Наука", 1991.

[2] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. "Введение в синергетику", Москва "Наука", 1990.

[3] Анищенко В.С. "Сложные колебания в простых системах", Москва "Наука", 1990.

[4] Анищенко В.С. "Устойчивость, бифуркации, катастрофы", Соросовский образовательный журнал, с. 10-19, 2000.

[5] Фейгенбаум М. *Успехи физических наук*, т. 141, с. 343-374, 1983.

[6] Петерс Е. "Хаос и порядок на рынке капитала", Москва ТВП "Научное издательство", 1997.