§10. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ РАНГА МАТРИЦЫ

Главным минором порядка k называется минор Δ_k, образованный элементами матрицы, стоящими на пересечении ее первых k строк и первых k столбцов.

Пусть матрица A имеет ранг равный r. Тогда можно так переставить столбцы и строки этой матрицы, что главный минор Δ_r порядка r полученной матрицы будет отличен от нуля. Его принято называть *базисным минором* матрицы A.

Сформулируем и докажем, в некотором смысле обратное, утверждение. Пусть A — произвольная прямоугольная матрица, Δ_r — ее главный минор порядка r.

Назовем главный минор Δ_{r+1} окаймляющим минором для минора Δ_r. Переставляя строки и столбцы матрицы A с номерами, большим чем r, можно построить различные окаймляющие миноры для минора Δ_r.

Лемма. Пусть главный минор Δ_r матрицы A не равен нулю, а все окаймляющие его миноры — нули. Тогда ранг матрицы A равен r.

Доказательство. Поскольку

$$\Delta_r \neq 0,$$

первые r столбцов матрицы A линейно независимы. Покажем, что любой столбец матрицы A с номером, большим чем r, линейно выражается через ее первые r столбцов. Это и будет означать, что

$$\mathrm{rank}(A) = r.$$

.

Предположим противное. Тогда, присоединяя к первым r столбцам матрицы A некоторый столбец с большим номером, мы получим, что образованная таким образом матрица имеет ранг $r+1$.

Поэтому она имеет $r+1$ линейно независимую строку. Причем первые ее r строк линейно независимы, так как $\Delta_r \neq 0$.

.

Значит, найдется строка с номером, большим чем r, которая не выражается линейно через первые r строк. Делая указанную строку $(r+1)$-й строкой матрицы A, получим, что

$$\Delta_{r+1} \neq 0,$$

чего по условию леммы быть не может. $\square$

Доказательство леммы подсказывает следующий способ вычисления ранга матрицы.

1) Просматриваем элементы матрицы. Если все они нули, полагаем ранг равным нулю и останавливаем процесс.

.

2) Если найден элемент матрицы отличный от нуля, то, переставляя соответствующие строки и столбцы матрицы, помещаем его на место первого элемента первого столбца.

3) Окаймляем элемент a_{11}, т. е. составляем определители второго порядка, присоединяя к нему элементы других строк и столбцов. Если все эти определители второго порядка — нули, то, очевидно, у матрицы только один линейно независимый столбец. Значит ранг матрицы равен единице.

4) Если обнаружен ненулевой определитель второго порядка, то путем перестановки строк и столбцов матрицы превращаем этот определитель в определитель вида Δ_2 (в левом верхнем углу) и окаймлением строим определители третьего порядка, пока не получим среди них отличный от нуля и т. д.

.

Если на каком-то шаге описанного алгоритма получен определитель Δ_r, не равный нулю, а все определители порядка $r+1$, построенные по нему окаймлением, — нули, то это означает, что ранг матрицы равен r.

Понятно, что на практике этот процесс иногда может быть ускорен. Именно, пусть удалось установить, что определитель, образованный элементами, стоящими на пересечении каких-то r строк и каких-то r столбцов матрицы не равен нулю. Строим окаймлением этого определителя определители порядка $r+1$. Если среди них есть ненулевой процесс продолжается. Если все такие определители — нули, то ранг матрицы равен r.

.

<u>Пример.</u> **Найдем ранг матрицы**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

.

Заметим, что в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

содержится минор

$$d = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},$$

не равный нулю.

В матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

минор третьего порядка

$$d' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$

окаймляющий минор d, не равен нулю.

В матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

первый минор четвертого порядка окаймляющий d' равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

В матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

и второй минор четвертого порядка окаймляющий d'**, равен нулю:**

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

.

Максимальный порядок отличных от нуля миноров равен трем, поэтому

$$\operatorname{rank}(A) = 3.$$

Вычисление ранга матрицы

A =

2	-4	3	1	0
1	-2	1	-4	2
0	1	-1	3	1
4	-7	4	-4	5

Минор 2 порядка

A2 =

-4	3
-2	1

M2 = 2

A =

2	-4	3	1	0
1	-2	1	-4	2
0	1	-1	3	1
4	-7	4	-4	5

Окаймляющий минор 3 порядка

A3 =

2	-4	3
1	-2	1
0	1	-1

M3 = 1

Окаймляющие миноры 4 порядка

A4 =

2	-4	3	1
1	-2	1	-4
0	1	-1	3
4	-7	4	-4

M4 = 0

A5 =

```
     2    -4     3     0
     1    -2     1     2
     0     1    -1     1
     4    -7     4     5
```

M5 = 0

Ранг матрицы

r =

```
     3
```

A =

```
     2    -4     3     1     0
     1    -2     1    -4     2
     0     1    -1     3     1
     4    -7     4    -4     5
```

Решение уравнения x1*a1+x2*a2+x3*a3=a4, где aj - j-я строка матрицы A

x1 = 1
x2 = 2
x3 = 1

Проверка x1*a1+x2*a2+x3*a3=a4

A =

```
     2    -4     3     1     0
     1    -2     1    -4     2
     0     1    -1     3     1
     4    -7     4    -4     5
```

x1 = 1
x2 = 2
x3 = 1

ans = [4, -7, 4, -4, 5]
>>

```
% Rank of matrix calculation, A=
% 2 -4  3  1  0
% 1 -2  1 -4  2
% 0  1 -1  3  1
% 4 -7  4 -4  5
close all
clear all
clc
disp('Вычисление ранга матрицы')
A=[2 -4 3 1 0; 1 -2 1 -4 2; 0 1 -1 3 1; 4 -7 4 -4 5]
disp('Минор 2 порядка')
A2=A([1 2], [2 3])
M2=det(A2)
A
disp('Окаймляющий минор 3 порядка')
A3=A([1 2 3], [1 2 3])
M3=det(A3)
disp('Окаймляющие миноры 4 порядка')
A4=A([1 2 3 4], [1 2 3 4])
M4=det(A4)
A5=A([1 2 3 4], [1 2 3 5])
M5=det(A5)
disp('Ранг матрицы')
r=rank(A)
A
disp('Решение уравнения x1*a1+x2*a2+x3*a3=a4, где aj - j-я строка
матрицы A')
syms x1 x2 x3
[x1,x2,x3]=solve('2*x1+x2=4','-4*x1-2*x2+x3=-7','3*x1+x2-x3=4')
disp('Проверка x1*a1+x2*a2+x3*a3=a4')
A
[A(1,1)*x1+A(2,1)*x2+A(3,1)*x3,...
 A(1,2)*x1+A(2,2)*x2+A(3,2)*x3,...
 A(1,3)*x1+A(2,3)*x2+A(3,3)*x3,...
 A(1,4)*x1+A(2,4)*x2+A(3,4)*x3,...
 A(1,5)*x1+A(2,5)*x2+A(3,5)*x3]
```