

УДК 519.632.4

РАЗРЫВНЫЙ СМЕШАННЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА БЕЗ ШТРАФА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹⁾

© 2013 г. Р. З. Даутов, Е. М. Федотов

(420008 Казань, ул. Кремлевская, 18, Казанский (Приволжский) Федеральный ун-т)

e-mail: rdautov@kpfu.ru, Eugeny.Fedotov@kpfu.ru

Поступила в редакцию 21.02.2013 г.

Переработанный вариант 22.05.2013 г.

В работе исследуются дискретные схемы для приближенного решения задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка дивергентного вида. Дискретные схемы принадлежат семейству схем разрывного метода Галеркина (DG-схем) в смешанной формулировке и не содержат параметров внутреннего штрафа. Получены оценки точности, характерные для DG-схем с внутренним штрафом. Новым в анализе схем является доказательство справедливости условия Ладыженской–Бабушки–Бреци (LBB (inf-sup)-условия) для изучаемых схем. Библ. 20.

Ключевые слова: разрывный метод Галеркина, смешанный метод, квазилинейные эллиптические уравнения, оценка точности, LBB-условие.

DOI: 10.7868/S0044466913110021

1. ВВЕДЕНИЕ

В [1] был предложен способ построения противопотоковых неконформных схем метода конечных элементов (МКЭ) произвольного порядка аппроксимации для решения линейных нестационарных задач конвекции–диффузии, который далее был обобщен в [2] для аналогичных квазилинейных уравнений. В этих работах была исследована устойчивость схем, но не было получено соответствующих оценок точности. В данной работе мы восполняем этот пробел и исследуем точность схем из [2] для аппроксимации следующей стационарной задачи²⁾:

$$-\nabla \cdot k(x, u, \nabla u) + k_0(x, u, \nabla u) = f, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\Gamma_D} = 0, \quad (1)$$

в многогранной области $\Omega \subset R^d$, $d \geq 1$, с границей Γ_D . Предполагается, что коэффициенты $k(x, \xi) = (k_1(x, \xi), k_2(x, \xi), \dots, k_d(x, \xi))$, $k_0(x, \xi)$ непрерывны по $x \in \bar{\Omega}$ при любых значениях $\xi \in R^{d+1}$; кроме того, для любого $x \in \Omega$ справедливы оценки

$$|k_i(x, \xi) - k_i(x, \eta)| \leq \beta |\xi - \eta| \quad \forall \xi, \eta \in R^{d+1}, \quad i = 0, \dots, d, \quad \beta = \text{const} > 0, \quad (2)$$

$$(k(x, \sigma_0, \sigma) - k(x, \eta_0, \eta)) \cdot (\sigma - \eta) + (k_0(x, \sigma_0, \sigma) - k_0(x, \eta_0, \eta))(\sigma_0 - \eta_0) \geq \alpha |\sigma - \eta|^2 \quad (3)$$

$$\forall \sigma_0, \eta_0 \in R, \quad \sigma, \eta \in R^d, \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

(Согласно теории монотонных операторов этих условий достаточно для существования и единственности обобщенного решения задачи в пространстве Соболева $H_0^1(\Omega)$).

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 13-01-00908, 12-01-97022).

²⁾ Перенесение полученных нами оценок на аналогичную параболическую задачу не представляет трудностей.

Исследуемая нами схема была получена как некоторая предельная аппроксимация Галеркина—Петрова, основанная на смешанной форме записи уравнения (1) в виде следующей системы уравнений первого порядка:

$$-\nabla \cdot q + q_0 = f, \quad q = k(x, u, \sigma), \quad q_0 = k_0(x, u, \sigma), \quad \sigma = \nabla u. \quad (4)$$

Позднее было обнаружено, что она является представителем более широкого класса так называемых схем разрывного метода Галеркина (DG- или DGFEM-схем), и для линейной эллиптической задачи близкая схема несколько ранее была предложена и исследована в [3]. DG-методы (см. [4]) занимают промежуточное положение между методом конечных объемов и МКЭ и имеют немало хороших свойств обоих методов; это обеспечивает практическую основу для разработки высокоточных методов на основе неструктурированных сеток. DG-методы были предложены в начале 1970-х годов и получили признание как методы решения гиперболических задач, а также параболических задач с доминирующей частью первого порядка, характерных для механики жидкостей и газов, электродинамики и физики плазмы.

Последние 15 лет активно разрабатываются DG-схемы и для решения эллиптических задач второго и четвертого порядков. Отметим работы [5]–[7], посвященные линейным задачам (в [6] также имеется исторический обзор развития DG-методов); в [7] проведено сравнение различных методов с практической точки зрения. Число публикаций, посвященных нелинейным задачам, постоянно растет (см., например, схемы со штрафом из [8]–[12]). Как и схемы МКЭ, DG-схемы для эллиптических задач имеют две формулировки — основную и смешанную, в зависимости от формы записи исходных уравнений. Благодаря локальному характеру используемых аппроксимаций, в DG-схемах легко перейти от смешанной формы к основной, поэлементно исключая вторичные неизвестные; в этом случае получается дискретная задача для определения приближения к решению u .

Основная проблема, которую приходится преодолевать при конструировании DG-схем, связана с обеспечением ее однозначной разрешимости. В классическом МКЭ эта проблема решалась за счет конформности метода, т.е. введением достаточных связей между элементами; в неконформном МКЭ межэлементные связи ослаблены, и поэтому их однозначная разрешимость устанавливается сложнее (например в случае, когда определенная непрерывность приближений требуется лишь в отдельных узлах на межэлементных границах). В DG-схемах связи между элементами максимально ослаблены и задаются лишь определением межэлементных “потоков”. В этом кроется причина того, что в большинство DG-схем вводятся дополнительные слагаемые, “штрафующие” за нарушение непрерывности приближенного решения и обеспечивающие однозначную разрешимость схемы.

Смешанные DG-методы имеют седловую структуру, и их однозначная разрешимость напрямую связана с выполнением условия Ладыженской—Бабушки—Бреци (с LBB-оценкой, см., например, [13, п. II.2.3, с. 57]). Нам не известно его доказательство для какой-либо DG-схемы без штрафа; в данной работе мы установим оценку LBB для схемы из [2], не содержащей дополнительных параметров стабилизации решения (см. далее оценку (10) и разд. 7). Наличие LBB-оценки позволяет не только установить устойчивость схемы, но и существенно упростить задачу исследования ее точности.

Дадим краткий обзор содержания работы. В следующем разделе мы даем определение схемы, в разд. 3 доказываются ее устойчивость, оценки точности устанавливаются в разд. 4. В разд. 5 кратко обсуждаются способы построения векторного поля p единичных нормалей на гранях конечных элементов, которое используется в конструкции схемы. В разд. 6 дается описание “осредненной по p ” схемы. И, наконец, в разд. 7 приводится доказательство LBB-оценки.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЕТОЧНОЙ СХЕМЫ

Пусть $\{\mathcal{T}_h\}_h$ есть регулярное семейство разбиений области Ω на d -симплексы (будем называть их также симплексами или конечными элементами и считать открытыми множествами; 2-симплекс — это треугольник, 3-симплекс — тетраэдр) максимального диаметра $h > 0$ такое, что всякая грань симплекса из $\mathcal{T}_h$ ($(d-1)$ -симплекс) есть или подмножество границы Γ_D , или грань соседнего симплекса (см. [14, с. 134]). (Т.е. для любого $K \in \mathcal{T}_h$ справедливо отношение $h/\rho_K \leq c$, где ρ_K есть радиус шара максимального диаметра, вписанного в $\bar{K}$; здесь и всюду далее буквы c или C , возможно с индексами, будут означать различные положительные постоянные, не зависящие от h .) Произвольный симплекс условимся обозначать через K , через ∂K — его границу; под Γ_h будем по-

нимать объединение множества всех внутренних граней элементов из $\mathcal{T}_h$; под e — произвольную грань элементов. Далее n_K означает поле единичных нормалей на ∂K , направленных вне K ; под $|K|$ и $|e|$ будем понимать d -мерную меру K и $(d-1)$ -мерную меру e соответственно.

Пусть, далее, $P_m(K)$ есть множество полиномов степени не выше m по совокупности переменных, определенных на K . Пространство конечных элементов для аппроксимации решения u определим при заданном $m \geq 1$ следующим образом:

$$V_h = \{v \in L_\infty(\Omega) : v|_K \in P_m(K), K \in \mathcal{T}_h, v|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

Аналогично введем пространство для аппроксимации q_0 и компонент q и σ :

$$W_h = \{w \in L_\infty(\Omega) : w|_K \in P_m(K), K \in \mathcal{T}_h\}, \quad W_h^d = [W_h]^d.$$

Отметим, что функции из этих пространств не обязаны быть непрерывными в Ω ; также заметим, что $V_h \subset W_h$, $\nabla_h V_h \subset W_h^d$, где ∇_h определяется поэлементно как ∇ .

Пространство V_h снабдим нормой $\|\cdot\|_{1,h}$,

$$\|v\|_{1,h}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla v|^2 dx + h^{-1} \int_{\Gamma_h} [v]^2 ds,$$

где $[v]$ означает скачок функции v ; пространство W_h^d наделим нормой $\|w\|_{0,\Omega} = \|w\|_{L_2(\Omega)}$. В [15] доказано, что имеет место следующий дискретный аналог неравенства Фридрихса:

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq c \|v\|_{1,h} \quad \forall v \in V_h. \quad (5)$$

Функции из V_h и W_h^d на множестве Γ_h являются двузначными. Чтобы заложить в конструкцию схемы подходящий механизм отбора их однозначных значений, в [2] предложено использовать специальное кусочно-постоянное векторное поле p единичных нормалей на $\Gamma_h \cup \Gamma_D$, которое назовем потоком на $\Gamma_h \cup \Gamma_D$; если K и K' — два соседних элемента с общей гранью e , а вектор $p|_e$ направлен из K в K' , то будем говорить, что $p|_e$ выходит из K и входит в K' . Поле p определяется произвольным образом, но так, чтобы для любого элемента $K \in \mathcal{T}_h$ нашлась выходящая из K нормаль $p|_e$, так что $(p \cdot n_K)^-|_e = 0$. Здесь и далее $v^\pm = \max\{\pm v, 0\}$ есть положительная и отрицательная части функции v ; $v = v^+ - v^-$. Конструктивные способы построения таких полей p обсуждаются далее в разд. 5.

Для предельных значений функций, терпящих разрыв на Γ_h , введем обозначение вида $w_{\pm p}(x) = \lim_{\eta \rightarrow +0} w(x \pm \eta p)$, через $[w]_p(x) = w_{+p}(x) - w_{-p}(x)$ обозначим скачок w в точке $x \in \Gamma_h$ вдоль нормали $p(x)$. Положим $[w]_p(x) = 0$, если $x \in \Gamma_D$. В схему закладывается следующий противопотоковый способ отбора значения функции $u_h \in V_h$ на общей границе e двух элементов K и K' : $u_h|_e = u_{h,-p} = (p \cdot n_K)^+ u_h|_K + (p \cdot n_K)^- u_h|_{K'}$; наоборот, для $q_h \in W_h^d$ принимается значение по потоку: $q_h|_e = q_{h,+p} = (p \cdot n_K)^+ q_h|_K + (p \cdot n_K)^- q_h|_{K'}$. (В [3] принят аналогичный способ: $u_h|_e = (u_h|_K + u_h|_{K'})/2 + (u_h|_K - u_h|_{K'})\beta$, $q_h|_e = (q_h|_K + q_h|_{K'})/2 - (q_h|_K - q_h|_{K'})\beta$, где $\beta = \text{sign}(v_0 \cdot n_K)/2$, $v_0 \in H(\text{div}, \Omega)$ — любое кусочно-постоянное векторное поле (см. разд. 5).)

Под разрывным смешанным методом Галеркина для приближенного решения задачи (1) будем понимать следующую дискретную задачу: найти функцию $u_h \in V_h$, а также вектор-функции $\sigma_h, q_h \in W_h^d$ и $q_{0,h} \in W_h$ такие, что u_h удовлетворяет тождеству (правильнее было бы писать $a_h^{(p)}, u_h^{(p)}$,

$\sigma_h^{(p)}$ и т.д., однако для краткости мы опускаем зависимость схемы и, соответственно, решения от потока p)

$$a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega} q_{0,h} v_h dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q_h \cdot \nabla v_h dx + \int_{\Gamma_h} q_{h,+p} \cdot p [v_h]_p ds, \quad f_h(v_h) = \int_{\Omega} f v_h dx, \quad (6)$$

где функции $\sigma_h = \sigma_h(u_h)$, $q_h = q_h(u_h)$ и $q_{0,h} = q_{0,h}(u_h)$ определяются по u_h из тождеств

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot w_h dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K u_h \nabla \cdot w_h dx + \int_{\Gamma_h} u_{h,-p} [w_h]_p \cdot p ds = 0 \quad \forall w_h \in W_h^d, \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} [(q_h - k(x, u_h, \sigma_h)) \cdot w_h + (q_{0,h} - k_0(x, u_h, \sigma_h)) w_{0,h}] dx = 0 \quad \forall w_h \in W_h^d, \quad w_{0,h} \in W_h. \quad (8)$$

Отметим, что локальная ориентация p не влияет на значение выражения $[w_h]_p \cdot p$ на Γ_h в (7). Например, $[w_h]_p \cdot p = [w_h]_{n_K} \cdot n_K$ на $e \subset \partial K$ для любого $K \in \mathcal{T}_h$; это замечание справедливо и для выражения $[v_h]_p \cdot p$ в определении формы a_h . Важно определение сомножителей при этих величинах. Суть их определения раскрывает следующая

Лемма 1. Пусть билинейные формы b_h на $V_h \times W_h^d$ и c_h на $W_h^d \times V_h$ заданы так, что выполняются соотношения

$$b_h(u_h, w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K u_h \nabla \cdot w_h dx + \int_{\Gamma_h} u_{h,-p} [w_h]_p \cdot p ds,$$

$$c_h(w_h, u_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K w_h \cdot \nabla u_h dx + \int_{\Gamma_h} w_{h,+p} \cdot p [u_h]_p ds,$$

$\sigma_h = \sigma_h(u_h)$ определяется из тождества (7). Тогда имеем

$$b_h(u_h, w_h) = -c_h(w_h, u_h) \quad \forall u_h \in V_h, \quad w_h \in W_h^d, \quad (9)$$

$$\|\sigma_h(u_h)\|_{0,\Omega} \geq C \|u_h\|_{1,h} \quad \forall u_h \in V_h. \quad (10)$$

Доказательство утверждения (9) фактически содержится в лемме 2 ниже, доказательство (10), в силу его громоздкости, вынесено в заключительный разд. 7. Заметим, что форма b_h фигурирует в (7), а форма c_h является частью формы a_h . Оценка (10), как нетрудно видеть, эквивалентна LBB-оценке

$$\inf_{u_h \in V_h} \sup_{w_h \in W_h^d} \frac{|b_h(u_h, w_h)|}{\|u_h\|_{1,h} \|w_h\|_{0,\Omega}} \geq C > 0.$$

Отметим также, что естественные способы выбора в конструкции схемы $u_h|_e = (u_h|_K + u_h|_K)/2$, $q_h|_e = (q_h|_K + q_h|_K)/2$, либо $u_h|_e = u_h|_K$, $q_h|_e = q_h|_K$, либо $u_h|_e = u_h|_K$, $q_h|_e = q_h|_K$, приводят к тому, что утверждение (9) для таких схем сохраняется, но оценка (10) не имеет места. Вследствие этого схемы оказываются вырожденными и для их практического использования требуется вводить дополнительные параметры, “штрафующие” разрывы u_h (см., например, [16] для первого варианта выбора пары $(u_h, q_h)|_e$).

3. УСТОЙЧИВОСТЬ СЕТОЧНОЙ СХЕМЫ

Установим сильную монотонность формы a_h .

Лемма 2. Пусть выполнено условие (3). Тогда для любых $u_{1,h}, u_{2,h} \in V_h$ справедливо неравенство

$$a_h(u_{1,h}, u_{1,h} - u_{2,h}) - a_h(u_{2,h}, u_{1,h} - u_{2,h}) \geq c \|u_{1,h} - u_{2,h}\|_{1,h}^2.$$

Доказательство. Через $\sigma_{\alpha,h}, q_{\alpha,h}, q_{0,\alpha,h}$ обозначим решения уравнений (7), (8) при $u_h = u_{\alpha,h}$, $\alpha = 1, 2$. Для $z = u_{1,h} - u_{2,h}$, $z_q = q_{1,h} - q_{2,h}$, $z_{q,0} = q_{0,1,h} - q_{0,2,h}$ и $z_\sigma = \sigma_{1,h} - \sigma_{2,h}$ имеем

$$a_h(u_{1,h}, z) - a_h(u_{2,h}, z) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (z_q \cdot \nabla z + z_{q,0} z) dx + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e [z_q]_p \cdot p [z]_p ds, \quad (11)$$

а также

$$\int_\Omega z_\sigma \cdot w_h dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K z \nabla \cdot w_h dx + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e [z]_p [w_h]_p \cdot p ds = 0 \quad \forall w_h \in W_h^d, \quad (12)$$

$$\int_\Omega z_q \cdot w_h dx = \int_\Omega (k(x, u_{1,h}, \sigma_{1,h}) - k(x, u_{2,h}, \sigma_{2,h})) \cdot w_h dx \quad \forall w_h \in W_h^d, \quad (13)$$

$$\int_\Omega z_{q,0} w_{0,h} dx = \int_\Omega (k_0(x, u_{1,h}, \sigma_{1,h}) - k_0(x, u_{2,h}, \sigma_{2,h})) w_{0,h} dx \quad \forall w_{0,h} \in W_h. \quad (14)$$

Положим $w_h = -z_q$ в (12), $w_h = z_\sigma$ в (13), $w_{0,h} = z$, а затем сложим полученные равенства и (11). В результате получим соотношение

$$\begin{aligned} a_h(u_{1,h}, z) - a_h(u_{2,h}, z) &= \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (z \nabla \cdot z_q + z_q \cdot \nabla z) dx + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e ([z]_p z_{q,+p} + z_{-p} [z_q]_p) \cdot p ds \right] + \\ &+ \int_\Omega [(k(x, u_{1,h}, \sigma_{1,h}) - k(x, u_{2,h}, \sigma_{2,h})) \cdot z_\sigma + (k_0(x, u_{1,h}, \sigma_{1,h}) - k_0(x, u_{2,h}, \sigma_{2,h})) z] dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как $z \nabla \cdot z_q + z_q \cdot \nabla z = \nabla \cdot (z z_q)$ и $[z]_p z_{q,+p} + z_{-p} [z_q]_p = [z z_q]_p$, то слагаемое в квадратных скобках равно нулю; поэтому, благодаря (3) и (10) ($z_\sigma = \sigma_h(z)$), из (15) вытекает оценка

$$a_h(u_{1,h}, u_{1,h} - u_{2,h}) - a_h(u_{2,h}, u_{1,h} - u_{2,h}) \geq \alpha \|\sigma_h(z)\|_{0,\Omega}^2 \geq C \alpha \|z\|_{1,h}^2. \quad (16)$$

Теорема 1. Пусть $u_{\alpha,h}, \sigma_{\alpha,h}, q_{\alpha,h}, q_{0,\alpha,h}$ — решение схемы (6)–(8) с правой частью $f_{\alpha,h} \in V_h^*$, $\alpha = 1, 2$, и выполнены условия (2), (3). Тогда справедлива оценка устойчивости

$$\|u_{1,h} - u_{2,h}\|_{1,h} + \|\sigma_{1,h} - \sigma_{2,h}\|_{0,\Omega} + \|q_{1,h} - q_{2,h}\|_{0,\Omega} + \|q_{0,1,h} - q_{0,2,h}\|_{0,\Omega} \leq c \|f_{1,h} - f_{2,h}\|_{-1,h},$$

где $\|\cdot\|_{-1,h}$ есть норма на V_h^* , $\|f\|_{-1,h} = \sup_{v_h \in V_h} (|f(v_h)|) / \|v_h\|_{1,h}$.

Доказательство. Воспользуемся принятыми при доказательстве леммы 2 обозначениями. Пользуясь оценками в (16), заключаем, что

$$\begin{aligned} \alpha \|\sigma_{1,h} - \sigma_{2,h}\|_{0,\Omega}^2 &\leq a_h(u_{1,h}, u_{1,h} - u_{2,h}) - a_h(u_{2,h}, u_{1,h} - u_{2,h}) = (f_{1,h} - f_{2,h})(u_{1,h} - u_{2,h}) \leq \\ &\leq \|f_{1,h} - f_{2,h}\|_{-1,h} \|u_{1,h} - u_{2,h}\|_{1,h} \leq C^{-1} \|f_{1,h} - f_{2,h}\|_{-1,h} \|\sigma_{1,h} - \sigma_{2,h}\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Отсюда и из второй оценки в (16) имеем

$$\|u_{1,h} - u_{2,h}\|_{1,h} + \|\sigma_{1,h} - \sigma_{2,h}\|_{0,\Omega} \leq c \|f_{1,h} - f_{2,h}\|_{-1,h}. \quad (17)$$

Из (13), (14) и липшицевости коэффициентов непосредственно следует также, что

$$\|q_{1,h} - q_{2,h}\|_{0,\Omega} + \|q_{0,1,h} - q_{0,2,h}\|_{0,\Omega} \leq c(\|u_{1,h} - u_{2,h}\|_{1,h} + \|\sigma_{1,h} - \sigma_{2,h}\|_{0,\Omega}). \quad (18)$$

Утверждение теоремы теперь следует из оценок (17), (18). Теорема доказана.

4. ТОЧНОСТЬ СЕТОЧНОЙ СХЕМЫ

Для норм и полунорм в пространстве $H^k(D)$ мы используем соответственно обозначения $\|\cdot\|_{k,D}$ и $|\cdot|_{k,D}$. Далее нам потребуются следующие утверждения, справедливые для регулярного семейства триангуляций $\mathcal{T}_h$ и $K \in \mathcal{T}_h$.

Лемма 3 (см. [17]). *Справедлива оценка $\|v_h\|_{0,\partial K} \leq c_m h^{-1/2} \|v_h\|_{0,K}$, $v_h \in P_m(K)$, $m \geq 0$.*

Лемма 4 (см. [18]). *Пусть $I_K(v)$ есть $L_2(K)$ -проекция $v \in H^{k+1}(K)$ на $P_m(K)$, $m, k \geq 0$, $\ell = \min\{k, m\}$. Тогда имеем $\|v - I_K(v)\|_{0,K} \leq ch^{\ell+1} |v|_{\ell+1,K}$, $\|v - I_K(v)\|_{0,\partial K} \leq ch^{\ell+1/2} |v|_{\ell+1,K}$.*

Лемма 5 (см. [19]). *Существует проектор $I_\Omega: H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h \cap C(\bar{\Omega})$ такой, что для $u \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $k \geq 0$, $\ell = \min\{k, m\}$, справедлива оценка $\|u - I_\Omega(u)\|_{1,\Omega} \leq ch^\ell |u|_{\ell+1,\Omega}$. (Пространство $V_h \cap C(\bar{\Omega})$ представляет собой обычное в МКЭ пространство конформных симплексиальных конечных элементов степени m , например лагранжевых.)*

Теорема 2. *Пусть u есть решение исходной задачи (1); функции q , q_0 и σ определяются согласно (4) и u_h , q_h , $q_{0,h}$ и σ_h — решение схемы (6)–(8). Пусть выполнены условия (2), (3) и $u \in H^{m+1}(\Omega)$, $q \in [H^m(\Omega)]^m$, $q_0 \in H^m(\Omega)$. Тогда справедлива оценка*

$$\left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (|q - q_h|^2 + |q_0 - q_{0,h}|^2 + |\nabla u - \sigma_h|^2 + |\nabla u - \nabla u_h|^2) dx \right]^{1/2} + \|u - u_h\|_{0,\Omega} + \left(\sum_{e \in \Gamma_h} \frac{1}{h} \int_e [u_h]^2 ds \right)^{1/2} \leq ch^m (|u|_{m+1,\Omega} + |q|_{m,\Omega} + |q_0|_{m,\Omega}).$$

Доказательство. Пусть $u_I = I_\Omega(u)$ определяется согласно лемме 5. Определим поэлементно $\sigma_{\mathcal{F}} = \nabla u_I$. Ясно, что $\sigma_{\mathcal{F}} \in W_h^d$. Отметим прежде всего два одинаково проверяемых тождества:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (k(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v_h + k_0(x, u, \nabla u) v_h) dx + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e k(x, u, \nabla u) \cdot p [v_h]_p ds = \int_\Omega f v_h dx \quad \forall v_h \in V_h, \quad (19)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \sigma_{\mathcal{F}} \cdot w_h dx + \int_K u_I \nabla \cdot w_h dx \right] + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e u_I [w_h]_p \cdot p ds = 0 \quad \forall w_h \in W_h^d. \quad (20)$$

Для их проверки достаточно проинтегрировать по частям, учесть уравнение (1), непрерывность u_I и то, что значения $[v_h]_p p$ и $[w_h]_p \cdot p$ на e не зависят от ориентации нормали p .

Сформулируем дискретную задачу, решение которой есть u_I . Для этого по u_I и $\sigma_{\mathcal{F}} = \nabla u_I$, удовлетворяющему условию (20), определим $q_{\mathcal{F}} \in W_h^d$ и $q_{0,\mathcal{F}} \in W_h$ такие, что

$$\int_\Omega [(q_{\mathcal{F}} - k(x, u_I, \sigma_{\mathcal{F}})) \cdot w_h + (q_{0,\mathcal{F}} - k_0(x, u_I, \sigma_{\mathcal{F}})) w_{0,h}] dx = 0 \quad (21)$$

для любых $w_h \in W_h^d$, $w_{0,h} \in W_h$. Тождества (20) и (21) соответствуют тождествам (7) и (8) в определении формы a_h . По определению имеем

$$a_h(u_I, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (q_{\mathcal{J}} \cdot \nabla v_h + q_{0,\mathcal{J}} v_h) dx + \int_{\Gamma_h} q_{\mathcal{J},+p} \cdot p[v_h]_p ds.$$

Определим функционал $f_{\mathcal{J}}(v_h) = a_h(u_I, v_h)$, $v_h \in V_h$; таким образом мы получили искомое тождество для $u_I \in V_h$: $a_h(u_I, v_h) = f_{\mathcal{J}}(v_h) \forall v_h \in V_h$. Сравнивая эту задачу со схемой (6)–(8), согласно теореме об устойчивости получаем

$$\|u_h - u_I\|_{1,h} + \|\sigma_h - \sigma_{\mathcal{J}}\|_{0,\Omega} + \|q_h - q_{\mathcal{J}}\|_{0,\Omega} + \|q_{0,h} - q_{0,\mathcal{J}}\|_{0,\Omega} \leq c \|f_h - f_{\mathcal{J}}\|_{-1,h}. \quad (22)$$

Воспользуемся тождеством (19), которое дает эквивалентное определение функционала f_h . Тогда для $\psi_h = f_h - f_{\mathcal{J}}$ получим следующее представление:

$$\begin{aligned} \psi_h(v_h) = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K [(k(x, u, \nabla u) - k(x, u_I, \nabla u_I)) \cdot \nabla v_h + (k_0(x, u, \nabla u) - k_0(x, u_I, \nabla u_I)) v_h] dx + \\ & + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e (k(x, u, \nabla u) - q_{\mathcal{J},+p}) \cdot p[v_h]_p ds = \psi_{\Omega} + \psi_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $q_{\mathcal{J}}$ определяется тождеством (21). Липшиц-непрерывность коэффициентов k_i позволяет просто оценить первое слагаемое в (23) (с привлечением оценки (5)):

$$|\psi_{\Omega}| \leq c \|u - u_I\|_{1,\Omega} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v_h\|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \leq c \|u - u_I\|_{1,\Omega} \|v_h\|_{1,h}. \quad (24)$$

Второе слагаемое в (23) представим в виде ($q = k(x, u, \nabla u)$)

$$\psi_{\Gamma} = \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e (q - q_{+p}^{\mathcal{J}}) \cdot p[v_h]_p ds + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e (q_{+p}^{\mathcal{J}} - q_{\mathcal{J},+p}) \cdot p[v_h]_p ds, \quad (25)$$

где $q^{\mathcal{J}} \in W_h^d$ является $L_2(\Omega)$ -проекцией элемента q на пространство W_h^d :

$$\int_{\Omega} (q^{\mathcal{J}} - q) \cdot w_h dx = 0 \quad \forall w_h \in W_h^d.$$

Для оценки первого слагаемого в правой части (25) воспользуемся неравенством Коши,

$$\left| \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e (q - q_{+p}^{\mathcal{J}}) \cdot p[v_h]_p ds \right| \leq \left(\sum_{e \in \Gamma_h} \int_e |q - q_{+p}^{\mathcal{J}}|^2 ds \right)^{1/2} \left(\sum_{e \in \Gamma_h} \frac{1}{h} \int_e |v_h|_p^2 ds \right)^{1/2},$$

а затем леммой 4 (e есть грань K , в который входит поток p , $k = m - 1$). Будем иметь

$$\left| \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e (q - q_{+p}^{\mathcal{J}}) \cdot p[v_h]_p ds \right| \leq c h^m |q|_{m,\Omega} \|v_h\|_{1,h}. \quad (26)$$

Второе слагаемое в (25) оценим, воспользовавшись аналогично предыдущему неравенством Коши, леммой 3 при $v_h = q^{\mathcal{J}} - q_{\mathcal{J}}$, а также следующей оценкой:

$$\begin{aligned} \|q^{\mathcal{J}} - q_{\mathcal{J}}\|_{0,\Omega} &= \sup_{w_h \in W_h^d} \left| \int_{\Omega} (q^{\mathcal{J}} - q_{\mathcal{J}}) \cdot w_h dx \right| / \|w_h\|_{0,\Omega} = \\ &= \sup_{w_h \in W_h^d} \left| \int_{\Omega} (k(x, u, \nabla u) - k(x, u_I, \nabla u_I)) \cdot w_h dx \right| / \|w_h\|_{0,\Omega} \leq c \|u - u_I\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

В результате получим оценку

$$\left| \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e (q_{+p}^{\mathcal{J}} - q_{\mathcal{J},+p}) \cdot p[\nabla_h]_p ds \right| \leq c \|u - u_I\|_{1,\Omega} \|\nabla_h\|_{1,h}. \quad (27)$$

Из оценок (24), (26), (27), слагаемых в (23) и леммы 5 при $k = m$ следует, что

$$\|\psi\|_{-1,h} \leq c(\|u - u_I\|_{1,\Omega} + h^m |q|_{m,\Omega}) \leq ch^m (|u|_{m+1,\Omega} + |q|_{m,\Omega}) = Ch^m.$$

Используем эту оценку в (22); применяя неравенство треугольника, получаем:

$$\begin{aligned} \|u_h - u\|_{1,h} + \|\sigma_h - \sigma\|_{0,\Omega} + \|q_h - q\|_{0,\Omega} + \|q_{0,h} - q_{0,\mathcal{J}}\|_{0,\Omega} &\leq \\ \leq Ch^m + \|u - u_I\|_{1,h} + \|\sigma - \sigma_{\mathcal{J}}\|_{0,\Omega} + \|q - q_{\mathcal{J}}\|_{0,\Omega} + \|q_0 - q_{0,\mathcal{J}}\|_{0,\Omega} &\leq ch^m, \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} \|u - u_I\|_{1,h} + \|\sigma - \sigma_{\mathcal{J}}\|_{0,\Omega} &= 2\|u - u_I\|_{1,\Omega} \leq ch^m, \\ \|q - q_{\mathcal{J}}\|_{0,\Omega} &\leq \|q^{\mathcal{J}} - q_{\mathcal{J}}\|_{0,\Omega} + \|q - q^{\mathcal{J}}\|_{0,\Omega} \leq c(\|u - u_I\|_{1,\Omega} + h^m |q|_{m,\Omega}) \leq ch^m. \end{aligned}$$

Аналогично получается оценка $\|q_0 - q_{0,\mathcal{J}}\|_{0,\Omega} \leq ch^m$. Теорема доказана.

5. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПОТОКА

Изученная выше дискретная схема и, соответственно, ее решение зависят от потока p на Γ_h как от параметра. Хотя такие важные макро-свойства схемы, как устойчивость и точность, установлены нами равномерно по этому параметру, все же ясно, что выбор p оказывает влияние на качество схемы. Укажем некоторые возможные способы выбора допустимого p .

1. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_d$ — произвольная линейно независимая система векторов в R^d . Сужение p на грань $e \subset \Gamma_h \cup \Gamma_D$ определим так, чтобы выполнялось первое из строгих неравенств $p|_e \cdot v_i > 0$, $i = 1, \dots, d$. Ясно, что такое поле p определяется единственным образом. Кроме того, для любого элемента $K \in \mathcal{T}_h$ обязательно найдется как входящая в K нормаль $p|_e$ (т.е. $(p \cdot n_K)|_e < 0$), так и выходящая из K (т.е. $(p \cdot n_K)|_e > 0$). Действительно, пусть, например, на грани $e \in \partial K$ имеем $v_1 \cdot n_K > 0$, т.е. $p = n_K$, $p \cdot v_1 > 0$, $p \cdot n_K > 0$. Тогда найдется $\tau \subset \partial K$, на которой $v_1 \cdot n_K < 0$, т.е. $p = -n_K$, $p \cdot v_1 > 0$, $p \cdot n_K < 0$, поскольку

$$0 = \int_K \nabla \cdot v_1 dx = \int_{\partial K} v_1 \cdot n_K ds = \sum_{\tau \subset \partial K \setminus e} |\tau| v_1 \cdot n_K|_{\tau} + |e| v_1 \cdot n_K|_e > \sum_{\tau \subset \partial K \setminus e} |\tau| v_1 \cdot n_K|_{\tau}.$$

Если на грани $e \in \partial K$ имеем $v_1 \cdot n_K = 0$, то обязательно найдется наименьшее $j > 1$ такое, что $v_j \cdot n_K > 0$, и рассуждения можно повторить с v_j вместо v_1 .

Такой выбор p был использован в [1], [2]. При этом векторы v_i определялись произвольно фиксированным (управляющим) вектором $v = (r_1, \dots, r_d)$ так, чтобы имело место $v_1 = v$, $v_2 = (r_1, \dots, r_{d-1}, 0)$, $v_3 = (r_1, \dots, r_{d-2}, 0, 0)$, $\dots$, $v_d = (r_1, 0, \dots, 0)$.

2. Можно ограничиться лишь одним управляющим вектором v и принять следующее определение: сужение p на грань $e \subset \Gamma_h \cup \Gamma_D$ задается так, что $p|_e \cdot v > 0$; если $p|_e \cdot v = 0$, то ориентация

нормали p на e выбирается произвольно. Очевидно, что при таком определении теряется лишь единственность способа определения p ; по-прежнему для $\forall K \in \mathcal{T}_h$ обязательно найдется как входящая в K нормаль, так и выходящая из K .

3. Пусть $v \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ есть произвольное кусочно-постоянное векторное поле, согласованное с разбиением $\mathcal{T}_h$, такое, что $\operatorname{div} v \leq 0$. Сужение p на грань $e \subset \Gamma_h \cup \Gamma_D$ определим так, что $(p \cdot v)|_e > 0$; если $(p \cdot v)|_e = 0$, то ориентацию нормали p на e выберем произвольно. Как и выше, убеждаемся, что для $\forall K \in \mathcal{T}_h$ обязательно найдется выходящая из K нормаль. Условие $\operatorname{div} v \leq 0$ вызвано тем, что, если $\operatorname{div} v > 0$ на каком-либо $K \in \mathcal{T}_h$, то может не найтись выходящей из K нормали $p|_e$, что не допускается определением (в этом случае не будет выполнена LBB-оценка; на доказательстве этого факта мы не останавливаемся).

Мы использовали поле p в определении схемы для однозначного определения значений u_h на межэлементных границах по правилу $u_h|_e = (p \cdot n_K)^+ u_h|_K + (p \cdot n_K)^- u_h|_{K'}$. В [3] принят аналогичный способ: $u_h|_e = (u_h|_K + u_h|_{K'})/2 + (u_h|_K - u_h|_{K'})\beta$, где $\beta = \operatorname{sign}(v_0 \cdot n_K)/2$, $v_0 \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ — любое кусочно-постоянное векторное поле. Сравнивая эти два способа, видим, что они приводят к одному и тому же, если $\beta \neq 0$; при $\beta = 0$ они различаются (значению $\beta > 0$ соответствует $p = n_K$; при $\beta < 0$ имеем $p = -n_K$). Различие имеется также в определении допустимых полей v_0 .

Интересно отметить также следующий способ выбора потоков на Γ_h , рассмотренный в [20] в связи с некоторыми модификациями схемы из [3]. Этот способ определяется по сквозной нумерации элементов из $\mathcal{T}_h$: β в формуле $u_h|_e = (u_h|_K + u_h|_{K'})/2 + (u_h|_K - u_h|_{K'})\beta$ выбирается равным 1, если номер K меньше номера K' ; иначе принимается $\beta = 0$. Аналогично этому способу мы можем определить поле p по следующему правилу: нормаль $p|_e$ направлена из K в K' , если номер K меньше номера K' . Ясно, что этот “алгебраический” способ определения p позволяет оказывать контролируемое влияние на портрет матрицы схемы в случае линейной задачи. Для нашей схемы мы не можем рекомендовать этот способ, так как для некоторых K может не найтись выходящих из них нормалей.

Способы 1 и 2 определения p , указанные выше, кажутся привлекательными в случае решения задач, в которых есть выделенное направление v , тогда как способ 3 — в случае, когда имеется (или независимо вычисляется) переменное поле v , связанное с решаемой задачей.

6. СХЕМА НА ОСНОВЕ ОСРЕДНЕНИЯ

Как отмечалось выше, схемы с различными p имеют одинаковые макросвойства и мы не можем математически описать степень различия схем с разными допустимыми p . Вместе с тем введение в определение схемы направленности, задаваемой p , при решении задачи с изотропными свойствами (например задачи Дирихле для уравнения Пуассона), выглядит некоторой “слабостью” схемы. Укажем конструкцию схемы, лишенной подобной направленности, и являющейся усреднением схем с различными p .

Будем использовать определение поля p посредством управляющего вектора v , как это было описано в предыдущем пункте. Пусть $\mathbb{V} = \{v = (r_1, \dots, r_d) : r_i = \pm 1, i = 1, \dots, d\}$ — множество управляющих векторов, включающее 2^d различных вектора. Каждый вектор $v \in \mathbb{V}$ порождает поток $p = p(v)$ на Γ_h , который в свою очередь определяет схему $A_h^{p(v)} u_h^{p(v)} = F_h^{p(v)}$. Искомую схему определим следующим образом:

$$A_h u_h = F_h, \quad A_h = \frac{1}{2^d} \sum_{v \in \mathbb{V}} A_h^{p(v)}, \quad F_h = \frac{1}{2^d} \sum_{v \in \mathbb{V}} F_h^{p(v)}. \quad (28)$$

При заданном $u_h \in V_h$ для вычисления $A_h u_h \in V_h^*$ необходимо вычислить 2^d элементов $A_h^{p(v)} u_h$. Для этого по u_h определяются последовательно $\sigma_h^{p(v)} = \sigma_h^{p(v)}(u_h)$ согласно (7), $q_h^{p(v)} = q_h^{p(v)}(u_h)$ и $q_{0,h}^{p(v)} = q_{0,h}^{p(v)}(u_h)$ — согласно (8). Тогда $A_h^{p(v)} u_h$ порождается формой $a_h(u_h, v_h)$, определяемой полем нормалей $p = p(v)$. В рассматриваемом нами случае все $F_h^{p(v)}$ совпадают между собой, поскольку порождаются одним функционалом f_h .

Формально вычисления по схеме (28) включают в 2^d раз больше операций, чем по схеме с фиксированным p . Но это не совсем так, поскольку немалая часть этих операций не зависит от p . Оператор A_h является сильно монотонным как сумма сильно монотонных операторов; если оператор исходной задачи является линейным и самосопряженным, то A_h наследует эти свойства. Отметим также, что нетрудно доказывается следующая оценка точности схемы (28):

$$\left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \max_{v \in \mathbb{V}} (|q - q_h^{p(v)}(u_h)|^2 + |q_0 - q_{0,h}^{p(v)}(u_h)|^2 + |\nabla u - \sigma_h^{p(v)}(u_h)|^2 + |\nabla u - \nabla u_h|^2) dx \right]^{1/2} +$$

$$+ \|u - u_h\|_{0,\Omega} + \left(\sum_{e \in \Gamma_h} \frac{1}{h} \int_e [u_h]^2 ds \right)^{1/2} \leq ch^m (|u|_{m+1,\Omega} + |q|_{m,\Omega} + |q_0|_{m,\Omega}).$$

Вообще говоря, схема (28) представляется достойной более детального рассмотрения. Этому будет посвящена отдельная статья авторов.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОЦЕНКИ (10)

Пусть $\sigma_h = \sigma_h(v_h)$ определяется по $v_h \in V_h$ из тождества

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot w_h dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla v_h \cdot w_h dx + \int_{\Gamma_h} [v_h]_p [w_h]_p \cdot p ds = 0 \quad \forall w_h \in W_h^d.$$

Требуется доказать, что $\|\sigma_h\|_{0,\Omega} \geq C \|v_h\|_{1,h}$.

Пусть $K \in \mathcal{T}_h$ — произвольный симплекс. Выберем $w_h = 0$ вне K ; считая, что $u_{h,+n_K} = 0$ на Γ_D , получаем следующее тождество:

$$\int_K \sigma_h \cdot w_h dx + \int_K \nabla u_h \cdot w_h dx - \int_{\partial K} ((p \cdot n_K)^+ u_h + (p \cdot n_K)^- u_{h,+n_K}) w_h \cdot n_K ds = 0.$$

После интегрирования по частям будем иметь

$$\int_K \sigma_h \cdot w_h dx = \int_K \nabla u_h \cdot w_h dx + \int_{\partial K} [u_h]_{+n_K} (p \cdot n_K)^- w_h \cdot n_K ds.$$

Положим $\delta = \nabla u_h$, $g = [u_h]_{+n_K} (p \cdot n_K)^-$; тогда для $\forall w \in W_n(K) = [P_m(K)]^d$ имеем

$$\int_K \sigma_h \cdot w dx = f_K(w) = \int_K \delta \cdot w dx + \int_{\partial K} g w \cdot n_K ds, \quad \delta \in W_{m-1}(K), \quad g|_e \in P_m(e), \quad e \subset \partial K.$$

Важно отметить, что существует грань $e \subset \partial K$, на которой $(p \cdot n_K)^- = 0$ (и, как следствие, $g|_e = 0$). Ясно, что для любого $w \in W_m(K)$ имеем

$$\|\sigma_h\|_{0,K} = \sup_{\eta \in W_m} |f_K(\eta)| / \|\eta\|_{0,K} \geq |f_K(w)| / \|w\|_{0,K} = J_K(w).$$

Достаточно получить оценки

$$J_K(w_1) \geq c \|\delta\|_{0,K}, \quad J_K(w_2) \geq ch^{-1/2} \|g\|_{0,\partial K}, \quad (29)$$

для некоторых $w_1, w_2 \in W_m(K)$. Действительно, в этом случае будем иметь

$$\int_K |\sigma_h|^2 dx \geq c \int_K |\nabla u_h|^2 dx + \frac{c}{h} \int_{\partial K} [u_h]^2 (p \cdot n_K)^- ds.$$

Искомая оценка получается отсюда суммированием по всем $K \in \mathcal{T}_h$, поскольку величина $(p \cdot n_K)^-|_e + (p \cdot n_K)^-|_e = 1$ на общей грани $e \subset \Gamma_h$ элементов K и K' .

Для доказательства оценок (29) нам понадобится другая форма записи $J_K(w)$. По определению d -симплекс K имеет $d+1$ граней e_i и $d+1$ вершин $a_i, i = 1, \dots, d+1$. Номер $d+1$ присвоим грани, на которой $g = 0$, а также вершине, не лежащей на e_{d+1} .

Пусть далее $\hat{K}$ есть единичный d -симплекс в координатах $\hat{x}$ с вершинами $\hat{a}_{d+1} = 0, \hat{a}_1 = (1, 0, \dots, 0), \hat{a}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \hat{a}_d = (0, 0, \dots, 1)$; $x = B_K \hat{x} + a_{d+1}$ — аффинное преобразование $\hat{K}$ на K , отображающее $\hat{a}_i$ в a_i ; отображение $\hat{x} = B_K^{-1}(x - a_{d+1})$ является обратным и переводит грань e_{d+1} в грань $\hat{e}_{d+1}$, противоположную началу координат $\hat{a}_{d+1}$. Номера остальных граней $\hat{e}_i$ симплекса $\hat{K}$ определим так, что

$$\hat{e}_i = \{\hat{x} = \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d\} \in \hat{K} : \hat{x}_i = 0\}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Перейдем описанным преобразованием от элемента K к элементу $\hat{K}$ в определении функционала $J_K(w)$; обозначая $\hat{\eta}(\hat{x}) = \eta(B_K \hat{x} + a_{d+1})$, получаем представление

$$J_K(w) = \left| \int_{\hat{K}} \tilde{\delta} \cdot \hat{w} d\hat{x} + \sum_{i=1}^d \int_{\hat{e}_i} \tilde{g} \hat{w} \cdot n_i d\hat{s} \right| / \left(\int_{\hat{K}} |\hat{w}|^2 d\hat{x} \right)^{1/2},$$

где $\tilde{\delta} = |K|^{1/2} \hat{\delta}$, $\tilde{g} = (|e_i|/|K|^{1/2}) \hat{g}$, $n_i = n_K|_{e_i}$.

Продолжим преобразование. Примем нормали $n_1, \dots, n_d$ к граням $e_1, \dots, e_d$ за основной базис в R^d , и пусть $n^1, \dots, n^d$ есть взаимный по отношению к нему базис, т.е. $n^i \cdot n_j = \delta_j^i$. Разложим $\tilde{\delta}$ по основному базису, а $\hat{w}$ — по взаимному: $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}^1 n_1 + \dots + \tilde{\delta}^d n_d$, $\hat{w} = \bar{w}_1 n^1 + \dots + \bar{w}_d n^d$. Положим $\bar{\delta} = (\bar{\delta}^1, \dots, \bar{\delta}^d)$, $\bar{w} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d)$. Имеем

$$\tilde{\delta} \cdot \hat{w} = \bar{\delta} \cdot \bar{w}, \quad \hat{w} \cdot n_i = \bar{w}_i, \quad |\tilde{\delta}|^2 = G_K \bar{\delta} \cdot \bar{\delta}, \quad |\hat{w}|^2 = G_K^{-1} \bar{w} \cdot \bar{w}, \quad G_K = \{n_i \cdot n_j\}_{i,j=1}^d,$$

$$\lambda_K |\bar{\delta}|^2 \leq |\tilde{\delta}|^2 \leq \Lambda_K |\bar{\delta}|^2, \quad |\hat{w}|^2 \leq \lambda_K^{-1} |\bar{w}|^2,$$

где $\lambda_K > 0$, Λ_K есть минимальное и максимальное собственное значение матрицы G_K . Эти значения зависят только от углов K , поскольку $n_i \cdot n_j = \cos(\theta_{ij})$ есть косинус угла между гранями e_i и e_j . По теореме Гершгорина имеем $\Lambda_K \leq d$; в силу регулярности триангуляции $\theta_{ij} \in [\theta_0, \pi - \theta_0]$, где θ_0 не зависит от K . Поскольку λ_K непрерывно зависит от θ_{ij} , то найдется такое число $c(\theta_0)$, не зависящее от K , что $\lambda_K \leq c(\theta_0)$. Учитывая сказанное, приходим к оценке

$$J_K(w) \geq c(\theta_0) \left| \int_{\hat{K}} \bar{\delta} \cdot \bar{w} d\hat{x} + \sum_{i=1}^d \int_{\hat{e}_i} \tilde{g} \bar{w}_i d\hat{s} \right| / \left(\int_{\hat{K}} |\hat{w}|^2 d\hat{x} \right)^{1/2}. \quad (30)$$

Первую оценку в (29) получим, если в (30) выберем $\bar{w} = \bar{w}_1 = (\hat{x}_1 \bar{\delta}_1, \dots, \hat{x}_d \bar{\delta}_d) \in W_m(\hat{K})$; действительно, легко видеть, что в этом случае интегралы по $\hat{e}_i$ равны нулю и

$$\begin{aligned} J_K(w_1) &\geq c(\theta_0) \left(\int_{\hat{K}} (\hat{x}_1 |\bar{\delta}_1|^2 + \dots + \hat{x}_d |\bar{\delta}_d|^2) d\hat{x} \right)^{1/2} \geq \\ &\geq c_m c(\theta_0) \|\bar{\delta}\|_{0, \hat{K}} \geq c_m c(\theta_0) d^{-1} \|\tilde{\delta}\|_{0, \hat{K}} = c_m c(\theta_0) d^{-1} |\hat{K}|^{-1/2} \|\delta\|_{0, K} = c(\theta_0, m) \|\delta\|_{0, K}. \end{aligned}$$

Здесь в последней оценке мы вернулись на элемент K , а также использовали оценки

$$\begin{aligned} \int_{\hat{K}} |\bar{w}_1|^2 d\hat{x} &\leq \int_{\hat{K}} (\hat{x}_1 |\bar{\delta}_1|^2 + \dots + \hat{x}_d |\bar{\delta}_d|^2) d\hat{x}, \\ \int_{\hat{K}} (\hat{x}_1 |\bar{\delta}_1|^2 + \dots + \hat{x}_d |\bar{\delta}_d|^2) d\hat{x} &\geq c_m^2 \|\bar{\delta}\|_{0,\hat{K}}^2 \quad \forall \bar{\delta} \in W_{m-1}(\hat{K}). \end{aligned} \quad (31)$$

Оценка (31) справедлива в силу эквивалентности норм в конечномерном $W_{m-1}(\hat{K})$.

Для доказательства второй оценки в (29) определим постоянную по переменной $\hat{x}_i$ функцию $\tilde{g}_i \in P_m(\hat{K})$, равную $\tilde{g}$ на $\hat{e}_i$. По $\tilde{g}_i$ определим $\hat{\tau}^i \in P_{m-1}(\hat{K})$ из равенства

$$\int_{\hat{K}} \hat{x}_i \hat{\tau}^i \eta d\hat{x} = \int_{\hat{K}} \tilde{g}_i \eta d\hat{x} \quad \forall \eta \in P_{m-1}(\hat{K}), \quad i = 1, \dots, d.$$

Ясно, что в силу (31) справедлива оценка $\|\hat{\tau}^i\|_{0,\hat{K}} \leq c_m^{-1} \|\tilde{g}_i\|_{0,\hat{K}} \leq c_m^{-1} \|\tilde{g}\|_{0,\hat{e}_i}$. Положим $\bar{w} = \bar{w}_2 = (\tilde{g}_1 - \hat{x}_1 \hat{\tau}^1, \dots, \tilde{g}_d - \hat{x}_d \hat{\tau}^d)$ в (30). Очевидно, что

$$\begin{aligned} \int_{\hat{K}} \bar{\delta} \cdot \bar{w} d\hat{x} &= \sum_{i=1}^d \int_{\hat{K}} \bar{\delta}_i (\tilde{g}_i - \hat{x}_i \hat{\tau}^i) d\hat{x} = 0, \\ \int_{\hat{K}} |\bar{w}|^2 d\hat{x} &\leq 2 \sum_{i=1}^d \int_{\hat{K}} (\tilde{g}_i^2 + \hat{x}_i^2 |\hat{\tau}^i|^2) d\hat{x} \leq C_m^2 \sum_{i=1}^d \int_{\hat{K}} \tilde{g}_i^2 d\hat{x} \leq C_m^2 \sum_{i=1}^d \int_{\hat{e}_i} \tilde{g}_i^2 d\hat{x}. \end{aligned}$$

Из условия регулярности $\mathcal{T}_h$ следует, что $\min\{|e_i|/|K|, i = 1, \dots, d\} \geq c/h$; поэтому имеем

$$\begin{aligned} J_K(w_2) &\geq c(\theta_0) \left| \sum_{i=1}^d \int_{\hat{e}_i} \tilde{g}_i^2 d\hat{s} \right| / \|\bar{w}\|_{0,\hat{K}} \geq C_m^{-1} c(\theta_0) \left(\sum_{i=1}^d \int_{\hat{e}_i} (|e_i|^2/|K|) \tilde{g}_i^2 d\hat{s} \right)^{1/2} \geq \\ &\geq c(m, \theta_0) \left(\sum_{i=1}^d \int_{e_i} (|e_i|/|K|) g_i^2 ds \right)^{1/2} \geq c(m, \theta_0) h^{-1/2} \|g\|_{0,\partial K}. \end{aligned}$$

Оценка (10) доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляшко А.Д., Федотов Е.М. Предельные схемы Галеркина—Петрова для уравнения конвекции—диффузии // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 46. № 7. С. 1033—1043.
2. Федотов Е.М. Предельные схемы Галеркина—Петрова для нелинейного уравнения конвекции—диффузии // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 7. С. 1033—1043.
3. Cockburn B., Dong B. An analysis of the minimal dissipation local discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems // J. Sci. Comput. 2007. V. 32. P. 233—262.
4. Arnold D.N., Brezzi F., Cockburn B., Marini L.D. Discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // Discontinuous Galerkin Methods. Theory, Computation and Applications. Eds. Cockburn D., Karniadakis G.E., and Shu C.-W. Lecture Notes in Comput. Sci. Engrg. 11. New York: Springer-Verlag, 2000. P. 89—101.
5. Castillo P., Cockburn B., Perugia I., Schotzow D. An a priori error analysis of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems // SIAM J. Numer. Anal. 2001. V. 38. № 5. P. 1676—1706.
6. Arnold D.N., Brezzi F., Cockburn B., Marini L.D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM J. Numer. Anal. 2002. V. 39. № 5. P. 1749—1779.
7. Castillo P. Performance of discontinuous Galerkin methods for elliptic PDEs // SIAM J. Sci. Comput. 2002. V. 24. P. 524—547.

8. *Houston P., Robson J., Süli E.* Discontinuous Galerkin finite element approximation of quasilinear elliptic boundary value problems I: the scalar case // *IMA J. Numer. Anal.* 2005. V. 25. P. 726–749.
9. *Ortner C., Süli E.* Discontinuous Galerkin finite element approximation of nonlinear secondorder elliptic and hyperbolic systems // *Tech. Rep. NA-06/05.* Oxford University Computing Laboratory, 2006.
10. *Gudi T., Nataraj N., Pani A.K.* Hp-Discontinuous Galerkin methods for strongly nonlinear elliptic boundary value problems // *Numer. Math.* 2008. V. 109. P. 233–268.
11. *Burman E., Ern A.* Numerical analysis discontinuous Galerkin approximation with discrete variational principle for the nonlinear Laplacian // *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I.* 346. 2008. P. 1013–1016.
12. *Chunjia B., Yanping L.* Discontinuous galerkin method for monotone nonlinear elliptic problems // *Int. J. Numer. Anal. Mod.* 2012. V. 9. P. 999–1024.
13. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. Springer–Verlag, New York, 1991.
14. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980.
15. *Brenner S.C.* Poincare–Friedrichs inequalities for piecewise H^1 functions // *SIAM. J. Numer. Anal.* 2003. V. 41. P. 306–324.
16. *Brezzi F., Manzini G., Marini D., Pietra P., Russo A.* Discontinuous Galerkin approximations for elliptic problems // *Numerical Methods for Partial Differential Equations.* 2000. V. 16. № 4. P. 365–378.
17. *Rivière B., Wheeler M., Girault V.* A priori error estimates for finite element methods based on discontinuous approximation spaces for elliptic problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 2002. V. 39. № 3. P. 902–931.
18. *Тимербаев М.Р.* Конечноэлементная аппроксимация в весовых пространствах Соболева // *Изв. высш. учебн. заведений. Математика.* 2000. № 11. С. 76–84.
19. *Scott L.R., Zhang S.* Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions // *Math. Comp.* 1990. № 54. P. 483–493.
20. *Peraire J., Persson P.-O.* The compact discontinuous Galerkin (CDG) method for elliptic problems // *SIAM J. Sci. Comput.* 2008. V. 30. № 4. P. 1806–1824.