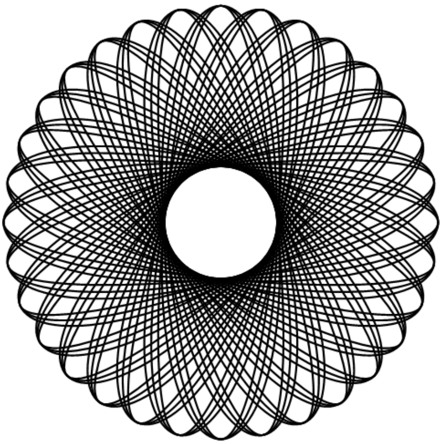
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ (ПОВОЛЖСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ОЛИМПИАДНЫЙ ЦЕНТР РТ

Математические олимпиады школьников Татарстана

2017-2018 учебный год



Казань – 2018

УДК 373.167.1:51
ББК 74.200.58:22.1

Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики и механики КФУ
им. Н.И. Лобачевского

Киндер М.И.

Математические олимпиады школьников Татарстана. 2017-2018 учебный год: Учебно-методическое пособие / Автор–составитель М.И. Киндер. — Казань: Казанский федеральный университет, 2018. — 63 с.

Брошюра предназначена для школьников, учителей, преподавателей математических кружков и просто любителей математики. В ней представлены задачи, предлагавшиеся в 2017-2018 учебном году на муниципальном и региональном этапах математических олимпиад школьников Татарстана, а также задачи открытой олимпиады имени В. Р. Фридлендера, олимпиады «Путь к Олимпу» и задачи Турнира юных математиков им. Н. И. Лобачевского для учеников 5-7 классов.

Все задачи приведены с подробными решениями, условия и решения геометрических задач сопровождаются рисунками.

2017-2018 учебный год

Муниципальный этап 44-й Всероссийской олимпиады по математике среди школьников Республики Татарстан состоялся 23 ноября 2017 г. В составлении задач муниципальной олимпиады принимали участие преподаватели Казанского университета:

И. С. Григорьева, М. И. Киндер, В. А. Сочнева.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике состоялся 31 января – 1 февраля 2018 г.

С 9 по 10 января 2018 г. прошла республиканская математическая олимпиада «Путь к Олимпу», её основные участники – сельские школьники 8-11-х классов РТ.

7 апреля этого же года состоялась 8-я ежегодная городская математическая олимпиада, посвящённая памяти В. Р. Фридлендера. По традиции на неё были приглашены ученики 8-11 классов города Казани. Отличительная особенность этой олимпиады в том, что предлагавшиеся задачи были общими для всех участников. Победители олимпиады получили приглашение в летнюю школу «Квант». В составлении задач олимпиады принимали участие:

И. С. Григорьева, М. И. Киндер,
В. А. Сочнева, М. Д. Бронштейн.

8-го апреля 2018 года Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Региональный научно-образовательный математический центр КФУ совместно с лицеем имени Н. И. Лобачевского КФУ и IT-лицеем КФУ провели Турнир юных математиков имени Н. И. Лобачевского для учеников 5-7-х классов. В олимпиаде приняли участие более 1000 школьников Республики Татарстан. Составители задач Турнира юных математиков:

М. И. Киндер, М. В. Фалилеева.

Ниже представлены условия и подробные решения задач всех перечисленных олимпиад. В скобках после условия задачи указана фамилия её автора.

Муниципальный этап

8 класс

1. Красная Шапочка решила сходить к бабушке, домик которой находился в 1 км ходьбы от ее дома. Волк ей в тот день не попался, поэтому туда и обратно она шла по одному и тому же маршруту. На горизонтальных участках ее скорость была 4 км/ч, в гору — 3 км/ч, а с горы — 6 км/ч. Сколько времени она была в пути?

2. Петя утверждает, что два спинера дороже пяти мороженых, Вася — что три спинера дороже восьми мороженых. Известно, что прав из них только один. Верно ли, что 7 спинеров дороже 19 мороженых?

3. В выпуклом четырёхугольнике длины диагоналей равны 2 и 4 см. Найдите площадь четырёхугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны.

4. Три прямые, пересекаясь, образуют 12 углов, причем n из них оказались равными. Каково может быть максимальное значение n?

5. Рассмотрим четыре последовательных числа n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Для каких n наименьшее общее кратное первых трёх чисел больше, чем наименьшее общее кратное последних трёх?

9 класс

6. При каких p один из корней уравнения $x^2+px+18=0$ вдвое больше другого?

7. Известно, что число $a=\dfrac{x}{x^2-x+1}$ рационально. Докажите, что число $b=\dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}$ — также рациональное.

8. Натуральное число n таково, что числа $2n+1$ и $3n+1$ являются квадратами. Может ли при этом число n быть простым?

9. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен $108°$. Докажите, что биссектриса угла A вдвое больше биссектрисы угла B.

10. *а*) Какое *наибольшее* количество неперекрывающихся полосок 1×3 можно уместить на салфетке, изображенной на рисунке?

б) Какое *наименьшее* количество полосок 1×3 нужно, чтобы покрыть салфетку целиком, если полоски могут перекрываться? (*Киндер М.*)

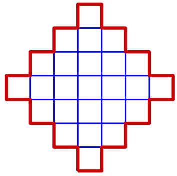


Рис. 1

10 класс

11. Известно, что $\sin(\alpha+\beta) = 0,2$ и $\cos(\alpha-\beta) = 0,3$. Вычислите $\sin(\alpha + 45°) \cdot \sin(\beta + 45°)$.

12. При каких q один из корней уравнения $x^2 - 12x + q = 0$ является квадратом другого?

13. Нечётные числа m и n взаимно просты. Найдите наибольший общий делитель чисел $m + n$ и $m^2 + n^2$.

14. Две окружности, радиусы которых относятся как $2 : 3$, касаются внутренним образом. Через центр меньшей окружности проведена прямая, перпендикулярная линии центров, из точек пересечения этой прямой с большей окружностью проведены касательные к меньшей окружности. Найдите углы между этими касательными.

15. *а*) Какое *наибольшее* количество неперекрывающихся полосок 1×3 можно уместить на салфетке, изображенной на рисунке 1?

б) Какое *наименьшее* количество полосок 1×3 потребуется, чтобы покрыть салфетку целиком, если полоски могут перекрываться? (*Киндер М.*)

11 класс

16. При каких p один из корней уравнения $x^2 - px + p = 0$ является квадратом другого? (Считаем, что корни уравнения различны.)

17. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного натурального числа n, а Вася — сумму всех его чётных делителей. Может ли произведение их результатов оказаться равным 2016? Если может, найдите все такие числа n. (*Киндер М.*)

18. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны стороны: $AB = 2$, $AC = 3$, $AA_1 = 4$. Найдите площадь сечения AMK, где M — середина BB_1 и K — середина DD_1.

19. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ — некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0; 1]$. Верно ли, что на этом отрезке найдётся такое число x, что

$$|\,x - x_1\,| + |\,x - x_2\,| + \ldots + |\,x - x_{100}\,| = 50\,?$$

20. На доске размером 10×10 стоят 10 небьющих друг друга ладей. Можно ли остальные клетки доски замостить доминошками? (Доминошка — прямоугольник размером 1×2 или 2×1.)

Олимпиада имени Л. Эйлера

8 класс

21. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.

(*Методкомиссия*)

22. Даны два ненулевых числа. Если к каждому из них прибавить единицу, а также из каждого из них вычесть единицу, то сумма обратных величин четырёх полученных чисел будет равна 0. Какое число может получиться, если из суммы исходных чисел вычесть сумму их обратных величин? Найдите все возможности.

(*С. Берлов*)

23. По кругу сидят 100 человек. Некоторые из них — рыцари, всегда говорящие правду, остальные — лжецы, которые всегда лгут. Для некоторого натурального числа $k < 100$ каждый из сидящих произнёс фразу: «Следующие k людей, сидящих за мной по часовой стрелке — лжецы». Чему могло быть равно число k?

(*С. Берлов*)

24. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME. (*А. Кузнецов*)

25. В Тридесятом царстве из каждого города выходит по 30 дорог, причём каждая дорога соединяет два города, не проходя через другие города. Тридесятый царь захотел разместить в некоторых городах по дорожно-эксплуатационному управлению (ДЭУ), обслуживающему все выходящие из города дороги, так, чтобы каждая дорога обслуживалась хотя бы одним управлением и управления были размещены не более чем в половине городов. Может ли так оказаться, что у царя существует ровно 2018 способов сделать это? (*С. Берлов, И. Богданов*)

26. На бесконечной ленте выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 2018. Какое число написано на 225-м месте? (*Методкомиссия*)

27. В полдень Вася положил на стол 10 вырезанных из бумаги выпуклых десятиугольников. Затем он время от времени брал ножницы, разрезал по прямой один из лежащих на столе многоугольников на два и клал оба получившихся куска назад на стол. К полуночи Вася проделал такую операцию 51 раз. Докажите, что в полночь среди лежащих на столе многоугольников был треугольник или четырёхугольник. (*И. Рубанов*)

28. На биссектрисе AL треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ADC = 3\alpha$, $\angle ACB = 4\alpha$. Докажите, что $BC + CD = AB$. (*А. Кузнецов*)

29. На клетчатой белой доске размером 25×25 клеток несколько клеток окрашено в чёрный цвет, причём в каждой строке и каждом столбце окрашено ровно 9 клеток. При каком наименьшем k заведомо можно перекрасить k клеток в белый цвет таким образом, чтобы нельзя было вырезать чёрный квадрат 2×2? (*С. Берлов*)

30. Докажите, что существует натуральное число n, большее 10^{100}, такое, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n. (*Р. Салимов*)

Региональный этап

9 класс

31. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.

(*Методкомиссия*)

32. На доске написаны пять натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых трёх из них делится на каждое из остальных. Обязательно ли среди этих чисел найдутся четыре равных?

(*С. Берлов, Д. Храмцов*)

33. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME. (*А. Кузнецов*)

34. Кондитерская фабрика выпускает n сортов конфет. На Новый год фабрика подарила каждому из 1000 учеников школы подарок, содержащий по конфете нескольких сортов (составы подарков могли быть разными). Каждый ученик заметил, что для любых 11 сортов конфет он получил конфету хотя бы одного из этих сортов. Однако оказалось, что для любых двух сортов найдётся ученик, получивший конфету ровно одного из этих двух сортов. Найдите наибольшее возможное значение n. (*Д. Храмцов*)

35. Числа x, y и z удовлетворяют условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажите, что

$$(x - y)(y - z)(x - z) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

(*Л. Емельянов, методкомиссия*)

36. На бесконечной ленте выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 2018. Какое число написано на 225-м месте? (*Методкомиссия*)

37. Изначально по кругу расставлены 40 синих, 30 красных и 20 зелёных фишек, причём фишки каждого цвета идут подряд. За ход можно поменять местами стоящие рядом синюю и красную фишки, или стоящие рядом синюю и зелёную фишки. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы любые две стоящие рядом фишки были разных цветов? (*С. Берлов*)

38. Серёжа выбрал два различных простых числа p и q. Он считает натуральное число n *хорошим*, если число $p+q$ можно представить в виде суммы ровно q чисел, каждое из которых имеет вид n^k при целом неотрицательном k. (Например, если бы Серёжа выбрал $p=7$ и $q=3$, то он бы счёл число $n=2$ хорошим, поскольку $7+3=2^3+2^0+2^0$). Докажите, что Серёжа считает хорошими не более двух чисел. (*С. Волчёнков*)

39. В окружности ω с центром в точке O провели непересекающиеся хорды AB и CD так, что $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$. Касательная к ω в точке A пересекает луч CD в точке X, а касательная к ω в точке B пересекает луч DC в точке Y. Прямая l проходит через центры окружностей, описанных около треугольников DOX и COY. Докажите, что l касается ω. (*А. Кузнецов*)

40. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

(*С. Берлов, Н. Власова*)

10 класс

41. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.

(*Методкомиссия*)

42. Петя и Вася по очереди выписывают на доску натуральные числа, не превосходящие 2018 (выписывать уже имеющееся число запрещено); начинает Петя. Если после хода игрока на доске оказываются три числа, образующих арифметическую прогрессию, — этот игрок выигрывает. У кого из игроков есть стратегия, позволяющая ему гарантированно выиграть?

(*М. Дидин, П. Кожевников*)

43. Положительные числа x, y таковы, что $x^5 - y^3 \geqslant 2x$. Докажите, что $x^3 \geqslant 2y$. *(Н. Агаханов)*

44. Пусть O — центр окружности Ω, описанной около остроугольного треугольника ABC. На дуге AC этой окружности, не содержащей точку B, взята точка P. На отрезке BC выбрана точка X так, что $PX \perp AC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BXP, лежит на окружности, описанной около треугольника ABO. *(И. Фролов)*

45. Дано нечётное число $n > 10$. Найдите количество способов расставить по кругу в некотором порядке натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, n$ так, чтобы каждое число являлось делителем суммы двух соседних с ним чисел. (Способы, отличающиеся поворотом или отражением, считаются одинаковыми.) *(Д. Храмцов)*

46. Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \ldots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Пусть число n делится на натуральное число d. Докажите, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d - 1$.

(Б. Обухов)

47. Из четырёх одинаковых треугольников сложен выпуклый четырёхугольник. Верно ли, что у этого четырёхугольника обязательно есть параллельные стороны? *(Методкомиссия)*

48. Дана клетчатая доска 1000×1000. Фигура *гепард* из произвольной клетки x бьёт все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x, за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?

(И. Богданов)

49. Докажите, что найдётся такое натуральное $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

(Р. Салимов)

50. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle C = 30°$. На его сторонах AB, BC и AC выбраны точки D, E и F соответственно так, что $\angle BFD = \angle BFE = 60^\circ$. Периметр треугольника ABC равен p, а периметр треугольника DEF равен p_1. Докажите, что $p \leqslant 2p_1$. *(А. Кузнецов)*

11 класс

51. Внутри выпуклого пятиугольника отметили точку и соединили её со всеми вершинами. Какое наибольшее число из десяти проведённых отрезков (пяти сторон и пяти отрезков, соединяющих отмеченную точку с вершинами пятиугольника) может иметь длину 1? *(А. Кузнецов)*

52. В каждую клетку таблицы 1001×1001 поставили 0 или 1. Оказалось, что в любом столбце нулей больше, чем единиц. Обязательно ли найдутся два столбца таких, что число строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только нули, больше числа строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только единицы? *(И. Богданов)*

53. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 135^\circ$. Пусть M — середина отрезка AC. Точка O — центр окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Луч BM вторично пересекает окружность Ω в точке D. Докажите, что центр окружности Γ, описанной около треугольника BOD, лежит на прямой AC. *(А. Кузнецов)*

54. Изначально на доску выписали числа $1-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$. Каждую минуту с доски стираются все три написанных на ней числа x, y и z, а вместо них на доску записываются числа $x^2 + xy + y^2$, $y^2 + yz + z^2$ и $z^2 + xz + x^2$. Могут ли в некоторый момент все три числа на доске оказаться рациональными? *(С. Кудря)*

55. Назовём *лодочкой*  трапецию с основаниями 1 и 3, получающуюся приклеиванием к противоположным сторонам единичного квадратика двух треугольничков (полуклеток). В квадрате 100×100 расположена невидимая лодочка (её можно поворачивать, она не выходит за границы квадрата, её средняя клетка целиком лежит на одной из клеток квадрата). Одним выстрелом можно накрыть любую треугольную половинку клетки. Если выстрел пересекается с внутренностью лодочки (то есть пересечение треугольника выстрела с лодочкой имеет ненулевую площадь), то она считается потопленной. Какого наименьшего количества выстрелов достаточно, чтобы наверняка потопить лодочку? (*С. Берлов, Н. Власова*)

56. Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \ldots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Пусть число n делится на натуральное число d. Докажите, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d-1$.

(*Б. Обухов*)

57. Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет условию

$$f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно чётная? (*О. Подлипский*)

58. Докажите, что найдётся такое натуральное $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

(*Р. Салимов*)

59. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

(*С. Берлов, Н. Власова*)

60. На сфере ω_1 отмечена фиксированная точка A, а на сфере ω_2 — фиксированная точка B. На сфере ω_1 выбирается переменная точка X, а на сфере ω_2 — переменная точка Y так, что $AX \parallel BY$. Докажите, что середины всех построенных таким образом отрезков XY лежат на одной сфере. (*А. Кузнецов*)

Олимпиада имени В. Р. Фридлендера

61. Опытный дрессировщик может вымыть слона за 40 минут, а начинающий — за 2 часа. За сколько времени они вдвоем вымоют трёх слонов?

62. Отец привел сына в тир и купил ему 20 пулек. За каждый промах отец отбирал у сына одну пульку, а за каждое попадание давал одну дополнительную. Сын выстрелил 18 раз, после чего пульки у него кончились. Сколько раз он попал?

63. Найдите сумму всех шестизначных чисел, в десятичной записи которых присутствуют только цифры 3 или 7.

64. Пусть D — дискриминант трёхчлена ax^2+bx+c с целыми коэффициентами. Докажите, что дискриминант D не может быть равен ни 2018, ни 2019.

65. В выпуклом четырёхугольнике три стороны равны друг другу $AB = BC = CD$. На доске отметили середины этих сторон P, Q и R, остальное изображение стёрли. Восстановите исходный четырёхугольник с помощью циркуля и линейки.

66. Докажите, что на плоскости не существует равнобедренного треугольника с углом при вершине $45°$, вершины которого находятся в точках с целыми координатами.

67. Даны три числа x, y и z, удовлетворяющие неравенствам $0 < x < y < z < x + y$. Гарантируют ли эти неравенства существование треугольника

а) с высотами, равными x, y и z?
б) с медианами, равными x, y и z?

68. Имеются в неограниченном количестве прямоугольные детали 1×2, 1×3, 1×4, и так далее. Пусть $T(n)$ — число способов покрыть этими деталями (без пустых мест и наложений друг на друга) полоску размера $1 \times n$, где n — натуральное число. Заполнения, отличающиеся размерами укладываемых деталей или порядком укладки деталей на листе, считаются разными. Докажите, что $T(n) + T(n + 1) = T(n + 2)$.

69. Произведение всех делителей числа n оканчивается на 2018 нулей. На сколько нулей может оканчиваться само число n?

70. В окружность радиуса 1 вписывается квадрат, в квадрат вписывается окружность, в эту окружность — 8-угольник, в него — снова окружность, в окружность — 16-угольник и так далее. Каждый раз в окружность с номером k вписывается 2^{k+1}-угольник, а в него — окружность с номером $k+1$. Пусть R_k — радиус k-ой окружности. Найдите $\lim_{n\to\infty} R_k$.

Турнир юных математиков им. Н. И. Лобачевского

5 класс

71. Две улитки ползут наперегонки. Первая проползает 7 метров за каждые 8 часов, а вторая — 8 метров за каждые 9 часов. Какая улитка ползёт быстрее?

72. В ящике лежат красные, синие, зелёные и белые шарики. Известно, что красных шариков в два раза больше, чем синих, синих в два раза больше, чем зелёных, а число белых шариков больше 10. Сколько шариков каждого цвета лежит в ящике, если всего их 30? (В ящике есть шарики каждого цвета.)

73. Марсианские шахматы отличаются от шахмат землян размерами доски и правилами ходов фигур. Например, марсианская ладья делает ходы, как и обычная ладья, но только длиной в *одну* или *три* клетки (вперёд, назад, влево или вправо). Может ли эта ладья обойти все клетки доски 7×7, побывав на каждой клетке ровно один раз, и вернуться в начальную клетку?

74. На деревьях, расположенных по кругу, сидят 50 чижей (на каждом дереве по одному), некоторые из них жёлтого цвета. Оказалось, что рядом с каждым чижом обязательно сидит хотя бы один жёлтый чиж. Какое наименьшее число жёлтых чижей может быть на деревьях?

75. Прямоугольник 4×6 разбит прямыми на 24 одинаковые квадратные клетки. В некоторых клетках проведена диагональ, при этом никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца). Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?

6 класс

76. Из числа 87654321 вычёркивается минимальное количество цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 6. Какое число останется после вычёркивания цифр? Найдите все способы.

77. В ящике лежат красные, синие, зелёные и белые шарики. Известно, что красных шариков в три раза больше, чем синих, синих в три раза больше, чем зелёных, а число белых шариков больше 10. Сколько шариков каждого цвета лежит в ящике, если всего их 40? (В ящике есть шарики каждого цвета.)

78. Найдите *наименьшую* несократимую положительную дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{77}{888}$ и $\frac{88}{777}$ получаются целые числа.

79. В наборе из 6 гирек ровно одна гирька имеет массу 3 *г* и ровно одна гирька — массу 6 *г*, масса каждой из остальных гирек — целое число граммов. Известно, что любой вес в целое число граммов от 1 *г* до 47 *г* можно взвесить с помощью этих гирь *единственным* образом. Найдите массы всех остальных гирек набора. Укажите все возможные наборы. (Гирьки можно ставить только на одну чашу весов.)

80. Марсианские шахматы отличаются от шахмат землян формой доски (рис. 2) и правилами ходов фигур. Например, марсианская ладья ходит так же, как и обычная ладья, — по вертикали и по горизонтали — но только на одну клетку (вперёд, назад, влево или вправо). Какое *наименьшее* число марсианских ладей нужно расставить на марсианской шахматной доске так, чтобы они били все остальные клетки доски?

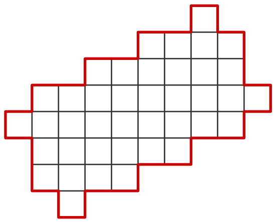


Рис. 2

7 класс

81. Из числа 987654321 вычёркивается минимальное количество цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 12. Какое число останется после вычёркивания цифр? Найдите все способы.

82. В наборе из 6 гирек есть две гирьки массой 3 *г*, а масса каждой из остальных гирек — целое число граммов. Известно, что любой вес в целое число граммов от 1 *г* до 35 *г* можно взвесить с помощью этих гирь *единственным* образом. Найдите массы всех остальных гирек набора. Укажите все возможные наборы. (Гирьки можно ставить только на одну чашу весов.)

83. На конференцию по вопросам магии и волшебства приехало 900 фей и ведьм. Среди участниц конференции есть и феи, и ведьмы. Все они были рассажены за круглым столом. На вопрос «Верно ли, что рядом с вами сидит одна фея и одна ведьма?» все дружно ответили «Нет». Ведьмы всегда лгут, а феи всегда говорят правду. Сколько фей могло участвовать в конференции?

84. На отрезке AB отметили точку X, а затем построили два равносторонних треугольника AXY и BXZ по одну сторону от AB. Чему равен угол XYZ, если $AX = 1$ и $XB = 2$?

85. Прямоугольник 4×7 разбит прямыми на 28 одинаковых квадратных клеток. В некоторых клетках проведена диагональ, при этом никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца). Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?

Олимпиада «Путь к Олимпу»

8 класс

86. К чётному числу n прибавили его наибольший делитель, отличный от n. Может ли полученная сумма равняться 2018?

87. Собранный мёд заполняет несколько 50-литровых бидонов. Если его разлить в 40-литровые бидоны, то понадобится на 5 бидонов больше, но один из них останется неполным. Если собранный мёд разлить в 70-литровые бидоны, то понадобится на 4 бидона меньше, но снова один из них окажется неполным. Сколько 50-литровых бидонов заполняет собранный мёд?

88. Можно ли расставить числа от 1 до 7 по кругу так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей?

89. У Маши есть 45 гирек, массы которых — все натуральные числа от 1 до 45. Может ли Маша дать по 15 гирек своим подругам Саше и Даше так, чтобы выполнилось следующее условие: какие бы две своих гирьки ни положили на одну чашку весов Саша и Даша — по одной каждая, Маша сможет положить на другую чашку весов одну или две свои гирьки так, чтобы весы уравновесились?

90. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AK и AL на биссектрисы *внешних* углов B и C. Найдите отрезок KL, если периметр треугольника ABC равен 10.

9 класс

91. Два брата родились в один день, но в разные годы. Оказалось, что в 2017 году каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. Определите год рождения каждого из братьев.

92. Известно, что числа 2011 и 2017 — простые. Найдите хотя бы одно натуральное число, сумма всех делителей которого (не считая самого этого числа) равна 2017.

93. Докажите, что *при любых* a и b хотя бы одно из уравнений $x^2 + 2ax + ab = 0$ и $x^2 + 2bx + ab = 0$ имеет решение.

94. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C катет BC равен 12, а радиус вписанной окружности равен 5. Вписанная окружность касается катета AC в точке D. Найдите длину хорды, соединяющей точки пересечения прямой BD с окружностью.

95. В теннисном турнире принимают участие 10 участников. Сколькими способами можно составить расписание 5 матчей в первом круге турнира, так чтобы *каждый* участник играл только один раз?

10 класс

96. Четырёхзначное число является квадратом целого числа. Если стереть первую (слева) цифру, то оставшееся число будет кубом целого числа. Если после этого стереть ещё и следующую цифру, оно превратится в четвёртую степень целого числа. Каким могло быть первоначальное число?

97. Сумма действительных чисел x, y, z равна 2018, а сумма их обратных величин равна 2018^{-1}. Какие значения может принимать выражение $(x - 2018)(y - 2018)(z - 2018)$?

98. В теннисном турнире принимают участие 10 участников. Сколькими способами можно составить расписание 5 матчей в первом круге турнира, так чтобы *каждый* участник играл только один раз?

99. На катетах a и b прямоугольного треугольника выбираются точки A и B. Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров AA_1 и BB_1, опущенных на гипотенузу. Найдите наименьшее возможное значение суммы $A_1A + AB + BB_1$.

100. Для любых действительных чисел x и y, принадлежащих $[0; 1]$, докажите:

$$\sqrt{x(1-y)} + \sqrt{y(1-x)} \leqslant 1.$$

11 класс

101. Собранный мёд заполняет несколько 50-литровых бидонов. Если его разлить в 40-литровые бидоны, то понадобится на 5 бидонов больше, но один из них останется неполным. Если собранный мёд разлить в 70-литровые бидоны, то понадобится на 4 бидона меньше, но снова один из них окажется неполным. Сколько 50-литровых бидонов заполняет собранный мёд?

102. Сумма действительных чисел x, y, z равна 2018, а сумма их обратных величин равна 2018^{-1}. Какие значения может принимать выражение $(x-2018)(y-2018)(z-2018)$?

103. В периодической десятичной дроби $0{,}1212\ldots$ первую цифру после запятой заменили на 3. Во сколько раз полученное число больше исходного?

104. На катетах a и b прямоугольного треугольника выбираются точки A и B. Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров AA_1 и BB_1, опущенных на гипотенузу. Найдите наименьшее возможное значение суммы $A_1A + AB + BB_1$.

105. Для любых действительных чисел x, y и z, принадлежащих $[0;\ 1]$, докажите:

$$\sqrt{x(1-y)} + \sqrt{y(1-z)} + \sqrt{z(1-x)} \leqslant \frac{3}{2}\,.$$

Оглавление