Бахтиева Л.У., Тазюков Ф.Х.
доценты, кандидаты физико-математических наук,
Казанский (Приволжский) федеральный университет

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

Анализ литературных источников, посвященных изучению устойчивости оболочки под действием внешнего давления q, показывает наличие расхождений между теоретическими решениями и экспериментальными данными [1, 148]. Этот факт может быть объяснен, в частности, тем, что при построении математической модели авторами известных нам исследований не учитывались динамические процессы, происходящие во время хлопка. Цель настоящей работы – построить математическую модель, отражающую картину выпучивания оболочки с учетом динамических факторов и оценить влияние динамики хлопка на величину критической нагрузки.

В нелинейной постановке задача может быть решена с помощью энергетического метода Ритца [2, 551]. Выберем аппроксимирующую функцию прогиба в виде

$$w(x,y) = f_1 \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R} + f_2 \sin^2\frac{m\pi x}{L} + f_0, \qquad (1)$$

где m, n – волновые числа, L – длина образующей, R –радиус оболочки. Первое слагаемое в (1) соответствует решению линеаризованной задачи, второе отражает несимметричность прогиба относительно срединной поверхности с преимущественным направлением к центру кривизны, f_0 – слагаемое, соответствующее радиальным перемещениям точек торцевых сечений, связанное с амплитудами f_1 и f_2 формулой

$$\frac{f_0}{R} = \frac{qR}{Eh} + {f_1}^2\frac{n^2}{8R^2} - \frac{f_2}{2R},$$

выведенной в [2, 527] из условия периодичности дугового перемещения v; h – толщина оболочки; E – модуль упругости.

Подставим выражение (1) в уравнение неразрывности деформации

$$D\nabla^4 w - hL(w,\Phi) - \frac{h}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0, \qquad (2)$$

где $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – изгибная жесткость; ν – коэффициент Пуассона; $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$; $L(w,\Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

Интегрируя (2), найдем функцию усилий Φ и вычислим потенциальную энергию деформации по формуле $U = U_{\text{с}} + U_{\text{и}}$, где $U_{\text{с}} = \frac{h}{2E}\iint\big((\nabla^2\Phi)^2 - (1+\nu)L(\Phi,\Phi)\big)\,dxdy$ – энергия деформации срединной поверхности; $U_{\text{и}} = \frac{D}{2}\iint\big((\nabla^2 w)^2 - (1-\nu)L(w,w)\big)\,dxdy$ – энергия изгиба.

Работа внешних сил $A = q\iint w\,dxdy = q\pi RL(2f_0 + f_2)$.

Для полной потенциальной энергии $Э = U - A$ получаем выражение

$$\widehat{Э} = -b_1\hat{q}{\xi_1}^2 + b_2\hat{q}^2 + b_3{\xi_1}^2 + b_4{\xi_2}^2 + b_5{\xi_1}^4 + b_6\xi_2{\xi_1}^2 + b_7{\xi_1}^2{\xi_2}^2, \quad (3)$$

где введены обозначения

$$\widehat{Э} = Э \cdot \frac{Eh^3L\pi}{R},\ b_1 = \frac{\eta}{4},\ b_2 = -2,\ b_3 = \frac{\eta^2{s_1}^2}{48(1-\nu^2)} + \frac{\theta^4}{4{s_1}^2},\ b_4 = \frac{1}{8} + \frac{\eta^2\theta^4}{6(1-\nu^2)},$$
$$b_5 = \frac{\eta^2(1+\theta^4)}{128},\ b_6 = -\frac{\eta}{16}\left(1 + \frac{8\theta^4}{4{s_1}^2}\right),\ b_7 = \frac{\eta^2\theta^4}{4}\left(\frac{1}{{s_1}^2} + \frac{1}{{s_2}^2}\right),\ \theta = \frac{m\pi R}{nL},\ \eta = \frac{hn^2}{R},$$
$$s_1 = 1 + \theta^2,\ s_2 = 1 + 9\theta^2,\ \hat{q} = \frac{qR^2}{Eh^2},\ \xi_1 = \frac{f_1}{h},\ \xi_2 = \frac{f_2}{h}.$$

Метод Ритца приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial\widehat{Э}}{\partial\xi_1} = 0,\ \ \frac{\partial\widehat{Э}}{\partial\xi_2} = 0. \quad (4)$$

Из первого уравнения (4) найдем безразмерную нагрузку $\hat{q}$, а из второго – выражение для квадрата амплитуды ξ_1

$$\hat{q} = \frac{b_3 + 2b_5{\xi_1}^2 + b_6\xi_2 + b_7{\xi_2}^2}{b_1}, \quad {\xi_1}^2 = \frac{-2b_4\xi_2}{b_6 + 2b_7\xi_2},$$

откуда получаем

$$\hat{q} = \frac{b_3b_6 + (2b_3b_7 + {b_6}^2 - 4b_4b_5)\xi_2 + 3b_6b_7{\xi_2}^2 + 2{b_7}^2{\xi_2}^3}{b_1b_6 + (2b_1b_7 - 4b_2b_5)\xi_2}. \quad (5)$$

Добавляя к (5) условие минимума нагрузки $\frac{\partial\hat{q}}{\partial\xi_2} = 0$, приходим к кубическому уравнению относительно амплитуды ξ_2, решая которое и подставляя найденные корни в формулу (5) с учетом минимума по волновым параметрам, находим безразмерное значение критической нагрузки $\hat{q}_k$. Вычисления подтверждают вывод: оболочка всегда выпучивается по одной полуволне (m=1) вдоль образующей [2, 545]. Результаты расчетов (статический подход) для различных значений геометрических параметров оболочки приведены в третьем столбце таблицы 1, во втором столбце приведены значения критической нагрузки и волнового числа n, вычисленные по формулам линейной теории [2, 546].

Предложим новую постановку рассматриваемой задачи с учетом динамических факторов. Чтобы получить уравнение движения оболочки, используем принцип Остроградского-Гамильтона

$$\delta\int_0^t L dt = 0, \quad (6)$$

где функция Лагранжа $L = K - Э$, K – кинетическая энергия, $Э$ – потенциальная энергия, для которой получено выражение (3), t – время.

Величину K найдем по формуле

$$K = \frac{\rho h}{2} \iint \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdy.$$

С учетом выражения (2) и принятых ранее обозначений можно получить

$$\widehat{K} = \frac{1}{4}\left(\frac{R}{V}\right)^2 \left(\dot{\xi_1}^2 + \frac{1}{2}\dot{\xi_2}^2 + \frac{\eta^2}{4}\dot{\xi_1}^2 \xi_1^2\right), \tag{7}$$

где $K = \widehat{K}\,\frac{\pi L E h^3}{R}$, V – скорость звука в материале оболочки.

Из равенства (6) получаем систему уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widehat{K}}{\partial \dot{\xi_1}}\right) - \frac{\partial \widehat{K}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \widehat{Э}}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widehat{K}}{\partial \dot{\xi_2}}\right) - \frac{\partial \widehat{K}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \widehat{Э}}{\partial \xi_2} = 0, \tag{8}$$

а также условия в начальный момент времени

$$\xi_1(0) = \xi_{10}, \quad \xi_2(0) = \xi_{20}, \quad \dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0) = 0, \tag{9}$$

и в момент потери устойчивости $t = t_k$

$$\dot{\xi}_1(t_k) = \dot{\xi}_2(t_k) = 0. \tag{10}$$

Условия (10) соответствуют динамическому критерию устойчивости, предложенному А.В. Саченковым [4, 138].

Уравнения (8) с учетом выражений (3) и (7) примут вид

$$\frac{d^2\xi_1}{d\tau^2} + \frac{16\xi_1}{4+\eta^2\xi_1^2}\left(-\hat{q}b_1 + b_3 + b_6\xi_2 + 2b_5\xi_1^2 + b_7\xi_2^2 + \frac{1}{16}\eta^2\dot{\xi_1}^2\right) = 0,$$

$$\frac{d^2\xi_2}{d\tau^2} + 4\left(2b_4\xi_2 + b_6\xi_1^2 + 2b_7\xi_1^2\xi_2\right) = 0, \tag{11}$$

где $\tau = tV/R$ – безразмерный параметр времени.

Численное решение системы уравнений (11) показывает, что при небольших нагрузках ($\hat{q} < \hat{q}_k$) оболочка колеблется около исходного положения равновесия с малой амплитудой порядка ξ_{10}. При увеличении нагрузки до значения, равного $\hat{q}_k$, наблюдается резкое возрастание амплитуды прогиба (т.е. происходит потеря устойчивости движения по А.М. Ляпунову). Как показывают расчеты, величина критической нагрузки $\hat{q}_k$ существенно зависит от выбора начального значения ξ_{10}, что затрудняет количественный анализ полученных результатов. Предлагаемый ниже приближенный метод решения системы (11) позволяет получить величину $\hat{q}_k$ независимо от начального прогиба.

Из статического аналога [3, 100] первого уравнения системы (11) найдем

$$\xi_1^2 = \frac{\hat{q}b_1 - b_3 - b_6\xi_2 - b_7\xi_2^2}{2b_5}.$$

Подставляя найденное значение во второе уравнение системы, получим

$$\frac{d^2\xi_2}{d\tau^2} = A_0 + A_1\xi_2 + A_2{\xi_2}^2 + A_3{\xi_2}^3, \qquad (12)$$

где коэффициенты A_k зависят от нагрузки $\hat{q}$ и от параметров b_i.

Полагая $\xi_{20} = 0$, умножим уравнение (12) на $\frac{d\xi_2}{d\tau}$ и проинтегрируем обе части уравнения от 0 до τ_k

$$\dot{\xi_2}^2(\tau_k) - \dot{\xi_2}^2(0) = 2A_0\xi_2 + A_1{\xi_2}^2 + 2A_2\frac{{\xi_2}^3}{3} + A_3\frac{{\xi_2}^4}{2}.$$

Согласно условиям (9) – (10) левая часть уравнения равна нулю. Получаем кубическое уравнение для функции $\xi_2(\hat{q})$. Добавляя к нему условия минимума нагрузки по ξ_2 и по волновому параметру η, найдем решение задачи. Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Геометрические параметры		Линейная теория		Нелинейная теория			
				Статический подход		Динамический подход	
L/R	*R/h*	100 $\hat{q}$	*n*	100 $\hat{q}$	*n*	100 $\hat{q}$	*n*
1	180	6.86	10	4.65	7	6.08	9
3	180	2.29	6	1.69	5	1.95	6
1	250	5.82	10	3.88	7	5.07	9
3	250	1.94	6	1.45	5	1.65	6
1	500	4.11	12	2.83	9	3.52	11
3	500	1.37	8	1.05	6	1.17	7

Таблица 1. Результаты расчетов для разных значений геометрических параметров

Таким образом, учет динамики хлопка приводит к результатам, лежащим между значениями, полученными с помощью линейных и нелинейных уравнений статики. В тех же диапазонах находятся экспериментальные данные [1, 153; 2, 553].

Литература

1. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978, 360 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967, 985 с.
3. Коноплев Ю.Г., Тазюков Ф.Х. Устойчивость упругих пластин и оболочек при нестационарных воздействиях. Казань: КГУ, 1994, 124 с.
4. Саченков А.В., Бахтиева Л.У. Об одном подходе к решению динамических задач устойчивости тонких оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек, вып.13, 1978, с.137-152.