7. Исследование сходимости несобственных интегралов. 2

Пусть $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — несобственный интеграл с, возможно, несколькими особенностями. Если $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ сходятся, то сходится и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. В этом случае говорят, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится абсолютно.*

Если же $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, а $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ расходится, то говорят, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится условно.*

Признак Дирихле. Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — непрерывные на $[a,+\infty)$ функции и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\psi(x)\,dx$ имеет единственную особенность в $+\infty$. Если выполнены следующие условия:

а) $\varphi(x)$ монотонно стремится к 0 при $x \to +\infty$,

б) первообразная функции $\psi(x)$ ограничена на $[a,+\infty)$,

то $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\psi(x)\,dx$ сходится.

Замечание 1. В пункте а) монотонность достаточно проверить при $x \geq a_1 \geq a$.

Замечание 2. В пункте б) в качестве первообразной можно взять, например, $\int\limits_a^x \psi(t)\,dt$.

Замечание 3. Бывает полезным использовать приём типа: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\sin g(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} \dfrac{f(x)}{g'(x)}\,g'(x)\sin g(x)\,dx$ и рассматривать $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g'(x)}$, $\psi(x) = g'(x)\sin g(x)$.

Пример. Исследуем на сходимость $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos(10x^2)}{\sqrt{x}}\,dx$. В интеграле две особенности.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(10x^2)}{\sqrt{x}}\,dx = \int\limits_0^{1} \frac{\cos(10x^2)}{\sqrt{x}}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(10x^2)}{\sqrt{x}}\,dx. \qquad (*)$$

Первый интеграл сходится абсолютно, так как $\left|\dfrac{\cos(10x^2)}{\sqrt{x}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, а $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(10x^2)}{\sqrt{x}}\,dx = \int\limits_1^{+\infty} x\cos(10x^2)\;\frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx.$$

Применяем признак Дирихле (полагая $\varphi(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$, $\psi(x) = x\cos(10x^2)$). Имеем, очевидно, $\dfrac{1}{x\sqrt{x}} \searrow 0$ при $x \to +\infty$, $\int x\cos(10x^2)\,dx = \dfrac{1}{20}\sin(10x^2)$ — ограниченная функция. Таким образом, второй интеграл в $(*)$ сходится.

Заключаем, что $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos(10x^2)}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится.