

А. Г. Егоров^{а}, А. М. Камалутдинов^а, А. Н. Нуриев^а, В. Н. Паймушин^б*

^аКазанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казань, Россия

^бКазанский национальный исследовательский технический университет, Институт авиации, наземного транспорта и энергетики, Казань, Россия

**ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ПАРАМЕТРОВ ДЕМПФИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
ЗАТУХАЮЩИХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕСТ-ОБРАЗЦОВ
2. АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ДЕМПФИРОВАНИЯ¹**

A. G. Egorov, A. M. Kamalutdinov, A. N. Nuriev, and V. N. Paimushin*

**THEORETICAL-EXPERIMENTAL METHOD FOR DETERMINING
THE PARAMETERS OF DAMPING BASED ON THE STUDY OF DAMPED
FLEXURAL VIBRATIONS OF TEST SPECIMENS
2. AERODYNAMIC COMPONENT OF DAMPING**

Keywords: damping, flexural vibrations of plates, flow around a vibrating plate, computational fluid dynamics, direct numerical simulation, drag coefficient

The aerodynamic component of damping of a vibrating plate in the range of parameters characteristic of damped flexural vibrations of test specimens is investigated. On the basis of a large series of numerical simulations in the dynamics of two-dimensional flow of gas around a plate, we managed to suggest a unified approximating equation for the damping constant in terms of dimensionless parameters of the process considered.

Ключевые слова: демпфирование, колебания пластины изгибные, обтекание осциллирующей пластины, гидродинамика вычислительная, моделирование численное прямое, коэффициент сопротивления

Исследовали аэродинамическую составляющую демпфирования осциллирующей пластины в области значений параметров,

*Автор, с которым следует вести переписку: aegorov0@gmail.com
Corresponding author: aegorov0@gmail.com

¹Сообщение 1 см. [1].

характеризующих затухающие изгибные колебания тест-образцов. На основе проведения большой серии вычислительных экспериментов по динамике двухмерного течения газа вокруг пластины удалось предложить единую аппроксимационную формулу, выражающую декремент колебания через безразмерные определяющие параметры рассматриваемого процесса.

Введение

В последнее время повышенный интерес вызывают исследования вынужденных и свободных механических колебаний пластин в неподвижной вязкой жидкости (газе). Одно из их практических приложений связано с измерением демпфирующих свойств материалов [1]. Кроме того, результаты исследований приложимы в таких областях, как атомная микроскопия [2—5], датчики и приводы головок на микромеханических генераторах [6—9], охлаждающие устройства [10, 11], робототехнические движители [12—14], устойчивость нефтяных платформ [15], гашение колебаний жидкости в топливных баках [16, 17].

Одна из основных задач в этом классе проблем — предсказание сил, действующих на колеблющуюся пластину со стороны жидкости (газа). Принято, что аэродинамическое взаимодействие может быть сведено к инерционному эффекту присоединенной массы и аэродинамическому демпфированию (см., например, [18—20]). Инерционный эффект приводит к снижению частоты, а аэродинамическое демпфирование — к росту декремента колебаний пластины по сравнению с ее колебаниями в вакууме.

В общем случае задача учета действующих на консольно закрепленную пластину аэродинамических сил чрезвычайно сложна главным образом из-за сложности трехмерных течений газа, вызванных колебанием пластины. Известные подходы [2, 18] к ее решению основаны на предположении о том, что длина пластины L существенно превышает ее ширину b и толщину h . В этом случае на низких структурных модах колебаний длина вибрационной волны значительно больше отклонений пластины, в силу чего ее можно рассматривать как локально-плоскую. При этом трехмерными явлениями, относящимися к течению газа вдоль длины пластины, в том числе сходом вихрей с ее торца, пренебрегают, определяя аэродинамические силы в каждом сечении балки путем изучения плоского движения газа, вызванного гармоническими осцилляциями тонкой жесткой пластины. Такая пластина, имеющая прямоугольное поперечное сечение, выступает для окружающей среды в роли подвижной твердой границы.

Однако даже в плоском приближении задача определения аэродинамических сил, действующих на гармонически колеблющуюся пластину, в полном объеме не решена. Из анализа размерностей ясно, что помимо геометрического параметра $\Delta = h/b$ силы должны определяться еще двумя безразмерными величинами, в качестве которых обычно принимают (см., например, [21, 22]) отношение $\kappa = a/b$ амплитуды колебаний к ширине пластины

и параметр Стокса β , играющий роль колебательного числа Рейнольдса. Во многих работах вместо κ используется его аналог — число Келегана—Карпентера [Keulegan—Carpenter] $KC = 2\pi\kappa$. Теоретически обоснованные результаты имеются лишь для колебаний бесконечно малой амплитуды ($\kappa \rightarrow 0$). Они восходят к оригинальной работе Стокса [23], рассмотревшего колебания в вязкой жидкости бесконечного цилиндра. Аналогичный анализ для пластины был проведен в [24, 25]. Течение жидкости в этих работах описывается линейризованными уравнениями Навье—Стокса в пренебрежении инерционными членами. Поэтому приходящаяся на единицу длины тела сила, описываемая через коэффициент сопротивления, оказывается зависящей только от параметра Стокса β .

Во многих экспериментальных [16, 26, 27], теоретических [17, 28, 29] и вычислительных [11, 15, 30] работах изучали другой предельный случай — колебания большой амплитуды, когда вязкой диссипацией энергии можно пренебречь по сравнению с энергией вихрей, образующихся за период колебания на боковых гранях пластинки. При этом параметр Стокса исключается из числа определяющих параметров и коэффициент сопротивления оказывается зависящим исключительно от безразмерной амплитуды колебаний κ .

Промежуточный диапазон изменения безразмерной амплитуды колебаний κ , в котором вязкие и инерционные эффекты соизмеримы, исследован значительно слабее. Имеющиеся экспериментальные и численные результаты либо охватывают небольшую часть исследуемого диапазона, либо далеки от той области значений параметров, которые реализуются при лабораторном определении демпфирующих свойств материалов на основе исследования свободных изгибных колебаний тест-образцов [1].

Реализуемые в лабораторных испытаниях безразмерные амплитуды колебаний $\kappa < 2$ лежат большей частью в промежуточном диапазоне; параметр β принимает значения от нескольких десятков до нескольких сотен, безразмерная толщина пластины Δ — от нескольких десятых до нескольких сотых. При этом число Рейнольдса $Re = 2\pi\beta\kappa$ не превышает нескольких тысяч, а, значит, прямое численное моделирование плоских аэродинамических полей вокруг колеблющейся пластинки не требует чрезмерно подробной дискретизации. Использование умеренных, порядка нескольких сот тысяч узлов, сеток позволяет выполнить большую (более 200) серию вычислительных экспериментов по динамике двумерного течения газа вокруг пластины и вычислить комплексный коэффициент сопротивления во всей интересующей нас области параметров κ , β , Δ .

1. Постановка задачи

Рассмотрим упругую пластину длиной L , шириной b и толщиной h ($h \ll b \ll L$) (рис. 1—*a*). Один из концов пластины жестко закреплен, второй свободен. После выведения пластины из состояния равновесия она начинает совершать гармонические колебания в окружающем ее воздухе. Как по-

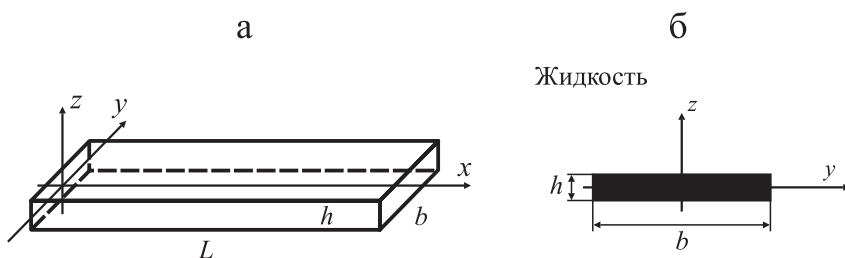


Рис. 1. Схема пластины для задачи о ее вибрации (а) и схема двумерной гидродинамической задачи (б).

казывают эксперименты, частота этих колебаний ω слабо изменяется вблизи основной собственной частоты ω_0 изгибных колебаний пластины, а амплитуда A слабо затухает со временем t из-за сопротивления воздуха и внутреннего демпфирования. Задача заключается в нахождении законов медленного изменения амплитуды и частоты. Характеризовать соответствующие величины будем с помощью зависимости логарифмического декремента колебаний $\delta(A)$ и относительного изменения частоты $\Omega(A)$ от текущей амплитуды A изгибных колебаний пластины:

$$\delta = -\frac{2\pi}{A\omega_0} \frac{dA}{dt}, \quad \Omega = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}.$$

Уравнение, описывающее колебания пластины по цилиндрической изгибной форме, имеет вид

$$\frac{Ebh^3}{12} w^{IV} + \rho bh \ddot{w} = H + P. \tag{1}$$

Здесь точками обозначено дифференцирование по времени t ; w — смещение средней линии пластины в направлении оси z ; H, P — силы внутреннего трения и силы аэродинамического сопротивления, ρ, E — эффективные плотность и модуль Юнга материала пластины. Граничные условия отвечают жесткой заделке при $x = 0$ и свободному концу $x = L$.

Силы сопротивления малы по сравнению с упругой силой. Поэтому в первом приближении можно положить $H = P = 0$. В этом случае, как известно, основная мода колебаний примет вид

$$w = A \cos(\omega_0 t) W(x/L). \tag{2}$$

Постоянные A и ω_0 представляют амплитуду и собственную частоту основной моды, профиль W колебаний ($W(1) = 1$) описывается формулой

$$W(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} kx - \cos kx) - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ch} k + \cos k}{\operatorname{sh} k + \sin k} (\operatorname{sh} kx - \sin kx).$$

Величина $k = 1,8751$ вычисляется как наименьший положительный корень уравнения $\cos k \cdot \operatorname{ch} k = -1$, частота собственных колебаний равна

$$\omega_0 = k^2 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho}}.$$

Наличие малых ($\sim \varepsilon$) сил в правой части уравнения (1) приводит к тому, что амплитуда колебаний A и частота ω_0 в (2) не остаются постоянными, но медленно изменяются со временем. Анализ такого изменения можно осуществить, вводя вместе с быстрым временем t медленное время $\tau = \varepsilon t$ и проводя двухмасштабное асимптотическое разложение. Опуская детали этой процедуры, представим окончательный результат:

$$\delta = 2\pi F_0^{-1} \frac{\langle \sin \omega_0 t \langle (P+H)W \rangle \rangle}{\langle W^2 \rangle}, \quad \Omega = F_0^{-1} \frac{\langle \cos \omega_0 t \langle (P+H)W \rangle \rangle}{\langle W^2 \rangle},$$

$$F_0 = \rho b h A \omega_0^2. \quad (3)$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначено усреднение по пространственной координате x , а фигурными скобками — усреднение по времени.

При использовании (3), задав изгибные колебания вида (2) с постоянным значением A , необходимо:

- 1) вычислить силу внутреннего трения $H(t, x; A)$;
- 2) решить аэродинамическую задачу и рассчитать силу сопротивления $P(t, x; A)$;
- 3) вычислив средние в (3), определить искомые зависимости $\delta(A), \Omega(A)$.

Очевидно, что в силу линейности правых частей (3) расчет различных составляющих сил сопротивления можно проводить независимо друг от друга. Оставив в стороне вопрос о вкладе в демпфирование сил внутреннего трения, обратимся к нахождению аэродинамической составляющей.

2. Аэродинамическая задача

Приходящаяся на единицу длины пластины сила $P(x, t)$ в (1) описывает действие, оказываемое на пластину окружающей средой, которая считается ньютоновской несжимаемой жидкостью. Плотность и кинематическую вязкость жидкости обозначим как ρ_0 и ν соответственно. Учтем, что длина пластины значительно больше, чем два других ее характерных размера, а длина вибрационной волны основной структурной моды значительно больше, чем перемещения пластины. Поэтому пластину можем рассматривать как локально-плоскую. Аэродинамическую силу $P(x, t)$ определяем в ходе решения плоской задачи о движении жидкости, вызванном осцилляциями бесконечно протяженной тонкой жесткой пластины (рис. 1—б). Такая пла-

стина выступает для окружающего воздуха в роли подвижной твердой границы. В каждом данном сечении x закон перемещения этой границы задан как $z = a(x) \cos \omega_0 t$, $a = AW(x/L)$.

Перейдем в подвижную систему координат, жестко связанную с пластиной, и введем стандартным образом фиктивное давление p [25], равное сумме истинного давления и инерционной составляющей $\rho_0 a z \omega_0^2 \cos \omega_0 t$. Нормируя пространственные координаты на b , время — на ω_0^{-1} , скорость $\mathbf{v} = (v_y, v_z)$ течения жидкости — на $a \omega_0$, фиктивное давление — на $\rho_0 a^2 \omega_0^2$ и сохраняя за безразмерными переменными прежние обозначения, представим уравнения Навье—Стокса в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \kappa \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\kappa \nabla p + \frac{1}{2\pi\beta} \Delta \mathbf{v}. \quad (4)$$

Безразмерные величины

$$\beta = \frac{b^2 \omega_0}{2\pi\nu}, \quad \kappa = \frac{a}{b}$$

определяют параметр Стокса и (с точностью до множителя 2π) параметр Келегана—Карпендера соответственно. Безразмерная частота колебаний β представляет собой квадрат отношения ширины пластины к толщине нестационарного пограничного слоя, безразмерная амплитуда колебаний κ — отношение амплитуды к ширине пластины. Еще один безразмерный параметр задачи $\Delta = h/b$ задает форму пластины.

Уравнения (4) дополняются граничными условиями прилипания на границе Γ пластины

$$\Gamma = \Gamma_y^+ + \Gamma_y^- + \Gamma_z^+ + \Gamma_z^-, \quad \Gamma_y^\pm = \left\{ y = \pm \frac{1}{2}, |z| < \frac{\Delta}{2} \right\}, \quad \Gamma_z^\pm = \left\{ z = \pm \frac{\Delta}{2}, |y| < \frac{1}{2} \right\}$$

и заданием скорости жидкости на бесконечности

$$\mathbf{v}|_\Gamma = 0, \quad v_y(\infty) = 0, \quad v_z(\infty) = \sin t. \quad (5)$$

Решив задачу (4), (5), действующую на пластину аэродинамическую силу вычисляем как

$$P = \rho_0 a b^2 \omega_0^2 \left(\Delta \cos t + \kappa \left(\int_{\Gamma_z^-} p d\gamma - \int_{\Gamma_z^+} p d\gamma \right) + \frac{1}{2\pi\beta} \left(\int_{\Gamma_y^-} \frac{\partial v_z}{\partial y} d\gamma - \int_{\Gamma_y^+} \frac{\partial v_z}{\partial y} d\gamma \right) \right).$$

Первое слагаемое представляет силу Крылова—Фруда, два других определяют нормальную и сдвиговую составляющие аэродинамической силы.

Отметим, что задача (4), (5) описывает также и обтекание неподвижной пластины осциллирующим потоком. Однако давление p в (4) при этом должно трактоваться как истинное, а не фиктивное давление. Соответственно аэродинамическая сила, действующая на неподвижную пластину в осциллирующем потоке, будет за вычетом силы Крылова—Фруда совпадать с силой, действующей на осциллирующую пластину со стороны покоящегося на бесконечности газа. Это обстоятельство позволяет использовать в нашей ситуации многочисленные теоретические и экспериментальные результаты по нахождению силы сопротивления неподвижной пластины осциллирующему потоку. Стандартной при изучении действующих на тело сил в этом случае является аппроксимация Моррисона [20, 26], согласно которой

$$P = -\frac{\pi}{4} \rho_0 b^2 C_M \frac{du}{dt} - \frac{1}{2} \rho_0 b C_D |u|u.$$

Здесь $u = -AW(x/L)\omega_0 \sin \omega_0 t$ — скорость потока на бесконечности; C_M — коэффициент присоединенных масс; C_D — коэффициент сопротивления. Коэффициенты C_M , C_D являются функциями безразмерных параметров κ, β, Δ задачи и с точностью до постоянных множителей совпадают с величинами основных гармоник $\{P \cos \omega_0 t\}$, $\{P \sin \omega_0 t\}$ гидродинамической силы [26]. В терминах этих коэффициентов формулы (3), определяющие декремент колебаний и изменение частоты колебаний пластины, запишем в виде

$$\delta = \frac{4}{3} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{A}{h} \frac{\langle C_D W^3 \rangle}{\langle W^2 \rangle}, \quad \Omega = \frac{\pi}{8} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{b}{h} \frac{\langle (C_M + C_M^{KF}) W^2 \rangle}{\langle W^2 \rangle}. \quad (6)$$

Наличие дополнительного слагаемого $C_M^{KF} = 4\pi^{-1}\Delta$ связано с наличием сил Крылова—Фруда.

Таким образом, при определении декремента δ и относительной частоты Ω колебаний пластины прежде всего необходимо вычислить зависимости гидродинамических коэффициентов C_D , C_M от безразмерных параметров κ, β, Δ . В рассматриваемом случае безразмерная частота β изменяется от нескольких десятков до сотен, безразмерная толщина пластины Δ — от нескольких десятых до нескольких сотых, безразмерная амплитуда колебаний лежит в диапазоне $\kappa \in [0, 3]$.

3. Малые и большие амплитуды колебаний

Строгие теоретические результаты для гидродинамических коэффициентов C_D , C_M известны лишь в предельном случае $\kappa \rightarrow 0$ малоамплитудных колебаний (так называемое стоксовское приближение). При $\Delta < 0,3$ имеем [18, 25]

$$\kappa \rightarrow 0: \quad C_D = \frac{4,61}{\kappa \sqrt{\beta}}, \quad C_M = 1.$$

Вычисления согласно (6) дают

$$\kappa \rightarrow 0: \quad \delta = \frac{6,14}{\sqrt{\beta}} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{b}{h} = 6,14 \frac{\rho_0}{\rho h} \sqrt{\frac{2\pi\nu}{\omega_0}}, \quad \Omega = \frac{\pi}{8} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{b}{h} + \frac{\rho_0}{2\rho}. \quad (7)$$

С ростом безразмерной амплитуды колебаний картина течения определяется срывом интенсивных вихрей с концов пластины. Вязкие эффекты играют вспомогательную роль (ибо не они, а исключительно геометрия определяет место схода вихрей). Соответственно единственный параметр β , содержащий вязкость, перестает быть определяющим, а гидродинамические коэффициенты становятся функциями κ и Δ . Для нахождения данных зависимостей обратимся к классическим экспериментам Келегана—Карпентера [26]. Согласно этим экспериментам, проведенным для малых значений Δ , в диапазоне $\kappa > 1$ коэффициент сопротивления может быть аппроксимирован формулой

$$\kappa > 1: \quad C_D = \frac{6,2}{\sqrt{\kappa}}.$$

Для декремента колебаний из (6) имеем

$$\kappa > 1: \quad \delta = 7 \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sqrt{Ab}}{h}. \quad (8)$$

Согласно [26] с ростом κ коэффициент присоединенных масс вначале возрастает, достигая максимального значения, равного примерно 2 при $\kappa \approx 1$, а затем убывает. Принимая $C_M < 2$ и оценивая величину Ω согласно (6), найдем, что для типичных значений параметров относительное изменение частоты Ω не превосходит 0,001. Столь малые изменения частоты недоступны для измерения на имеющейся [1] экспериментальной установке. Поэтому можно считать, что аэродинамическое взаимодействие не в состоянии изменить частоту колебаний пластины.

Иначе обстоит дело с декрементом колебаний. Приняв для C_D аппроксимацию Келегана—Карпентера и оценивая декремент колебаний согласно (6), получим, что при типичных значениях параметров декремент δ есть величина порядка сотых. Именно такие по порядку значения δ наблюдаются и уверенно фиксируются в экспериментах [1] по затуханию изгибных колебаний тест-образцов.

Интересно, что в пределе малых амплитуд (см. (7)) аэродинамическая составляющая декремента колебаний перестает зависеть от ширины пластины, а при больших амплитудах (см. (8)) — от ее длины и упругих свойств, определяющих собственную частоту колебаний ω_0 .

4. Промежуточные амплитуды колебаний

Коэффициент сопротивления сложным образом зависит от всех трех безразмерных параметров: κ, β, Δ . Для нахождения зависимости величин C_M, C_D от этих параметров необходимо прямое численное моделирование (DNS — Direct Numerical Simulation) обтекания двухмерной колеблющейся пластины на основе решения уравнений Навье—Стокса. Соответствующие численные расчеты проводили в пакете вычислительной гидродинамики (CFD) OpenFOAM (Open Field Operation and Manipulation), основанном на конечно-объемном подходе к решению уравнений гидродинамики.

В расчетах рассматривали прямоугольную область размером $30b \times 30b$, в центре которой расположена пластина. На входной и выходной границах области задавали нулевую тангенциальную скорость и адаптированные к задаче условия, предполагающие задание давления на полупериоде втекания жидкости через границу и градиента давления на полупериоде вытекания. На боковых границах области задавали условия проскальзывания, на пластине — условия прилипания.

Для дискретизации расчетной области применяли ортогональные блочные сетки, выполненные с помощью утилиты blockMesh, входящей в состав пакета OpenFOAM. Для увеличения разрешающей способности сеток вблизи пластины использовали сгущение в горизонтальном и вертикальном направлениях. Количество ячеек, граничащих с торцом и боковой гранью пластины, 20 и 80 соответственно. Степень сгущения сетки варьируется в диапазоне 40—50 в направлении оси y и 15—20 — в направлении оси z . Количество узлов сеток не превышало $3 \cdot 10^5$. При дискретизации использовали совмещенное расположение узлов, дискретные значения скорости и давления локализовались в центрах расчетных ячеек сетки. Для вычисления объемных интегралов применяли общую процедуру Гаусса, согласно которой осуществлялся переход от объемного интеграла к поверхностному. Далее поверхностные интегралы представляли в виде суммы интегралов по граням ячейки и приближенно вычисляли по формуле средних прямоугольников. Значения функции и нормальных производных на поверхности ячеек для внутренних ячеек расчетной области интерполировали из значений функции в центрах соседних ячеек. При интерполяции градиента давления использовали линейную интерполяцию. Для интерполяции переменных в конвективных слагаемых применяли нелинейную NVD схему “Gamma”, предложенную в работе [31]. Нормальные градиенты скорости на поверхности ячейки, необходимые для дискретизации оператора Лапласа, вычисляли из значений скорости в центрах соседних ячеек по симметричной схеме второго порядка.

Для дискретизации системы по времени применяли неявную схему Эйлера. Шаг по времени во всех расчетах выбирали таким, чтобы максимальное число Куранта не превышало значения 0,1.

Решение дискретной задачи в пакете основано на подходе (“segregated approach”) раздельного решения уравнений для скорости и давления. Для

решения задачи использовали программу *icoFoam*, реализующую алгоритм PISO (Pressure Implicit Splitt Operator) [32—34]. Основным параметром алгоритма PISO — число коррекций — для используемых сеток равно трем. При решении системы уравнений для давления применяли метод сопряженных градиентов PCG с геометро-алгебраическим многосеточным предобуславливателем GAMG. В реализации GAMG для сглаживания использовали метод Гаусса—Зейделя с числом 1, 2 пре- и пострелаксаций соответственно, для агломерации ячеек сетки — алгоритм *faceAreaPair* [35]. Систему уравнений для скоростей решали методом бисопряженных градиентов PBiCG с предобуславливателем, основанным на неполной LU факторизации. Сходимость на всех этапах выполнялась до значений невязки, меньших 10^{-8} . Более подробно численная схема представлена в работе [36].

Все расчеты выполняли распределенным образом по технологии MPI с применением метода декомпозиции области. Для этого расчетную область делили на несколько вертикальных подобластей. Подзадачи в каждой подобласти рассчитывали на разных ядрах процессора.

Вычисления проводили для пластин толщиной $\Delta = 0,05; 0,1; 0,22; 0,32$ при значениях безразмерной частоты колебаний $\beta = 58,33; 103; 200; 1000$. Указанные параметры охватывают весь используемый в экспериментах [1] диапазон параметров. Для каждого фиксированного β и Δ выполнялась серия расчетов (15—20) при разных значениях безразмерной амплитуды колебаний κ . Верхняя граница κ определялась условием $Re = 2\pi\kappa\beta < 4000$; именно это позволяло использовать в расчетах умеренные сетки с количеством узлов 10^5 . Всего, таким образом, было проведено около 200 расчетов. Каждый из них заключался в нахождении аэродинамических полей и действующих на пластину сил на протяжении 40 периодов колебаний. Во всех случаях начальные условия отвечали состоянию покоя. Оставив детальный аэродинамический анализ картин течения, остановимся на расчете коэффициента сопротивления $C_D(\kappa, \beta, \Delta)$ и определяемого по нему согласно (6) декремента колебаний δ . В безразмерных переменных

$$C_D(\kappa, \beta, \Delta) = \frac{1}{t_{\max} - t_{\min}} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} P(t; \kappa, \beta, \Delta) \sin t dt.$$

Усреднение проводили по всем, за исключением первого, периодам колебаний: $t_{\min} = T$, $t_{\max} = 40T$. На рис. 2 проиллюстрировано типичное поведение зависимостей $P(t)$ с ростом безразмерной амплитуды колебаний пластины. Как видно, при малых значениях κ аэродинамический отклик $P(t)$ представляет собой гармоническую функцию (см. рис. 2—а). Далее (см. рис. 2—б) отклик сохраняет периодичность, но в нем нарастают отличные от основной гармоник колебания. Главным образом, это гармоник третьего порядка. С дальнейшим ростом параметра κ функция $P(t)$ утрачивает строгую периодичность (см. рис. 2—в) и в итоге (см. рис. 2—г) демонстрирует хаотичное поведение.

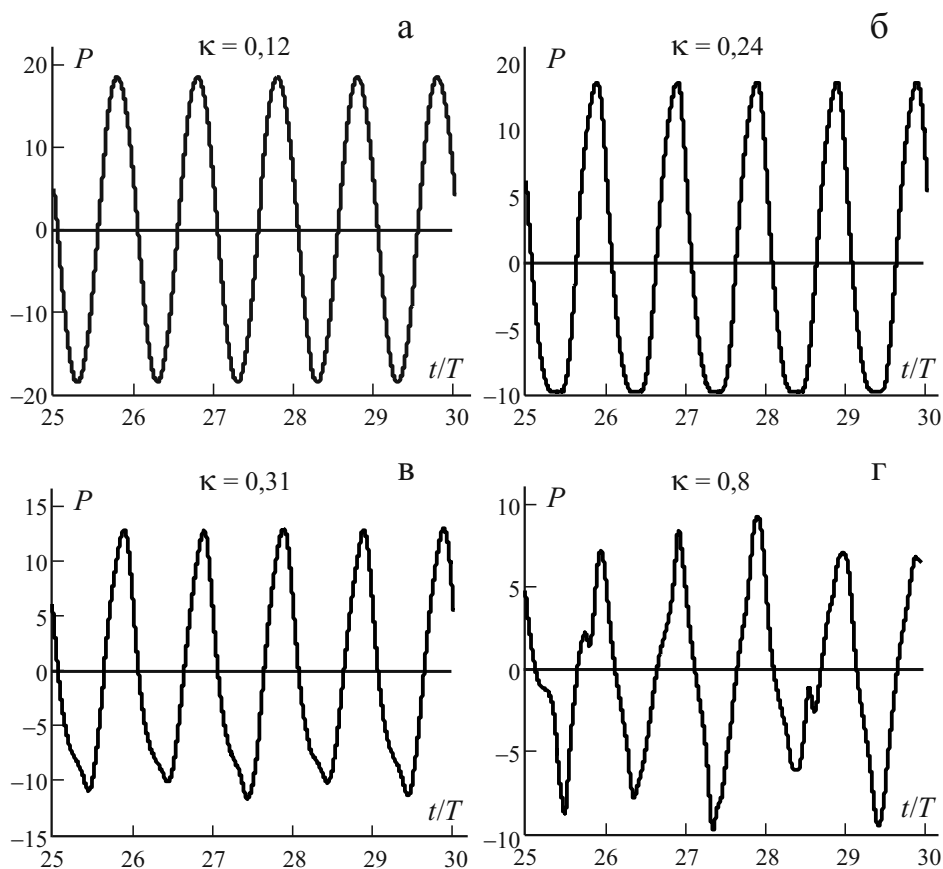


Рис. 2. Зависимость силы сопротивления P от времени t/T при $\Delta = 1/10$, $\beta = 103$.

Указанное поведение $P(t)$ непосредственно отражается на коэффициенте сопротивления (рис. 3). На этом рисунке помимо среднего коэффициента сопротивления C_D изображены также локальный $C_D^{\text{loc}}(n)$ и “накопленный” $C_D^{\text{glob}}(n)$ коэффициенты сопротивления

$$C_D^{\text{loc}}(n) = \frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} P_D(t) \sin t dt, \quad C_D^{\text{glob}}(n) = \frac{1}{nT} \int_0^{(n+1)T} P_D(t) \sin t dt.$$

Как видно, при малых κ выход на периодический режим происходит на втором-третьем периоде колебаний (см. рис. 3—а), с ростом κ выход на периодический режим затягивается (см. рис. 3—б). Далее реализуются аperiodический (см. рис. 3—в) и хаотический (см. рис. 3—г) режимы течения. Но даже в последнем случае, как показывает поведение “накопленного” коэффициента сопротивления, применяемое в расчетах усреднение по 40 периодам колебаний оказывается достаточным для нахождения с приемлемой точностью среднего коэффициента сопротивления.

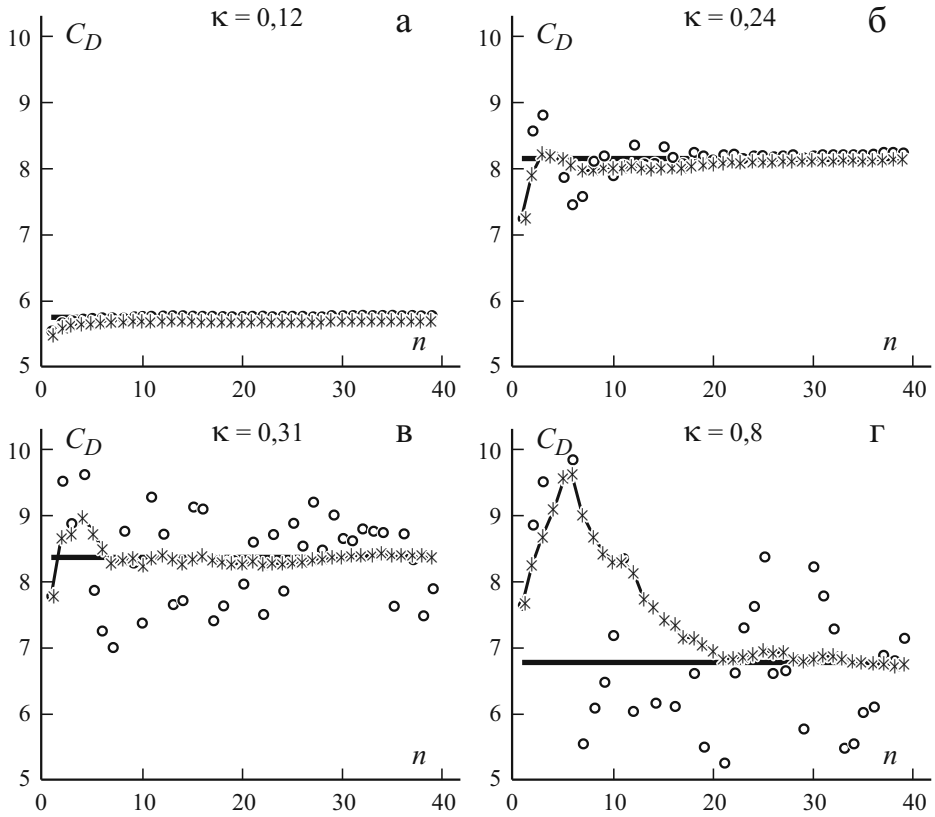


Рис. 3. Зависимость коэффициентов сопротивления C_D (—); C_D^{glob} (-*-) и C_D^{loc} (○) от периода колебаний n при $\Delta = 1/10$, $\beta = 103$.

Расчитанные зависимости $C_D(\kappa)$ при $\Delta = 0,1$ и разных значениях β представлены на рис. 4—а, а при фиксированном β и разных значениях Δ — на рис. 4—б.

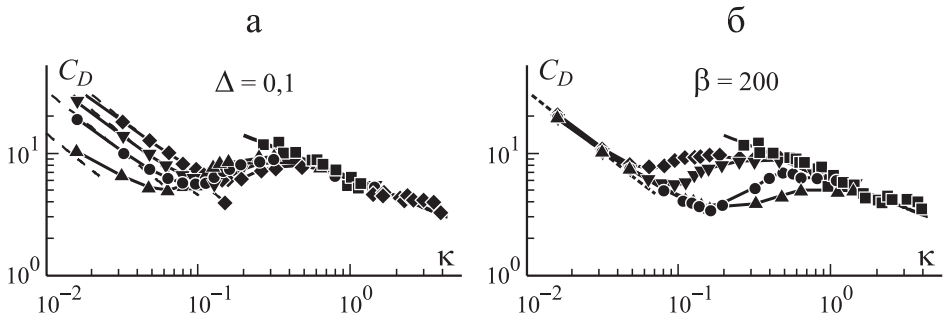


Рис. 4. Зависимость коэффициента сопротивления C_D от величины κ : а — $\beta = 58,33$ (◆); 103 (▼); 200 (●); 1000 (▲); б — $\Delta = 0,05$ (◆); 0,1 (▼); 0,22 (●); 0,32 (▲). ■ — экспериментальные данные Келегана—Карпентера; (---) — асимптотики Стокса.

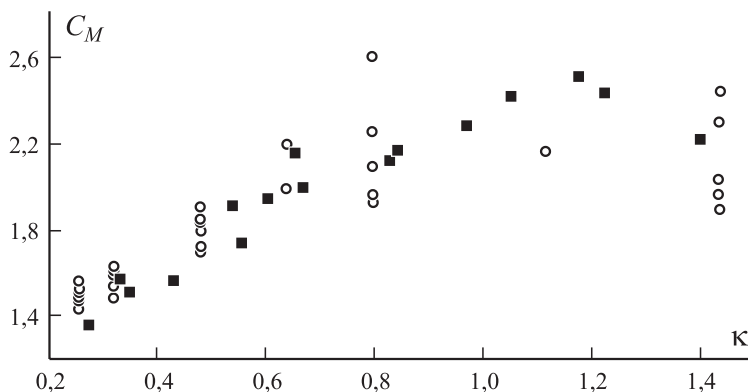


Рис. 5. Зависимость коэффициента присоединенных масс C_M от величины κ при разных значениях β , Δ . \circ — расчет; \blacksquare — эксперимент.

Как видно, зависимости $C_D(\kappa)$ имеют характерную S-образную форму. При малых κ кривые $C_D(\kappa)$ выходят на асимптотику Стокса, а при больших κ — на экспериментальную зависимость Келегана—Карпентера. Чем больше величина β и меньше величина Δ , тем раньше (при меньших κ) происходит отклонение от стоксовской асимптотики и выход на экспериментальную кривую Келегана—Карпентера. В целом при фиксированных $\kappa > 0,1$ коэффициент сопротивления C_D растет с ростом безразмерной частоты колебаний и с уменьшением безразмерной толщины пластины.

Достоверность полученных расчетным путем результатов подтверждается тем обстоятельством, что расчетные кривые $C_D(\kappa)$ при всех значениях параметров β , Δ выходят при малых κ на теоретически обоснованную асимптотику, а при больших κ — на известную экспериментальную зависимость. Дополнительным аргументом является вполне удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных данных [26] в части зависимости коэффициента присоединенных масс C_M от безразмерной амплитуды колебаний κ (рис. 5) во всем расчетном диапазоне значений параметров.

5. Аналитическая аппроксимация результатов

Для аналитической аппроксимации численных результатов представим, следуя [22], величину C_D как сумму двух составляющих — вязкой и вихревой. Для первой из них примем стоксовскую зависимость, вторую зададим согласно экспериментам Келегана—Карпентера с поправочным коэффициентом K :

$$C_D = C_D^{\text{vis}} + C_D^{\text{vort}}; \quad C_D^{\text{vis}} = \frac{4,61}{\kappa\sqrt{\beta}}, \quad C_D^{\text{vort}} = \frac{6,2}{\sqrt{\kappa}} K(\beta, \Delta, \kappa). \quad (9)$$

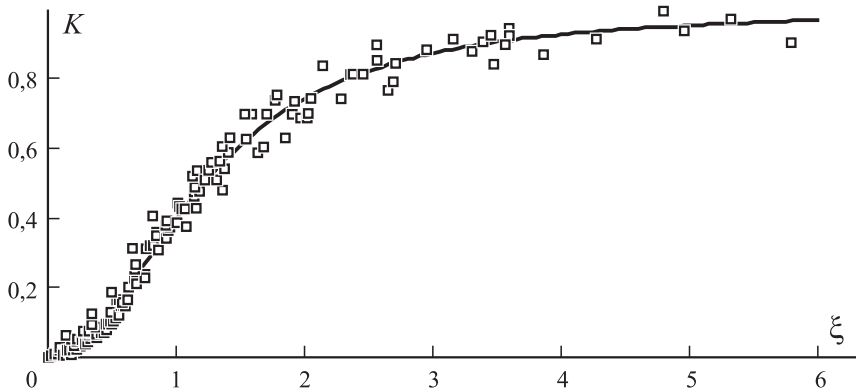


Рис. 6. Зависимость поправочного коэффициента K от параметра ξ при разных значениях β, Δ . (□) — расчет; (—) — аппроксимация.

Очевидно, что поправочный коэффициент K ведет себя однотипно при всех β, Δ , монотонно возрастая с ростом κ от нуля при $\kappa = 0$ до единицы при $\kappa = \infty$. Более того, как показывает анализ численных результатов, графики $K(\kappa)$ оказываются практически идентичны при любых β, Δ , если соответствующим образом (в зависимости от β, Δ) растянуть ось абсцисс:

$$K(\kappa, \Delta, \beta) = K(\xi), \quad \xi = \kappa [2 + 1,78 \ln \Delta - [0,54 + 0,88 \ln \Delta] \ln \beta]. \quad (10)$$

Этот факт иллюстрируют данные рис. 6, где точками показаны зависимости поправочного коэффициента

$$K = \frac{\sqrt{\kappa}}{6,2} (C_D - C_D^{\text{vis}})$$

от параметра ξ при разных значениях β, Δ .

Как видно, результаты численного эксперимента группируются вокруг одной кривой. Эту кривую можно аппроксимировать с приемлемой точностью, например, следующей простой зависимостью

$$K(\xi) = \frac{\xi^2}{\xi^2 + 1,7}. \quad (11)$$

Определив величину C_D по формулам (9)—(11), декремент колебаний δ рассчитываем согласно (6). Обозначив отношение текущей амплитуды колебаний конца пластины к ее ширине A/b как κ_0 , получим

$$\delta = \frac{b\rho_0}{h\rho} F, \quad F = \frac{6,14}{\sqrt{\beta}} + \sqrt{\kappa_0} f(\xi_0), \quad (12)$$

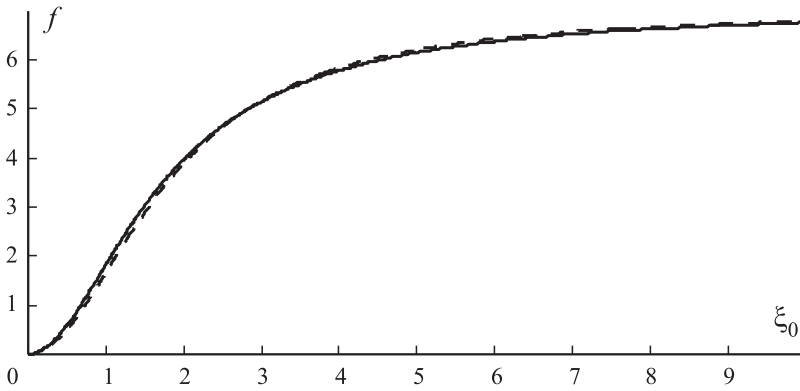


Рис. 7. Зависимость величины f от параметра ξ_0 : (—) — расчет; (---) — аппроксимация.

$$\xi_0 = \kappa_0 [2 + 1,78 \ln \Delta - [0,54 + 0,88 \ln \Delta] \ln \beta], \tag{12}$$

$$f(\xi_0) = 8,27 \left\langle K(\xi_0 W(x)) W^{2,5}(x) \right\rangle / \left\langle u_0^2(x) \right\rangle.$$

Определяющую вихревую составляющую декремента колебаний функцию f находим из (12) простым интегрированием (сплошная линия на рис. 7). Асимптотическое поведение $f(\xi_0)$ при малых и больших значениях ξ_0 описывается формулами

$$\xi_0 \rightarrow \infty: f(\xi_0) \approx 7,0,$$

$$\xi_0 \rightarrow 0: f(\xi_0) \approx 2,73 \xi_0^2.$$

Опираясь на указанные асимптотики, можно предложить следующую аппроксимационную формулу для вычисления зависимости $f(\xi_0)$:

$$f(\xi_0) = 7 \frac{\xi_0^2}{\xi_0^2 + 3,2}. \tag{13}$$

Как видно, эта зависимость хорошо описывает поведение $f(\xi_0)$ во всем диапазоне изменения параметра ξ_0 .

Заключение

Представленное исследование является составной частью цикла работ по созданию и обоснованию теоретико-экспериментального метода определения параметров демпфирования материалов на основе изучения затухающих изгибных колебаний консольно закрепленных тест-образцов. В данной ра-

боте был рассмотрен вопрос о выделении аэродинамической составляющей декремента колебаний. Задача сведена к отысканию зависимости коэффициента сопротивления C_D гармонически колеблющейся бесконечной пластины от безразмерных параметров κ , β , Δ , характеризующих амплитуду, частоту колебаний и толщину пластины соответственно. В практически интересном диапазоне значений управляющих параметров коэффициент сопротивления вычислен с помощью прямого численного моделирования с использованием пакета OpenFOAM. Предложена простая аналитическая аппроксимация (9)—(11) коэффициента сопротивления. Опираясь на эту аппроксимацию, удалось найти аналитическое выражение (12), (13), с высокой точностью приближающее зависимость декремента колебаний от текущей амплитуды конца консоли и частоты колебаний.

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009—2013 гг., созданной приказом Минобрнауки России от 22 марта 2012 г. № 223, от 13 июля 2012 г. № 1/22/3 по теме “Разработка теоретико-экспериментального метода исследования затухающих колебаний с учетом внутреннего и аэродинамического внешнего демпфирования и исследование задач о прохождении звуковой волны сквозь однослойные и трехслойные панели с созданием методик расчета параметров шумопоглощения” (соглашение № 2012-1.2.1-12-000-1002-030).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Гюнал И., Егоров А. Г. Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 1. Экспериментальные основы // Механика композит. материалов. — 2014. — Т. 50, № 2. — С. 185—198.
2. Sader J. E. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope // J. Appl. Phys. — 1998. — Vol. 84, No. 1. — P. 64—76.
3. Kirstein S., Mertesdorf M., and Schoenhoff M. The influence of a viscous fluid on the vibration dynamics of scanning near-field optical microscopy fiber probes and atomic force microscopy cantilevers // J. Appl. Phys. — 1998. — Vol. 84, No. 4. — P. 1782—1790.
4. Maali A., Hurth C., Boisgard R., Jai C., Cohen-Bouhacina T., and Aimer J.-P. Hydrodynamics of oscillating atomic force microscopy cantilevers in viscous fluids // J. Appl. Phys. — 2005. — Vol. 97, No. 7. — Art. 074907.
5. Basak S., Raman A., and Garimella S. V. Hydrodynamic loading of microcantilevers vibrating in viscous fluids // J. Appl. Phys. — 2006. — Vol. 99, No. 11. — Art. 114906.
6. Hosaka H., Itao K., and Kuroda S. Damping characteristics of beam-shaped micro-oscillators // Sensors and Actuators A: Physical. — 1995. — Vol. 49, Nos. 1—2. — P. 87—95.
7. Kimber M., Garimella S. V., and Raman A. Local heat transfer coefficients induced by piezoelectrically actuated vibrating cantilevers // Trans. ASME J. of Heat Transfer. — 2007. — Vol. 129, No. 9. — P. 1168—1176.

8. Kimber M., Lonergan R., and Garimella S. V. Experimental study of aerodynamic damping in arrays of vibrating cantilevers // *J. of Fluids and Structures*. — 2009. — Vol. 5, No. 8. — P. 1334—1347.

9. Castille C., Dufour I., and Lucat C. Longitudinal vibration mode of piezoelectric thick-film cantilever-based sensors in liquid media // *Appl. Phys. Lett.* — 2010. — Vol. 96. — Art. 154102.

10. Kimber M. and Garimella S. V. Measurement and prediction of the cooling characteristics of a generalized vibrating piezoelectric fan // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. — 2009. — Vol. 52, Nos. 19—20. — P. 4470—4478.

11. Bidkar R. A., Kimber M., Raman A., Bajaj A. K., and Garimella S. V. Nonlinear aerodynamic damping of sharp-edged flexible beams oscillating at low Keulegan—Carpenter numbers // *J. of Fluid Mechanics*. — 2009. — Vol. 634. — P. 269—289.

12. Shyy W., Berg M., and Ljungqvist D. Flapping and flexible wings for biological and micro air vehicles // *Progress in Aerospace Sci.* — 1999. — Vol. 35, No. 5. — P. 455—505.

13. Chen Z., Shataru S., and Tan X. Modeling of biomimetic robotic fish propelled by an ionic polymer-metal composite caudal fin // *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*. — 2010. — Vol. 13, No. 5. — P. 519—529.

14. Aureli M., Kopman V., and Porfiri M. Free-locomotion of underwater vehicles actuated by ionic polymer metal composites // *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*. — 2010. — Vol. 15, No. 4. — P. 603—614.

15. Tao L. and Thiagarajan K. Low KC flow regimes of oscillating sharp edges. II vortex shedding observation // *Appl. Ocean Res.* — 2003. — Vol. 25, No. 2. — P. 21—35.

16. Микишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1978. — 247 с.

17. Бужинский В. А. Колебания тел с острыми кромками в несжимаемой маловязкой жидкости и некоторые задачи гидродинамики космических аппаратов. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Королев, 2003. — 280 с.

18. Aureli M., Basaran M. E., and Porfiri M. Nonlinear finite amplitude vibrations of sharp-edged beams in viscous fluids // *J. of Sound and Vibration*. — 2012. — Vol. 331. — P. 1624—1654.

19. Aureli M. and Porfiri M. Low frequency and large amplitude oscillations of cantilevers in viscous fluids // *Appl. Phys. Lett.* — 2010. — Vol. 96. — Art. 164102.

20. Sarpkaya T. Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan—Carpenter numbers // *J. of Fluid Mechanics*. — 1986. — Vol. 165. — P. 61—71.

21. Falcucci G., Aureli M., Ubertini S., and Porfiri M. Transverse harmonic oscillations of laminae in viscous fluids: a lattice Boltzmann study // *Philosophical Trans. of the Roy. Soc. of London. A: Math., Phys. and Eng. Sci.* — 2011. — Vol. 369, No. 1945. — P. 2456—2466.

22. Bearman P. W., Downie M. J., Graham J. M. R., and Obasaju E. D. Forces on cylinders in viscous oscillatory flow at low Keulegan—Carpenter numbers // *J. of Fluid Mechanics*. — 1985. — Vol. 154. — P. 337—356.

23. Stokes G. G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // *Trans. of the Cambridge Philosophical Soc.* — 1851. — Vol. 9. — P. 1—141.

24. Tuck E. O. Calculation of unsteady flows due to unsteady motion of cylinders in a viscous fluid // *J. of Engineering Mathematics*. — 1969. — Vol. 3, No. 1. — P. 29—44.

25. Brumley D. R., Willcox M., and Sader J. E. Oscillation of cylinders of rectangular cross section immersed in fluid // *Phys. Fluids*. — 2010. — Vol. 22, No. 5. — Art. 052001.

26. *Keulegan G. H. and Carpenter L. H.* Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid. // J. of Res. of National Bureau of Standards. — 1958. — Vol. 60, No. 5. — P. 423—440.
27. *Singh S.* Forces on Bodies in Oscillatory Flow // PhD Thesis, University of London, 1979.
28. *Graham J. M. R.* The forces on sharp-edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan—Carpenter numbers // J. of Fluid Mechanics. — 1980. — Vol. 97, No. 1. — P. 331—346.
29. *Бужинский В. А.* Вихревое демпфирование колебаний жидкости в резервуарах с перегородками // Прикл. математика и механика. — 1998. — Т. 62, вып. 2. — С. 235—243.
30. *Jones M. A.* The separated flow of an inviscid fluid around a moving flat plate // J. of Fluid Mechanics. — 2003. — Vol. 496. — P. 405—441.
31. *Jasak H.* Error analysis and estimation for the Finite Volume method with applications to fluid flows // PhD. Thesis, Imperial College, University of London, 1996.
32. *Issa R. I.* Solution of implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // J. Comput. Phys. — 1986. — Vol. 62. — P. 40—65.
33. *Ferziger J. H. and Peric M.* Computational Methods for Fluid Dynamics. — 3rd rev. ed. — Berlin: Springer, 2002. — 424 p.
34. *Versteeg H. K. and Malalasekera W.* An introduction to computational fluid dynamics // The Finite Volume Method. — N.Y.: Longman, 1995. — P. 258.
35. *Tuck E. O.* Calculation of unsteady flows due to unsteady motion of cylinders in a viscous fluid // J. of Eng. Mathematics. — 1969. — Vol. 3, No. 1. — P. 29—44.
36. *Нуриев А. Н., Зайцева О. Н.* Решение задачи об осциллирующем движении цилиндра в вязкой жидкости в пакете OpenFOAM // Вест. Казан. технолог. ун-та. — 2013. — Т. 8. — С. 116—123.

Поступила в редакцию 11.10.2013
Received Oct. 11, 2013
