КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Казанские студенческие олимпиады по математике

Сборник задач

Казань – 2011

УДК 51, 37.8

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

учебно-методической комиссии Института ВМ и ИТ
Протокол № 1 от 8 сентября 2011

заседания кафедры математической статистики Института ВМ и ИТ
Протокол № 1 от 31 августа 2011

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доцент Сочнева В.А.

Григорьева И.С.

Казанские студенческие олимпиады по математике. Сборник задач: учеб.-метод. пособие/ И.С.Григорьева. – Казань: Казанский университет, 2011. – 48 с.

Математические олимпиады играют большую роль в пропаганде математического знания, повышении мотивации студентов к учебе. Олимпиады, проводимые в Казанском университете, давно стали междугородними и привлекают внимание студентов и преподавателей многих вузов.

В настоящем пособии приведены тексты задач олимпиад и их решения. начиная с 1999 г. Пособие предназначено для студентов, готовящихся к олимпиадам, а также для тех, кто желает повысить свою математическую грамотность и расширить кругозор.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Студенческие олимпиады по математике проводятся в Казанском университете в течение многих лет. Они приурочены к 1 декабря (дню рождения Н.И.Лобачевского) и носят его имя.

В первые годы в олимпиадах принимали участи только студенты университета, в основном с факультетов мехмат, физфак и ВМК. Однако с 2009 года олимпиада стала междугородней. К нам приезжают команды из Барнаула, Волгограда, Екатеринбурга, Йошкар-Олы, Краснодара, Саратова, Сарова, Тюмени.

В составлении заданий принимают участие преподаватели университета и других вузов г. Казани. Это Д.Х.Муштари, В.А.Сочнева, М.Д.Бронштейн, И.С.Григорьева, Э.Ю.Лернер, В.В.Шургыин-ст. и В.В.Шурыгин-мл., И.Ш.Калимуллин, М.А.Малахальцев, А.Е.Заяц.

Бессменным организатором и вдохновителем олимпиады является доцент каф. общей математики мехмата Валентина Алексеевна Сочнева.

В настоящем пособии приведены задачи олимпиад начиная с 1999 года, с решениями. Кроме решений к каждой задаче есть ответ или подсказка. Рекомендуем сначала попытаться решить задачу самостоятельно, если не получается – воспользоваться подсказкой и только потом сравнить свое исследование с предложенным решением.

Решения, найденные читателями, могут не совпадать с теми, которые приведены в пособии. Если Вы нашли свое интересное решение или ошибку в нашем, можете сообщить об этом автору по адресу igrigori_@mail.ru.

Задачи олимпиады предназначены для всех студентов, начиная с 1 курса. Требуемый для решения уровень знаний в основном соответствует программе 1-2 курсов математических или физических специальностей. Конечно, некоторые из задач не доступны первокурсникам. Это компенсируется тем, что их в каждой олимпиаде достаточно много (до 10), так что участник имеет возможность выбрать подходящие себе задания.

ЗАДАЧИ

Задачи, 1999 г.

1. Чему равна сумма $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$?
2. Пусть $x_1 = 1$, $x_n = a^{x_{n-1}}$ при $n > 1$ ($a > 0$). Найти наибольшее значение a при котором существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
3. Найти все вещественные матрицы A размерности 2×2, такие, что $A^n = E$, если а) $n = 2$; б) $n = 3$.
4. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и парабола $y = Ax^2 + Bx + C$ имеют четыре точки пересечения. Доказать, что через эти точки можно провести окружность.
5. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению
$$f(x) = \int_0^1 x(1+xy)f(y)dy + \sqrt{x}.$$
6. На координатной плоскости построили график функции $y = x^3$, после чего оси координат стерли. Как их восстановить с помощью циркуля и линейки?
7. Два числа a и b случайным образом выбираются на отрезке $[-M; M]$ числовой прямой. Какова вероятность того, что уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$ имеет вещественные корни?

Задачи, 2001 г.

1. Пусть матрица A имеет размерность 3×2, а матрица B – 2×3. Чему равен определитель матрицы AB?
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}$.
3. График многочлена третьей степени пересекает ось Ox в трех точках. Из крайней провели касательную к противоположному «горбу» графика. Доказать, что абсцисса точки касания делит отрезок между двумя другими корнями пополам.
4. Доказать, что из любых пяти векторов в евклидовом пространстве можно выбрать два таких, что длина их суммы не превосходит длины суммы трех оставшихся.
5. На плоскости даны три точки A_1, A_2, A_3; S_i – симметрия относительно A_i. Доказать, что $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ – это симметрия относительно точки A с радиус-

вектором $\vec{r}_A = \vec{r}_{A_1} + \overline{A_2A_3}$.

6. Функция $f(x)$ непрерывна на [0; 1] и дифференцируема на (0; 1). Доказать, что если $f(0) = f(1) = 0$, то $f(x) = f'(x)$ в некоторой точке $x \in (0; 1)$.
7. У белой сферы 12% ее площади окрашено в красный цвет. Доказать, что в сферу можно вписать параллелепипед, у которого все вершины белые.

Задачи, 2002 г.

1. В двух урнах лежит 25 шаров белого и черного цветов. Из каждой урны вынимается по одному шару. Вероятность того, что они оба белые, равна 0,54. Найти вероятность того, что они оба черные.
2. На круговой цилиндр радиуса 2 туго намотали лист бумаги (толщиной ноль) и разрезали цилиндр плоскостью, образующей угол 45° с осью цилиндра. Затем лист бумаги развернули и положили на плоскость. Какой вид приобрела линия разреза? (записать ее уравнение)
3. На множестве A задана бинарная операция # такая, что для любых x, y из A выполняются соотношения $(x \# y) \# y = x$ и $y \# (y \# x) = x$. Доказать, что эта операция коммутативна, т.е. $x \# y = y \# x$ для любых x, y из A.
4. Многочлен $P(x)$ не имеет действительных корней. Доказать, что многочлен $P(x) + \frac{P''(x)}{2!} + \frac{P^{(4)}(x)}{4!} + \ldots$ также не имеет действительных корней.
5. Найти все дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции f, удовлетворяющие условиям $f(0) = 0$ и $f(x + y) \le f(x) + f(y)$.
6. График многочлена четвертой степени имеет две точки перегиба. Проведенная через них прямая отрезает от графика три луночки. Доказать, что площадь средней из них равна сумме площадей крайних.
7. Найти все непрерывные на $[a, b]$ функции φ, удовлетворяющие соотношению $\varphi(x) = \int\limits_a^b \varphi(x)dx + \psi(x)$, где $\psi(x)$ – некоторая функция, непрерывная на $[a, b]$.
8. Пусть R – множество точек плоскости, входящих в замкнутый выпуклый многоугольник, $\rho(x, y)$ – расстояние от точки $M(x, y)$ до ближайшей точки из R. Выразить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho(x,y)}\,dxdy$ через периметр и площадь многоугольника.

Задачи, 2003 г.

1. Доказать, что если все корни многочлена $x^n + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x^n + a_n$ вещественны, то $a_2 \le 0$.
2. Пусть квадратная матрица A – невырожденная, а матрица X удовлетворяет

уравнению $AX + XA = 0$. Доказать, что след матрицы X равен 0.

Указание. След матрицы – сумма ее диагональных элементов: $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

3. Пусть A – квадратная матрица порядка n. Доказать, что если $A^2 = E$, то сумма рангов матриц $A + E$ и $A - E$ равна n.
4. Пусть $x_n = \dfrac{(n-1)x_{n-1} + x_{n-2}}{n}$ при $n \geq 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Найти предел этой последовательности.
5. Определим фигуру P как часть плоскости, ограниченную параболой $y = x^2$: $P = \{(x, y) \mid y \geq x^2\}$. Определим фигуру H как часть плоскости, ограниченную ветвью гиперболы $x^2 - y^2 = 1$: $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 \geq 1, x > 0\}$. Можно ли покрыть плоскость конечным числом фигур а) вида P; б) вида H?
6. На плоскости с прямоугольной системой координат задана сеть линий $y = \pm 2(x + a)$, $a \in Z$. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник, вершины которого расположены в узлах сети?
7. Ряд $\sum a_n$ сходится. Может ли расходиться ряд $\sum a_n^{2003}$?
8. Для двух множеств A и B определим расстояние $\rho(A, B) = \sup\limits_{a\in A}\inf\limits_{b\in B} r(a,b)$, где $r(a, b)$ обычное расстояние между точками.

   а) Доказать, что $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$.

   б) Может ли выполняться неравенство $\rho(A, B) + \rho(B, C) \leq \rho(C, A)$?

Задачи, 2004 г.

1. Решить систему $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0 \end{cases}$.
2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z^2 & \cdots & z^{199} & z^{200} \\ z^2 & z^3 & \cdots & z^{200} & z \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z^{200} & z & \cdots & z^{198} & z^{199} \end{vmatrix}$$

   а) при $z = i$; б) при $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.
3. Доказать, что при любом натуральном n верно неравенство

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < 2{,}5.$$

4. На плоскости дана прямая l. Плоскость повернули произвольным образом. При этом прямая l перешла в прямую l'. Для произвольной точки $M \in l$

возьмем соответствующую ей точку $M' \in l'$. Найти геометрическое место середин отрезков MM'.

5. Пусть функция $f \in C^1([-1; 1])$. Найти $\lim\limits_{h \to +0} \int\limits_{-1}^{1} \frac{hf(x)dx}{h^2 + x^2}$.
6. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, показать, что

$$\left(\int\limits_a^b f(x)dx \right)^2 \le (b-a) \int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

7. Из n вопросов, вынесенных на зачет, студент выучил m ($m \le n - 3$). Зачет ставится, если студент ответил не менее, чем на половину вопросов билета. Какой билет ему выгоднее брать, с двумя вопросами или с четырьмя? (Билеты составляются случайным образом).
8. Найти предел последовательности $x_n = n \cdot \sin(2\pi e\, n!)$.
9. Пусть A и B – квадратные матрицы порядка n, причем матрица A обратима. Возможно ли равенство $AB - BA = A$?

Задачи, 2005 г.

1. Доказать, что во всяком тетраэдре $ABCD$ найдется ребро, которое образует острые углы со всеми смежными с ним ребрами.
2. A и B – квадратные матрицы, $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = BA$. Доказать, что определитель $\det(A - B)$ может принимать только значения 0, 1 или – 1.
3. Доказать, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+t^2}dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+a}dt$ для любого $a \ge 0$.
4. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0; 1]$, $f(0) = f(1)$. Доказать, что существует хорда графика $y = f(x)$ длины $\frac{1}{5}$, параллельная оси абсцисс.
5. Найти все функции f, непрерывные на $[0; +\infty)$, для которых

$$\sin\left(\int\limits_0^x f(t)dt \right) = \frac{x}{x+1}.$$

6. Какую долю от объема n-мерного куба составляет объем вписанного в него n-мерного шара? Рассмотреть случаи $n = 3$, $n = 4$.
7. Существует ли многочлен а) $P(x)$ от одной переменной, б) $P(x, y)$ от двух переменных, множеством значений которого является промежуток $(0; +\infty)$?

Задачи, 2006 г.

1. Доказать, что все 6 слагаемых в разложении определителя 3-го порядка не могут быть одновременно положительными.

2. В пространстве заданы точки $A(1, 1, 1)$; $B(3, -3, 3)$; $C(6, -1, 0)$; $D(7, 1, -2)$. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ – плоский, невырожденный и выпуклый.
3. В каждой вершине треугольной пирамиды написано число. На каждом ребре написана сумма чисел, стоящих на его концах. Известно, что сумма чисел на ребрах равна 3 и сумма их квадратов равна 3. Доказать, что сумма их кубов также равна 3.
4. Пусть $\mathscr{M}$ – множество квадратных матриц $n\times n$, элементами которых являются 0 и 1. Произведение $D = (d_{ij})$ матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ из $\mathscr{M}$ находится по формуле $d_{ij} = \max\limits_k \min(a_{ik}, b_{kj})$.

   а) Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите A^2, A^3, …

   б) Будет ли это умножение ассоциативным?
5. Найти $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.
6. Число людей с положительным резус-фактором равно примерно 15%. У женщины резус-фактор положителен. Какова вероятность того, что и у ее ребенка он будет положителен?

Указание. Известно, что положительный резус-фактор рецессивен, т.е. проявляется, только если он получен и от матери, и от отца. Этот ген распределен одинаково у женщин и у мужчин.

8. Пусть K_1, K_2, …, K_n – круги на плоскости. Через a_{ij} обозначим площадь пересечения $K_i \cap K_j$. Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица порядка n, составленная из этих чисел. Доказать, что $\det A \geq 0$.

Задачи, 2007 г.

1. Пусть A и B – точки на параболе такие, что касательные к параболе, проведенные в данных точках, перпендикулярны. Зависит ли произведение расстояний от точек A и B до оси параболы от выбора этих точек?
2. Пусть $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ – натуральные числа, $a_0, a_1, \ldots a_k$ – действительные числа, не равные 0 одновременно. Доказать, что уравнение
$$a_0 + a_1x^{n_1} + a_2x^{n_2} + \ldots + a_kx^{n_k} = 0$$
имеет не более k различных положительных корней.
3. Построить график неявной функции $x^y = y^x$.
4. Имеется 3 ящика и 5 призов. Каждый приз независимо от других помеща-

ется в произвольный ящик. Какова вероятность того, что хотя бы один ящик окажется пустым?

5. В игре используются карточки с числами 1, 2, 3, …, 9. Двое по очереди выкладывают их в клетки таблицы 3×3. По окончании игры подсчитывается определитель. Если он больше 0, то выигрывает первый, если меньше – второй. На диагонали таблицы оказались числа 1, 2, 4. Кто выиграет?
6. Пусть A – квадратная матрица размерности n. Будем считать, что $|A| = \sum_{i,j}\left|a_{ij}\right|$. Доказать, что $|A\cdot B| \le |A|\cdot|B|$.
7. Чему равен предел $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\cos\cos\ldots\cos}_{n}x$?
8. Найти геометрическое место точек, из которых эллипс виден под прямым углом.

Задачи, 2008 г.

1. Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ обладает следующими свойствами: 1) $1 \in A$; 2) если $x, y \in A$, то $2x + 3y \in A$. Доказать, что $2009 \in A$ и $20092009 \in A$.
2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на [0; 1]. Доказать, что
$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$
3. Найти все квадратные матрицы второго порядка, удовлетворяющие условию $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Построить пример ограниченной нефундаментальной последовательности $\{a_n\}$, у которой расстояния между соседними членами стремится к нулю при $n \to +\infty$.
5. В вершинах правильного тетраэдра сидят муравьи (по одному в каждой вершине). В некоторый момент времени они начинают ползти по ребрам в одну из соседних вершин. Какова вероятность того, что два муравья встретятся на одном ребре?
6. Доказать, что предел последовательности $x_n = n\cdot\sin(2\pi e\, n!)$ равен 2π.
7. В азартной игре «определитель» используются карточки с числами 1, 2, …, n^2 ($n > 1$). Два игрока по очереди выкладывают их в клетки таблицы $n\times n$. По окончании подсчитывается определитель D получившейся матрицы. Если $D > 0$, то выигрывает первый, если $D < 0$ – второй, если $D = 0$ – провозглашается ничья. Кто выиграет больше партий, если игроки решат разыграть все $(n^2)!$ возможных партий?

8. В треугольнике ABC точка D – середина отрезка AB, точка E лежит на AC, точка F лежит на BC. Доказать, что $S_{\Delta DEF} \le S_{\Delta ADE} + S_{\Delta BDF}$.
9. Встретились два математика, давно не видевших друг друга. Диалог при встрече:

– Как давно мы не виделись! Я слышал, у тебя большая семья?

– Да, трое детей. Младший – просто ангелочек! Кстати, произведение возрастов моих детей равно количеству лет, сколько мы не виделись.

– Этих сведений мне недостаточно, чтобы однозначно определить возраст твоих детей.

– Мой старший – огненно-рыжий.

– Теперь все ясно.

Сколько лет детям и сколько лет не виделись математики?

Задачи, 2009 г.

1. Найти все функции $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ такие, что $3f(-x) + f(1/x) + f(x) = x$ для всех $x \neq 0$.
2. Дана сфера S единичного радиуса с центром O. Точки A, B и C на сфере таковы, что векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ взаимно ортогональны. Плоскость α проходит через центр сферы. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точек A, B и C до плоскости α равна 1.
3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx$.
4. Кончик головы змеи находится на метр к востоку от начала координат. От кончика головы тело змеи идет строго на север π метров, затем $\pi^2/2$ на запад, потом $\pi^3/3!$ на юг и т.д. по спирали. Длина n-ой части змеи равна $\pi^n/n!$ метров, $n = 1, 2, \ldots, +\infty$. Где расположен кончик хвоста змеи?
5. Вычислить $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{x+y}{x+y+z}dxdydz.$
6. Пусть A – вещественная несимметричная нормальная матрица размера 3×3 (т.е. $A \cdot A^T = A^T \cdot A \neq 0$). Тогда вектор $\boldsymbol{e} = (a_{23} - a_{32}, a_{31} - a_{13}, a_{12} - a_{21})^T$ является собственным вектором A. Доказать.
7. Имеется n ящиков, в каждом из которых лежит один подарок. В комнату по очереди заходят m детей, каждый из которых равновероятно выбирает ящик и забирает оттуда подарок, если таковой остался. Сколько в среднем детей уйдут без подарка?
8. Последовательность вещественных чисел (a_n) называется постоянной по

отношению, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 + \ldots + a_k}{a_{k+1} + \ldots + a_{2k}}$ для любого натурального k. Доказать, что для любого натурального m существует такой многочлен $f_m(x)$ порядка m с целочисленными коэффициентами, что последовательность $(f_m(n))_{n=1,2,\ldots}$ постоянна по отношению. Доказать, что $f_m(x)$ выбирается с точностью до умножения на константу.

9. Задана биективная функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такая, что для всех $x, y \in \mathbb{C}$ имеет место $|x - y| = 1 \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| = 1$. Установить, что для всех $x, y \in \mathbb{C}$
   а) из $|x - y| = 2$ следует $|f(x) - f(y)| = 2$;
   б) из $|x - y| = 1/2$ следует $|f(x) - f(y)| = 1/2$;
   в) из $|x - y| \le 1$ следует $|f(x) - f(y)| \le 1$.

Задачи, 2010 г.

1. Комплексные числа a, b, c таковы, что $|a| = |b| = |c| = r$. Найти модуль числа $\frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$.
2. Две вершины треугольника зафиксированы в точках A (–1; 0) и B (1; 0), а третья (точка C) движется по параболе $y = x^2 - 6x + 15$. Напишите уравнение кривой, которую описывает центр тяжести треугольника.
3. Из точки на плоскости отложено $2n$ векторов единичной длины. Они покрашены поочередно в красный и зеленый цвет. Просуммируем все вектора каждого цвета. Докажите, что разность двух этих сумм имеет длину не больше 2.
4. В множестве из 2010 элементов выбраны несколько подмножеств так, что каждые два из них имеют ровно один общий элемент и никакие три не имеют общих элементов. Каково наибольшее возможное число таких подмножеств?
5. Найти интеграл $\int \frac{(x-1)^2}{x^2 + e^x + 1} dx$.
6. Пусть γ – отрезок, соединяющий точки a и bi комплексной плоскости (a, b – вещественные), а кривая Γ – его образ при отображении $w = \sin z$. Найти сумму углов, которые эта кривая составляет с вещественной и мнимой осями.
7. В игре «Что? Где? Когда?» в каждом раунде волчок останавливается в секторе номер x, где x равновероятно принимает одно из значений 0, 1, …, 13. При этом играет первый из секторов по часовой стрелке, который ранее не играл. Найти вероятность того, что после шести раундов сыграют (в любом порядке) сектора 1, 2, …, 6.

8. Имеется k одинаковых стеклянных шариков. Их кидают с некоторых этажей 1000 этажного дома. Требуется за наименьшее число бросаний X определить самый нижний этаж, при бросании с которого шарики разбиваются (или убедиться, что таких этажей в доме нет). Вычислить X а) для $k = 2$; б) для $k = 3$.
9. Функция $f(x)$ задана всей числовой прямой, причем в иррациональных точках она равна 0. Если же x представимо в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, то $f(x) = \frac{m}{n^3}$. Будет ли эта функция дифференцируема в иррациональных точках? В 0?
10. Рассмотрим множество $2^{\mathbb{N}}$ всех подмножеств множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Будем говорить, что два множества из $2^{\mathbb{N}}$ эквивалентны, $X \sim Y$, если их симметрическая разность – конечное множество (т.е. X отличается от Y лишь конечным числом элементов). Существует ли такое отображение $f: 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$, которое удовлетворяет условиям
   1) $f(X) \sim X$;
   2) $X \sim Y \Rightarrow f(X) = f(Y)$;
   3) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$?

ОТВЕТЫ И ПОДСКАЗКИ

99-1. $C_n^0 \cdot C_n^n + C_n^1 \cdot C_n^{n-1} + \ldots + C_n^n \cdot C_n^0 = C_{2n}^n$

99-2. Максимальное значение a равно $e^{1/e}$.

99-3. а) Для $n = 2$ либо $A = \pm E$, либо $a + d = 0$ и $\det A = -1$.

б) Для $n = 3$ либо $A = E$, либо $a + d = -1$ и $\det A = 1$.

99-4. Выразите x^2 из второго уравнения.

99-5. $f(x) = 1{,}6x^2 + 2{,}4x + \sqrt{x}$.

99-6. Найдите точки пересечения графика с произвольной прямой.

99-7. $1/2 + M/6$ при $M \le 1$ и $1 - \dfrac{1}{3\sqrt{M}}$ при $M \ge 1$.

01-1. 0.

01-2. 0.

01-3. Запишите уравнение многочлена через его корни.

01-4. Запишите квадрат суммы векторов через скалярное произведение.

01-5. Запишите преобразование симметрии векторно.

01-6. Вспомните теорему Ролля.

01-7. Отразите симметрично красное пятно на сфере.

02-1. 4%.

02-2. Синусоида $y = 2\sin(t/2)$.

02-3. Рассмотрите умножение справа (слева) как преобразование множества A.

02-4. Сравните записанное выражение с формулой Тейлора.

02-5. $f(x) = Cx$.

02-6. Площадь равна интегралу от разности функций. Запишите уравнение этой разности.

02-7. $\varphi(x) = C + \psi(x)$, где $C(1 - b + a) = \int_a^b \psi(x)dx$.

02-8. $S + P + 2\pi$.

03-1. Используйте теорему Виета.

03-2. Найдите сначала след матрицы AX.

03-3. Приведите A к жордановой форме.

03-4. $x = 1 - 1/e$.

03-5. а) Нет. б) Да.

03-6. 1/2.

03-7. Может.

03-8. б) Может.

04-1. $x = 1, y = -1$.

04-2. а) 0, б) 0.

04-3. Докажите более сильное неравенство $a_n < 2{,}5\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

04-4. Прямая.

04-5. $\pi f\,(0)$.

04-6. Исследуйте интеграл $\int\limits_a^b\int\limits_a^b (f(x)-f(y))^2\,dxdy$.

04-7. При $m < 2n/3 - 1$ – с двумя вопросами, при $m > 2n/3 - 1$ – с четырьмя.

04-8. 2π.

05-1. Рассмотрите ребро наибольшей длины.

05-2. Постройте уравнение, которому удовлетворяет матрица $A - B$.

05-3. Продифференцируйте левый интеграл по параметру.

05-4. Исследуйте поведение функции $f(x + \frac{1}{5}) - f(x)$.

05-5. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$.

05-6. Если $n = 2k$ или $n = 2k + 1$, то шар занимает долю $\dfrac{\pi^k}{n!!\cdot 2^k}$ от объема описанного вокруг него куба.

05-7. а) нет; б) да.

06-1. Рассмотрите произведение всех слагаемых.

06-2. Разложите вектор $\overrightarrow{AC}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

06-3. Выразите искомую сумму через заданные.

06-4. б) да.

06-5. $I = \pi/4$.

06-6. $p = \sqrt{0{,}15}$.

06-7. Используйте понятие определителя Грама.

07-1. Нет.

07-2. Используйте индукцию по k.

07-3. Прологарифмируйте равенство.

07-4. 31/81.

07-5. Первый.

07-6. Решается вычислением.

07-7. Корень уравнения $x = \cos x$.

07-8. Окружность с радиусом $\sqrt{a^2+b^2}$, где a, b – полуоси эллипса.

08-1. Выпишите несколько первых элементов множества A и заметьте закономерность.

08-2. Сделайте замену $t = \pi - x$.

08-3. Любая матрица, у которой и след, и определитель равны 0.

08-4. Например, $a_n = \sin\sqrt{n}$.

08-5. Если встречи в вершинах не учитываются, то 17/27. Если учитываются, то 25/27.

08-6. Используйте разложение числа е в ряд Тейлора.

08-7. Количество выигрышей будет одинаковым.

08-8. Используйте векторное произведение для записи площади.

08-9. 1, 2 и 8 лет. Математики не виделись 16 лет.

09-1. $f(x) = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3x}$.

09-2. Выберите данные векторы в качестве координатных.

09-3. 2π.

09-4. На метр западнее начала координат.

09-5. 2/3.

09-6. Исследуйте матрицу $S = A - A^T$.

09-7. $m - n(1 - (1 - 1/n)^m)$.

09-8. Перейдите от последовательности к ряду.

09-9. Используйте неравенство треугольника.

10-1. r.

10-2. $y = 3x^2 - 6x + 5$.

10-3. Используйте проекцию на некоторую прямую, проходящую через заданную точку.

10-4. 63.

10-5. Выделите целую часть дроби под интегралом.

10-6. $\pi/2$ при $\cos a \neq 0$; $\operatorname{arctg}\left|\dfrac{b}{a}\right| + \pi/2$ при $\cos a = 0$, $|b| \geq |a|$; $3\operatorname{arctg}\left|\dfrac{a}{b}\right|$ при $\cos a = 0$, $|b| \leq |a|$.

10-7. 1/448.

10-8. а) $X = 45$; б) $X = 19$.

10-9. В иррациональных точках нет, в 0 – да.

10-10. Не существует.

Решения задач, 1999 г.

99-1. С помощью соотношения $C_n^k = C_n^{n-k}$ искомое выражение можно привести к виду $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_n^0 \cdot C_n^n + C_n^1 \cdot C_n^{n-1} + \ldots + C_n^n \cdot C_n^0$. Это число является коэффициентом при x^n в разложении

$$(C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n) \cdot (C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n) = (1 + x)^n (1 + x)^n.$$

Последнее произведение можно записать в виде $(1 + x)^{2n} = \sum C_{2n}^k x^k$, так что искомое выражение совпадает с C_{2n}^n.

99-2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Переходя к пределу в рекуррентном равенстве, получим, что $x = a^x$ или $\ln x = x \ln a$. Значит, $\ln a$ – одно из значений функции $\frac{\ln x}{x}$. Исследование с помощью производной показывает, что $\max \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{\mathrm{e}}$, так что максимальное значение параметра a можно найти из соотношения $\ln a = 1/\mathrm{e}$, т.е. $a = \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$.

Покажем, что для этого значения параметра искомый предел существует. Для этого проверим, что последовательность x_n возрастает и ограничена. Доказательство проведем по индукции:

Возрастание. Надо показать, что $x_{n+1} > x_n$. Для $n = 1$ неравенство принимает вид $a > 1$, что верно. Кроме того, в силу соотношения $a > 1$, из $x_n > x_{n-1}$ следует, что $x_{n+1} = a^{x_n} > a^{x_{n-1}} = x_n$.

Ограниченность. Покажем, что $x_n < \mathrm{e}$. Для $n = 1$ это очевидно. При условии, что $x_{n-1} < \mathrm{e}$ имеем $x_n = a^{x_{n-1}} < a^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}$, что и завершает доказательство.

99-3. Обозначим $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$: $\det A$.

а) Из условия $A^2 = E$ следует, в частности, что $(\det A)^2 = 1$, откуда $\det A = \pm 1$. Значит, A обратима и исходное соотношение можно переписать в виде $A = A^{-1}$.

1) $\det A = 1$. Равенство $A = A^{-1}$ принимает вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, откуда $b = c = 0$, $a = d$. В силу того, что $\det A = 1$, получаем, что $a = d = \pm 1$.

2) $\det A = -1$, тогда $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, что сводится к равенству $a + d = 0$.

б) Если $A^3 = E$, то $(\det A)^3 = 1$, и $\det A = 1$. Имеем $A^2 = A^{-1}$, что в силу условия $\det A = 1$ сводится к виду $\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. В частности, $b(a + d) = -b$, $c(a + d) = -c$. Значит, либо $b = c = 0$, либо $a + d = -1$.

1) $b = c = 0$. «Диагональные» равенства принимают вид $a^2 = d$; $d^2 = a$, откуда либо $a = d = 1$, либо $a = d = 0$ (последнее не подходит, получается вырожденная матрица).

2) $a + d = -1$. В силу того, что $ad - bc = 1$, получаем

$$a^2 + bc = a^2 + ad - 1 = a(a + d) - 1 = -a - 1 = d.$$

Аналогично $d^2 + bc = a$, так что равенство $A^2 = A^{-1}$ выполняется.

99-4. Заметим, что второе уравнение будет уравнением параболы только при условии $A \neq 0$. Выразим из него $x^2 = (y - Bx - C)/A$ и подставим в первое. Оно примет вид $(y - Bx - C)/(Aa^2)+ y^2/b^2 = 1$. Из полученного уравнения можно выразить y^2 в виде $y^2 = \alpha x + \beta y + \gamma$. Складывая это уравнение с выражением для x^2, и получим уравнение вида $x^2 + y^2 = px + qy + r$, где p, q и r – некоторые числа, полученные комбинированием параметров A, B и C.

Это и есть уравнение окружности, на которой лежат все точки пересечения эллипса и параболы.

99-5. Правую часть заданного уравнения можно представить как сумму $x \int_0^1 f(y)dy + x^2\int_0^1 yf(y)dy + \sqrt{x}$. Коэффициенты при x и x^2 – некоторые константы, так что $f(x) = ax^2 + bx + \sqrt{x}$. Имеем

$$a = \int_0^1 yf(y)dy = \int_0^1 y(ay^2 + by + \sqrt{y})dy = a/4 + b/3 + 2/5.$$

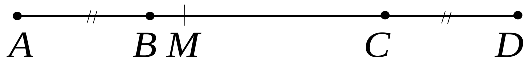
Аналогично

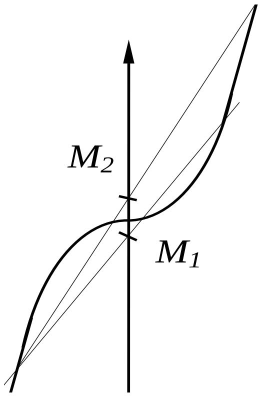
$$b = \int_0^1 f(y)dy = \int_0^1 (ay^2 + by + \sqrt{y})dy = a/3 + b/2 + 2/3.$$

Мы получили систему линейных уравнений для параметров a и b. Решая ее, находим, что $a = 1{,}6$; $b = 2{,}4$.

99-6. Проведем какую-нибудь прямую, пересекающую график в трех точках A, B и C. Ее уравнение имеет вид $y = kx + b$. Значит, абсциссы точек пересечения удовлетворяют уравнению $x^3 - kx - b = 0$. По теореме Виета сумма корней этого уравнения равна 0 (как и их среднее арифметическое). Но среднее арифметическое координат есть координата центра тяжести M заданных точек, так что этот последний имеет абсциссу 0, т.е. лежит на оси Oy.

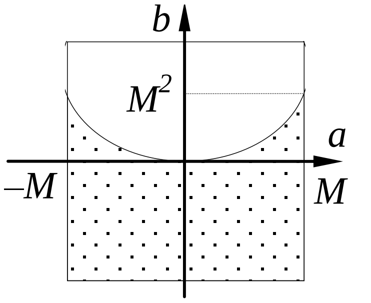
Построим точку M с помощью векторов. Она удовлетворяет уравнению $\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})/3$ для любой точки O. В частности, для $O = A$ получаем $\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})/3$. Построение: отложим вдоль выбранной прямой отрезок $CD = AB$ и поделим AD на 3 части:





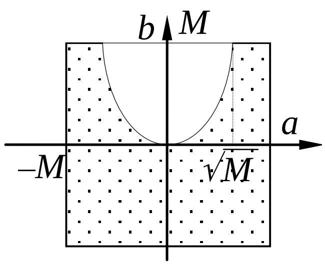
Как уже было сказано, полученная точка M будет лежать на оси Oy. Повторяя этот процесс для другой прямой, получим вторую точку, лежащую на оси ординат. Это позволяет построить всю ось. В точке пересечения ее с графиком будет находиться начало координат, через которое проведем ось Ox перпендикулярно к Oy.

99-7. Каждое уравнение заданного типа можно изобразить как точку $(a; b)$ координатной плоскости. Искомую вероятность можно найти как отношение $S/(4M^2)$. В знаменателе стоит площадь, пробегаемая всеми парами a, b. Число S есть площадь множества точек, для которых соответствующее квадратное уравнение имеет решение. Эти точки определяются условием $D = 4a^2 - 4b \ge 0$, т.е. $b \le a^2$.



Возможны два случая.

а) Парабола $b = a^2$ пересекает боковую сторону квадрата. Это выполняется при $M^2 \le M$, т.е. $M \le 1$. Площадь под параболой равна $S = 2M^2 + 2M^3/3$, а соответствующая вероятность $1/2 + M/6$.



б) Парабола пересекает верхнюю сторону квадрата, $M \ge 1$. Проще подсчитать площадь над параболой, она равна $2M\sqrt{M} - 2M\sqrt{M}/3 = 4M\sqrt{M}/3$. Искомая вероятность есть $1 - (4M\sqrt{M}/3) : 4M^2 = 1 - \dfrac{1}{3\sqrt{M}}$.

Решения задач, 2001 г.

01-1. *Способ* 1. Столбцы матрицы AB получаются как линейные комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами, задаваемыми строками матрицы B. Значит, эти три столбца выражаются через два, поэтому они линейно зависимы и определитель матрицы равен 0.

Способ 2. Добавим к матрице A справа нулевой столбец, а к матрице B снизу произвольную строку, получим квадратные матрицы A_1 и B_1. Имеем

$AB = A_1B_1$, и $\det(AB) = \det(A_1B_1) = \det(A_1)\cdot\det(B_1) = 0\cdot\det(B_1) = 0$.

01-2. Оценим числитель:

$$1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n \le n^1 + n^2 + \ldots + n^n = \frac{n(n^n - 1)}{n-1} < \frac{n\cdot n^n}{n-1}.$$

Значит, сама дробь находится между числами 1 и $\frac{n}{n-1}$ и по теореме о зажатой последовательности стремится к 1.

Типичная ошибка: вычисление предела отдельно для слагаемых $\frac{k^k}{n^n}$, число которых меняется и стремится к бесконечности.

01-3. Запишем многочлен в виде $P(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, где $\alpha < \beta < \gamma$ – его корни. Касательная в точке $(x_0; P(x_0))$ имеет уравнение $y = k(x - x_0) + P(x_0)$, где $k = P'(x_0)$. Имеем

$$P'(x) = a((x - \beta)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \beta)),$$

$$y = a((x_0 - \beta)(x_0 - \gamma) + (x_0 - \alpha)(x_0 - \gamma) + (x_0 - \alpha)(x_0 - \beta))(x - x_0) + a(x_0 - \alpha)(x_0 - \beta)(x_0 - \gamma) =$$

$$= a\{((x_0 - \beta)(x_0 - \gamma) + (x_0 - \alpha)(2x_0 - \gamma - \beta))\cdot(x - x_0) + (x_0 - \alpha)(x_0 - \beta)(x_0 - \gamma)\} = .$$

$$= a\{(x_0 - \beta)(x_0 - \gamma)\cdot(x - \alpha) + (x_0 - \alpha)(2x_0 - \gamma - \beta)\cdot(x - x_0)\}.$$

По условию эта прямая проходит через точку $(\alpha; 0)$, значит, правая часть обращается в 0 при $x = \alpha$:

$$(x_0 - \alpha)(2x_0 - \gamma - \beta)\cdot(\alpha - x_0) = 0.$$

Из этого равенства в силу $x_0 \ne \alpha$, получаем, что $x_0 = (\beta + \gamma)/2$.

Примечание. В процессе вычислений мы нигде не использовали тот факт, что α – крайний из корней. Попробуйте интерпретировать результат в случае, если α – средний корень.

01-4. Обозначим сумму всех векторов через $\vec{r}$, а сумму двух векторов с номерами i и j – через $\vec{r}_{ij}$. Заметим, что упорядоченные пары (i, j) пробегают 10 значений, причем каждый из 5 векторов входит в 4 суммы вида $\vec{r}_{ij}$.

Предположим, что для любых двух векторов длина их суммы больше, чем длина суммы оставшихся трех, т.е. $|\vec{r}_{ij}| > |\vec{r} - \vec{r}_{ij}|$. Возводя это равенство в квадрат, получим $\vec{r}_{ij}^{\,2} > \vec{r}^{\,2} - 2(\vec{r}, \vec{r}_{ij}) + \vec{r}_{ij}^{\,2}$, т.е. $\vec{r}^{\,2} < 2(\vec{r}, \vec{r}_{ij})$. Складывая все 10 таких равенств, получим, что $10\vec{r}^{\,2} < 2(\vec{r}, \Sigma\vec{r}_{ij}) = 2(\vec{r}\cdot 4\vec{r}) = 8\vec{r}^{\,2}$, чего не может быть.

01-5. Задачу можно решить прямым вычислением. Действительно, пусть y – результат отражения точки x от центра A. Выберем произвольно начало отсчета O. Тогда $\vec{r}_y - \vec{r}_A = \vec{r}_A - \vec{r}_x$, т.е. $\vec{r}_y = 2\vec{r}_A - \vec{r}_x$.

Применяя эту формулу для симметрий относительно A_1, A_2, A_3, получаем последовательно точки $2\vec{r}_{A_1} - \vec{r}_x$; $2\vec{r}_{A_2} - (2\vec{r}_{A_1} - \vec{r}_x)$; $2\vec{r}_{A_3} - (2\vec{r}_{A_2} - (2\vec{r}_{A_1} - \vec{r}_x))$. Последнее выражение приводится к виду $2(\vec{r}_{A_3} - \vec{r}_{A_2} + \vec{r}_{A_1}) - \vec{r}_x$, т.е. задает центральную симметрию относительно точки с радиус-вектором $\vec{r}_{A_3} - \vec{r}_{A_2} + \vec{r}_{A_1}$. Осталось заметить, что $\vec{r}_{A_3} - \vec{r}_{A_2} = \overline{A_2A_3}$, что и завершает доказательство.

01-6. Пусть $g(x) = f(x)e^{-x}$. Заметим, что $g'(x) = (f(x) - f'(x))\cdot e^{-x}$. Для функции g выполняются все условия теоремы Ролля: она непрерывна на отрезке [0; 1] и дифференцируема в интервале (0; 1), причем $g(0) = g(1) = 0$. Значит, существует точка $c \in (0; 1)$ такая, что $g'(c) = 0$. Но тогда и $f(c) - f'(c) = 0$, что и требовалось доказать.

01-7. Выберем три попарно перпендикулярные плоскости, проходящие через центр сферы. Отразим окрашенную область последовательно от всех трех плоскостей. В результате красной окажется не более 12%·2·2·2 = 96% площади сферы. Выберем точку на сфере, которая осталась белой. Отражая ее так же от выбранных плоскостей, получим 8 вершин параллелепипеда, окрашенных в белый цвет.

Решения задач, 2002 г.

02-1. Пусть n_i – число шаров в урнах, k_i – число белых шаров, $i = 1, 2$. Имеем $\frac{k_1}{n_1}\cdot\frac{k_2}{n_2} = 0{,}54 = \frac{27}{50}$, значит, $k_1\cdot k_2 = 27m$, $n_1\cdot n_2 = 50m$ для некоторого натурального m. Но тогда одно из чисел n_i делится на 5, то же верно и для второго (так как сумма их равна 25).

а) $n_1 = 5$, $n_2 = 20$. Тогда $k_1\cdot k_2 = 54$, причем $k_1 \le 5$, $k_2 \le 20$, так что $k_1 = 3$, $k_2 = 18$. Вероятность вынуть два черных шара равна $\left(1-\frac{k_1}{n_1}\right)\cdot\left(1-\frac{k_2}{n_2}\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{20} = 0{,}04$.

б) $n_1 = 10$, $n_2 = 15$. Тогда $k_1 \cdot k_2 = 81$, причем $k_1 \le 10$, $k_2 \le 15$, т.е. $k_1 = 9$, $k_2 = 9$. Вероятность вынуть два черных шара также равна $\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{15} = 0{,}04$.

02-2. Выберем систему координат так, что уравнения цилиндра имеют вид $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$, $z = z$, а уравнение секущей плоскости есть $z = y$.

При разворачивании бумаги расстояние, отмеряемое в горизонтальной плоскости, равно длине дуги окружности, т.е. $t = 2\varphi$. Вторая координата совпадает с $z = y = 2\sin(t/2)$, что и задает уравнение линии разреза.

02-3. Рассмотрим преобразование $f_y(x) = x \# y$. Первое соотношение показывает, что функция f_y обратна сама себе, а значит и обратима (взаимно однозначна на всем множестве A).

Это означает, что для любых x и y существует единственное решение уравнения $z \# y = x$, а именно, элемент $z = x \# y$.

Рассуждая аналогично, по второму свойству получаем, что умножение слева также обратно само себе, так что $y = z \# x$, причем это значение единственно при заданных x и z.

Пусть $x \# y = t$, тогда $y = x \# t$, откуда $x = y \# t$. Но тогда $y \# x = y \# (y \# t) = t$, что и требовалось доказать.

02-4. Многочлен совпадает со своим рядом Тейлора в любой точке, т.е. $P(x + \Delta) = P(x) + P'(x) \cdot \Delta + \dfrac{P''(x)}{2} \cdot \Delta^2 + \ldots$ В частности, при

$$\Delta = 1,\ P(x + 1) = P(x) + P'(x) + \frac{P''(x)}{2} + \ldots$$

$$\Delta = -1,\ P(x - 1) = P(x) - P'(x) + \frac{P''(x)}{2} - \ldots$$

Складывая, получим, что исследуемый многочлен равен $\frac{1}{2}(P(x + 1) + P(x - 1))$, так что он сохраняет постоянный знак, как и $P(x)$.

02-5. Имеем $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \le f(\Delta x)$. Поделим это неравенство на Δx. Если $\Delta x > 0$, то $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \le \dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$. Переходя к пределу, получаем, что $f'(x + 0) \le f'(+0)$.

Аналогично, при $\Delta x < 0$ получаем неравенство $f'(x - 0) \ge f'(-0)$. Но в силу дифференцируемости функции левые и правые производные совпадают, так что $f'(0) \le f'(x) \le f'(0)$. Итак, производная искомой функции постоянна, так что $f(x) = Cx$. Проверка показывает, что условие задачи выполняется для всех функций такого вида.

02-6. Сдвинем ось Oy на середину между точками перегиба, а масштаб на осях выберем так, что точки перегиба имеют координаты 1, – 1, а старший коэффициент заданного многочлена $P(x)$ равен 1. Пусть $y = ax + b$ – прямая, проходящая через точки перегиба. Площадь между графиками этих функций можно подсчитать как интеграл от многочлена $Q(x) = P(x) – (ax + b)$.

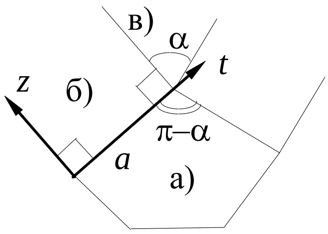
Вторая производная от Q совпадает со второй производной от P, поэтому $Q''(1) = Q''(–1) = 0$. Старший коэффициент многочлена Q'' равен 12, так что $Q''(x) = 12(x^2 – 1)$. Интегрируя это равенство два раза и используя то, что $Q(1) = Q(–1) = 0$ получаем, что $Q(x) = x^4 – 6x^2 + 5$. Значит, внешние граничные точки луночек есть $\pm\sqrt{5}$.

В силу четности Q условие равенства площадей можно переписать в виде $\int\limits_0^1 Q(x)dx = -\int\limits_1^{\sqrt{5}} Q(x)dx$, что проверяется вычислением.

02-7. Для фиксированной функции φ интеграл в правой части является константой, так что $\varphi(x) = C + \psi(x)$. Подставляя это выражение в уравнение, получим, что $C(1 – b + a) = \int\limits_a^b \psi(x)dx$. Из этого равенства C легко находится, если $b – a \neq 1$. В противном случае решение существует, только если $\int\limits_a^b \psi(x)dx = 0$, при этом константа C произвольна.

02-8. Разобьем всю плоскость на части, для которых расстояние ρ находится легко.

а) Для точек многоугольника $\rho(x, y) = 0$, подынтегральная функция равна 1, так что интеграл по этой области равен ее площади S.



б) Если (x, y) лежит в полуполосе, перпендикулярной стороне длиной a, то расстояние до многоугольника равно расстоянию до этой стороны.

Повернем систему координат так, чтобы одна ее ось (Oz) была направлена перпендикулярно стороне вовне от нее, а другая (Ot) – вдоль нее. Якобиан такой замены равен 1, так что интеграл по этой области принимает вид $\int\limits_0^a \int\limits_0^{+\infty} e^{-z}\, dzdt = a$. Сумма таких интегралов по всем сторонам многоугольника равна его периметру.

в) Для оставшихся частей плоскости, имеющих вид угла, расстояние до многоугольника равно расстоянию до вершины этого угла. Сдвинув все эти части так, чтобы их вершины совпали, получим полный круг, так что интеграл по всем таким частям равен $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-r}\,dxdy$. Он легко считается переходом к полярной системе координат и равен 2π.

Решения задач, 2003 г.

03-1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корни многочлена. По теореме Виета $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1 = 0$ и $x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_2$. Возводя первое из этих равенств в квадрат, получаем $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 2a_2 = 0$, откуда и следует необходимое неравенство.

03-2. *1 способ* (для тех, кто знает свойства подобных матриц). Имеем $X = -A^{-1}XA$, но след матрицы $A^{-1}XA$, как известно, равен следу матрицы X, так что $\mathrm{tr}\,(X) = -\mathrm{tr}\,(X)$, откуда и следует, что $\mathrm{tr}\,(X) = 0$.

2 способ. Имеем $\mathrm{tr}\,(AX) = \sum\limits_i\sum\limits_j a_{ij}x_{ji} = \sum\limits_i\sum\limits_j x_{ji}a_{ij} = \mathrm{tr}\,(XA)$, так что $\mathrm{tr}\,(AX + XA) = 2\,\mathrm{tr}(AX) = 0$. Итак матрица вида AX имеет нулевой след для всякой матрицы X, удовлетворяющей исходному уравнению.

Положим $X = AC$, где $C = A^{-1}X$. Имеем $AAC + ACA = 0$. Умножая слева на A^{-1}, получаем, что $AC + CA = 0$, откуда $\mathrm{tr}(AC) = \mathrm{tr}(X) = 0$.

03-3. Пусть B – матрица, приводящая A к жордановой форме, так что матрица $B^{-1}AB$ является треугольной, и на ее диагонали стоят ее собственные значения. При подобном преобразовании ранг матрицы не меняется, так что $\mathrm{rank}(A \pm E) = \mathrm{rank}\, B^{-1}(A \pm E)B = \mathrm{rank}\,(B^{-1}AB \pm E)$.

В силу $A^2 = E$ все собственные значения матрицы A равны 1 или – 1, причем ранг матрицы $B^{-1}AB - E$ равен количеству единиц, а ранг $B^{-1}AB + E$ – количеству (– 1), откуда и следует, что сумма этих рангов равна n.

03-4. Имеем

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{n}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \frac{1}{n(n-1)}(x_{n-2} - x_{n-3}) = \ldots = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(x_1 - x_0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

Тогда

$$x_n = x_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = x_{n-2} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = \ldots = x_0 + 1 - \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

Получаем, что $x = \lim x_n = 1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!} + \ldots$

С другой стороны, используя ряд Тейлора, получаем:

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots = 1 - x, \text{ так что } x = 1 - \frac{1}{e}.$$

03-5. а) Нет. На любой прямой, не параллельной оси параболы, она высекает конечный отрезок. Выберем прямую, не параллельную оси ни одной из парабол, тогда на ней будет покрыто только конечное число отрезков конечной длины.

б) Да, так как фигура H содержит в себе прямой угол, то есть для покрытия плоскости хватит 4 таких фигур.

03-6. Легко вычислить, что все вершины сети имеют координаты $(k + \frac{m}{2};\, m)$, где k и m – целые числа. Без ограничения общности можно считать, что одна из вершин треугольника находится в начале координат, тогда его стороны задаются векторами $\vec{a} = (k + \frac{m}{2};\, m)$ и $\vec{b} = (p + \frac{q}{2};\, q)$, а площадь – половиной длины их векторного произведения.

Имеем $\pm S = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} k + \frac{m}{2} & m \\ p + \frac{q}{2} & q \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} k & m \\ p & q \end{vmatrix}$. Последний определитель есть целое число, так что площадь принимает значения не меньше $\dfrac{1}{2}$. Легко привести пример того, что этот минимум достигается.

03-7. Рассмотрим ряд

$$\sum a_n = b_1 - \frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_1 + b_2 - \frac{1}{2} b_2 - \frac{1}{2} b_2 + \ldots + b_k - \frac{1}{2} b_k - \frac{1}{2} b_k + \ldots, \text{ где } b_k = \frac{1}{\sqrt[2003]{k}}.$$

Он сходится, так как суммы S_{3k} у него равны 0, а остальные отличаются от них на бесконечно малые величины.

В то же время

$$\sum a_n^{2003} = b_1^{2003} - \frac{1}{2^{2003}} b_1^{2003} - \frac{1}{2^{2003}} b_1^{2003} + b_2^{2003} - \frac{1}{2^{2003}} b_2^{2003} - \frac{1}{2^{2003}} b_2^{2003} + \ldots$$
$$+ b_k^{2003} - \frac{1}{2^{2003}} b_k^{2003} - \frac{1}{2^{2003}} b_k^{2003} + \ldots$$

У этого ряда суммы с номером $3k$ равны $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k})(1 - \frac{1}{2^{2002}})$, т.е. стремятся к бесконечности.

03-8. а) Для обычного расстояния имеем $r(A, B) + r(B, C) \geq r(A, C)$. Наименьшее значение правой части не превосходит наименьшего значения левой. Но первое слагаемое не зависит от C, так что

$$\inf_{c \in C} (r(A, B) + r(B, C)) = r(A, B) + \inf_{c \in C} r(B, C) \geq \inf_{c \in C} r(A, C).$$

В полученном неравенстве перейдем к инфимуму по b:

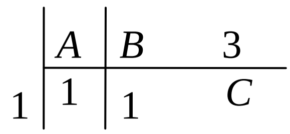
$$\inf_{b \in B} r(A, B) + \inf_{b \in B} \inf_{c \in C} r(B, C) \geq \inf_{c \in C} r(A, C).$$

Осталось применить супремум:

$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} r(A, B) + \inf_{b \in B} \inf_{c \in C} r(B, C) \geq \sup_{a \in A} \inf_{c \in C} r(A, C).$$

Первое слагаемое и правая часть – расстояния между соответствующими множествами. Во втором слагаемом можно заменить внешний инфимум на супремум, от этого неравенство только усилится.

б) Может. На рисунке для отрезков A, B и C имеем $\rho(A, B) = \rho(B, C) = 1$, в то время как $\rho(C, A) = 4$.



Решения задач, 2004 г.

04-1. Из первого уравнения получаем $y^2 = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Функция в правой части принимает значения от –1 до 1, так что $-1 \leq y \leq 1$. Исследуем второе уравнение как квадратное относительно x. Его дискриминант равен $D = -8(1 + y^3)$. Он будет неотрицательным при $y \leq -1$. Итак, $y = -1$, при этом $x = 1$.

04-2. Умножим первую строку на $-z$ и сложим со второй. Тогда определитель примет вид $\begin{vmatrix} z & z^2 & \cdots & z^{199} & z^{200} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z(1-z^{200}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z^{200} & z & \cdots & z^{198} & z^{199} \end{vmatrix}$. В обоих заданиях $z^{200} = 1$, так что определитель равен 0.

04-3. Обозначим левую часть неравенства через a_n.

1 способ. Для $n = 1$ неравенство верное. Для $n \geq 2$ докажем более сильное неравенство $a_n < 2{,}5\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$. Доказательство проведем по индукции.

Для $n = 2$ неравенство верное. Пусть $a_k < 2{,}5\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$. Тогда

$$a_{k+1} = a_k\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}\right) < 2{,}5\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}\right) = 2{,}5\left(1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{2^{2k+1}}\right) =$$

$$= 2{,}5\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{2^{2k+1}}\right) < 2{,}5\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Таким образом, индукционный переход также доказан.

2 способ. Имеем $\ln a_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

Воспользуемся неравенством $\ln(1 + x) \le x$ для всех слагаемых, кроме первого. Получим, что $\ln a_n \le \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$. Последнее выражение получается, если заменить геометрическую прогрессию рядом.

Итак, $a_n < \frac{3}{2}e^{1/2}$. Осталось проверить неравенство $\frac{3}{2}e^{1/2} < 2{,}5$, которое арифметическими преобразованиями сводится к виду $e < 25/9 = 2{,}777\ldots$ Это неравенство верное.

04-4. Произвольной точке M прямой l соответствует радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\cdot\vec{a}$. При повороте плоскости меняется начальная точка $\vec{r}_0$ и направляющий вектор $\vec{a}$. Если длина вектора $\vec{a}$ сохраняется, то параметр t не меняется. Значит, точке M' соответствует радиус-вектор $\vec{r}\,' = \vec{r}_0\,' + t\cdot\vec{a}\,'$. Середина отрезка MM'имеет радиус-вектор $\frac{1}{2}(\vec{r}+\vec{r}\,') = \frac{1}{2}(\vec{r}_0+\vec{r}_0\,') + t\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{a}\,')$. Это уравнение также задает прямую.

04-5. Переходить к пределу под знаком интеграла в данном случае нельзя, т.к. подынтегральная функция не является непрерывной в точке (0; 0). В силу непрерывности функция f и ее производная ограничены на $[-1; 1]$. Пусть $|f(x)| \le M$, $|f'(x)| \le M_1$. Заметим, что функция $\frac{h}{h^2+x^2}$ при малых h близка к 0 во всех точках, кроме окрестности точки $x = 0$.

Разобьем интеграл на три части I_1, I_2 и I_3 по отрезкам $[-1; -t]$, $[-t, t]$ и $[t; 1]$ соответственно так, чтобы два крайних интеграла были меньше наперед заданного ε. Для этого достаточно взять $t = \sqrt{\frac{Mh}{\varepsilon}}$. Действительно, в двух крайних отрезках $\left|\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\right| \le \left|\frac{hM}{h^2+\frac{Mh}{\varepsilon}}\right| < \left|\frac{hM}{\frac{Mh}{\varepsilon}}\right| = \varepsilon$, так что $I_1 + I_3 < \varepsilon(1 - (-1)) = 2\varepsilon$.

На отрезке $[-t, t]$ имеем $f(x) = f(0) + f'(c)x$, где c – некоторая точка между 0 и x. Значит, $I_2 = \int_{-t}^{t}\frac{hf(0)dx}{h^2+x^2} + \int_{-t}^{t}\frac{hf'(c)xdx}{h^2+x^2} = I_{21} + I_{22}$. Для второго интеграла выполняется оценка $\left|\int_{-t}^{t}\frac{hf'(c)xdx}{h^2+x^2}\right| < M_1h\left|\int_{-t}^{t}\frac{xdx}{h^2+x^2}\right| = M_1h\cdot\ln(h^2 + t^2)$. С другой стороны, $I_{21} = \int_{-t}^{t}\frac{hf(0)dx}{h^2+x^2} = 2f(0)\mathrm{arctg}\frac{t}{h} = 2f(0)\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{M}{\varepsilon h}}$.

В частности, для $\varepsilon = \sqrt{h}$ получаем

$$\int_{-1}^{1}\frac{hf(x)dx}{h^2+x^2} = 2f(0)\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{M}{h\sqrt{h}}} + \alpha, \text{ где } |\alpha| < 2\sqrt{h} + M_1h\cdot\ln(h^2 + M\sqrt{h}).$$

Последнее выражение стремится к 0 при $h \to +0$. Значит, предел исходного интеграла равен $\lim\limits_{h\to+0} 2f(0)\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{M}{h\sqrt{h}}} = \pi f(0)$.

04-6. Рассмотрим интеграл от неотрицательной функции $(f(x) - f(y))^2$ по прямоугольнику $[a; b]\times[a; b]$, он также неотрицателен. Раскрывая скобки, получаем:

$$\int_a^b\int_a^b (f(x)-f(y))^2dxdy = \int_a^b dx\int_a^b f^2(x)dy - 2\int_a^b dx\int_a^b f(x)f(y)dy + \int_a^b dx\int_a^b f^2(y)dy =$$

$$= 2(b-a)\int_a^b f^2(x)dx - 2\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \geq 0.$$

Из последнего неравенства и следует утверждение задачи.

04-7. Вычислим вероятность P_k *не сдать* зачет, если в билете k вопросов.

1. $k = 2$. Студент не сдаст зачет, только если не ответит на оба вопроса. Значит

$$P_2 = \frac{n-m}{n}\cdot\frac{n-m-1}{n-1}.$$

2. $k = 4$. Зачет не будет сдан в следующих случаях: студент не ответил ни на один вопрос; студент ответил ровно на один вопрос (любой из 4). Значит,

$$P_4 = \frac{n-m}{n}\cdot\frac{n-m-1}{n-1}\cdot\frac{n-m-2}{n-2}\,\frac{n-m-3}{n-3} + 4\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{n-m}{n-1}\cdot\frac{n-m-1}{n-2}\,\frac{n-m-2}{n-3} =$$

$$= \frac{n-m}{n}\cdot\frac{n-m-1}{n-1}\left(\frac{n-m-2}{n-2}\,\frac{n-m-3}{n-3} + 4\cdot\frac{m}{n-2}\,\frac{n-m-2}{n-3}\right) =$$

$$= P_2\cdot\frac{n-m-2}{n-2}\left(\frac{n-m-3}{n-3} + 4\cdot\frac{m}{n-3}\right) = P_2\cdot\frac{(n-m-2)(n+3m-3)}{(n-2)(n-3)}.$$

Разность двух вероятностей равна

$$P_4 - P_2 = P_2\cdot\left(\frac{(n-m-2)(n+3m-3)}{(n-2)(n-3)} - 1\right) = P_2\cdot\frac{m(2n-3m+3)}{(n-2)(n-3)}$$

Если $P_4 > P_2$, то вероятность сдать зачет больше для $k = 2$. Это требование выполняется, когда $3m < 2n - 3$. Если знак неравенства противоположный, то выгодней билет с 4 вопросами. В случае равенства $3m = 2n - 3$ оба билеты одинаково выгодны.

Итак, «маленький» билет выгоден, если студент выучил менее 2/3 вопросов. Например, при $n = 30$ и $m = 6$ вероятность сдать зачет по билету из 2 вопросов равна $1 - P_2 \approx 36{,}5\%$. С другой стороны, для билета из 4 вопросов эта вероятность равна $1 - P_4 \approx 16{,}9\%$. Изменение составляет примерно 20%. Для других m разница меньше. Для студентов, хорошо знающих предмет (более 2/3 вопросов) выгоднее билет из 4 вопросов, но при $n = 30$ разница составляет менее 2%.

04-8. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получаем, что $e = \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{e^{\theta}}{(n+2)!}$, где $0 < \theta < 1$.

Умножим это равенство на $n!$. Все слагаемые, кроме двух последних, превратятся в целые числа. Значит,

$$x_n = n\cdot\sin(2\pi k + 2\pi\frac{1}{n+1} + 2\pi\frac{e^{\theta}}{(n+1)(n+2)}) =$$

$$= n\cdot\sin(2\pi\frac{1}{n+1} + 2\pi\frac{e^{\theta}}{(n+1)(n+2)}) \sim 2\pi\frac{n}{n+1} + 2\pi\frac{e^{\theta}\,n}{(n+1)(n+2)}.$$

Предел этой последовательности равен 2π.

Решения задач, 2005 г.

05-1. Как известно, в треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Рассмотрим самое длинное ребро тетраэдра. Прилегающие к нему углы не являются наибольшими в соответствующих треугольниках, поэтому они острые.

05-2. Пусть $C = A - B$, имеем $C^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = A - B = C$. Значит, определитель det C удовлетворяет уравнению $x^3 = x$, т.е. равен 0, 1 или –1. Можно показать, что все эти значения действительно достигаются.

05-3. Пусть $J(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+t^2}dt$. Формально дифференцируя это равенство под знаком интеграла, получим соотношения

$$J'(a) = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-at}}{1+t^2}dt,\ J''(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-at}}{1+t^2}dt.$$

Все полученные интегралы сходятся равномерно на промежутке (ε; +∞). Этот факт можно доказать по признаку Вейерштрасса. Значит, дифференцирование выполнено правильно. Кроме того, это позволяет перейти к пределу при $a \to +\infty$, так что $J(+\infty) = 0$.

Преобразуем выражение для второй производной от J.

$$J''(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-at}}{1+t^2}dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-at}\,dt - \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+t^2}dt = \frac{1}{a} - J(a).$$

Итак, функция J удовлетворяет уравнению $J''(a) + J(a) = \frac{1}{a}$. Решим его методом вариации. Имеем $J(a) = f(a)\cos a + g(a)\sin a$, причем f и g при $a > 0$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} f'(a)\cos a + g'(a)\sin a = 0 \\ -f'(a)\sin a + g'(a)\cos a = 1/a \end{cases}.$$

Значит, $f'(a) = -\frac{\sin a}{a}$, $g'(a) = \frac{\cos a}{a}$. Имеем $f'(a) = -\left(\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt\right)'$, так что $f(a) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt + C_1$. Мы воспользовались тем, что интеграл Дирихле сходится. Аналогично получаем, что $g(a) = -\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt + C_2$. Подставим эти значения в выражение для J. Получаем, что

$$J(a) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt \cdot \cos a - \int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt \cdot \sin a + C_1 \cos a + C_2 \sin a =$$

$$= \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt \cdot \cos a - \int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt \cdot \sin a + A \sin(a + a_0).$$

Как ведет себя последняя сумма при $a \to +\infty$? Заметим, что

$\int\limits_a^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt=\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt-\int\limits_\varepsilon^{a}\frac{\cos t}{t}dt\to 0$ при $a\to+\infty$ (в силу сходимости несобственного интеграла). Аналогично ведет себя и $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$. Переходя к пределу в равенстве, получаем, что $J(+\infty) = 0 = 0 - 0 + \lim\limits_{a\to+\infty} A\sin(a + a_0)$. Последний предел существует, только если $A = 0$.

Итак, $J(a) = \int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\cdot\cos a-\int\limits_a^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt\cdot\sin a=\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin(t-a)}{t}dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x+a}dx$. Последнее выражение получено с помощью замены $t = x + a$.

Заметим, что доказательство проводилось для $a > 0$, однако равенство верно и при $a = 0$. Действительно, интеграл Дирихле $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$. Равенство же $J(0)=\frac{\pi}{2}$ проверяется непосредственным вычислением.

05-4. Пусть $g(x) = f(x+\frac{1}{5}) - f(x)$. Требование задачи означает, что для некоторого $x\in[0;\frac{4}{5}]$, $g(x) = 0$.

Имеем $g(0)+g(\frac{1}{5})+g(\frac{2}{5})+g(\frac{3}{5})+g(\frac{4}{5}) = f(1) - f(0) = 0$. Если ни одно из слагаемых с этой сумме не равно 0, то существует пара соседних слагаемых разного знака. В силу того, что g – непрерывна, в некоторой промежуточной точке она обращается в 0.

05-5. Функция $F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$ является решением уравнения $\sin F=\frac{x}{x+1}$. Правая часть попадает в промежуток $[-1; 1]$ при $x \ge -0{,}5 > -1$. При этом условии $F(x)=\arcsin\frac{x}{x+1}+2\pi k$ или $F(x)=\pi-\arcsin\frac{x}{x+1}+2\pi k$. В силу условия $F(0) = 0$ и непрерывности функции F подходит только решение $F(x) = \arcsin\frac{x}{x+1}$. Тогда $f(x)=F'(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$. Здесь при извлечении корня мы учли, что $x + 1 > 0$.

05-6. Объем n-мерного шара $V_n(r) = a_n \cdot r^n$. Можно считать, что n-мерный шар состоит из слоев, являющихся $(n-1)$-мерными шарами. Если слой отстоит от центра на расстояние x, его радиус равен $\sqrt{r^2-x^2}$. Значит, $V_n(r) = \int_{-r}^{r} V_{n-1}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)dx$. Сделаем замену $x = r \cdot \sin t$, получим, что

$$a_n \cdot r^n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a_{n-1}(r\cos t)^{n-1} r\cos t dt = 2a_{n-1}\, r^n \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt.$$

Имеем $V_3(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, т.е. $a_3 = \dfrac{4}{3}\pi$, тогда $a_4 = 2a_3 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \dfrac{\pi^2}{2}$. Итак, трехмерный шар занимает долю $\dfrac{4\pi r^3}{3} : 8r^3 = \dfrac{\pi}{6}$ от трехмерного куба, а четырехмерный – долю $\dfrac{\pi^2 r^4}{2} : 16r^4 = \dfrac{\pi^2}{32}$.

В общем виде интеграл можно вычислить, например, через Г-функцию. Имеем $\int_0^{\pi/2} \cos^n t dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}$. Значит,

$$a_n = 2a_{n-1} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} = a_{n+1} \cdot \pi \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = a_{n-2} \cdot \frac{2\pi}{n}.$$

Имеем $a_0 = 1$, поэтому если $n = 2k$ то $a_n = \dfrac{\pi^k 2^{k-1}}{n!!}$. Аналогично в силу $a_1 = 2$ при $n = 2k + 1$, $a_n = \dfrac{\pi^k 2^k}{n!!}$. В обоих случаях шар занимает долю $\dfrac{\pi^k}{n!! \cdot 2^k}$ от объема описанного вокруг него куба.

05-7. а) Пусть $P(x) > 0$. При $x \to \infty$ многочлен $P(x)$ стремится к $+\infty$, поэтому вне некоторого отрезка $[a, b]$ значения $P(x)$ будут больше 1. На отрезке же $[a, b]$ значения непрерывной положительной функции отделены от нуля, так что $P(x) \geq \alpha > 0$, т.е. значения этого многочлена не могут приблизиться к нулю сколь угодно близко.

б) Рассмотрим многочлен $P(x, y) = x^2 + (xy + 1)^2$. Его значения неотрицательны и не обращаются в 0. Но их можно сделать сколь угодно малыми. Действительно, $P(\sqrt{\alpha}, -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}) = \alpha$ для всех $\alpha > 0$.

Решения задач, 2006 г.

06-1. Имеем $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{31}$. Перемножим все слагаемые, получим величину $-(\Pi a_{ij})^2 \le 0$ (в скобках стоит произведение всех элементов матрицы). Значит, все слагаемые не могут быть положительны.

06-2. Разложим вектор $\overrightarrow{AC}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. Коэффициенты этого разложения больше 0, так что точка C лежит внутри угла BAD. Сумма коэффициентов больше 1, так что C находится вне треугольника ABD, что и требовалось доказать.

06-3. Пусть в вершинах пирамиды стоят числа a, b, c, d. Обозначим $a + b + c + d = m$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = n$, $ab + ac + \ldots + cd = k$.

Пусть S_i – сумма i-ых степеней чисел на ребрах. Тогда $S_1 = 3m$, $S_2 = 3n + 2k$. По условию $3m = 3$, $3n + 2k = 3$. Кроме того, $m^2 = n + 2k$, откуда $m = n = 1$. Имеем

$$(a+b)^3 + (c+d)^3 = (a+b+c+d)((a+b)^2 - (a+b)(c+d) + (c+d)^2) =$$
$$= m(n + 2ab + 2cd - ac - bc - ad - cd) = m(n + 3ab + 3cd - k).$$

Складывая три таких равенства, получаем, что $S_3 = 3mn = 3$.

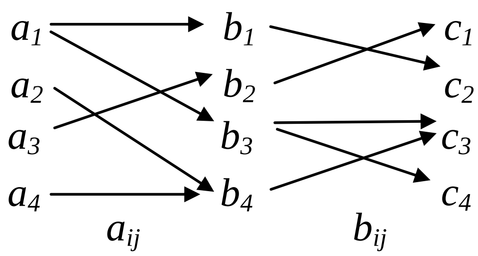
06-4. Заданное в задаче произведение называется булевым.

а) Вычислением получаем, что $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^n$, $n \ge 3$.

б) *1 способ*. Пусть (α_{ij}) – матрица с неотрицательными членами. Присоединенной назовем матрицу $A = (a_{ij})$ из $\mathscr{M}$, такую, что $a_{ij} = \mathrm{sign}(\alpha_{ij})$. Элемент обычного произведения матриц имеет вид $\sum_k \alpha_{ik} \cdot \beta_{kj}$. В силу неотрицательности он равен 0, только если каждое слагаемое равно 0. Это значит, что в каждом произведении хотя бы один сомножитель равен 0.

Итак, при обычном умножении неотрицательных матриц их присоединенные матрицы перемножаются булевым способом. Значит, ассоциативность булева умножения матриц сводится к ассоциативности обычного.

2 способ. Булева матрица задает соотношение между двумя множествами. Это значит, что $a_{ij} = 1$, если a_i связано с b_j. Булево произведение



задает соотношение между множествами A и C, причем $d_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда существует путь по стрелкам от a_i через b_k к c_j.

Но тогда произведение трех матриц описывает пути от первого множества до четвертого и, следовательно, не зависит от порядка, в котором оно вычисляется.

06-5. Обозначим искомый интеграл через I. Сделаем в нем замену $y = -x$. Получим, что $I = -\int_1^{-1} \frac{dy}{(e^{-y}+1)(y^2+1)} = \int_{-1}^{1} \frac{e^y\,dy}{(1+e^y)(y^2+1)}$. Переобозначая переменную интегрирования снова через x и складывая два выражения для I, получаем, что $2I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$. Значит, $I = \pi/4$.

06-6. *1 способ*. Пусть $x\cdot 100\%$ людей имеют один экземпляр гена и $y = 15\%$ – два. Вероятность того, что ребенок получит этот ген от одного из родителей, равна $x\cdot 0{,}5 + y\cdot 1$. Соответственно, вероятность получить два гена будет равна $(0{,}5\,x + y)^2$, что должно совпадать с y. Итак, $x = 2\sqrt{y} - 2y \approx 47{,}5\%$

Если у матери ген проявился, значит, он у нее представлен в обеих хромосомах, т.е. она передаст его ребенку в 100% случаев. Значит, у ребенка он проявится, если он получит этот ген от отца, вероятность чего равна $0{,}5\,x + y = \sqrt{y} \approx 0{,}387$.

2 способ. Пусть p – вероятность того, что один из родителей *передаст* ребенку ген данного признака. Тогда вероятность его *проявления* равна $p\cdot p = 0{,}15$. Значит, $p = \sqrt{0{,}15} \approx 0{,}387$. В силу того, что мать в данном случае передает признак с вероятностью 1, искомая вероятность равна $1\cdot p \approx 38{,}7\%$.

06-7. Введем для множества K характеристическую функцию χ, равную 1 в каждой точке K и 0 во всех остальных точках плоскости. Тогда $S(K) = \iint_{R^2} \chi\,dxdy$. Имеем $a_{ij} = \iint_{R^2} \chi_i \chi_j\,dxdy$, что можно рассматривать как скалярное произведение функций χ_i и χ_j. Тогда $\det A$ есть определитель Грама системы функций (χ_i), который всегда неотрицателен.

Решения задач, 2007 г.

07-1. Расположим параболу так, что ее ось совпадает с осью Oy. Тогда ее уравнение имеет вид $y = ax^2$. Касательная в точке x имеет угловой коэффициент $k = y' = 2ax$. Если касательные в точках x_1 и x_2 перпендикулярны, то $k_1 \cdot k_2 = -1$, откуда $4a^2x_1x_2 = -1$. Значит, произведение расстояний от A и B до оси равно $|x_1 \cdot x_2| = \dfrac{1}{4a^2}$, т.е. постоянно.

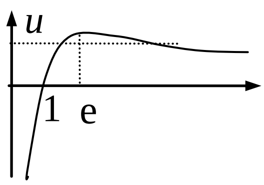
07-2. Мы можем считать, что все коэффициенты a_i не равны 0, так как это только усилит наше утверждение.

Проведем доказательство по индукции. Для $k = 0$ уравнение приобретает вид $a_0 = 0$, где $a_0 \neq 0$, поэтому у него нет корней. Предположим, что утверждение доказано для всех $k \leq m - 1$.

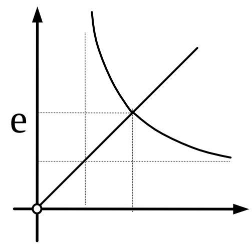
Рассмотрим уравнение $P(x) = a_0 + a_1x^{n_1} + a_2x^{n_2} + \ldots + a_mx^{n_m} = 0$. Предположим, что у него не менее $m + 1$ положительных корней. Между двумя соседними корнями многочлена обязательно есть корень производной, так что она должна иметь не менее m положительных корней. Имеем $P'(x) = x^{n_1-1}Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен такого же типа, что и $P(x)$, у которого $k < m$. По предположению индукции он (а, следовательно, и $P'(x)$) имеет не более $k \leq m - 1$ положительных корней.

Пришли к противоречию, что и завершает доказательство.

07-3. Ясно, что $x > 0$ и $y > 0$. Прологарифмировав уравнение, получим $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$. График функции $u = \dfrac{\ln x}{x}$ (см. справа) строится обычным способом. Он имеет максимум в точке e.



Надо для каждого x найти y с тем же значением u. Одно из решений – $y = x$. Кроме того, если $u > 0$ ($x > 1$), то для каждого x есть еще одно решение. Причем, когда $x \to 1 + 0$, то $y \to +\infty$. Получаем такой график соотношения $x^y = y^x$:



Ясно, что график соотношения будет симметричным относительно прямой $y = x$.

07-4. Приз может попасть в любой ящик с вероятностью 1/3. Обозначим через A_{ij} событие, состоящее в том, что все призы попали в ящики i и j. Вероятность каждого такого события равна $(2/3)^5$. События A_{ij} не являются несовместными. Например, $A_{12} \cdot A_{23}$ состоит в том, что все призы – в ящике 2. Вероятность этого составляет $(1/3)^5$. По формуле суммы вероятностей

$$P(A_{12} + A_{13} + A_{23}) = P(A_{12}) + P(A_{13}) + P(A_{23}) - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) =$$
$$= 3 \cdot (2/3)^5 - 3 \cdot (1/3)^5 = 31/81.$$

07-5. Полученный в игре определитель имеет вид $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & 2 & c_1 \\ b_2 & c_2 & 4 \end{vmatrix} = 8 + a_1b_2c_1 + a_2b_1c_2 - c_1c_2 - 2b_1b_2 - 4a_1a_2$. Произведение второго и третьего слагаемых равно $p = 3{\cdot}5{\cdot}6{\cdot}7{\cdot}8{\cdot}9 = 2^4{\cdot}3^4{\cdot}5{\cdot}7$, так что по свойству средних $a_1b_2c_1 + a_2b_1c_2 \geq 2\sqrt{p} > 2{\cdot}212 = 424$. С другой стороны, сумма $c_1c_2 + 2b_1b_2 + 4a_1a_2$ принимает наибольшее значение, если на бóльшие коэффициенты умножаются бóльшие числа. Поэтому эта сумма не превосходит $3{\cdot}5 + 2{\cdot}6{\cdot}7 + 4{\cdot}8{\cdot}9 = 387$. Значит, определитель больше 0, выигрывает первый.

07-6. Обозначим элемент произведения $A{\cdot}B$ через c_{ij}. Имеем $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$, так что $\sum_i |c_{ij}| \leq \sum_{i,j}\sum_k |a_{ik}b_{kj}| = \sum_{i,j,k} |a_{ik}|\cdot|b_{kj}|$. С другой стороны,

$$\|A\|{\cdot}\|B\| = \sum_{i,j}|a_{ij}| \sum_{k,m}|b_{km}| = \sum_{i,j,k,m} |a_{ij}|\cdot|b_{km}|.$$

В последней сумме есть все слагаемые из $\|A{\cdot}B\|$, но также и некоторые другие неотрицательные слагаемые.

07-7. Обозначим $x_0 = x$, $\underbrace{\cos\cos\ldots\cos}_{n} x = x_n$, тогда $x_n = \cos x_{n-1}$. Ясно, что, начиная с $n = 2$, все x_n лежат в промежутке $[0; 1]$, в котором косинус убывает. Значит, при $x_n > x_{n-1}$ имеем $x_{n+1} < x_n$ и наоборот, т.е. значения последовательности колеблются. При этом $|x_{n+1} - x_n| = |\cos x_n - \cos x_{n-1}| = |\sin c|{\cdot}|x_n - x_{n-1}|$ (по формуле Лагранжа).

Заметим, что точка c лежит между x_{n-1} и x_n, так что $|\sin c| < \sin 1 < 1$ для $n \geq 1$. Значит, $|x_{n+1} - x_n| < \alpha|x_n - x_{n-1}|$, где $\alpha = \sin 1 < 1$. Но тогда $|x_{n+1} - x_n| < \alpha^n|x_1 - x_0|$, т.е. расстояние меду соседними точками стремится к 0. При этом отрезки $[x_n, x_{n+1}]$ стягиваются в некоторую точку x_0 (принцип вложенных отрезков). Переходя к пределу в равенстве $x_n = \cos x_{n-1}$, получаем, что эта точка является корнем уравнения $x = \cos x$, которое можно решить графически.

07-8. Пусть эллипс задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Через искомую точку (x, y) проведем прямую $(x + \lambda t;\ y + \mu t)$. Найдем точки пересечения этой прямой с эллипсом. Соответствующее значение параметра t является решением уравнения $\frac{(x+\lambda t)^2}{a^2} + \frac{(y+\mu t)^2}{b^2} = 1$. Упрощая, получаем, уравнение

$$(b^2\lambda^2 + a^2\mu^2)t^2 + 2(b^2\lambda x + a^2\mu y)t + b^2x^2 + a^2y^2 - 1 = 0.$$

Прямая будет касательной к эллипсу, если пересекает его ровно в одной точке. Это значит, что дискриминант выписанного квадратного уравнения равен 0. После упрощений условие приобретает вид $(b^2 - y^2)\lambda^2 + (a^2 - x^2)\mu^2 + 2\lambda\mu xy = 0$.

Проведем через ту же точку прямую, перпендикулярную первой, ее направляющий вектор имеет вид $(-\mu, \lambda)$. Она будет касательной к эллипсу при условии, что $(b^2 - y^2)\mu^2 + (a^2 - x^2)\lambda^2 - 2\lambda\mu xy = 0$. Складывая эти два уравнения, получаем, что $(\lambda^2 + \mu^2)(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) = 0$.

Первый сомножитель в 0 не обращается, поэтому $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Можно проверить, что для каждой точки этой окружности существует решение (λ, μ).

Решения задач, 2008 г.

08-1. Ясно, что число $5 = 2\cdot 1 + 3\cdot 1$ принадлежит A. Легко найти несколько следующих элементов A: это $13 = 1 + 12$, $17 = 5 + 12$, … Докажем по индукции, что все числа вида $12k + 1$ и $12k + 5$ принадлежат A.

Ясно, что при $k = 0$ утверждение выполняется. Пусть уже доказано, что числа 1, 5, 13, 17, …, $12k + 1$, $12k + 5$ принадлежат A. Надо доказать, что в это множество входят и числа $12k + 13$, $12k + 17$.

Имеем $12k + 13 = 2(6k + 5) + 3\cdot 1 = 2(6k - 1) + 3\cdot 5$. Хотя бы в одном из этих двух представлений число в скобках принадлежит A. Действительно, оба числа $6k + 5$ и $6k - 1$ не превосходят $12k + 5$. Если k четно, то $6k + 5 = 12l + 5$. Если же оно нечетно, $k = 2l + 1$, то $6k - 1 = 12l + 5$.

Аналогично $12k + 17 = 2(6k + 7) + 3\cdot 1 = 2(6k + 1) + 3\cdot 5$, причем для четных k имеем $6k + 1 = 12l + 1$, а если $k = 2l + 1$, то $6k + 7 = 12l + 13 = 12(l + 1) + 1$, т.е. хотя бы одно из чисел $6k + 1$, $6k + 7$ принадлежит A.

08-2. Сделаем в интеграле слева замену $x = \pi - t$. Получим, что

$$I = \int_0^\pi x f(\sin x)dx = -\int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t))dt = \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin(t))dt = \pi\int_0^\pi f(\sin(t))dt - I.$$

Из этого равенства находим значение I, которое совпадает с правой частью доказываемого равенства.

08-3. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Покажем, что $a + d = tr\,A = 0$. Действительно. В противном случае $b = c = 0$, так что «диагональные» равенства принимают вид $a^2 = d^2 = 0$. Но тогда и $a + d = 0$ – противоречие.

Итак, $a + d = 0$, при этом «диагональные» равенства принимают одинаковый вид $a^2 + bc = 0$.

Заметим, что последнее равенство в данном случае равносильно тому, что $\det A = ad - bc = 0$. Впрочем, это ясно и из равенства $\det (A^2) = (\det A)^2 = 0$.

08-4. Чтобы последовательность была ограниченной, будем искать ее в виде $a_n = \sin(b_n)$. Если b_n имеет конечный предел, то же верно и для последовательности a_n, что противоречит ее нефундаментальности.

Имеем $a_{n+1} - a_n = \sin(b_{n+1}) - \sin(b_n) = 2\sin(\frac{b_{n+1} - b_n}{2})\cos(\frac{b_{n+1} + b_n}{2})$. Второй сомножитель ограничен, так что достаточно потребовать, чтобы первый стремился к 0. При этом последовательность b_n, как и a_n, нефундаментальна и удовлетворяет условию $b_{n+1} - b_n \to 0$. Однако ограниченности от нее уже не требуется. Например, можно считать, что $b_n \to \infty$ при $n \to +\infty$.

Всем поставленным условиям удовлетворяет последовательность $b_n = \sqrt{n}$: она стремится к бесконечности, но $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$.

Последовательность $a_n = \sin(\sqrt{n})$ содержит в себе подпоследовательность $\sin m$, $m \in \mathbb{N}$ которая, как известно, не имеет предела. Значит, a_n также не имеет предела и, следовательно, нефундаментальна.

08-5. Подсчитаем вероятность того, что муравьи не встретятся на ребрах. Муравей из вершины A может ползти в любую из 3 вершин (вероятность этого события равна 1). Назовем вершину, в которую он пополз, B. Муравей из этой вершины может ползти в любую из двух вершин, кроме A (вероятность события 2/3). Назовем выбранную им вершину C. Тогда C-муравей имеет выбор из двух вариантов.

1) С вероятностью 1/3 он ползет в вершину A. Тогда четвертый муравей из вершины D может ползти в любую из трех вершин.

2) С той же вероятностью 1/3 муравей ползет в вершину D. Тогда для D-муравья остается 2 пути (в A или в B).

Итак, вероятность «невстречи» равна $1 \cdot \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3}\,\frac{2}{3}) = \frac{10}{27}$. Тогда вероятность встречи составляет $1 - \frac{10}{27} = \frac{17}{27}$.

Условие задачи можно понять и несколько по-другому, если учитывать, что муравьи из вершин A и B могут встретиться не только на ребре AB, но и в третьей вершине (C или D). Тогда случай 1) исключается (D-муравью некуда ползти). В случае 2) у него остается только один путь – в A. Значит, вероятность «невстречи» в этом понимании равна $1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$, а вероятность встречи, соответственно, $\frac{25}{27}$.

08-6. См. задачу 04-8.

08-7. Поменяем местами первые два столбца матрицы. Тогда ее определитель поменяет знак, хотя матрица станет другой (повторяющихся элементов в матрице нет). Получается, что каждой матрице с положительным определителем соответствует матрица с отрицательным и наоборот. Значит, их поровну.

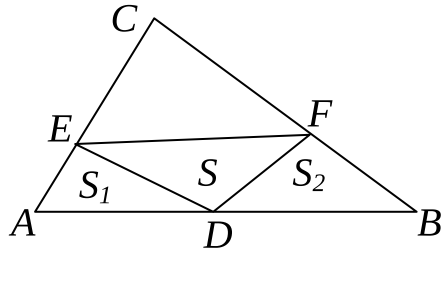
08-8. Обозначим $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Тогда $\overrightarrow{DB} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{a} + x(\vec{c} - \vec{a})$, $\overrightarrow{DF} = -\vec{a} + y(\vec{c} - \vec{a})$. Здесь x, y – некоторые числа из промежутка [0; 1]. Надо доказать неравенство $S \le S_1 + S_2$ (обозначения см. на чертеже).

Площадь треугольника можно выразить через модуль векторного произведения.

Имеем $2S_1 = |[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}]| = x|[\vec{a}, \vec{c}]|$, $2S_2 = |[\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DF}]| = y|[\vec{a}, \vec{c}]|$ и $2S = |[\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}]| = ((1 - x)y + (1 - y)x)\,|[\vec{a}, \vec{c}]|$. Числовые коэффициенты вынесены без знака модуля, т.к. они неотрицательны.

Доказываемое неравенство приводится к виду $(1 - x)y + (1 - y)x = x + y - 2xy \ge x + y$, что, конечно, верно (с учетом значений, пробегаемых x и y).

08-9. Пусть математики не виделись n лет (оба они знают это число). Возрасты k, l, m детей являются решением уравнения $n = k\cdot l\cdot m$. Из разговора мы узнаем, что эти числа удовлетворяют некоторым соотношениям. Назовем тройку (k, l, m) М-решением, если $k \ge l > m$ (среди детей есть младший) и СМ-решением, если $k > l > m$ (среди детей есть и младший и старший).



По условию, уравнение $n = k\cdot l\cdot m$ имеет более одного М-решения и ровно одно СМ-решение.

Предположим, что существует СМ-решение с $m \neq 1$. Тогда, кроме (k, l, m) решением является и тройка $(km, l, 1)$, также удовлетворяющая соотношению $km > l > 1$. Значит, дополнительная информация в этом случае не позволит второму математику найти решение. Итак, для СМ-решения $m = 1$. Пусть $n = kl$, $k > l > 1$. Предположим, что число l не простое, $l = pq$, $p \geq q > 1$. Но тогда $n = k(pq) = (kp)q$ имеет не менее двух подходящих разложений.

Итак, $l = p$ – простое число, являющееся делителем n. В силу единственности СМ-решения такой делитель также один. Действительно, если n делится еще и на простое число $q \neq p$, то тройка $(n/q, q, 1)$ не совпадает с $(n/p, p, 1)$ и не должно быть СМ-решением (в силу его единственности). Значит, $n/q = q$, $n = q^2$, что не делится на p. Противоречие.

Мы получили, что $n = p^r$. Оно имеет М-разложения $(p^{r-1}, p, 1)$ и $(p^{r-2}, p^2, 1)$. СМ-решением среди них будет первое, а второе может быть только М-решением. Итак, $r - 2 = 2$ и $r = 4$.

Окончательно получаем, что $n = p^4$ для некоторого простого p, а возрасты детей составляют p^3, p и 1 год.

Вообще говоря, числу p мы можем придать значения 3, 5, … Однако уже при $p = 3$ оказывается, что математики не виделись 81 год, что довольно много по меркам человеческой жизни. Так что, скорее всего, $p = 2$ и математики не виделись 16 лет.

Решения задач, 2009 г.

09-1. Подставим в данное равенство вместо x значения $-x$, $1/x$, $-1/x$. Получим 4 уравнения

$$\begin{cases} 3f(-x) + f(1/x) + f(x) = x \\ 3f(x) + f(-1/x) + f(-x) = -x \\ 3f(-1/x) + f(x) + f(1/x) = 1/x \\ 3f(1/x) + f(-x) + f(-1/x) = -1/x \end{cases}$$

Они образую линейную систему относительно неизвестных $f(x)$, $f(-x)$, $f(1/x)$, $f(-1/x)$. Решим ее по правилу Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 45,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 1 \\ 1/x & 0 & 1 & 3 \\ -1/x & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -30x - 15/x.$$

Получаем, что $f(x) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{3x}$.

09-2. Пусть $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{k}$ – орты прямоугольной системы координат с началом в точке O. Плоскость α определяется в этой системе своей нормалью $\boldsymbol{n} = (k, l, m)$. Можно считать, что эта нормаль единичная.

Расстояние от вектора $\boldsymbol{i}$ до плоскости α равно проекции этого вектора на нормаль. В силу того, что вектор n единичный, эта проекция равна скалярному произведению $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}) = k$. Аналогично, два остальных расстояния равны l и m. Сумма их квадратов равна квадрату длины вектора $\boldsymbol{n}$, т.е. 1.

09-3. Аналогичные интегралы исследованы в задаче 08-2. В нашем случае $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$ – непрерывна на $[0, \pi]$. Имеем $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin x}dx$. Последний интеграл можно подсчитать, например, с помощью универсальной подстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$, он равен 2. Значит, исходный интеграл равен π.

09-4. Будем считать, что змея лежит на комплексной плоскости. Тогда первый отрезок ее тела равен 1, второй расположен в направлении i и равен πi, … Продолжая этот процесс, что положение кончика хвоста определяется суммой ряда $1 + \pi i - \dfrac{\pi^2}{2} - \dfrac{\pi^3}{3!}i + \ldots$ Легко заметить, что это ряд Тейлора для функции e^x в точке $i\pi$. Его сумма равна $e^{i\pi} = -1$.

09-5. Заметим, что подынтегральная функция ограничена и имеет единственный разрыв в точке (0; 0; 0). Значит, она интегрируема.

Сделаем циклическую перестановку переменных. В силу симметрии функции и области интегрирования получаем, что $I = \displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x+y}{x+y+z}dxdydz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{y+z}{x+y+z}dxdydz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{z+x}{x+y+z}dxdydz$. Складывая три значения, получаем, что $3I = \displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 2dxdydz = 2$. Значит, $I = 2/3$.

09-6. Заметим, что компоненты вектора $\boldsymbol{e}$ получаются при вычитании из матрицы A транспонированной к ней матрицы A^T. Имеем

$$S = A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & e_3 & -e_2 \\ -e_3 & 0 & e_1 \\ e_2 & -e_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведение $S\boldsymbol{e} = 0$. Но $SA = (A - A^T)A = A^2 - A^T{\cdot}A = A^2 - A{\cdot}A^T = A\,S$. Значит, $SA\boldsymbol{e} = AS\boldsymbol{e} = 0$, т.е. $A\boldsymbol{e}$ также является решением уравнения $Sx = 0$. Легко показать, что любое решение этого уравнения пропорционально $\boldsymbol{e}$. Итак, $A\boldsymbol{e} = \lambda\boldsymbol{e}$, что и требовалось доказать.

09-7. Найдем среднее число взятых подарков. Рассмотрим сначала противоположное событие, что конкретный подарок не будет взят. Это произойдет только в том случае, если никто из детей не откроет этот ящик. Вероятность этого равна $(1 - 1/n)^m$.

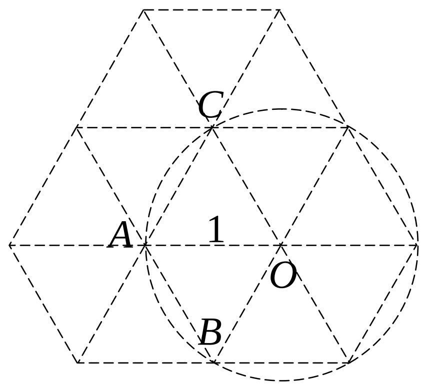
Соответственно, вероятность быть взятым для отдельного подарка равна $1 - (1 - 1/n)^m$, а среднее число взятых подарков – $n(1 - (1 - 1/n)^m)$. Столько же детей в среднем получат подарки. Тогда средне число «неполучивших» равно $m - n(1 - (1 - 1/n)^m)$.

09-8. Заметим, что в числителе правой дроби стоит частичная сумма S_k ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ Ее знаменатель можно выразить в виде $S_{2k} - S_k$. Условие задачи можно переписать в виде $\dfrac{S_k}{S_{2k} - S_k} = \dfrac{a_1}{a_2}$,

Если $a_1 = 0$, то и все частичные суммы равны нулю, как и все a_k. В противном случае $S_{2k} = qS_k$, где $q = \dfrac{a_2 + a_1}{a_1}$ = const. Будем искать a_k в виде многочлена m-ой степени от k. Как известно, суммируя одинаковые степени $1^m + 2^m + \ldots + k^m$, мы получим некоторый многочлен степени $m + 1$. Соответственно и S_k будет многочленом степени $m + 1$: $S_k = b_1k^{m+1} + b_2k^m + \ldots + b_{m+2}$. Как мы показали, отношение $\dfrac{S_{2k}}{S_k}$ для искомого многочлена должно быть константой. Имеем $q = \dfrac{S_{2k}}{S_k} = \dfrac{b_1(2k)^{m+1} + b_2(2k)^m + \ldots + b_{m+2}}{b_1k^{m+1} + b_2k^m + \ldots + b_{m+2}} \to 2^{m+1}$ при $k \to \infty$.

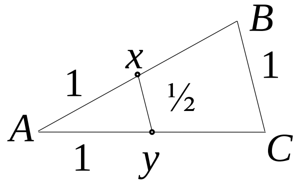
Многочлен $S_{2k} - qS_k = S_{2k} - 2^{m+1}S_k$ должен быть тождественно равен 0. Он имеет вид $-\,b_2(2k)^m - 3b_3(2k)^{m-1} - \ldots - (2^{m+1} - 1)b_{m+2}$. В силу произвольности k все коэффициенты, начиная с b_2, должны быть равны 0. Итак, $S_k = b_1k^{m+1}$. Но тогда $a_k = S_k - S_{k-1} = b_1(k^{m+1} - (k - 1)^{m+1})$. Коэффициенты этого многочлена будут целочисленными при целом b_1. Все такие многочлены отличаются только мультипликативным множителем.

09-9. Пусть точка O отображается в точку $f(O)$, тогда единичная окружность ω^O с центром в O переходит взаимно однозначно в единичную же окружность $\omega^{f(O)}$ с центром $f(O)$. Пусть $A \in \omega^O$. Окружности ω^A и ω^O пересекаются в точках B и C, их образами являются точки пересечения окружностей $\omega^{f(A)}$ и $\omega^{f(O)}$. Рассматривая окружности с центрами в точках B и C и т.д. мы последовательно построим правильную треугольную сеть как в исходной плоскости, так и в плоскости значений отображения. На такой сети точек отображение f является изометрией (движением).



Заметим, что такую же сеть мы можем построить, начиная с любых двух точек O, A.

а) Пусть точки x, y находятся на расстоянии 2, тогда они принадлежат сети, построенной на точках $O = (x + y)/2$ и $A = x$. Соответственно, точки $f(x)$ и $f(y)$ лежат на аналогичной сети, построенной на точках $f(O)$ и $f(A)$, так что расстояние между ними также равно 2.



б) Пусть расстояние между точками x и y равно 1/2. Построим равнобедренный треугольник с вершиной A и основанием $[x; y]$ так, что $|A - x| = |A - y| = 1$. Продолжим его стороны до точек B и C так, что расстояния AB и AC равны 2. Тогда отрезок $[x; y]$ будет средней линией треугольника BAC, так что длина BC равна 1.

По доказанному ранее треугольник с вершинами $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ будет равен по размерам исходному, а точки $f(x)$ и $f(y)$ будут серединами соответствующих сторон. Значит, расстояние между ними равно 1/2.

в) Пусть расстояние между точками x и y меньше 1. Тогда можно построить точку A, находящуюся на расстоянии 1/2 от каждой из них. По доказанному в пункте б) имеем $|f(A) - f(x)| = |f(A) - f(y)| = 1/2$. Но тогда по неравенству треугольника $|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| = 1/2 + 1/2 = 1$.

Решения задач, 2010 г.

10-1. Пусть $a = re^{i\alpha}$, $b = re^{i\beta}$, $c = re^{i\gamma}$. Имеем

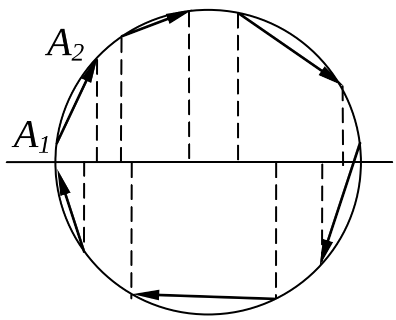
$$\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} = abc\frac{1/c+1/a+1/b}{a+b+c} = re^{i\alpha+i\beta+i\gamma}\,\frac{e^{-i\alpha}+e^{-i\beta}+e^{-i\gamma}}{e^{i\alpha}+e^{i\beta}+e^{i\gamma}}.$$

Величины в числителе и знаменателе дроби взаимно сопряженные. Поэтому их модули совпадают. Итак, модуль всего выражения равен r.

10-2. Центр тяжести треугольника – точка пересечения его медиан. В частности, медиана, проведенная из точки C, проходит через середину отрезка AB, т.е. через точку $O(0;\ 0)$. Искомая точка $M(t,\ z)$ делит отрезок OC в отношении 2 : 1, считая от точки C. Это значит, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$. Поэтому координаты t, z можно найти как $t = x/3$, $z = y/3$. Из этих соотношений следует, что $z = y(x)/3 = y(3t)/3 = 3t^2 - 6t + 5$.

10-3. Концы A_i данных векторов лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке O (нумерация идет по часовой стрелке). Нечетный номер соответствует красному цвету, а четный – зеленому. Имеем

$$\vec{x} = (\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_4} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2n}}) - (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2n-1}}) = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} +$$
$$+ \overrightarrow{OA_4} - \overrightarrow{OA_3} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2n}} - \overrightarrow{OA_{2n-1}} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}.$$



Проведем через центр O прямую, параллельную $\vec{x}$, и спроецируем на нее все слагаемые. Проекция вектора $\vec{x}$ на эту прямую будет совпадать с ним самим по абсолютной величине.

Все векторы $\overrightarrow{A_{2k-1}A_{2k}}$ разобьются на две группы: те, которые сонаправлены $\vec{x}$, и которые противонаправлены. Мы можем считать, что нумерация точек идет от прямой по часовой стрелке. Тогда векторы одной группы – это $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$ и так далее до некоторого номера k. Вторая группа состоит из остальных векторов. Заметим, что в каждой группе проекции точек A_i расположены на прямой в том же порядке, как и сами точки A_i на окружности. Это значит, что сумма проекций равна проекции суммы.

В каждой группе эта сумма не больше диаметра окружности, т.е. лежит в пределах от 0 до 2. Это значит, что разность двух сумм не больше 2 – 0 = 2 и не меньше 0 – 2 = –2.

10-1. Обозначим искомые подмножества через A_i, $i = 1, \ldots, k$. Построим таблицу, в клетках которой записаны общие элементы каждой пары множеств. Ясно, что таблица будет симметричной относительно главной диагонали.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	…
A_1		1	2	4	7	…
A_2	1		3	5	8	…
A_3	2	3		6	9	…
A_4	4	5	6		10	…
A_5	7	8	9	10		…
…	…	…	…	…	…	

Все номера, стоящие выше диагонали, различны. Действительно, повторяющийся номер соответствовал бы двум парам множеств, т.е. принадлежал бы не менее, чем трем из них. Но тогда в таблице содержится $1 + 2 + \ldots + (k-1) = (k-1)k/2$ элементов. Итак, $(k-1)k/2 \le 2010$, откуда $k \le 63$.

Эта же таблица дает и пример, так как можно считать, что i-ое множество состоит из всех элементов соответствующей строки.

10-5. Имеем

$$\int \frac{(x-1)^2}{x^2+\mathrm{e}^x+1} = \int \frac{x^2-2x+1}{x^2+\mathrm{e}^x+1}dx = \int\left(1-\frac{2x+\mathrm{e}^x}{x^2+\mathrm{e}^x+1}\right)dx = x - \ln(x^2+\mathrm{e}^x+1) + C.$$

10-6. Рассмотрим сначала отрезок $\gamma = [a;\ bi]$. Он составляет с вещественной и мнимой осями углы α и β соответственно, причем $\alpha + \beta = \pi/2$. Заметим, что при отображении sin вещественная ось переходит в вещественную. Значит, угол между Γ и вещественной осью есть образ угла α при этом отображении. Аналогично угол Γ с мнимой осью есть образ угла β (т.к. мнимая ось при отображении sin также переходит в себя).

Функция sin является аналитической, ее производная равна $\cos z$. В точках, для которых $\cos z \ne 0$, соответствующее отображение является конформным и не меняет углов между линиями. Значит, искомая сумма также равна $\pi/2$.

Случай $\cos z = 0$ возможен только на вещественной оси, при $a = \pi/2 + \pi k$. Для этих точек имеем по формуле Тейлора: $\sin z = \varepsilon - \varepsilon(z-a)^2 + o((z-a)^3)$ в окрестности точки $z = a$ (здесь $\varepsilon = \sin a = \pm 1$). Кривая Γ направлена вдоль вектора $\sin z - \varepsilon = -\varepsilon(z-a)^2$. Это преобразование удваивает углы (и, возможно, направляет их в противоположную сторону). Значит, Γ составляет с вещественной осью угол $\pm 2\alpha$.

Впрочем, в качестве угла между линиями естественно рассматривать острый угол (без учета знака). Поэтому угол в точке a равен 2α или $\pi - 2\alpha$ (если именно этот угол острый). Значит, искомая сумма равна $2\alpha + \beta = \alpha + \pi/2$ (при $0 < \alpha \le \pi/4$) или $\pi - 2\alpha + \beta = 3\,\pi/2 - 3\alpha = 3\beta$ (если $\pi/4 < \alpha \le \pi/2$).

10-7. Искомое число есть $\frac{m}{n(14)}$, где $n(14)$ – общее число вариантов остановки волчка в 14 секторах при 6 бросаниях, а m – число вариантов, при которых выпадут секторы 1, 2, … , 6. Очевидно, что $n(14) = 14^6$. Заметим, что число m не зависит от общего числа секторов на волчке. Действительно, исследуемое событие означает, что волчок останавливался только на секторах 1-6, но никогда – на пустом промежутке перед сектором номер 7. Тогда не важно, сколько именно секторов есть между 7-ым и 1-ым.

Рассмотрим аналогичную задачу в случае 7 секторов. Тогда вероятность выпадения 6 конкретных секторов равна вероятности того, что не выпадет оставшийся седьмой сектор. Для каждого невыпавшего сектора она одинакова и, следовательно, равна $\frac{1}{7} = \frac{m}{n(7)} = \frac{m}{7^6}$. Значит, $m = 7^5$, а искомая вероятность равна $\frac{7^5}{14^6} = \frac{1}{2^6 \cdot 7}$.

10-8. Нам требуется по числу этажей в доме найти необходимое число бросков. Попробуем решить обратную задачу: по числу бросков найти этажность, для которой гарантированно можно определить самый нижний этаж разбития шаров.

Обозначим через $p(k, n)$ максимальную этажность дома, для которого это можно сделать k шарами за n бросаний. Можно считать, что $p(k, 0) = 0$.

Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Если мы бросим шарик хотя бы со второго этажа и он разобьется, то мы не узнаем, можно ли его было бросить с первого. Итак, один шарик надо бросать с 1-го, 2-го и так далее этажей, пока он не разобьется. Значит, $p(1, n) = n$.

Пусть теперь шариков больше, чем 1. Бросим первый шарик с этажа s_n. Если он разбился, то у нас остается $k - 1$ шарик, $n - 1$ бросок и $s_n - 1$ непроверенных этажей. Значит, $s_n - 1 \le p(k - 1, n - 1)$ и максимальное $s_n = p(k - 1, n - 1) + 1$. В частности, $s_1 = p(k - 1, 0) + 1 = 1$. Более высокие, чем s_n, этажи проверять не надо, так что $p(k, n) \ge s_n$.

Если же при первом бросании шар остался цел, то мы имеем в распоряжении еще $(n - 1)$ попытку и снова k целых шара. За $n - 1$ попытку мы можем проверить $p(k, n - 1)$ этажей, начиная с номера $s_n + 1$ (все более низкие проверять уже не надо). Поэтому мы можем определить нужный этаж во всем интервале от 1 до $s_n + p(k, n - 1)$.

Итак, $p(k, n) = s_n + p(k, n - 1) = s_n + s_{n-1} + p(k, n - 2) = \ldots = s_n + s_{n-1} + \ldots + s_1 +$ $+ p(k, 0) = \sum_{i=1}^{n} s_i$. Как мы показали выше, $s_n = p(k - 1, n - 1) + 1$.

а) Пусть у нас есть два шарика. Имеем $s_n = p(1, n - 1) + 1 = n$. Тогда $p(2, n) =$ $= \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Итак, за 44 броска можно проверить не более $\frac{44 \cdot 45}{2} = 990$ этажей, а за 45 – уже $\frac{45 \cdot 46}{2} = 1035$. Значит, 45 бросков хватит.

б) Для трех шариков имеем $p(3, n) = \sum_{i=1}^{n} s_i$, где $s_i = p(2, i-1) + 1 = \frac{(i-1)i}{2} + 1$. Последнее выражение можно переписать в виде $\frac{1}{6}(i^3 - (i-1)^3 + 5)$. Суммируя по i от 1 до n, получим $p(3, n) = \frac{1}{6}(n^3 + 5n)$. (*Замечание. Можно использовать и стандартные формулы для сумм степеней*).

Поскольку $\frac{1}{6}(18^3 + 5\cdot 18) < 1000 < \frac{1}{6}(19^3 + 5\cdot 19)$, то $X = 19$.

10-9. Выберем какое-нибудь иррациональное число x_0. Приращение $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x)$. Для рационального $x = \frac{m}{n}$ оно равно $\frac{x}{n^2}$. Известно, что для любого иррационального x_0 существует последовательность наилучших приближений, т.е. чисел вида $x = \frac{m}{n}$ таких, что $|\Delta x| = \left|x_0 - \frac{m}{n}\right| \le \frac{1}{n^2}$. В этих точках $\left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right| = \left|\frac{x}{n^2 \Delta x}\right| \ge |x| \ge \left|\frac{x_0}{2}\right|$. Последнее неравенство верно в достаточно малой окрестности x_0. Итак, сколь угодно близко к числу x_0 существуют точки, в которых $\left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|$ равно 0 (любые иррациональные), и точки, в которых $\left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|$ отделено от 0. Значит, это отношение не имеет предела при $\Delta x \to 0$, а функция не имеет производной.

Исследуем теперь производную в точке 0. Имеем $\Delta x = x - 0 = x$, так что $\left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|$ равно 0 для иррациональных x и $\frac{x/n^2}{x} = \frac{1}{n^2}$ для рациональных $x = \frac{m}{n}$. Если x находится достаточно близко к 0, $|x| < \frac{1}{k}$, то $n > k$ и $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{k^2}$.

Значит, $\lim \left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right| = f'(0) = 0$.

10-10. Предположим, что искомое f существует. В силу свойств 1), 2) имеем $f(f(X)) = f(X)$ для всех $X \in 2^{\mathbb{N}}$. Множество $f(\varnothing) \sim \varnothing$, т.е. конечно. Для любого конечного (т.е. эквивалентного $\varnothing$) множества K имеем $f(K) = f(\varnothing)$. Если пересечение множеств A и B конечно, то пересечение их образов есть $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\varnothing)$.

Выберем произвольную бесконечную последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$

бесконечных попарно не пересекающихся подмножеств $\mathbb{N}$. В силу свойства 1) последовательность $f(X_1)$, $f(X_2)$, …, $f(X_n)$, … будет состоять из бесконечных множеств. Как показано выше, образы $f(X_n)$ пересекаются между собой только по множеству $f(\varnothing)$.

Значит, множества вида $f(X_n) \setminus f(\varnothing)$ попарно не пересекаются. Выберем в каждом из них по одному элементу a_n (все они различны). Множество всех a_n обозначим через A.

Какое значение может принимать отображение f на множестве A? Пересечение $A \cap f(X_n) = \{a_n\}$ конечно, следовательно, $f(A) \cap f(f(X_n)) = f(A) \cap f(X_n) = f(\varnothing)$ для каждого n. В частности, пересечение $f(A)$ и $f(X_n)$ не содержит элемент a_n. Заметим, что в множество $f(X_n)$ элемент a_n входит. Значит, он не входит в $f(A)$.

Это верно при всех n, так что $f(A)$ отличается от A *бесконечным* числом элементов, что противоречит соотношению $A \sim f(A)$.
