

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико–математический факультет

Л.Г. Салехов, Ю.Р. Агачев

**Обыкновенные дифференциальные уравнения
в банаховых пространствах**

Часть II

Учебное пособие

Казанский государственный университет

2009

УДК 517.9

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
ГОУ ВПО "Казанский государственный университет
им. В.И. Ульянова-Ленина"*

учебно–методической комиссии
механико–математического факультета КГУ
Протокол № 6 от 18 июня 2009 г.

Рецензенты: доктор физико-математических наук,
профессор Бикчантаев И.А.,
доктор физико-математических наук,
профессор Мухлисов Ф.Г.

Салехов Л.Г., Агачев Ю.Р. Обыкновенные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. Часть II. Учебное пособие. – Казань, изд-во Казанск. гос. ун-та, 2009. – 58 с.

Данное пособие возникло на основе спецсеминаров со студентами, специализирующимися по кафедре дифференциальных уравнений, а также слушателями ФПК. Во второй части рассматриваются основные элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Приведены доказательства многих сформулированных утверждений.

Пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

© Казанский государственный
университет, 2009

Пусть всюду во второй части настоящего пособия E — банахово пространство над полем $\mathbb{R}$. Рассматриваются функции φ одного *действительного переменного* t со значениями в пространстве E . Предполагается, что значения производных φ' также лежат в пространстве E , при этом пространства E и $\mathcal{L}(\mathbb{R}; E)$ отождествляются.

Дифференциальное уравнение первого порядка

Пусть $U \subset \mathbb{R} \times E$ — заданное подмножество. Чаще всего U предполагается открытым, но это необязательно, иногда U будет замкнутым. Пусть дана *непрерывная* функция $f : U \rightarrow E$. Тогда дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (1)$$

Решением дифференциального уравнения называется принадлежащая классу C^1 функция $\varphi : I \rightarrow E$, где $I \subset \mathbb{R}$ есть интервал, который может быть открытым или замкнутым, ограниченным или нет, удовлетворяющая двум условиям:

$$(1^\circ) \quad (t, \varphi(t)) \in U \quad \forall t \in I;$$

$$(2^\circ) \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in I.$$

Н.В. 1) Не следует забывать, что без условия (1°) условие (2°) не имеет смысла.

Н.В. 2) Излишне предполагать, что функция φ принадлежит классу C^1 ; если φ только дифференцируема и удовлетворяет условиям (1°) и (2°) , то производная φ' автоматически будет непрерывной функцией от t , ибо $f(t, \varphi(t))$ является непрерывной функцией от t как композиция двух непрерывных функций.

Если $E = E_1 \times \dots \times E_n$ — конечное произведение банаховых пространств, то $U \subset \mathbb{R} \times E_1 \times \dots \times E_n$ и $f = f(t, x_1, \dots, x_n)$, где $x_i \in E_i$, $i = \overline{1, n}$; функция f определяется заданием n функций $f_1, \dots, f_n$, где $f_i : U \rightarrow E_i$. Решение дифференциального уравнения φ представляет собой совокупность таких n функций класса C^1 : $\varphi_i : I \rightarrow E_i$, что

$$(1^\circ) \quad (t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in U \quad \forall t \in I;$$

$$(2^\circ) \quad \varphi'_i(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \quad \forall t \in I, i = \overline{1, n}.$$

Заметим, что по существу имеем здесь систему n дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными функциями от t :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

В частном случае, когда $E = \mathbb{R}^n, E_i = \mathbb{R}$ ($i = \overline{1, n}$) получаем систему из n скалярных дифференциальных уравнений, где данные функции f_i и неизвестные функции $x_i = \varphi(t)$ являются числовыми. Изучение такой системы сводится к изучению одного векторного дифференциального уравнения (1).

Дифференциальное уравнение $n^{\text{го}}$ порядка

Такое уравнение имеет вид

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}). \quad (1_n)$$

Здесь f — заданная непрерывная функция $U \rightarrow E$, где $U \subset \mathbb{R} \times \underset{n\text{-раз}}{E \times \dots \times E}$.

Решением уравнения называется функция $\varphi : I \rightarrow E$ класса C^n , удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$(1^\circ) \quad (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in U \quad \forall t \in I;$$

$$(2^\circ) \quad \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \quad \forall t \in I.$$

Решение уравнения (1_n) эквивалентно решению системы n -уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-2}}{dt} = x_{n-1} \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = f(t, x, x_1, \dots, x_{n-1}). \end{cases} \quad (2)$$

При такой замене одного уравнения системой уравнений вместо одной неизвестной функции $\varphi : I \rightarrow E$ класса C^n приходится находить систему n таких неизвестных функций $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} : I \rightarrow E$ класса C^1 , что

$$\varphi'(t) = \varphi_1(t), \quad \varphi_1'(t) = \varphi_2(t), \dots, \varphi_{n-2}'(t) = \varphi_{n-1}(t),$$

$$\varphi'_{n-1}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)).$$

Здесь функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ являются последовательными производными функции φ .

Таким образом, решение одного дифференциального уравнения n -го порядка сводится к решению одного дифференциального первого порядка (с заменой E на $E^n = E \times \dots \times E$ n -раз).

По этой причине будем рассматривать в основном уравнения первого порядка. Результаты, полученные для дифференциального первого порядка будут затем *перенесены* без доказательства на уравнения n -го порядка. Например, докажем, что при некоторых предположениях (условие Липшица для данной функции f) для *внутренней* точки (t_0, x_0) множества U существует такое число $\varepsilon > 0$, что в отрезке $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] = I'$ дифференциальное уравнение (1) имеет единственное решение $\varphi : I' \rightarrow E$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$. Если *перенести* этот результат на случай уравнения $n^{\text{го}}$ порядка, то придем к следующему выводу:

Пусть дана внутренняя точка множества U :

$$(t_0, x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}).$$

Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что в отрезке $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] = I'$ дифференциальное уравнение (1_n) имеет единственное решение $\varphi : I' \rightarrow E$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi(t_0) = x_0, \varphi'(t_0) = x'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)},$$

т.е. при $t = t_0$ задаются значения φ и ее производных до порядка $(n-1)$ включительно.

Приближенные решения

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (1)$$

Пусть дано число $\varepsilon > 0$. Функция $\varphi : I \rightarrow E$, принадлежащая классу C^1 , называется *приближенным с точностью до ε решением* уравнения

(1) или, иначе, его ε -приближенным решением, если выполняются следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} (1^\circ) \quad & (t, \varphi(t)) \in U \quad \forall t \in I, \\ (2^\circ) \quad & \|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \varepsilon \quad \forall t \in I. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Это понятие обобщим на случай *кусочно гладкой класса* C^1 функции $\varphi : I \rightarrow E$. Пусть для простоты I — компактный интервал, представляющий собой объединение конечной совокупности смежных компактных интервалов I_k ; при этом 1) для любого k конец интервала I_{k-1} совпадает с началом интервала I_k ; 2) сужение φ на каждый интервал I_k принадлежит классу C^1 . Потребуем, кроме того, чтобы функция φ удовлетворяла условиям (2), понимая под этим, что соответствующее неравенство имеет место в каждом из интервалов I_k . Иначе говоря, в каждой точке из конечного множества точек $t \in I$, где производная φ' терпит разрыв, потребуем, чтобы

$$\|\varphi'_n(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \varepsilon, \quad \|\varphi'_\Pi(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \varepsilon,$$

т.е. условия на правую и левую производные.

Теперь докажем теорему существования для *приближенных решений*.

Теорема. Пусть $B(x_0; r) \subset E$ — замкнутый шар $\|x - x_0\| \leq r$ с центром в точке $x_0 \in E$ и радиусом $r > 0$. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — компактный интервал и $t_0 \in I$. Предположим, что дана непрерывная ограниченная функция

$$f : I \times B(x_0; r) \rightarrow E,$$

причем

$$\|f(t, x)\| \leq M, \quad t \in I, \quad \|x - x_0\| \leq r. \quad (3)$$

где M — конечное фиксированное число.

Пусть J — пересечение интервала I с отрезком

$$t_0 - \frac{r}{M} \leq t \leq t_0 + \frac{r}{M}.$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ имеет кусочно гладкое класса C^1 ε -приближенное решение $\varphi : J \rightarrow B(x_0; r)$ такое, что $\varphi(t_0) = x_0$. Заметим, что всегда найдется кусочно линейная функция φ , удовлетворяющая этим условиям.

Доказательство. Достаточно построить функцию φ на отрезке J при $t \geq t_0$ и при $t \leq t_0$. Построим сначала искомое решение, если I есть отрезок $t_0 \leq t \leq T$ длины $T - t_0 \leq \frac{r}{M}$. Исходя из этого результата затем сможем построить функцию φ во всем интервале I . Рассмотрим в интервале I такую однозначно определенную аффинно-линейную функцию $\varphi_0 : I \rightarrow E$, что $\varphi_0(t_0) = x_0, \varphi'_0(t_0) = f(t_0, x_0)$, т.е. функцию вида

$$\varphi_0(t) = x_0 + (t - t_0)f(t_0, x_0). \quad (4)$$

Значения функции φ_0 принадлежат шару $B(x_0, r)$, ибо $\|\varphi_0(t) - x_0\| \leq \frac{r}{M} \cdot M$ при $t - t_0 \leq \frac{r}{M} \forall t \in I$. Функция φ_0 есть ε -приближенное решение на отрезке $[t_0, t_1]$, если

$$\|f(t_0, x_0) - f(t, x_0 + (t - t_0)f(t_0, x_0))\| \leq \varepsilon \quad (5)$$

при $t_0 \leq t \leq t_1$. В силу *непрерывности* функции f это неравенство имеет место во всяком случае для любого t , достаточно близкого к t_0 . Если оно имеет место во всем I , т.е. при $t_0 \leq t \leq T$, то φ_0 является ε -приближенным решением на I , таким, что $\varphi_0(t_0) = x_0$, и тогда получаем требуемый результат. В противном случае существует *наибольший* отрезок $[t_0, t_1]$ с началом в точке t_0 , в котором выполняется неравенство (5). Действительно, пусть t_1 — нижняя грань тех t , для которых (5) не выполняется. Тогда неравенство (5) справедливо при $t_0 \leq t < t_1$ и также для $t = t_1$ из соображений непрерывности. Положим $\varphi_0(t_1) = x_1$. Тогда $x_1 - x_0 = (t_1 - t_0)f(t_0, x_0)$ и, следовательно,

$$\|x_1 - x_0\| < r \quad \text{при} \quad t_1 - t_0 < T - t_0 \leq \frac{r}{M}.$$

Положим $r_1 = r - \|x_1 - x_0\|$. Тогда функция f будет определена и непрерывна при $t_1 \leq t \leq T, \|x - x_1\| \leq r_1$, причем будет иметь место неравенство $\|f(t, x)\| \leq M$ и, как легко проверить,

$$T - t_1 \leq \frac{r_1}{M}. \quad (6)$$

Таким образом, для значений t_1 и x_1 будут выполнены те же условия, что и для t_0 и x_0 . Следовательно, можем, отправляясь от этих значений, вновь начать тот же самый процесс построения. Пусть аффинно-линейная функция

$$\varphi_1(t) = x_1 + (t - t_1)f(t_1, x_1),$$

определенная при $t_1 \leq t \leq T$, принимает значения в шаре $B(x_1, r_1)$ (а значит, и в шаре $B(x_0, r_0)$). Существует наибольший отрезок $[t_1, t_2]$, где $t_1 < t_2 \leq T$, в котором выполняется неравенство

$$\|f(t_1, x_1) - f(t, x_1 + (t - t_1)f(t_1, x_1))\| \leq \varepsilon.$$

Если $t_2 = T$, то функция φ_1 , равная φ_0 на отрезке $[t_0, t_1]$ и равная φ_1 на $[t_1, t_2]$, является ε -приближенным решением дифференциального уравнения в отрезке $[t_0, T]$ и наше построение окончено. Если $t_1 < T$, то вновь повторим процесс построения. Возьмем $\varphi_1(t_2) = x_2$ и найдем, что $\|x_2 - x_1\| \leq r_1$, т.к. $t_2 - t_1 < T - t_1 \leq \frac{r_1}{M}$ (см. формулу (6)). Положим $r_2 = r_1 - \|x_2 - x_1\|$; тогда $T - t_2 \leq \frac{r_2}{M}$ и т.д.

Таким образом, построим по индукции возрастающую последовательность точек $t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$, последовательность элементов $x_0, x_1, \dots, x_n \in E$ и линейных функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, определенных соответственно на отрезках $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ и принимающих значения в шаре $B(x_0; r)$, причем их значения согласуются в общих концах $t_1, \dots, t_{n-1}$. Объединение функций φ_i дает непрерывную кусочно линейную функцию $\varphi : [t_0, t_n] \rightarrow B(x_0; r)$, которая является ε -приближенным решением дифференциального уравнения. Если $t_n = T$ при некотором n , то теорема доказана.

Остается рассмотреть случай, когда $t_n < T$ для любого n , т.е. случай, когда процесс построения решения продолжается неограниченно. Покажем, что *такой ситуации быть не может*. Будем рассуждать от противного. Предположим, что построение неограниченно продолжается, и пусть t' — верхняя грань *строго* возрастающей последовательности $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$. Очевидно, что

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq M(t_{n+1} - t_n).$$

Следовательно, $\{x_n\}$ — последовательность Коши. Вследствие замкнутости шара $\|x - x_0\| \leq r$, она имеет предел $x' \in B(x_0, r)$. При $t_n \leq t \leq t'$

$$\varphi_n(t) - x_n = (t - t_n)f(t_n, x_n).$$

Значит, $\|\varphi_n(t) - x_n\| \leq M(t' - t_n)$ при $t_n \leq t \leq t'$, откуда

$$\|\varphi_n(t) - x'\| \leq \|x' - x_n\| + M(t' - t_n) \quad \text{при } t_n \leq t \leq t'. \quad (7)$$

Поскольку функция f непрерывна в точке (t', x') , то существует такое число $\eta > 0$, что из неравенств $|t - t'| \leq \eta$ и $\|x - x'\| \leq \eta$ следует $\|f(t', x') - f(t, x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Значит, при достаточно большом n в силу (7):

$$\|f(t', x') - f(t, \varphi_n(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } t_n \leq t \leq t',$$

$$\|f(t', x') - f(t_n, x_n)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из последних двух неравенств заключаем, что

$$\|f(t_n, x_n) - f(t, \varphi_n(t))\| \leq \varepsilon \quad \text{при } t_n \leq t \leq t'.$$

Следовательно, $\varphi_n(t)$ есть ε -приближенное решение на отрезке $[t_n, t']$. Отсюда, по определению t_{n+1} , вытекает, что $t_{n+1} \geq t'$. Приходим к противоречию, т.к. $t' \geq t_{n+2} \geq t_{n+1}$. Итак, доказательство теоремы закончено.

Н.В. Пусть $U \subset \mathbb{R} \times E$ — *открытое* множество, точка $(t_0, x_0) \in U$ и $f : U \rightarrow E$ — непрерывная функция. Тогда существуют такие числа $\tau > 0, r > 0, M > 0$, что любая точка (t, x) , для которой выполняются неравенства

$$|t - t_0| \leq \tau, \quad \|x - x_0\| \leq r,$$

содержится в U и $\|f(t, x)\| \leq M$ для этих пар (t, x) . Пусть α — наименьшее из чисел τ и $\frac{M}{r}$. Теорема доказанная утверждает, что на *компактном интервале* $|t - t_0| \leq \alpha$ дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ для любого числа $\varepsilon > 0$ имеет кусочно-линейное ε -приближенное решение $x = \varphi(t)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$.

Этот результат справедлив, вообще говоря, лишь для достаточно малых α . Отметим, что *выбор числа α не зависит от выбора числа ε .*

Пример: Линейное дифференциальное уравнение

Определение. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \circ x + B(t), \tag{1_p}$$

где $A : I \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$ и $B : I \rightarrow E$ — *непрерывные* функции, заданные на интервале $I \subset \mathbb{R}$. Таким образом, здесь $f(t, x) = A(t) \circ x + B(t)$ есть аффинно линейная непрерывная функция от $x \in E$ для каждого $t \in I$.

Эта функция непрерывно зависит от t (т.к. $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывно зависят от t). Подмножество $U \subset \mathbb{R} \times E$ совпадает с $\mathbb{R} \times E$.

Рассмотрим точки $t_0 \in I$ и $x_0 \in E$. Можем применить доказанную теорему к замкнутому шару $B(x_0, r)$ произвольного радиуса r . Покажем, что имеет место

Теорема. *Если интервал I компактен, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое ε -приближенное решение $\varphi : I \rightarrow E$ уравнения (1_p) , что $\varphi(t_0) = x_0$.*

Н.В. Заметим, что функцию φ , удовлетворяющую условиям этой теоремы, можно выбрать кусочно линейной. Важно то обстоятельство, что получаемое в этой теореме решение φ существует на всем интервале I .

Доказательство. Норма $\|A(t)\|$, т.е. норма в пространстве $\mathcal{L}(E; E)$, является непрерывной функцией переменного $t \in I$. Так как интервал I компактен, то эта норма имеет верхнюю грань. Положим

$$\alpha = \sup_{t \in I} \|A(t)\|;$$

аналогично,

$$\beta = \sup_{t \in I} \|B(t)\|;$$

Далее имеем:

$$\|f(t, x)\| = \|A(t) \cdot x + B(t)\| \leq \alpha \|x\| + \beta.$$

Следовательно, если $\|x - x_0\| \leq r$, то

$$\|f(t, x)\| \leq \alpha \|x_0\| + \beta + \alpha r.$$

Таким образом, для значений $t \in I$, $\|x - x_0\| \leq r$

$$\|f(t, x)\| \leq M,$$

где $M = \alpha \|x_0\| + \beta + \alpha r$. Отсюда

$$\frac{M}{r} = \frac{\alpha \|x_0\| + \beta}{r} + \alpha.$$

Для данного x_0 выберем число r так, чтобы $\frac{M}{r} \leq 2\alpha$. Тогда, согласно доказанной теореме, существует ε -приближенное (кусочно линейное) решение φ в компактном интервале

$$J = I \cap \left[t_0 - \frac{1}{2\alpha}, t_0 + \frac{1}{2\alpha} \right],$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$.

Этот результат позволит найти кусочно линейное ε -приближенное решение во всем интервале I . Достаточно построить его отдельно на интервале I' (множество таких $t \in I$, что $t \geq t_0$) и на интервале I'' (множество таких $t \in I$, что $t \leq t_0$). Построим это решение, например, на интервале I' . Пусть точка T — его правый конец. Только что нашли ε -приближенное решение φ_0 на интервале $I' \cap [t_0, t_0 + \frac{1}{2\alpha}]$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi_0(t_0) = x_0$ (в качестве φ_0 можно взять кусочно линейную функцию). Если $t_0 + \frac{1}{2\alpha} \geq T$, то построение закончено. В противном случае, пусть $t_1 = t_0 + \frac{1}{2\alpha} < T$, $\varphi_0(t_1) = x_1$. Тогда повторим для t_1 и x_1 то, что делали для t_0 и x_0 . В результате получим на интервале $I' \cap [t_1, t_1 + \frac{1}{2\alpha}]$ кусочно линейное ε -приближенное решение φ_1 , удовлетворяющее начальному условию $\varphi_1(t_1) = x_1$. Если $t_1 + \frac{1}{2\alpha} \geq T$, то построение закончено, ибо функция φ , равная φ_0 на отрезке $[t_0, t_1]$ и φ_1 на отрезке $[t_1, T]$, отвечает всем требованиям. В противном случае начнем сначала: полагаем $t_1 + \frac{1}{2\alpha} = t_2 < T$, $\varphi(t_2) = x_2$. Этот процесс должен закончиться через конечное число шагов, ибо $t_n = t_0 + \frac{n}{2\alpha} \geq T$ для достаточно больших n , ч.т.д.

Случай, когда правая часть удовлетворяет условию Липшица; основная лемма

Известно, что функция $f(t, x)$, определенная и непрерывная на множестве $U \subset \mathbb{R} \times E$ со значениями в пространстве E , удовлетворяет k -условию Липшица по x , если

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\| \quad (1)$$

для любых пар $(t, x_1) \in U$, $(t, x_2) \in U$.

Пусть $U = I \times V$, где V — выпуклое открытое множество в E . Если для любой пары $(t, x) \in U$ частная производная $f_x(t, x) \in \mathcal{L}(E; E)$ существует и удовлетворяет неравенству

$$\|f_x(t, x)\| \leq k,$$

то в силу теоремы о конечных приращениях имеет место неравенство (1).

Покажем, что если функция f удовлетворяет k -условию Липшица, то можно промажорировать разность $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ двух приближенных

решений дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (2)$$

Более того, имеет место

Основная лемма. Пусть $\varphi_1 : I \rightarrow E$ есть ε_1 -приближенное решение, а $\varphi_2 : I \rightarrow E$ есть ε_2 -приближенное решение уравнения (2). Пусть $x_1 = \varphi_1(t_0)$ и $x_2 = \varphi_2(t_0)$ — начальные условия, которым они удовлетворяют при $t_0 \in I$. Тогда, если f удовлетворяет k -условию Липшица по x для $t \in I$, то

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{k|t-t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}. \quad (3)$$

Доказательство основной леммы. Воспользуемся теоремой о конечных приращениях. Для упрощения записи будем предполагать, что $t_0 = 0$ (всегда можно преобразовать переменное t так, что t_0 перейдет в 0). Проведем доказательство неравенства (3) только в случае, когда $t > t_0$, т.е. $t > 0$. Случай $t < 0$ сводится к предыдущему заменой t на $-t$.

По предположению, имеют место неравенства:

$$\|\varphi_1'(t) - f(t, \varphi_1(t))\| \leq \varepsilon_1, \quad \|\varphi_2'(t) - f(t, \varphi_2(t))\| \leq \varepsilon_2,$$

откуда

$$\|\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)\| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\|.$$

Согласно неравенству (1), находим

$$\|\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)\| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|. \quad (4)$$

Напомним, что φ_1' и φ_2' — производные функций φ_1 и φ_2 , кусочно гладких класса C^1 в каждом из интервалов, где φ_1 и φ_2 принадлежат классу C^1 . Положим

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \varphi(t).$$

Функция φ является кусочно гладкой класса C^1 . Применяя теорему о конечных приращениях к неравенству (4), получим при $t > 0$:

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq \int_0^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k \|\varphi(\tau)\|) d\tau.$$

Так как

$$\|\varphi(\tau)\| \leq \|\varphi(0)\| + \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|,$$

то

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq (\varepsilon + k \|\varphi(0)\|)t + k \int_0^t \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\| d\tau, \quad (5)$$

где $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$.

Положим для упрощения записи:

$$\left. \begin{aligned} \|\varphi(t) - \varphi(0)\| = u(t) \geq 0 & - \text{непрерывная числовая функция,} \\ \varepsilon + k \|\varphi(0)\| = a > 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тогда (5) запишется в виде

$$u(t) \leq at + k \int_0^t u(\tau) d\tau. \quad (7)$$

А сейчас воспользуемся этим неравенством.

Вспомогательная лемма. Если непрерывная функция $u(t)$ определена на отрезке $[0, T]$, $T > 0$, $u(t) \geq 0$, на этом отрезке и удовлетворяет соотношению (7), то

$$u(t) \leq \frac{a}{k} (e^{kt} - 1) \quad \text{для } 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

Допустим, что вспомогательная лемма верна и закончим доказательство основной леммы: если заменим $u(t)$ и a на их значения из формулы (6), то получим

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{k} + \|\varphi(0)\| \right) (e^{kt} - 1) \quad \text{при } t > 0,$$

откуда

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(0)\| + \|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq \|\varphi(0)\| e^{kt} + \frac{\varepsilon}{k} (e^{kt} - 1).$$

А это и есть неравенство (3), которое нужно было доказать, ибо

$$\varphi(0) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) = x_1 - x_2.$$

Осталось лишь доказать вспомогательную лемму. Положим $v(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$. Отсюда $v'(t) = u(t)$, $v(0) = 0$. Тогда неравенство (7) запишется так:

$$v'(t) \leq at + kv(t), \quad (9)$$

т.е. в виде дифференциального неравенства. Положим

$$w(t) = e^{-kt}v(t),$$

откуда

$$w'(t) = e^{-kt}(v'(t) - kv(t)).$$

Тогда неравенство (9) запишется в виде

$$w'(t) \leq ate^{-kt}.$$

Отсюда получаем, учитывая, что $w(0) = 0$,

$$w(t) \leq \int_0^t a\tau e^{-k\tau} d\tau.$$

Вычисляя интеграл в правой части, находим

$$w(t) \leq \frac{a}{k^2}(1 - e^{-kt} - kte^{-kt}),$$

откуда

$$v(t) = e^{kt}w(t) \leq \frac{a}{k^2}(e^{kt} - 1 - kt)$$

или, поскольку в силу неравенства (7), $u(t) \leq at + kv(t)$, имеем:

$$u(t) \leq at + \frac{a}{k}(e^{kt} - 1 - kt) = \frac{a}{k}(e^{kt} - 1).$$

Пришли к неравенству (8), которое и требовалось доказать.

Применение основной леммы: теорема единственности

Теорема. Пусть $U \subset \mathbb{R} \times E$ и $f : U \rightarrow E$ — непрерывная функция, удовлетворяющая k -условию Липшица по $x \in E$. Если φ_1 и $\varphi_2 : I \rightarrow E$ есть два точных решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

и $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0), t_0 \in I$, то функции φ_1 и φ_2 совпадают в интервале I .

Доказательство. По формуле (3) основной леммы, здесь $x_1 = x_2, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Поэтому находим

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| = 0 \quad \text{для } t \in I,$$

ч.т.д.

**Теорема существования в случае, когда правая часть
удовлетворяет условию Липшица**

Теорема. Пусть $U \subset \mathbb{R} \times E$ — замкнутое множество и $f : U \rightarrow E$ — непрерывная функция, удовлетворяющая k -условию Липшица по x . Пусть $(t_0, x_0) \in U$ и $I \subset \mathbb{R}$ — компактный интервал, содержащий точку t_0 . предположим, что для любого числа $\varepsilon > 0$ в интервале I существует такое кусочно гладкое класса C^1 ε -приближенное решение $\varphi : I \rightarrow E$ дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

что $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда на интервале I существует точное решение $\varphi : I \rightarrow E$ этого дифференциального уравнения, удовлетворяющая начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$.

Н.В. Заметим, что в силу предыдущей теоремы такое решение *единственно*.

Доказательство. Зададимся последовательностью чисел $\varepsilon_n > 0$, стремящихся к нулю, когда $n \rightarrow \infty$. пусть непрерывные отображения $\varphi_n : I \rightarrow E$ являются такими ε_n -приближенными решениями данного уравнения, что $\varphi_n(t_0) = x_0$. В силу основной леммы:

$$\|\varphi_n(t) - \varphi_p(t)\| \leq (\varepsilon_n + \varepsilon_p) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k} \quad \forall t \in I.$$

Пусть $K = \sup_{t \in I} \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}$. Тогда

$$\|\varphi_n(t) - \varphi_p(t)\| \leq K(\varepsilon_n + \varepsilon_p), \quad t \in I.$$

Отсюда следует, что функции φ_n образуют *последовательность Коши* по норме равномерной сходимости. Эта последовательность имеет предел φ , причем φ является *непрерывной* функцией $I \rightarrow E$. По предположению

$$(t, \varphi_n(t)) \in U, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in I.$$

В силу замкнутости множества U имеем в пределе

$$(t, \varphi(t)) \in U, \quad \forall t \in I,$$

и $\varphi(t_0) = x_0$.

Остается убедиться в том, что функция φ дифференцируема на I и

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{при } t \in I.$$

Для этого покажем, что

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau. \quad (1)$$

Так как по предположению

$$\|\varphi'_n(t) - f(t, \varphi_n(t))\| \leq \varepsilon_n,$$

то в силу теоремы о конечных приращениях

$$\|\varphi_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_n(\tau)) d\tau\| \leq \varepsilon_n |t - t_0|.$$

Устремим n к бесконечности, тогда $f(\tau, \varphi_n(\tau)) \rightarrow f(\tau, \varphi(\tau))$ равномерно относительно $t \in I$. Таким образом, получим в пределе соотношение (1), ч.т.д.

Следствие (теорема о локальном существовании). Пусть V — окрестность точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$ и $f(t, x)$ — функция, непрерывная на V , со значениями в банаховом пространстве E , удовлетворяющая k -условию Липшица по x . Тогда существует число $\alpha > 0$, обладающее следующим свойством: дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

имеет на интервале $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ (единственное) решение $\varphi : I \rightarrow E$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$. Более того, если число $\tau > 0$ и $r > 0$ выбраны столь малыми, что произведение $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times B(x, r)$ содержится в V и

$$\|f(t, x)\| \leq M$$

при $|t - t_0| \leq \tau, \|x - x_0\| \leq r$, то при

$$\alpha = \inf\left(\tau, \frac{r}{M}\right)$$

значения функции $\varphi : I \rightarrow E$, являющейся решением данного уравнения, принадлежат шару $B(x_0, r)$.

Доказательство. Ранее было показано, что если числа α и r выбраны так, как в условии следствия, то для любого числа $\varepsilon > 0$ дифференциальное уравнение на интервале I имеет ε -приближенное решение со значениями в шаре $B(x_0, r)$, принимающее значение x_0 при $t = t_0$. Поэтому достаточно применить доказанную теорему, выбрав в качестве U замкнутое множество $I \times B(x_0, r)$, ч.т.д.

Случай, когда f локально удовлетворяет условию Липшица

Определение. Функция $f : U \rightarrow E$ локально удовлетворяет условию Липшица по x на множестве $U \subset \mathbb{R} \times E$, если для любой точки $(t_0, x_0) \in U$ существует такая окрестность V этой точки, содержащаяся в U и такое число $k > 0$, что для любых пар $(t, x_1), (t, x_2) \in U$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\|.$$

Иными словами, сужение отображения f на V удовлетворяет k -условию Липшица по x .

Теорема 1°. Если отображение $f : U \rightarrow E$ непрерывно и локально удовлетворяет условию Липшица, а (t_0, x_0) — внутренняя точка множества U , то существует такое число $\alpha > 0$, что дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ имеет точное решение $\varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow E$.

Доказательство. Применим следствие (теорема о локальном существовании) к окрестности V точки (t_0, x_0) , содержащейся в U , в которой отображение f удовлетворяет k -условию Липшица по x , ч.т.д.

Теорема 2° (о глобальной единственности). Пусть функция $f : U \rightarrow E$ локально удовлетворяет условию Липшица, I — интервал $\subset \mathbb{R}$, необязательно компактный (он может быть открытым, замкнутым или полуоткрытым, ограниченным или неограниченным). Если существуют два точных решения φ_1 и $\varphi_2 : I \rightarrow E$ дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ и они равны при $t_0 \in I$, то эти решения совпадают во всем интервале I .

Доказательство. Поскольку интервал I связное множество, то достаточно убедиться в том, что множество $J \subset I$, на котором $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, одновременно открыто и замкнуто в I . Очевидно, что J замкнуто, т.к. функция $(\varphi_1 - \varphi_2)$ непрерывна. Теперь покажем, что подмножество J открыто в I . Действительно, если $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, то существует такое число $\alpha > 0$, что из соотношений $t \in I$ и $|t - t_0| \leq \alpha$ следует

равенство $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Пусть $x_0 = \varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$. По предположению существует такая окрестность V точки (t_0, x_0) , содержащаяся в U и число $k > 0$, что функция f на V удовлетворяет k -условию Липшица. Пусть число $\alpha > 0$ таково, что для $t \in I, |t - t_0| \leq \alpha$ пары $(t, \varphi_1(t))$ и $(t, \varphi_2(t))$ принадлежат окрестности V . Тогда теорема единственности в теме "Применение основной леммы: теорема единственности" утверждает, что $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \forall t \in I \cap [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, ч.т.д.

Остается невыясненным вопрос о *глобальном существовании* решения уравнения $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, принимающего значение x_0 при $t = t_0$, когда функция f локально удовлетворяет условию Липшица.

Пусть (t_0, x_0) — внутренняя точка множества $U \subset \mathbb{R} \times E$, на котором функция f , по предположению, локально удовлетворяет условию Липшица. Согласно теореме 1° существует интервал I , содержащий точку t_0 , на котором имеется точное решение $\varphi : I \rightarrow E$ дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$. Рассмотрим множество $\mathcal{E}$ всех пар (I, φ) , где I — некоторый интервал, а функция $\varphi : I \rightarrow E$ — некоторое решение, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$. Если (I_1, φ_1) и (I_2, φ_2) — две подобные пары, то пересечение $I_1 \cap I_2$ не пусто, а решения φ_1 и φ_2 *совпадают* в пересечении в силу теоремы о глобальной единственности. Обозначим тогда через J *объединение* всех интервалов I , образующих пары $(I, \varphi) \in \mathcal{E}$. В J существует такая единственная функция $\psi : J \rightarrow E$, что для всякой пары $(I, \varphi) \in \mathcal{E}$ сужение решения ψ на I совпадает с φ . Эта функция ψ , очевидно, является решением дифференциального и $\psi(t_0) = x_0$.

Таким образом, доказана

Теорема 3°. *Если функция $f : U \rightarrow E$ непрерывна, локально удовлетворяет условию Липшица и (t_0, x_0) — заданная внутренняя точка множества U , то существует наибольший интервал $J \ni t_0$, в котором определено решение $\psi : J \rightarrow E$ уравнения $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, удовлетворяющее начальному условию $\psi(t_0) = x_0$ (согласно теореме о глобальной единственности, такое решение ψ единственно).*

Это решение ψ называется *максимальным решением* для начальных данных (t_0, x_0) .

Н.В. Можно показать, что решение ψ нельзя продолжить в строго больший интервал, чем J , только по той причине, что заданная функция

f определена лишь на части множества $\mathbb{R} \times E$. Однако невозможность продолжения может иметь место даже в том случае, когда f непрерывна и локально удовлетворяет условию Липшица на всем пространстве $\mathbb{R} \times E$. Приведем пример, в котором роль пространства E играет числовая прямая $\mathbb{R}$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad (*)$$

где $x(t)$ — неизвестная функция, принимающая числовые значения. Легко проверить, что если B — ограниченная часть $\mathbb{R}$, то функция $f(t, x) = x^2$ локально удовлетворяет условию Липшица на пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Пусть x_0 — начальное значение, которое принимает решение $\varphi(t)$ при $t = 0$. Если $x_0 = 0$, то решение $\varphi(t) = 0$ для любого t в силу теоремы единственности. Предположим теперь, что $x_0 \neq 0$. Тогда для t , близких к нулю, $x = \varphi(t) \neq 0$ и уравнение $(*)$ может быть записано в виде:

$$\frac{dx}{x^2} = dt,$$

откуда

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t \quad \text{или} \quad x = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Таким образом, $\varphi(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$. Если, например, $x_0 > 0$, то максимальное решение существует на интервале $-\infty < t < \frac{1}{x_0}$. Когда $t \rightarrow \frac{1}{x_0}$, то $\varphi(t) \rightarrow \infty$.

Критерий продолжаемости решений для случая, когда функция f локально удовлетворяет условию Липшица

Предположим, что множество U открыто и $\varphi : [t_0, t_1[\rightarrow E$ — решение дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$. Если $\lim_{\substack{t \rightarrow t_1 \\ t < t_1}} \varphi(t)$ существует (пусть он равен x_1) и $(t_1, x_1) \in U$, то решение φ продолжается на интервал $[t_0, t_2]$ при $t_2 > t_1$ (без доказательства).

Случай линейного дифференциального уравнения

Линейное дифференциальное уравнение было определено как уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \circ x + B(t), \quad (1)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — заданные *непрерывные* функции в интервале $I \subset \mathbb{R}$. Здесь функция $f(t, x) = A(t) \circ x + B(t)$ определена и непрерывна на произведении $I \times E$. Она *локально удовлетворяет условию Липшица*, ибо на любом произведении $J \times E$, где J — компактный интервал, принадлежащий интервалу I , функция f удовлетворяет условию Липшица. В самом деле,

$$f(t, x_1) - f(t, x_2) = A(t) \circ (x_1 - x_2),$$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K_J \|x_1 - x_2\| \quad \text{при } t \in J,$$

где $K_J = \sup_{t \in J} \|A(t)\|$. Согласно теореме 3° в теме "Случай, когда f локально удовлетворяет условию Липшица" уравнение (1) тогда имеет максимальное решение для начальных данных (t_0, x_0) , где $t_0 \in I$.

Итак, может быть сформулирована

Теорема (о глобальном существовании в случае линейного уравнения). *Каковы бы ни были точки $t_0 \in I$ и $x_0 \in E$, существует точное решение $\varphi : I \rightarrow E$ уравнения (1), определенное во всем интервале I и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$. Это решение, очевидно, единственно.*

Доказательство. Пусть J — компактный интервал, содержащийся в I и содержащий точку t_0 . Согласно теореме в теме "Пример: Линейное дифференциальное уравнение" для любого $\varepsilon > 0$ существует ε -приближенное решение на интервале J , принимающее значение x_0 при $t = t_0$. Теорема существования в случае, когда правая часть удовлетворяет условию Липшица, утверждает, что на интервале J существует *точное* решение, удовлетворяющее начальному условию. Поскольку решение существует на всяком компактном интервале, содержащемся в I (и содержащем t_0), то максимальное решение определено во всем интервале I , ч.т.д.

Н.В. Далее подробно рассмотрим линейные дифференциальные уравнения.

Зависимость от начальных данных

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

где функция $f : U \rightarrow E$ непрерывна и удовлетворяет k -условию Липшица по x , а точка $t_0 \in I$. Предположим, что для любого $u \in \mathcal{A} \subset E$ существует точное решение уравнения (1), определенное на интервале I и принимающее значение u при $t = t_0$. Пусть $\varphi(t, u)$ — точное решение. Исследуем зависимость этого решения от *начального значения* u .

Воспользуемся *основной леммой*, в силу которой для любых $u, v \in \mathcal{A}$

$$\|\varphi(t, u) - \varphi(t, v)\| \leq \|u - v\| \cdot e^{k|t-t_0|}.$$

Пусть K — верхняя грань функции $e^{k|t-t_0|}$ для $t \in I$ (предполагаем интервал I ограниченным). Тогда

$$\|\varphi(t, u) - \varphi(t, v)\| \leq K \|u - v\|. \quad (2)$$

Отсюда вытекает

Предложение 1°. *Решение $\varphi(t, u)$, принимающее значение u при $t = t_0$, удовлетворяет K -условию Липшица по u , причем постоянная K не зависит от $t \in I$.*

Следствие 1°. Функция $\varphi(t, u)$ является непрерывной функцией пары $(t, u) \in I \times \mathcal{A}$.

Действительно, пусть задано u_0 . При фиксированном t функция $\varphi(t, u) \rightarrow \varphi(t, u_0)$, когда $u \rightarrow u_0$. Так как постоянная K не зависит от t , то каждому числу $\varepsilon > 0$ можно сопоставить число $\eta > 0$, что при $\|u - u_0\| \leq \eta$ для *любого* t

$$\|\varphi(t, u) - \varphi(t, u_0)\| \leq \varepsilon.$$

Таким образом, решение φ зависит от u непрерывно и равномерно относительно t . Теперь следствие 1° можно получить из леммы 1°.

Лемма 1°. а) Если $\psi : I \times \mathcal{A} \rightarrow E$ непрерывна по $t \in I$ при фиксированном $u \in \mathcal{A}$ и непрерывна по $u \in \mathcal{A}$ равномерно относительно $t \in I$, то ψ есть непрерывная функция на произведении $I \times \mathcal{A}$.

б) Обратно, если функция $\psi : I \times \mathcal{A} \rightarrow E$ непрерывна на $I \times \mathcal{A}$ и интервал I компактен, то $\psi(t, u)$ непрерывна по u равномерно относительно $t \in I$.

Н.В. Отметим, что эта лемма остается справедливой, если заменить I произвольным компактным пространством.

Доказательство леммы. а) Пусть заданы t_0, u_0 и $\varepsilon > 0$. Имеем:

$$\|\psi(t, u) - \psi(t_0, u_0)\| \leq \|\psi(t, u) - \psi(t, u_0)\| + \|\psi(t, u_0) - \psi(t_0, u_0)\|.$$

По предположению, существует такое число $\eta > 0$, что из неравенства $\|u - u_0\| \leq \eta$ следует

$$\|\psi(t, u) - \psi(t, u_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \in I.$$

Более того, найдется такое $\eta' > 0$, что при $|t - t_0| \leq \eta'$ имеем:

$$\|\psi(t, u_0) - \psi(t_0, u_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ (непрерывность по } t \text{)}.$$

А тогда при $\|u - u_0\| \leq \eta$ и $|t - t_0| \leq \eta'$ находим

$$\|\psi(t, u) - \psi(t_0, u_0)\| \leq \varepsilon,$$

т.е. непрерывность ψ как функции от пары (t, u) .

в) Обратно, пусть ψ непрерывна на $I \times \mathcal{A}$. Фиксируем точку $u_0 \in \mathcal{A}$ и число $\varepsilon > 0$. По предположению, $\forall t \in I$ существует $\eta(t) > 0$, что при $|t' - t| \leq \eta(t)$ и $\|u - u_0\| \leq \eta(t)$ имеем:

$$\|\psi(t', u) - \psi(t, u_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2};$$

в частности, $\|\psi(t', u) - \psi(t, u_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда

$$\|\psi(t', u) - \psi(t', u_0)\| \leq \varepsilon. \quad (3)$$

Каждой точке $t \in I$ поставим в соответствие интервал, образованный точками t' , для которых $|t' - t| \leq \eta(t)$. Поскольку I — компакт, его можно покрыть *конечной* системой подобных интервалов. Иначе говоря, существуют конечное множество точек $t_i \in I$ и число $\eta > 0$, такие, что $\eta \leq \eta(t_i)$ для любого t_i и неравенство (2) имеет место при $\|u - u_0\| \leq \eta$ и любом $t' \in I$, ч.т.д.

Случай, когда дифференциальное уравнение зависит от параметра

Предположим, что функция $f(t, x)$ зависит от параметра λ , который изменяется в топологическом пространстве L , т.е. рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x; \lambda), \quad (1)$$

где f — непрерывная функция $I \times B(x_0, r) \times L \rightarrow E$, I — компактный интервал, а $B(x_0, r)$ — замкнутый шар $\|x - x_0\| \leq r$ в банаховом пространстве E .

Предположим, что:

$$1) \|f(t, x; \lambda)\| \leq M \text{ на } I \times B(x_0, r) \times L;$$

$$2) \|f(t, x_1; \lambda) - f(t, x_2; \lambda)\| \leq K \|x_1 - x_2\| \text{ при } t \in I, \|x_1 - x_0\| \leq r, \|x_2 - x_0\| \leq r, \lambda \in L. \text{ Иными словами, предполагается, что } f \text{ удовлетворяет } K\text{-условию Липшица по } x \text{ с постоянной } K, \text{ не зависящей от } t \text{ и } \lambda.$$

Если зафиксировать $\lambda \in L$, то уравнение (1) будет иметь решение $x = \varphi(t)$ и притом единственное, определенное в интервале

$$J = I \cap [t_0 - \frac{r}{\mu}, t_0 + \frac{r}{\mu}]$$

с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$. Это следует из теорем в темах "Приближенные решения" и "Теорема существования в случае, когда правая часть удовлетворяет условию Липшица". Обозначим это решение через $\varphi(t; \lambda)$, чтобы явно указать его зависимость от параметра λ .

Теорема. *Решение $\varphi(t; \lambda)$ является непрерывной функцией пары $(t, \lambda) \in J \times L$.*

Доказательство. Как известно, функция $\varphi(t; \lambda)$ непрерывна по t при фиксированном λ . Покажем, что функция $\varphi(t; \lambda)$ непрерывна по λ равномерно относительно $t \in J$. Отсюда будет вытекать наша теорема.

Итак, пусть дано λ_0 . Поскольку функция $\varphi(t; \lambda_0)$ удовлетворяет уравнению $\frac{dx}{dt} = f(t, x; \lambda)$, то

$$\varphi'_t(t; \lambda_0) - f(t, \varphi(t; \lambda_0); \lambda_0) = 0; \quad (2)$$

здесь $f(t, \varphi(t; \lambda_0); \lambda)$ — непрерывная функция пары (t, λ) . В силу утверждения в) леммы она стремится к $f(t, \varphi(t; \lambda_0); \lambda_0)$, когда $\lambda \rightarrow \lambda_0$ равномерно относительно $t \in J$. Другими словами, для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность V точки λ_0 в L , что

$$\|f(t, \varphi(t; \lambda_0); \lambda) - f(t, \varphi(t; \lambda_0); \lambda_0)\| \leq \varepsilon \quad (3)$$

для $\lambda \in V$, каково бы ни было $t \in J$. Сравнивая с (2) находим, что

$$\|\varphi'_t(t; \lambda_0) - f(t, \varphi(t; \lambda_0); \lambda)\| \leq \varepsilon.$$

А это означает, что $\varphi(t; \lambda_0)$ является ε -приближенным решением уравнения (1).

Заметим что точным решением будет функция $\varphi(t; \lambda)$, которая также принимает значение x_0 при $t = t_0$. В силу основной леммы получаем

$$\|\varphi(t; \lambda) - \varphi(t; \lambda_0)\| \leq \varepsilon \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.$$

Так как $|t - t_0| \leq r/M$, то при $\lambda \in V$ (окрестность точки λ_0)

$$\|\varphi(t; \lambda) - \varphi(t; \lambda_0)\| \leq K \varepsilon,$$

где K не зависит от $t \in J$. Поскольку число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, то тем самым доказано, что $\varphi(t; \lambda) \rightarrow \varphi(t; \lambda_0)$ равномерно относительно $t \in J$, ч.т.д.

Линейные дифференциальные уравнения.

Общее решение

Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + B(t) \quad (1)$$

есть линейное дифференциальное уравнение, где A — непрерывное отображение $I \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$ и B — непрерывное отображение $I \rightarrow E$.

Известно, что это уравнение имеет единственное решение $\varphi : I \rightarrow E$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$ (для заданных $t_0 \in I$ и $x_0 \in E$).

Определение. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x \quad (2)$$

называется *однородным* уравнением, соответствующим уравнению (1).

Очевидно, что если φ — решение уравнения (2) и ψ — решение уравнения (1), то сумма $(\varphi + \psi)$ является решением уравнения (1).

В самом деле,

$$\varphi'(t) + \psi'(t) = A(t) \cdot \varphi(t) + A(t) \cdot \psi(t) + B(t) = A(t) \cdot (\varphi(t) + \psi(t)) + B(t).$$

В частности, пусть $\varphi(t; x_0)$ — решение однородного уравнения (2), принимающее значение x_0 при $t = t_0$, и $\psi(t)$ — решение уравнения (1), обращающееся в нуль при $t = t_0$. Тогда решение уравнения (1), принимающее значение x_0 при $t = t_0$, имеет вид

$$\varphi(t; x_0) + \psi(t),$$

т.е. сумма "общего решения" однородного уравнения и частного решения уравнения (1).

Линейное однородное уравнение

Исследуя уравнение (2), будем использовать ранее введенные обозначения. Очевидно, что

$$\varphi(t; x_0) + \varphi(t; x_1) = \varphi(t; x_0 + x_1),$$

$$\varphi(t; \lambda x_0) = \lambda \varphi(t; x_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Другими словами, решение $\varphi(t; x_0)$ *линейно* зависит от начального значения x_0 (точка $t = t_0$ все время одна и та же).

В частности, $\varphi(t; 0) = 0$ для любого t . Итак, если решение $x = \varphi(t)$ обращается в нуль при некотором $t_0 \in I$, то оно тождественно равно нулю в интервале I . Отсюда вытекает

Следствие. Пусть имеется k решений $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ и существуют такие постоянные $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (не все равные нулю), что $\sum_i \lambda_i \varphi_i(t_0) = 0$. Тогда это равенство влечет за собой $\sum_i \lambda_i \varphi_i(t) = 0 \forall t \in I$. Решения являются линейно зависимыми.

Теперь займемся явным линейным выражением $\varphi(t; x_0)$ от x_0 . Сопоставим уравнению (2), где неизвестной является функция $\varphi : I \rightarrow E$ другое линейное однородное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $R(t)$, значения которой принадлежат пространству $\mathcal{L}(E; E)$:

$$\frac{dR}{dt} = A(t) \circ R(t). \quad (2_R)$$

Смысл этой записи: производная $\frac{dR}{dt} = R'(t) \in \mathcal{L}(E; E)$ должна равняться композиции линейных отображений $A(t) \in \mathcal{L}(E; E)$ и $R(t) \in \mathcal{L}(E; E)$. Это уравнение однородно и линейно. Если положим $E' = \mathcal{L}(E; E)$, то элемент $A(t)$ определит линейное непрерывное отображение $f \rightarrow A(t) \circ f$, где $f \in E'$.

Обозначим через $C(t)$ элемент пространства $\mathcal{L}(E'; E')$, определенный выше через $A(t)$. Тогда, поскольку $\|A(t) \circ f\| \leq \|A(t)\| \cdot \|f\|$, то

$$\|C(t)\| \leq \|A(t)\|$$

и, в силу непрерывности отображения $A : I \rightarrow E'$, имеем:

$$A(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \|A(t') - A(t)\| = 0.$$

Так как $\|C(t') - C(t)\| \leq \|A(t') - A(t)\|$, то $C(t') \rightarrow C(t)$, когда $t' \rightarrow t$.

Иначе говоря, $C : I \rightarrow \mathcal{L}(E'; E')$ есть непрерывная функция. Следовательно, дифференциальное уравнение (2_R) принадлежит к рассматриваемому классу уравнений и к нему можно применить теорему о глобальном существовании и единственности решения в теме "Случай линейного дифференциального уравнения". Пусть $R(t, t_0)$ — решение уравнения (2_R) , которое принимает значение 1_E при $t = t_0$ (здесь $1_E \in \mathcal{L}(E; E)$ есть тождественное отображение $E \rightarrow E$).

Теорема I° . *Решение дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \circ x, \quad (2)$$

принимаящее значение x_0 при $t = t_0$, равно

$$x = R(t, t_0) \circ x_0,$$

где $R(t, t_0)$ есть решение уравнения (2_R) , принимающее значение 1_E при $t = t_0$.

Доказательство. Пусть $x = R(t, t_0) \circ x_0$. Тогда

$$x'(t) = R'(t, t_0) \circ x_0 = (A(t) \circ R(t, t_0)) \circ x_0 = A(t) \cdot (R(t, t_0) \cdot x_0) = A(t) \cdot x(t).$$

Следовательно, $x(t)$ есть решение уравнения (2), а его значение при $t = t_0$ равно

$$TR(t_0, t_0) \cdot x_0 = 1_E \cdot x_0 = x_0,$$

ч.т.д.

Определение. Функция $R(t, t_0)$ называется *резольвентой* (или *резольвентным ядром*) уравнения (2).

Теорема II° . *Если t_0, t_1 и t — точки интервала I , то*

$$R(t, t_0) = R(t, t_1) \cdot R(t_1, t_0).$$

Доказательство. Пусть $S(t) = R(t, t_1) \cdot R(t_1, t_0)$. Тогда имеем:

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{d}{dt} R(t, t_1) \right) \cdot R(t_1, t_0) = (A(t) \cdot R(t, t_1)) \cdot R(t_1, t_0) = A(t) \cdot S(t).$$

Следовательно, функция $S(t)$ есть решение уравнения (2_R) , а ее значение при $t = t_1$ равно $1_E \cdot R(t_1, t_0) = R(t_1, t_0)$.

Таким образом, функция $S(t)$ есть решение, которое при $t = t_1$ равно $R(t_1, t_0)$. Однако, левая часть равенства (3), а именно $R(t, t_0)$ также

является решением уравнения (2_R) , которое при $t = t_1$ равно $R(t_1, t_0)$. Отсюда следует равенство (3), ч.т.д.

Следствие. Функция $R(t, t_0) \in \text{Isom}(E; E)$, а обратным изоморфизмом является $R(t_0, t)$.

Действительно,

$$R(t_0, t) \cdot R(t, t_0) = R(t_0, t_0) = 1_E, \quad R(t, t_0) \cdot R(t_0, t) = R(t, t) = 1_E.$$

Н.В. Решение дифференциального уравнения строили в *действительном* банаховом пространстве E для заданного оператора $A(t) \in \mathcal{L}_R(E; E)$. Проделанное можно применить и к *комплексному* случаю. Пусть E — банахово пространство над $\mathbb{C}$. Рассмотрим непрерывное отображение $A : I \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; E)$. Так как $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; E) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; E)$, то к отображению A можно применить изученную теорию линейных дифференциальных уравнений. В этом случае *резольвента* $R(t, t_0)$ будет элементом пространства $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; E)$ и даже $\text{Isom}_{\mathbb{C}}(E; E)$.

Случай, когда размерность пространства E конечна

Пусть n — размерность пространства E . В действительности существуют две теории: вещественная, в которой E изоморфно $\mathbb{R}^n$ (т.е. n — вещественная размерность E) и комплексная, в которой E изоморфно $\mathbb{C}^n$ (т.е. n — комплексная размерность пространства E). Как в одном, так и в другом случае предположим, что выбрали в пространстве E *базис*. Тогда $A(t)$ определяется квадратной матрицей

$$\{a_{ij}(t)\}$$

с n строками и n столбцами, элементами которой являются *непрерывные* функции $a_{ij}(t)$ на интервале I . Эти функции принимают вещественные значения в вещественном случае и комплексные значения — в комплексном случае.

Неизвестная функция $x(t)$ (со значениями в пространстве E) определяется n функциями $x_i(t)$, значения которых принадлежат $\mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$); дифференциальное уравнение (2) превращается в систему из n дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j, \quad i = \overline{1, n}.$$

При $t = t_0$ можно задать начальные значения $(x_i)_0$ для n неизвестных функций. Резольвента $R(t, t_0)$ определяется квадратной матрицей $\{r_{ij}(t, t_0)\}$, где $r_{ij} = \delta_{ij}$ — символ Кронеккера. Так как отображение $R(t, t_0)$ является изоморфизмом, то его определитель $\det R(t, t_0)$ отличен от нуля. Покажем, что этот определитель вычисляется с помощью матрицы $\{a_{ij}(t)\}$.

Напомним определение *следа* матрицы $\{a_{ij}\}$. Этот след определяется формулой

$$T_r(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{сумма диагональных элементов}).$$

Он не зависит от выбора базиса. Напомним, что на самом деле $T_r(A)$ представляет собой сумму корней характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda 1_E) = 0.$$

Предложение 1°. *Имеет место равенство*

$$\det R(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^t T_r(A(\tau)) d\tau. \quad (1)$$

Требуемое равенство будет доказано, если покажем, что функция $g(t) = \det R(t, t_0)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'(t) = (T_r(A(t)) \cdot y(t)) \quad (2)$$

и начальному условию $y(t_0) = 1$ (последнее очевидно, т.к. $\det(1_E) = 1$).

Докажем равенство (2). Будем писать $R(t)$ вместо $R(t, t_0)$. Выберем базис $(e_1, \dots, e_n)$ в пространстве E и рассмотрим внешнюю алгебру, определенную на E . Согласно правилам внешнего умножения

$$R(t)e_1 \wedge \dots \wedge R(t)e_n = \det R(t) \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n.$$

Полученное выражение продифференцируем по t : производная левой части — это производная полилинейной функции — равна

$$\begin{aligned} & R'(t)e_1 \wedge R(t)e_2 \wedge \dots \wedge R(t)e_n + R(t)e_1 \wedge R'(t)e_2 \wedge \dots \wedge R(t)e_n + \\ & + \dots + R(t)e_1 \wedge \dots \wedge R(t)e_{n-1} \wedge R'(t)e_n. \end{aligned}$$

Согласно дифференциальному уравнению (2_R) это выражение равно

$$(A(t) \cdot R(t)e_1) \wedge R(t)e_2 \wedge \dots \wedge R(t)e_n + R(t)e_1 \wedge (A(t) \cdot R(t)e_2) \wedge \dots \wedge R(t)e_n +$$

$$+ \dots + R(t)e_1 \wedge \dots \wedge R(t)e_{n-1} \wedge (A(t) \cdot R(t)e_n),$$

и если положить $R(t)e_i = e'_i$ ($i = \overline{1, n}$), то получим

$$\begin{aligned} (A(t)e'_1) \wedge e'_2 \wedge \dots \wedge e'_n + e'_1 \wedge (A(t)e'_2) \wedge \dots \wedge e'_n + \dots + \\ + e'_1 \wedge \dots \wedge e'_{n-1} \wedge (A(t)e'_n). \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $\{a_{ij}(t)\}$ — матрица оператора $A(t)$ относительно базиса $(e'_1, \dots, e'_n)$. Записывая ее след в явном виде, найдем, что выражение (3) равно

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}(t) \right) e'_1 \wedge e'_2 \wedge \dots \wedge e'_n = \text{Tr}(A(t)) \cdot R(t)e'_1 \wedge e'_2 \wedge \dots \wedge R(t)e'_n = \\ = \text{Tr}(A(t)) \cdot \det(R(t))(e'_1 \wedge e'_2 \wedge \dots \wedge e'_n). \end{aligned}$$

Итак, имеем

$$\frac{d}{dt}(\det R(t))(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \text{Tr}(A(t)) \cdot \det(R(t))(e_1 \wedge \dots \wedge e_n),$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(\det R(t)) = \text{Tr}(A(t)) \cdot \det(R(t)),$$

т.е. получили дифференциальное уравнение (2), ч.т.д.

Линейное уравнение с "правой частью" (неоднородное)

Пусть дано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + B(t), \quad (1)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ имеют тот же смысл, что и раньше. Пусть $R(t, t_0)$ — резольвента соответствующего однородного уравнения. Метод вариации постоянных состоит в том, что полагаем:

$$x(t) = R(t, t_0) \cdot y(t), \quad (2)$$

рассматриваем в качестве неизвестной функции $y(t)$ вместо $x(t)$. Одна из этих функций определяет другую, т.к. $R(t, t_0) \in \text{Isom}(E; E)$. Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dR}{dt}y(t) + R \cdot \frac{dy}{dt} = A(t) \cdot [R(t, t_0) \cdot y(t)] + R \cdot \frac{dy}{dt}, \quad (*)$$

поскольку $R(t, t_0)$ есть решение уравнения $\frac{dR}{dt} = A(t) \cdot R$. А из (1) имеем после преобразований

$$R(t, t_0) \cdot \frac{dy}{dt} = B(t). \quad (3)$$

Это уравнение предстоит решать. Оно выражает тот факт, что функция $y(t)$ является примитивной (первообразной) для $R(t_0, t) \cdot B(t)$.

В силу (2) имеем: $x_0 = x(t_0) = y(t_0)$. Поэтому

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t R(t_0, \tau) \cdot B(\tau) d\tau.$$

Подставляя $y(t)$ в (2) и учитывая, что

$$\begin{aligned} R(t, t_0) \cdot \int_{t_0}^t R(t_0, \tau) \cdot B(\tau) d\tau = \\ = \int_{t_0}^t (R(t, t_0) \cdot R(t_0, \tau)) \cdot B(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t R(t, \tau) \cdot B(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

имеем окончательно:

$$x(t) = R(t, t_0) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t R(t, \tau) \cdot B(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Следовательно, резольвента однородного уравнения позволяет решить уравнение с правой частью (1). Заметим, что правая часть формулы (4) представляет собой сумму двух функций: первая $R(t, t_0) \cdot x_0$ есть "общее решение" однородного уравнения, а вторая

$$\int_{t_0}^t R(t, \tau) \cdot B(\tau) d\tau \quad (5)$$

есть решение уравнения (1), обращающееся в нуль при $t = t_0$. Полученное решение *линейно зависит от функции $B(t)$* .

Линейное однородное дифференциальное уравнение $n^{\Gamma 0}$ порядка

Переформулируем предыдущие результаты на случай уравнения $n^{\Gamma 0}$ порядка. Начнем с линейного однородного уравнения

$$\frac{d^n x}{dt^n} = A_0(t) \cdot x + A_1(t) \cdot \frac{dx}{dt} + \dots A_{n-1}(t) \cdot \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} = \sum_{i=0}^n A_i(t) \cdot \frac{d^i x}{dt^i}, \quad (1)$$

полагая $\frac{d^0 x^0}{dt} = x$, где $x(t)$ — неизвестная функция $I \rightarrow E$ (E — банахово пространство), "коэффициенты" $A_i(t)$ — заданные *непрерывные* функции $I \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$. Случай $n = 1$ был только что рассмотрен. Общий случай сводится к нему в результате перехода к системе из n линейных однородных уравнений с n неизвестными функциями:

$$x(t) = x^0(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t),$$

принимая значения в пространстве E и удовлетворяющими системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x', \quad \frac{dx'}{dt} = x'', \quad \frac{dx^{(n-2)}}{dt} = x^{(n-1)}, \\ \frac{dx^{(n-1)}}{dt} &= A_0(t) \cdot x + A_1(t) \cdot x' + \dots A_{n-1}(t) \cdot x^{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Эту систему можно рассматривать как уравнение для одной неизвестной функции $X(t)$, значения которой лежат в пространстве

$$E^n = \underbrace{E \times \dots \times E}_{n\text{-раз}}$$

причем ее компонентами являются функции

$$x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t).$$

Тогда систему (2) можно записать в матричной форме

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X,$$

где $A(t) \in \mathcal{L}(E^n; E^n)$ — матрица из n строк и n столбцов (элементы матрицы лежат в пространстве $\mathcal{L}(E; E)$)

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0, & 1_E, & \dots & \dots & 0 \\ 0, & 0 & 1_E, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1_E & \\ A_0(t), & A_1(t), & A_2(t), & \dots & A_{n-1}(t) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Пусть $R(t, t_0)$ — резольвента этого уравнения. Она также является матрицей с n строками и n столбцами. Обозначим через

$$R_0(t, t_0), R_1(t, t_0), \dots, R_{n-1}(t, t_0)$$

элементы ее первой строки.

Решение нашего уравнения $X = [x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)]$, равное $X_0 = (x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)})$ при $t = t_0$, задается формулой

$$x(t) = R_0(t, t_0) \cdot x_0 + R_1(t, t_0) \cdot x'_0 + \dots + R_{n-1}(t, t_0) \cdot x_0^{(n-1)} = \sum_{i=0}^{n-1} R_i(t, t_0) \cdot x_0^{(i)}. \quad (4)$$

Дифференцируя по t равенство (4), имеем:

$$\frac{d^j x}{dt^j} = \sum_{i=0}^{n-1} R_i^{(j)}(t, t_0) \cdot x_0^{(i)}, \quad (5)$$

где через $R_i^{(j)}(t, t_0)$ обозначена $j^{\text{ая}}$ производная от $R_i(t, t_0)$. Таким образом, матрица-резольвента имеет вид:

$$R(t, t_0) = \left[\frac{d^j R_i}{dt^j}(t, t_0) \right]_{\substack{(i=\overline{0, n-1}) \\ (j=\overline{0, n-1})}}. \quad (6)$$

Теперь уравнение $\frac{dR}{dt} = A(t) \cdot R(t)$ примет вид:

$$\frac{d^n R_i}{dt^n} = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t) \cdot \frac{d^j R_i}{dt^j}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (7)$$

а начальные условия запишутся в виде

$$\frac{d^j R_i}{dt^j}(t_0, t_0) = \delta_{ij} \cdot 1_E. \quad (8)$$

Заметим, что при $t = t_0$ матрица (6) совпадает с единичной матрицей.

Таким образом, 1°) каждая функция $R_i(t, t_0) \in \mathcal{L}(E; E)$ является решением уравнения (7) $n^{\text{го}}$ порядка; 2°) начальные условия для этого уравнения так же, как и для его производных до порядка $(n-1)$ включительно, при $t = t_0$ задаются равенством (8).

Исследуем частный случай, когда E — векторное пространство размерности 1. Пусть $E = \mathbb{R}$ в действительном случае (соответственно $E = \mathbb{C}$ в комплексном). Тогда $A_i(t)$ — числовые функции. Обозначим их через $a_i(t)$. Тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) \frac{d^i x}{dt^i}, \quad (9)$$

где неизвестная функция $x(t)$ принимает числовые значения. В этом случае матрица-резольвента $R(t, t_0)$ — это обычная квадратная матрица порядка n , элементами которой служат числовые функции:

$$R(t, t_0) = \left[\frac{d^j r_i}{dt^j}(t, t_0) \right].$$

Каждая функция $r_i(t)$ является решением уравнения

$$\frac{d^n r_i}{dt^n} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) \frac{d^j r_i}{dt^j},$$

удовлетворяющая начальным условиям $\frac{d^j r_i}{dt^j} = \delta_{ij}$ при $t = t_0$. Общее решение уравнения (9) имеет вид:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i(t, t_0) \cdot x_0^{(i)}.$$

Таким образом, при фиксированном t_0 функции $r_i(t, t_0)$ образуют *базис* в векторном пространстве решений уравнения (9), причем размерность пространства равна n . При этом

$$\det R(t, t_0) = \det \left[\frac{d^j}{dt^j} r_i(t, t_0) \right].$$

Применим к этому соотношению формулу

$$\det R(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^t \text{Tr}(A(\tau)) d\tau.$$

Получим, что $\text{Tr} A(t) = a_{n-1}(t)$, откуда следует, что

$$\det \left[\frac{d^j r_i}{dt^j}(t, t_0) \right] = \exp \int_{t_0}^t a_{n-1}(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Покажем, что это последнее выражение есть определитель линейного преобразования, которое переводит строку

$$x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)$$

в строку

$$x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$$

(для *любого* решения $x(t)$ уравнения (9)).

Действительно, рассмотрим n функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$ уравнения (9). Тогда определитель

$$\det \begin{pmatrix} x_1(t), & x_1'(t), & \dots & x_1^{(n-1)}(t) \\ x_2(t), & x_2'(t), & \dots & x_2^{(n-1)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(t), & x_n'(t), & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

называющийся *вронскианом* системы, равен произведению его значения при $t = t_0$ и определителя (10), который строго положителен. В частности, если вронскиан системы обращается в нуль при значении $t = t_0$, то он равен нулю при любом t . Отсюда вытекает, что тогда имеет место линейное соотношение

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i(t) = 0$$

с постоянными коэффициентами c_i , среди которых не все равны нулю.

Линейное дифференциальное уравнение $n^{\text{го}}$ порядка с правой частью

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t) \cdot \frac{d^i x}{dt^i} + B(t), \quad (1)$$

где значения неизвестной функции $x : I \rightarrow E$ лежат в бесконечном пространстве E , коэффициенты $A_i(t)$ есть непрерывные функции $I \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$, а $B(t)$ — заданная непрерывная функция $I \rightarrow E$. Применим ранее полученные результаты к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X + C(t),$$

где матрица $A(t)$ задается формулой

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1_E & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1_E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_0(t) & A_1(t) & A_2(t) & \dots & A_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

и

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ B(t) \end{pmatrix}$$

Тогда общее решение уравнения (1) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\sum_{i=0}^{n-1} R_i(t, t_0) \cdot x_0^{(i)}$$

и решения уравнения (1), обращающегося в нуль вместе с производными до порядка $(n-1)$ включительно при $t = t_0$. Это решение запишется в виде:

$$\int_{t_0}^t R_{n-1}(t, \tau) \cdot B(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Напомним (см. соотношения (7) и (8) в теме "Линейное однородное уравнение $n^{\text{го}}$ порядка"), что $R_{n-1}(t, \tau)$ — единственное решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^n S}{dt^n} = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t) \cdot \frac{d^j S}{dt^j}$$

со значениями в пространстве $\mathcal{L}(E; E)$, которое при $t = \tau$ обращается в нуль вместе с производными до порядка $(n-2)$ включительно, а $(n-1)^{\text{ая}}$ производная $\frac{d_{n-1}S}{dt^{n-1}}$ в этой точке равна 1_E .

Рассмотрим примеры.

Пример 1°. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} = B(t).$$

Найдем его решение ($n^{\text{ую}}$ примитивную для $B(t)$), которое обращается в нуль вместе со своими производными до порядка $(n-1)$ включительно при $t = t_0$. Очевидно, что функция

$$S(t) = \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot 1_E$$

обращается в нуль вместе со своими производными до порядка $(n-2)$ включительно при $t = \tau$, а ее $(n-1)^{\text{ая}}$ производная равна 1_E . Эта

функция удовлетворяет однородному уравнению $\frac{d^n x}{dt^n} = 0$. Отсюда вытекает, что отыскиваемое решение данного уравнения имеет вид:

$$\int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} B(\tau) d\tau$$

(не пишем 1_E , ибо $1_E \cdot B(\tau) = B(\tau)$). Таким образом, отыскание n -ой примитивной свелось к вычислению простого интеграла.

Пример 2°. Рассмотрим дифференциальное уравнение $2^{\text{го}}$ порядка

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = B(t).$$

Его решение, обращающееся в нуль вместе со своей первой производной при $t = t_0$, имеет вид:

$$\int_{t_0}^t \sin(t-\tau) B(\tau) d\tau.$$

Действительно, функция $S(t) = \sin(t-\tau) \cdot 1_E$ удовлетворяет уравнению $\frac{d^2 S}{dt^2} + S = 0$ и обращается в нуль при $t = t_0$, а ее производная равна 1_E .

Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

Теперь рассмотрим частный случай, когда заданная функция $A : I \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$ постоянная. Сначала рассмотрим линейное однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x, \tag{1}$$

где $A \in \mathcal{L}(E; E)$ — заданная функция. Можно считать, что здесь $I = \mathbb{R}$. Резольвента $R(t, 0) = R(t)$ — это функция $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dR}{dt} = A \cdot R, \tag{2}$$

и начальному условию $R(0) = 1_E$. Найдем эту функцию в явном виде. Ранее была определена экспонента:

$$\exp A = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n \quad \text{для } A \in \mathcal{L}(E; E); \tag{3}$$

условимся, что $A^0 = 1_E$. В правой части стоит нормально сходящийся ряд, т.к. $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Легко видеть, что функция

$$R(t) = \exp(tA) \quad \text{для } t \in \mathbb{R}$$

удовлетворяет уравнению (2). Поскольку $R(0) = 1_E$, то функция $R(t)$ и будет резольвентой для (1). Тогда

$$R(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n \quad (4)$$

является суммой степенного ряда по $t \in \mathbb{R}$ с "коэффициентами принадлежащими пространству $\mathcal{L}(E; E)$. Из теоремы о дифференцировании степенных рядов вытекает, что производная $R'(t)$ равна сумме степенного ряда, полученного почленным дифференцированием ряда (4):

$$R'(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^{n+1}.$$

Можно вынести A за скобку (например, слева), тогда получим

$$R'(t) = A \cdot \left(\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n \right) = A \cdot R(t),$$

ч.т.д.

Следовательно, решение уравнения (1), равное x_0 при $t = t_0$, имеет вид:

$$x(t) = \exp[(t - t_0)A] \cdot x_0. \quad (5)$$

Соотношение

$$R(t, t_0) = R(t, t_1) \cdot R(t_1, t_0)$$

в этом случае запишется так:

$$\exp[(t - t_0)A] = \exp[(t - t_1)A] \cdot \exp[(t_1 - t_0)A].$$

Заметим, что

$$\exp[(t_1 + t_2)A] = \exp(t_1 A) \cdot \exp(t_2 A)$$

и, поскольку для произвольных коммутирующих A_1 и A_2 имеет место равенство $A_1 \cdot A_2 = A_2 \cdot A_1$,

$$\exp(A_1 + A_2) = \exp(A_1) \cdot \exp(A_2).$$

В частности, из равенства $\exp(tA) \cdot \exp(-tA) = 1_E$ следует, что $\exp(tA) \in \text{Isom}(E; E)$.

Теперь рассмотрим уравнение с правой частью

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + B(t).$$

В силу соотношения

$$x(t) = R(t, t_0) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t R(t, \tau) \cdot B(\tau) d\tau$$

решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $t = t_0$, задается формулой

$$x(t) = \int_{t_0}^t (\exp(t - \tau)A) \cdot B(\tau) d\tau.$$

Уравнение с постоянными коэффициентами: Случай, когда размерность пространства E конечна

Ограничимся случаем комплексного векторного пространства E размерности n . Рассмотрим оператор $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; E)$. Тогда $\exp(tA) \in \text{Isom}_{\mathbb{C}}(E; E)$. Сопоставим этому оператору разложение векторного пространства E в прямую сумму некоторых подпространств. "Характеристическое" уравнение оператора A имеет вид:

$$\det(A - \lambda \cdot 1_E) = 0. \quad (1)$$

Это уравнение n -ой степени по λ , корни которого (элементы поля $\mathbb{C}$) являются *собственными значениями* оператора A . Согласно теореме Даламбера–Гаусса, уравнение n -ой степени имеет n корней с учетом их кратностей.

Пусть λ_i — *различные* собственные значения и $k_i \geq 1$ — кратности корней λ_i . Известен следующий результат, который доказывается приведением матрицы A к треугольному виду с помощью выбора подходящего базиса в пространстве E .

Лемма. Пусть λ_i — корень уравнения (1) кратности k_i , а E_i — подпространство, состоящее из точек $x \in E$, для которых

$$(A - \lambda_i \cdot 1_E)^{k_i} x = 0. \quad (2)$$

Тогда размерность пространства E_i равна k_i (E_i содержит собственные векторы, отвечающие собственному значению λ_i), а все пространство E является прямой суммой пространств E_i (здесь $\sum_i k_i = n$).

Из этой леммы вытекает, что если $x \in E_i$, то и $A \cdot x \in E_i$, т.к.

$$(A - \lambda_i \cdot 1_E)^{k_i} \cdot A \cdot x = (A \cdot (A - \lambda_i \cdot 1_E)^{k_i}) \cdot x = A \cdot ((A - \lambda_i \cdot 1_E)^{k_i} \cdot x) = 0.$$

Обозначим через $A_i \in \mathcal{L}(E_i; E_i)$ линейное отображение, индуцированное отображением A . Тогда

$$(A_i - \lambda_i \cdot 1_{E_i})^{k_i} = 0. \quad (3)$$

В этих условиях однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x$$

оказывается эквивалентным системе однородных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i \cdot x_i, \quad (4)$$

где $x_i(t)$ — функции, значения которых лежат в пространстве E_i . Решение системы (4) имеет вид:

$$x_i(t) = \exp(tA_i) \cdot u_i,$$

причем $u_i = x_i(0)$. Выражение для $\exp(tA_i)$ можно упростить в силу (3). Для сокращения будем писать $(A_i - \lambda_i)$ вместо $(A_i - \lambda_i \cdot 1_{E_i})$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \exp(tA_i) &= e^{\lambda_i t} \exp t(A_i - \lambda_i) = \\ &= e^{\lambda_i t} \left(1_{E_i} + t(A_i - \lambda_i) + \dots + \frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!} (A_i - \lambda_i)^{k_i-1} \right) = e^{\lambda_i t} P_i(t), \end{aligned}$$

где $P_i(t)$ — полином степени $\leq (k_i - 1)$ со значениями в пространстве $\mathcal{L}(E_i; E_i)$. Когда u_i (начальное значение) пробегает пространство E_i , $P_i(t) \cdot u_i$ образуют векторное пространство размерности k_i полиномов степени $\leq (k_i - 1)$; их значения лежат в подпространстве E_i пространства E .

Подводя итог, сформулируем

Предложение 1°. Для каждого собственного значения λ_i оператора A (кратности k_i) однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x \quad (5)$$

имеет решения (со значениями, принадлежащими пространству E_i), которые образуют векторное пространство размерности k_i . Каждое из этих решений имеет вид:

$$e^{\lambda_i t} Q_i(t),$$

где $Q_i(t)$ — полином степени $\leq (k_i - 1)$ (со значениями, принадлежащими пространству E_i). Всякое решение уравнения (5) представляет собой сумму подобных решений:

$$x(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} Q_i(t),$$

где суммирование идет по всем различным собственным значениям.

Частный случай. Если характеристическое уравнение (1) имеет n различных корней, то решение уравнения (5), соответствующее собственному значению λ_i , имеет вид

$$e^{\lambda_i t} c_i \quad (c_i \in E, c_i \neq 0)$$

и любое решение этого уравнения является комбинацией с постоянными коэффициентами этих n частных решений.

Практический метод. Для нахождения решения $x(t)$ воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Для каждого корня λ_i запишем в общем виде полином $Q_i(t)$ степени $(k_i - 1)$ со значениями в пространстве E_i (такой полином определяется k_i^2 числовыми коэффициентами). Затем подставим $e^{\lambda_i t} Q_i(t)$ в уравнение (5) и потребуем, чтобы данное выражение являлось решением этого уравнения. В результате получим соотношения для выражения коэффициентов полинома $Q_i(t)$. После приведения необходимых вычислений останутся неопределенными как раз k_i коэффициентов.

Линейное дифференциальное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами

Достаточно объединить предыдущие результаты. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} = A_0 \cdot x + A_1 \cdot \frac{dx}{dt} + \dots + A_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}, \quad (1)$$

где $x : \mathbb{R} \rightarrow E$ — неизвестная функция и $A_i \in \mathcal{L}(E; E)$ — заданные отображения.

Положим

$$A = \begin{pmatrix} 0, & 1_E, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 0, & 1_E, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_0, & A_1, & A_2, & \dots & A_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Тогда

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} R_0(t), & R_1(t), & \dots & R_{n-1}(t) \\ R'_0(t), & R'_1(t), & \dots & R'_{n-1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_0^{(n-1)}(t), & R_1^{(n-1)}(t), & \dots & R_{n-1}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения с правой частью

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \cdot \frac{d^i x}{dt^i} + B(t),$$

обращающееся при $t = t_0$ в нуль вместе со своими производными до порядка $(n - 1)$ включительно, имеет вид:

$$\int_{t_0}^t R_{n-1}(t - \tau) \cdot B(\tau) d\tau.$$

Решения уравнений, найденные в теме "Линейные дифференциальные уравнения $n^{\text{го}}$ порядка с правой частью" получаются из этой формулы.

Исследуем подробнее *случай, когда E — комплексное пространство размерности 1*, т.е. $E = \mathbb{C}$. Тогда получаем однородное уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i x}{dt^i}, \quad (3)$$

где $a_i \in \mathbb{C}$ — фиксированные числа, а $x(t)$ — неизвестная функция, принимающая комплексные значения. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$ — линейное отображение, заданное матрицей (2), в которой A_i заменены на a_i . Тогда характеристическое уравнение $\det(A - \lambda) = 0$ сведется к уравнению

$$\lambda^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i. \quad (4)$$

Записывая условие того, что это уравнение имеет собственный вектор для значения λ или, согласно теме "Уравнение с постоянными коэффициентами: случай, когда размерность пространства E конечна существует

решение уравнения (3) вида $x = e^{\lambda t}$, приходим к соотношению (4). В силу предыдущих результатов, если λ_i — корень уравнения (4) кратности k_i , то дифференциальное уравнение (3) имеет k_i линейно независимых решений, каждое из которых имеет вид:

$$e^{\lambda_i t} q_i(t).$$

Здесь $q_i(t)$ — полиномы степени $\leq (k_i - 1)$, принимающие числовые значения; эти полиномы образуют векторное пространство размерности k_i . Каждому произвольному полиному $q_i(t)$ степени $\leq (k_i - 1)$ соответствует решение уравнения (5) вида $e^{\lambda_i t} q_i(t)$.

Итак, справедливо

Предложение 1°. *Общее решение однородного уравнения (3) имеет вид*

$$\sum_i e^{\lambda_i t} q_i(t),$$

где $q_i(t)$ — произвольный полином (с числовыми значениями) степени $(k_i - 1)$ (k_i — кратность корня λ_i); здесь суммирование ведется по множеству различных корней характеристического уравнения (4).

Дифференциальные уравнения, не содержащие независимой переменной

Оно имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1}$$

где функция f принадлежит классу C^1 на открытом множестве U банахова пространства E .

Заметим, что уравнение общего вида может быть сведено к этому частному случаю. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{2}$$

Сопоставляя ему систему дифференциальных уравнений (с двумя неизвестными функциями x и t от действительного переменного u)

$$\frac{dx}{du} = f(t, x), \quad \frac{dt}{du} = 1 \tag{3}$$

(значения $t(u)$ принадлежат полю $\mathbb{R}$, а значения функции $x(u)$ — банахову пространству E). И зададимся следующими начальными условиями:

потребуем, чтобы при $u = t_0$ переменная t принимала значение t_0 , а переменная x — значение x_0 . Тогда $t = u$, а функция $x(u)$ — это решение $x(t)$ уравнения (2), принимающее значение x_0 при $t = t_0$.

Вернемся к уравнению (1). Пусть дано его решение $x = \varphi(t)$. Изучим *траекторию* точки $\varphi(t)$ в пространстве E , т.е. образ отображения φ без учета его зависимости от параметра t . Если $x_0 = \varphi(t_0)$, и если $f(x_0) = 0$, то, как известно, решение $\varphi(t)$ *постоянно* в силу теоремы единственности для дифференциального уравнения. Рассмотрим случай, когда $f(x_0) \neq 0$. Для простоты предположим, что $E = \mathbb{R}^n$ и пусть $x_1, \dots, x_n$ — координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$; $a_1, \dots, a_n$ — координаты начальной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда уравнение (1) может быть заменено системой уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

По предположению, по крайней мере одна из функций f_i в точке $(a_1, \dots, a_n)$ отлична от нуля; для определенности пусть $f_n(a_1, \dots, a_n) \neq 0$. Тогда система (4) в некоторой окрестности точки $(a_1, \dots, a_n)$ эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dx_n} &= \frac{f_i(x)}{f_n(x)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \frac{dt}{dx_n} &= \frac{1}{f_n(x)}. \end{aligned}$$

В этой окрестности рассматриваемая траектория может быть задана с помощью системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(x)}{f_n(x)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (5)$$

с $(n-1)$ неизвестными функциями $x_1, \dots, x_{n-1}$ от переменного x_n , принимающими начальные значения $(a_1, \dots, a_n)$ при $x_n = a_n$. Следовательно, x_n можно рассматривать как "параметр" на кривой траектории. Наконец, соотношение

$$\frac{dt}{dx_n} = \frac{1}{f_n(x)}$$

задает t как функцию x_n с помощью квадратуры.

Если нас интересуют только траектория, а не "зависимость от времени" то достаточно рассмотреть систему уравнений (5) в окрестности точки $(a_1, \dots, a_n)$. Такая система часто записывается в виде

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \frac{dx_2}{f_2(x)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x)}. \quad (6)$$

В этой записи все координаты равноправны, но функции $f_1, \dots, f_n$ (класса C^1) не должны обращаться в нуль одновременно в точке $(a_1, \dots, a_n)$.

Перейдем к более общему случаю. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}(x) \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (7)$$

где $c_{ij}(x)$ — числовые функции класса C^1 в окрестности точки $(a_1, \dots, a_n)$, а ранг матрицы $\{c_{ij}(x)\}$ равен $(n-1)$ в точке $(a_1, \dots, a_n)$ (и, следовательно, в любой точке, близкой к этой точке).

Такая система часто записывается в форме

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}(x) dx_j = 0, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (8)$$

Решение системы (8) определяет в окрестности точки $(a_1, \dots, a_n)$ некоторую кривую $C \subset \mathbb{R}^n$. Эта кривая задается параметрически в виде $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, где функции $x_i(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}(x(t)) x'_j(t) = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

которая состоит из $(n-1)$ однородных линейных соотношений между $x'_j = \frac{dx_j}{dt}$ и эквивалентна (в силу предположения о ранге) системе вида (4). Будем говорить, что соотношения (8) образуют систему дифференциальных уравнений, решения которой определяют траектории системы (4). Заметим, что решения системы (8) являются решениями системы дифференциальных уравнений (6) (f_i не равны нулю одновременно). Поскольку C — подобная траектория, то часто говорят, что левые части системы (8) обращаются в нуль на C .

Таким образом, теорема о локальном существовании и единственности решения позволяет изучать системы вида (8) в случае, когда ранг матрицы $\{c_{ij}(x)\}$ равен $(n-1)$.

Случай, когда все $f_1, \dots, f_n$ обращаются одновременно в нуль

Такая ситуация имеет место в некоторой точке, где ранг матрицы из коэффициентов системы (8) становится меньше $(n-1)$. Тогда к

системе (6) не применима теорема о локальном существовании и единственности решения. Однако, ее можно применить к системе (4). При этом траектория, выходящая из точки $(a_1, \dots, a_n)$, превращается в точку, когда функции $f_1, \dots, f_n$ обращаются в нуль в точке $(a_1, \dots, a_n)$.

Покажем на примерах, как может быть устроено множество траекторий в окрестности точки $(a_1, \dots, a_n)$, в которой все функции f_i обращаются одновременно в нуль. Рассмотрим случай $n = 2$. Обозначим через x и y координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$. Выберем точку $(a_1, \dots, a_n)$ за начало координат. Поскольку $n - 1 = 1$ при $n = 2$, то речь идет об изучении траекторий уравнения

$$a(x, y) dx + b(x, y) dy = 0$$

в окрестности начала координат, если в этой точке обе функции a и b , принадлежащие классу C^1 , равны нулю.

Пример 1°. Рассмотрим уравнение $x dx + y dy = 0$. Оно эквивалентно системе

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = +x,$$

которая порождает группу вращений плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \\ y = x_0 \sin t + y_0 \cos t. \end{cases}$$

Траектории представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат, которые в свою очередь являются траекториями, выродившимися в точку.

Пример 2°. Уравнение $x dy - y dx = 0$ эквивалентно системе

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y,$$

которая порождает группу гомотетий

$$x = x_0 e^t, \quad y = y_0 e^t.$$

Траектории представляют собой полупрямые, выходящие из начала координат. Само начало координат является траекторией, выродившейся в точку.

Пример 3°. Пусть дано уравнение $x dy + y dx = 0$. Оно эквивалентно системе

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = -y,$$

которая порождает однопараметрическую группу

$$x = x_0 e^t, \quad y = y_0 e^{-t}.$$

Траектории представляют собой ветви равнобочных гипербол, асимптотами которых служат оси координат и, кроме них, четыре полуоси координат. Наконец, само начало координат — это траектория, выродившаяся в точку.



Стрелки на линиях указывают направление возрастания параметра t .

Дифференциальные уравнения, "не разрешенные" относительно y'

Не строя общей теории, ограничимся указанием нескольких результатов в самом простейшем случае уравнения первого порядка с неизвестной функцией y от переменного x (здесь y и x предполагаются действительными переменными).

Рассмотрим уравнение вида

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad (1)$$

где $F(x, y, y')$ обозначает функцию класса C^2 (с числовыми значениями) не открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^3$. Будем решать следующую задачу.

Дана точка $(x_0, y_0, y'_0) \in U$, в которой $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$. Надо найти такое решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) со значениями в $\mathbb{R}$, принадлежащее классу C^1 в окрестности точки x_0 , что

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y'_0, \quad F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0. \quad (2)$$

Задача сводится к отысканию системы из двух функций y и y' от x (для x , близких к x_0), равных соответственно y_0 и y'_0 при $x = x_0$ и удовлетворяющих системе уравнений

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{dy}{dx} = y'.$$

Рассмотрим несколько более общую задачу: будем искать *три* функции x, y, y' одной и той же переменной t (не уточняемой заранее), удовлетворяющие начальным условиям $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0$ и системе уравнений

$$F(x, y, y') = 0, \quad dy - y'dx = 0. \quad (3)$$

Последнее уравнение означает, что $\frac{dy}{dt} - y'\frac{dx}{dt} = 0$. После того как поставленная задача будет решена, возьмем в качестве t в зависимости от ситуации одну из величин x, y, y' (это уточним позже).

Заменим смешанную систему (3) системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial y'}dy' = 0, \quad dy - y'dx = 0. \quad (4)$$

Если $\{x = x(t), y = y(t), y' = y'(t)\}$ есть решение этой системы, причем $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0$, то сложная функция $F(x(t), y(t), y'(t))$ будет постоянной, поскольку производная от F по t равна нулю. Так как начальное значение этой функции равно нулю, то и сама функция есть нуль. Следовательно, функции $x = x(t), y = y(t), y' = y'(t)$ определяют решение системы (3).

Итак, заменили первоначальную задачу (отыскание решения уравнения (4), удовлетворяющего начальным условиям $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0$, для которых $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$) более общей задачей: *отыскание решений системы дифференциальных уравнений (4) с теми же начальными условиями.*

Система уравнений (4) является частным случаем системы вида

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}(x) dx_j = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

с тремя переменными x, y, y' . Матрица коэффициентов этой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial y'} \\ -y', & 1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Если ранг этой матрицы равен 2 в окрестности точки (x_0, y_0, y'_0) , то система (4) эквивалентна системе

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = \frac{dy}{y'(\frac{\partial F}{\partial y'})} = \frac{-dy'}{\frac{\partial F}{\partial x} + y'(\frac{\partial F}{\partial y'})}, \quad (5)$$

причем все три знаменателя не обращаются в нуль одновременно. Таким образом, задача сведена к рассмотрению системы вида

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \dots = \frac{dx_n}{f_n},$$

которая была уже рассмотрена.

Существует два различных случая (которые не исключают один другого).

Первый случай. $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$. Тогда можно выбрать x в качестве переменного, а система (5) оказывается эквивалентной системе

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + y'(\frac{\partial F}{\partial y})}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$$

(обычная система дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями y и y' от x). В этом случае можно применить теорему о неявных функциях к уравнению $F(x, y, y') = 0$, которое в этом случае можно заменить уравнением вида $y' = f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0, y'_0) . Таким образом, пришли к классическому случаю, для которого имеет место локальная теорема существования и единственности.

Второй случай. $\frac{\partial F}{\partial x} + y'(\frac{\partial F}{\partial y}) \neq 0$. Тогда можно взять y' в качестве переменного и система (5) оказывается эквивалентной системе

$$\frac{dx}{dy'} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y'}}{\frac{\partial F}{\partial x} + y'(\frac{\partial F}{\partial y})}, \quad \frac{dy}{dy'} = -\frac{y'(\frac{\partial F}{\partial y})}{\frac{\partial F}{\partial x} + y'(\frac{\partial F}{\partial y})}. \quad (6)$$

Здесь правые части являются функциями класса C^1 по (x, y, y') . Применив локальную теорему о существовании и единственности решения, получим x и y как функции от y' , равные соответственно x_0 и y_0 при $y' = y'_0$.

Частный случай. Рассмотрим уравнение $x + yy' = 0$ с начальными условиями $x_0 = 0, y_0 = 0$. Тогда $\frac{\partial F}{\partial y'} = y$ в точке (x_0, y_0, y'_0) обращается в нуль, а $\frac{\partial F}{\partial x} + y'(\frac{\partial F}{\partial y}) = 1 + y'^2$ отлично от нуля.

Единственное решение системы (6) имеет вид $x = 0, y = 0$ (функции x и y переменного y' тождественно равны нулю). Кривая, получаемая в (x, y, y') -пространстве, оказывается прямой линией. Ее проекция на (x, y) -плоскость сводится к точке. Очевидно, что полученное "решение" не является решением исходной задачи. Это обобщенное решение, т.е. решение системы (4), в которой переменным служит y' .

Оставляем в стороне подробное обсуждение случая, когда выражения $\frac{\partial F}{\partial y'}$ и $\frac{\partial F}{\partial x} + y'(\frac{\partial F}{\partial y})$ равны нулю в точке (x_0, y_0, y'_0) .

Рассмотрим только крайний случай. Пусть во всех точках некоторой кривой C , лежащей в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных (x, y, y') ,

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad F(x, y, y') = 0, \quad \text{но } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Тогда в силу соотношения

$$\frac{\partial F}{\partial y}(dy - y'dx) = dF - \frac{\partial F}{\partial y'}dy' - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y}\right)dx,$$

$dy - y'dx = 0$ на этой кривой, т.е. C — *интегральная кривая* системы (4). Ее проекция на (x, y) — плоскость определяет *особый интеграл* дифференциального уравнения (1).

Н.В. Не ставим перед собой задачи построения общей теории особых интегралов.

Пример. Особый интеграл уравнения Клеро.

Рассмотрим классическое уравнение

$$y = xy' + g(y'), \tag{7}$$

где g — данная функция класса C^2 . Здесь выражение $\frac{\partial F}{\partial x} + y'(\frac{\partial F}{\partial y})$ тождественно равно нулю и особый интеграл уравнения (7) определяется с помощью равенств $F(y) = 0, \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$, т.е.

$$x + g'(y') = 0, \quad y = -y'g'(y') + g(y'). \tag{8}$$

Найдем этот особый интеграл, применяя к системе (7) общий метод, который дает все решения. В рассматриваемом случае система (4) имеет вид:

$$dy = x dy' + y' dx + g'(y') dy', \quad dy = y' dx.$$

От нее перейдем к эквивалентной системе, заменяя dy на $y'dx$ в первом уравнении:

$$[x + g'(y')] dy' = 0, \quad dy = y' dx$$

или, иначе,

$$[x + g'(y')] dy' = 0, \quad dF = 0 \quad (F = -y + xy' + g(y')).$$

Нас интересуют лишь решения, для которых постоянное значение F равно нулю. В результате приходим к системе

$$[x + g'(y')] dy' = 0, \quad y = xy' + g(y'). \quad (9)$$

Ее "общее" решение $y = C$ (постоянная), откуда $y = Cx + g(C)$. Это семейство прямых (в плоскости (x, y)), зависящее от параметра C . Но имеется "частное" решение $x = -g'(y)$. Подставляя это значение x в уравнение $y = xy' + g(y')$, находим особый интеграл уравнения (8). Через точку этой огибающей проходят *две интегральные кривые*: прямая и огибающая.

Более общий случай уравнения Лагранжа

Речь идет о дифференциальном уравнении $y = xf(y') + g(y')$, где f и g — две данные функции. Общий метод здесь приводит к отысканию решений системы

$$(y' - f(y'))', dx = [xf(y') + g'(y')] dy', \quad y = xf(y') + g(y'). \quad (10)$$

Если $y'_0 - f(y'_0) \neq 0$, то первое из дифференциальных уравнений (10) дает в качестве x функцию $\varphi(y')$ с начальным условием $\varphi(y'_0) = x_0$. Тогда из второго уравнения найдем y как функцию от y' . Таким образом, получим параметрическое представление интегральной кривой.

Случай, когда $y'_0 - f(y'_0) = 0$ следует рассмотреть особо. В этой ситуации уравнение Лагранжа может иметь особый интеграл, но может его и не иметь.

Пример. Рассмотрим уравнение $y + kx + 2y' + y'^2 = 0$, $k = \text{const}$. Для особого интеграла должны выполняться равенства

$$1 + y' = 0, \quad k + y' = 0.$$

Следовательно, особый интеграл не существует, если $k \neq 1$. Предположим, что $k = 1$. Тогда система (10) примет вид

$$(1 + y')(dx + 2dy') = 0, \quad y = -x - 2y' - y'^2.$$

Общий интеграл получается из уравнения $dx + 2dy' = 0$, откуда

$$x = x_0 - 2(y' - y'_0), \quad y = -x_0 - 2y'_0 - y'^2.$$

Это параболы, где роль параметра играет y' . Особый интеграл определяется из равенств $y' = -1, y = -x + 1$. Получаем прямую, которая является огибающей найденного выше семейства парабол.

Первые интегралы и линейные уравнения в частных производных

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (1)$$

где f — отображение класса C^1 открытого множества $U \subset E$ в пространство E , через E , как всегда, обозначается банахово пространство. Заметим, что правая часть уравнения (1) *не зависит от t* . Впрочем, как уже ранее было показано, можно всегда свести общий случай к этому частному.

Определение. Функция $\psi(x)$, принадлежащая классу C^1 в U , с числовыми значениями или, в более общем случае, со значениями в банаховом пространстве F) называется *первым интегралом* уравнения (1), если сложная функция $\psi(\varphi(t))$ *постоянна* в интервале I (т.е. не зависит от t) для любой функции $\varphi : I \rightarrow U$, являющейся решением дифференциального уравнения (1) в интервале I .

Равенство $x = \varphi(t)$ определяет траекторию уравнения (1), т.е. можем сказать, что *функция ψ должна быть постоянной на каждой траектории, содержащейся в U* .

Предложение 1°. Для того, чтобы функция ψ была первым интегралом дифференциального уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы равенство

$$\psi'(x) \cdot f(x) = 0 \quad (2)$$

имело место в любой точке $x \in U$.

Пояснение. Здесь $\psi'(x)$ является элементом из $\mathcal{L}(E; F)$. В качестве произведения $\psi'(x) \cdot f(x) \in F$ здесь берется его значение, отвечающее значению функции $f(x) \in E$. Из условия (2) вытекает, что это значение равно нулю.

Доказательство. Условие (2) является *достаточным*. Если оно выполнено, то производная от функции $\psi \cdot \varphi$ равна нулю, ибо

$$(\psi \cdot \varphi)'(t) = \psi'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \psi'(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t)).$$

Следовательно, функция $\psi \cdot \varphi$ постоянна.

Покажем, что условие (2) *необходимо*. Если функция ψ является первым интегралом, то

$$\psi'(\varphi(t)) - f(\varphi(t)) = 0$$

для *любого* решения φ уравнения (1). Однако, в силу теоремы существования решения дифференциального уравнения через любую точку $x_0 \in U$ проходит интегральная кривая этого уравнения. Следовательно, $\psi'(x_0) \cdot f(x_0) = 0, \forall x_0 \in U$, ч.т.д.

Случай, когда $E = \mathbb{R}^n$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad (3)$$

где f_i — числовые функции класса C^1 на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$; x_i — неизвестные числовые функции переменного t . Тогда первым интегралом будет функция $\psi(x_1, \dots, x_n)$ от n действительных переменных $x_1, \dots, x_n$, а условие (2) запишется в виде:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0. \quad (4)$$

Таково условие, которому должен удовлетворять первый интеграл системы (3), т.е. функция $\psi(x_1, \dots, x_n)$.

Соотношение (4) между частными производными $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ неизвестной функции $\psi(x_1, \dots, x_n)$, где "коэффициенты" f_i — заданные функции (класса C^1) называется *линейным однородным уравнением $1^{\text{го}}$ порядка в частных производных*. Видим, что произвольно заданному уравнению такого вида можно поставить в соответствие систему дифференциальных уравнений (3), построенную с помощью "коэффициентов" f_i . Решения ψ уравнения в частных производных будут первыми интегралами соответствующей системы дифференциальных уравнений (3). Система (3) называется *характеристической системой уравнения (4)*.

Н.В. Можно обобщить предыдущие понятия на случай системы дифференциальных уравнений более высокого порядка. Например, пусть дана система дифференциальных уравнений $2^{\text{го}}$ порядка

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i\left(x_1, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Как известно, этой системе можно сопоставить систему $2n$ уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i, \quad \frac{dx'_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n). \quad (6)$$

Применим к системе (6) определение первого интеграла: первый интеграл системы (6) — это функция $\psi(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n)$ такая, что

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) \frac{\partial \psi}{\partial x'_i} = 0$$

(тождество по $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n$). Тогда говорят, что функция

$$\psi\left(x_1, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)$$

является *первым интегралом системы (5)*. Это понятие очень важно для механики, где постоянно приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями второго порядка; например, оно используется в классической "теореме живых сил".

Существование первых интегралов

Ограничимся рассмотрением системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n)$$

в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что в точке $(a_1, \dots, a_n) \in U$ не все функции $f_i(a_1, \dots, a_n)$ обращаются в нуль. Для определенности предположим, что $f_n(a_1, \dots, a_n) \neq 0$. Тогда система

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x)} \quad (1)$$

в некоторой окрестности V точки $(a_1, \dots, a_n)$ записывается в виде:

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(x)}{f_n(x)}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Таким образом, получаем "геометрические траектории не зависящие от времени. Первый интеграл ψ — это функция, постоянная на геометрических траекториях.

В силу известной теоремы решение системы (1), принимающее при $x_n = a_n$ значение $(u_1, \dots, u_{n-1})$, близкое к $(a_1, \dots, a_{n-1})$, имеет вид:

$$x_i = \varphi_i(x_n, u_1, \dots, u_{n-1}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Здесь функции φ_i принадлежат классу C^1 по $(x_n, u_1, \dots, u_{n-1})$. Кроме того, известно, что определитель матрицы

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right)_{i=\overline{1, n-1}, j=\overline{1, n-1}} \quad (3)$$

отличен от нуля для значений $(u_1, \dots, u_{n-1}, x_n)$, близких к $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$. Следовательно, по теореме о неявных функциях система (2) эквивалентна системе

$$u_i = \psi_i(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где ψ_i — функции класса C^1 в окрестности точки $(a_1, \dots, a_n)$.

Очевидно, что *каждая из $(n-1)$ функций ψ_i является первым интегралом*: функция ψ_i постоянна вдоль каждой интегральной кривой (2). Помимо этого, определитель матрицы

$$\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right),$$

обратной к матрице (3), отличен от нуля. Пусть $\psi(x_1, \dots, x_n)$ — какой-нибудь первый интеграл в окрестности точки $(a_1, \dots, a_n)$. Тогда функция

$$\psi(\varphi_1(x_n, u_1, \dots, u_{n-1}), \dots, \varphi_{n-1}(x_n, u_1, \dots, u_{n-1}), x_n)$$

не зависит от x_n ; обозначим ее $\Phi(u_1, \dots, u_{n-1})$. Отсюда

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \Phi(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)). \quad (5)$$

Иначе говоря, всякий первый интеграл может быть представлен в окрестности точки $(a_1, \dots, a_n)$ как некоторая функция Φ от $(n-1)$ первых интегралов $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$. Очевидно, что для всякой функции Φ класса C^1 от $(n-1)$ переменных сложная функция $\Phi(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x))$ является первым интегралом системы уравнений (1).

Таким образом, доказана

Теорема 1°. Система дифференциальных уравнений (1), в которой числовые функции $f_1, \dots, f_n$ принадлежат классу C^1 в некоторой

окрестности точки $(a_1, \dots, a_n)$ и не все равны нулю в этой точке, обладает в этой окрестности точки $(a_1, \dots, a_{n-1})$ системой из $(n-1)$ первых интегралов $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ (с числовыми значениями), их производные являются линейными формами, линейно независимыми в любой точке этой окрестности. Всякий первый интеграл ψ имеет вид $\Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$, где Φ — произвольная функция класса C^1 .

Используя выводы, сделанные ранее, можно сформулировать эквивалентную теорему.

Теорема 2°. Пусть дано уравнение в частных производных

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0, \quad (6)$$

коэффициенты которого $f_i(x)$ суть числовые функции класса C^1 в окрестности точки $(a_1, \dots, a_n)$, не обращающиеся в нуль одновременно в этой точке. Тогда уравнение (6) обладает $(n-1)$ решениями (с числовыми значениями) $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$, производные от которых линейно независимы. Всякое решение ψ уравнения (6) есть произвольная функция $\Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$.

Неоднородное линейное уравнение в частных производных

Рассмотрим вновь уравнение

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0.$$

Обозначим теперь неизвестные функции через $y(x_1, \dots, x_n)$. Можно обобщить результат, полученный выше, предполагая, что коэффициенты $f_i(x_1, \dots, x_n, y)$ зависят также от y и считая в этом уравнении правую часть, вообще говоря, отличной от нуля. Таким образом, приходим к уравнению:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n, y) \frac{\partial y}{\partial x_i} = f(x_1, \dots, x_n, y). \quad (1)$$

Пусть (числовые) функции f_i и $f \in C^1$. Уравнение (1) называется *линейным (неоднородным) уравнением первого порядка в частных производных* с неизвестной функцией y от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Укажем метод решения этого уравнения, когда f и все f_i не обращаются одновременно в нуль в окрестности точки $(a_1, \dots, a_n, b)$. Сведем

задачу с помощью искусственного приема к случаю *однородного* уравнения.

Найдем в окрестности $(a_1, \dots, a_n, b)$ такую числовую функцию $\psi(x_1, \dots, x_n, y) \in C^1$, что:

- 1) $\psi(a_1, \dots, a_n, b) = 0$ и $\frac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0$ в точке $(a_1, \dots, a_n, b)$;
- 2) функция $y = \lambda(x_1, \dots, x_n)$, определенная из соотношения

$$\psi(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \quad (2)$$

(применяется теорема о неявных функциях), удовлетворяет уравнению (1).

Дифференцируя (2), находим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = 0,$$

откуда

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}}.$$

Запишем условие того, что производные $\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$ должны удовлетворять уравнению (1). Тогда получим следующее равенство

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n, y) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + f(x_1, \dots, x_n, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Равенство (3) должно иметь место в любой точке $(x_1, \dots, x_n, y)$, удовлетворяющей уравнению (2) (и достаточно близкой к точке $(a_1, \dots, a_n, b)$). Покажем, что всякое решение уравнения (1) может быть получено из неявного уравнения $\psi(x_1, \dots, x_n, y) = 0$, причем функция ψ должна удовлетворять равенству (3) *тождественно*, а не только в точках, где она равна нулю. Действительно, если функция $y = \lambda(x_1, \dots, x_n)$ является решением уравнения (1), то для проверки нашего утверждения достаточно положить

$$\psi(x_1, \dots, x_n, y) = y - \lambda(x_1, \dots, x_n);$$

вычисления не представляют каких-либо затруднений.

Итак, можно сформулировать **метод решения уравнения (1)**.

Надо построить *однородное* уравнение (3), рассмотреть его характеристическую систему

$$\frac{dx_1}{f_1} = \dots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{dy}{f}$$

и затем найти n первых интегралов

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n, y), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n, y),$$

производные которых являются линейно независимыми формами. После этого следует положить:

$$\psi(x_1, \dots, x_n, y) = \Phi(\psi_1, \dots, \psi_n),$$

где Φ — произвольная функция, такая, что выполняется условие $\frac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0$. Решая уравнение $\psi(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ относительно y , получим наиболее общее решение уравнения (1).

Примеры.

1°) Обозначим координаты в пространстве $\mathbb{R}^3$ через x, y, z (вместо x_1, x_2, y). Рассмотрим уравнение

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z \quad (1_0)$$

с неизвестной функцией z от x и y в некоторой окрестности точки (a, b, c) , отличной от начала координат. Характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Если, например, $x \neq 0$, то имеем два первых интеграла

$$\frac{y}{x} \quad \text{и} \quad \frac{z}{x}.$$

Тогда общее решение имеет вид $z = x\varphi(\frac{y}{x})$, где φ — произвольная функция одного переменного. Это уравнение *конуса с вершиной в начале координат*. Заметим, что это уравнение выражает следующий факт: касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ в любой ее точке проходит через начало координат, или более точно

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y).$$

2°) Решаем уравнение

$$-y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} + (1 + z^2) \frac{\partial f}{\partial z} = 3zf \quad (2)$$

с неизвестной функцией f от x, y, z . Характеристическая система имеет вид:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{1+z^2} = \frac{df}{3zf}.$$

Это система дифференциальных уравнений с четырьмя переменными x, y, z, f .

Найдем три первых интеграла этой системы:

$$x^2 + y^2, \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \operatorname{arctg} z, (1+z^2)^{-3/2} f;$$

производные этих первых интегралов линейно независимы. Отсюда получаем общее решение уравнения (2):

$$f = (1+z^2)^{3/2} \Phi \left(x^2 + y^2, \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \operatorname{arctg} z \right). \quad (3)$$

Интерпретация. Равенство (2) выражает тот факт, что дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f \left(x, y, \frac{dy}{dx} \right)$$

инвариантно относительно группы вращений вокруг начала координат в плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y . Формула (3) показывает, что такое уравнение всегда имеет следующий вид:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \Phi \left(x^2 + y^2, \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \operatorname{arctg} y' \right).$$

Литература

1. Анри Картан. *Дифференциальное исчисление*. — М., изд-во "Мир" 1971. — 392 с.
2. Уолтер Рудин. *Функциональный анализ*. — СПб-М., изд-во "Лань" 2005. — 448 с.