Н. Н. Корнеева, Автоматные преобразования префиксно разрешимых и разрешимых по Бюхи сверхслов, *Изв. вузов. Матем.*, 2016, номер 7, 55–65

Известия вузов. Математика
2016, № 7, с. 55–65

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Н.Н. КОРНЕЕВА

АВТОМАТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЕФИКСНО РАЗРЕШИМЫХ И РАЗРЕШИМЫХ ПО БЮХИ СВЕРХСЛОВ

Аннотация. Показано, что множество префиксно разрешимых сверхслов замкнуто относительно конечно-автоматных и асинхронно автоматных преобразований. Доказано существование атома, состоящего из префиксно разрешимых сверхслов с неразрешимой монадической теорией (т. е. не разрешимых по Бюхи), в структуре степеней конечно-автоматных и структуре степеней асинхронно автоматных преобразований. Также доказано существование атома, состоящего из сверхслов с разрешимой монадической теорией (разрешимых по Бюхи), в структуре степеней асинхронно автоматных преобразований.

Ключевые слова: сверхслово, префиксная разрешимость, разрешимость по Бюхи, монадические теории, автоматные преобразования, степени, атом.

УДК: 510.53

В работе изучаются преобразования бесконечных последовательностей при действии на них конечных автоматов и возникающие при этом действии степени автоматных преобразований. Одно из направлений исследований связано с вопросом сохранения свойств последовательностей при действии на них конечными автоматами Мили или конечными асинхронными автоматами. Известно, например, что относительно асинхронно автоматных преобразований сохраняются свойства последовательности быть обобщенно почти периодической [1]–[3], эффективно обобщенно почти периодической [1]–[3], заключительно почти периодической [4], [5], морфической [6]. Множество k-автоматных последовательностей замкнуто относительно конечно-автоматных преобразований [7], однако до сих пор открыт вопрос о замкнутости этого множества относительно асинхронно автоматных преобразований. В данной работе будет рассмотрен вопрос о действии конечных автоматов на последовательности, для которых разрешима одна из следующих алгоритмических задач: либо для любого регулярного языка можно определить, существует ли префикс последовательности, принадлежащий этому языку, либо для любого регулярного языка можно определить, бесконечно ли пересечение данного языка и множества префиксов последовательности.

Приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть x — сверхслово над некоторым конечным алфавитом Σ, т. е. бесконечная последовательность символов над Σ. Через $x(n)$ обозначим n-ю букву сверхслова. Если $i \le j$, то $x[i, j]$ будет обозначать отрезок сверхслова x вида $x(i)x(i+1)\dots x(j)$. Слово $x[0, i]$ является

Поступила 18.12.2014

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-31200 мол_а) и за счет финансовых средств субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету на выполнение государственного задания в сфере научной деятельности, проект № 1.2045.2014.

префиксом x, сверхслово $x[i,\infty)$ — суффиксом x. Множество всех префиксов сверхслова x будем обозначать $\mathrm{Pref}(x)$. Если x — конечное слово, то его длину будем обозначать $|x|$.

Пусть L — регулярный язык над алфавитом Σ. В работе будут рассмотрены сверхслова, для которых разрешима одна из следующих алгоритмических задач:

1) задача префиксной реализуемости: по описанию регулярного языка определить, существует ли префикс сверхслова, принадлежащий этому языку;

2) задача Бюхи-реализуемости: по описанию регулярного языка определить, бесконечно ли пересечение этого языка и множества префиксов сверхслова.

Определение 1 ([8])**.** Сверхслово x над алфавитом Σ называется префиксно разрешимым, если для любого регулярного языка L над алфавитом Σ разрешима задача $L\cap\mathrm{Pref}(x)\neq\varnothing$.

Определение 2 ([8])**.** Сверхслово x над алфавитом Σ называется разрешимым по Бюхи, если для любого регулярного языка L над алфавитом Σ разрешима задача $|L\cap\mathrm{Pref}(x)|=\infty$.

Поскольку для нас нет разницы между различными способами задания регулярного языка, то в дальнейшем будем считать, что регулярный язык задается при помощи конечного детерминированного автомата, принимающего его.

Очевидно, разрешимые по Бюхи сверхслова являются префиксно разрешимыми. То, что обратное не верно, доказано в [8].

Существует связь между разрешимостью по Бюхи сверхслова и разрешимостью монадической теории этого сверхслова.

Под монадической теорией второго порядка сверхслова x, обозначаемой $MT\langle N,<,x\rangle$, понимается расширение теории первого порядка множества натуральных чисел с отношением порядка и одноместными предикатами $a(n)$ для любого $a\in\Sigma$, в котором кроме переменных по натуральным числам разрешены также переменные по подмножествам множества натуральных чисел и кванторы по этим переменным. При интерпретации формул теории считают предикат $a(n)$ истинным тогда и только тогда, когда $x(n)=a$.

Теорема 1 ([9], [3])**.** *Монадическая теория сверхслова x разрешима тогда и только тогда, когда существует алгоритм, который по любому автомату Бюхи* (*или любому детерминированному автомату Мюллера*) *может определить, принимает этот автомат сверхслово x или нет.*

Другими словами, сверхслово x имеет разрешимую монадическую теорию тогда и только тогда, когда оно разрешимо по Бюхи.

Теперь определим действие конечных автоматов (Мили и асинхронного) на сверхслова.

Определение 3 ([10], с. 35)**.** Конечным асинхронным автоматом называется пятерка $(S,\Sigma,\Sigma',\delta,\omega)$, где S, Σ, Σ' — конечные множества состояний, входных и выходных символов соответственно; $\delta: S\times\Sigma\longrightarrow S$ — функция переходов; $\omega: S\times\Sigma\longrightarrow(\Sigma')^*$ — функция выходов. Если выделено начальное состояние s_0, то автомат $(S,\Sigma,\Sigma',\delta,\omega,s_0)$ называется инициальным.

Если областью значений функции выхода являются только символы выходного алфавита, а не слова из символов выходного алфавита произвольной длины (т. е. $\omega: S\times\Sigma\longrightarrow\Sigma'$), по получаем определение конечного автомата Мили.

В дальнейшем конечный инициальный автомат $(S,\Sigma,\Sigma',\delta,\omega,s_0)$ будем, для краткости, записывать (S,s_0). Если рассматривается несколько автоматов и необходимо указать функцию переходов или выходов, множество входных или выходных символов автомата S, то будем записывать δ_S, ω_S, Σ_S, Σ'_S.

Действие автомата естественным образом продолжается на множество слов и множество сверхслов над входным алфавитом. Если $x = (x(n))$ — сверхслово над Σ, то образом сверхслова x под действием автомата (S, s_0) является сверхслово $S(x)$ вида

$$\omega(t_0, x(0))\omega(t_1, x(1))\omega(t_2, x(2))\ldots, \quad \text{где } t_0 = s_0 \text{ и } t_{i+1} = \delta(t_i, x(i)).$$

Итак, образом сверхслова при действии на него конечным автоматом Мили является сверхслово, а образом сверхслова при действии на него конечным асинхронным автоматом является либо сверхслово, либо конечное слово.

Определение 4. Пусть x, y — сверхслова над конечными алфавитами Σ и Σ' соответственно. Сверхслово y конечно-автоматно сводится (асинхронно автоматно сводится) к сверхслову x, если существует конечный инициальный автомат Мили $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega, s_0)$ (соответственно конечный инициальный асинхронный автомат) такой, что $\omega(s_0, x) = Ay$, где блок A над алфавитом Σ' определяет некоторую конечную задержку (соответственно $\omega(s_0, x) = y$).

Возникает естественный вопрос о замкнутости множества префиксно разрешимых сверхслов и множества разрешимых по Бюхи сверхслов относительно автоматных преобразований. Замкнутость множества разрешимых по Бюхи сверхслов относительно конечно-автоматных и асинхронно автоматных преобразований была доказана ранее в [11] и [12], [13] соответственно, поскольку разрешимость по Бюхи сверхслова эквивалентна разрешимости монадической теории этого сверхслова.

Замкнутость множества префиксно разрешимых сверхслов относительно автоматных преобразований доказывает

Теорема 2. *Пусть x — префиксно разрешимое сверхслово над конечным алфавитом Σ, $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega, s_0)$ — конечный инициальный асинхронный автомат. Тогда $y = \omega(s_0, x)$ — префиксно разрешимое сверхслово над алфавитом Σ'.*

Доказательство. Необходимо доказать, что для произвольного регулярного языка L над алфавитом Σ' разрешима задача $L \cap \mathrm{Pref}(y) \neq \varnothing$. Если y — конечное слово, то разрешимость указанной задачи очевидна. Будем считать, что y — бесконечное слово. Поскольку считаем, что регулярный язык задается при помощи конечного детерминированного автомата, принимающего его, то необходимо доказать, что для произвольного конечного детерминированного автомата можно определить, проходит ли он при чтении y через допускающее состояние.

Пусть $(T, \Sigma', \delta_T, t_0, \mathcal{F}_T)$ — произвольный конечный детерминированный автомат над алфавитом Σ' с функцией перехода δ_T, начальным состоянием t_0, множеством допускающих состояний $\mathcal{F}_T$. Подадим на его вход сверхслово y.

Построим автомат над алфавитом Σ такой, что он проходит через допускающее состояние при подаче на его вход сверхслова x, если и только если T проходит через допускающее состояние при чтении сверхслова y.

Для этого рассмотрим автомат S, преобразующий сверхслово x в сверхслово y. Действие автомата S на любое сверхслово можно представить как действие композиции автоматов U и V, определенных следующим образом: $U = (U, \Sigma, \Sigma'', u_0, \delta_U, \omega_U)$, где $U = S$, $\Sigma'' = S \times \Sigma$, $u_0 = s_0$, $\delta_U(s, a) = \delta_S(s, a)$, $\omega_U(s, a) = (s, a)$ и $V = (V, \Sigma'', \Sigma', v_0, \delta_V, \omega_V)$, где $V = \{v\}$, $\Sigma'' = S \times \Sigma$, $v_0 = v$, $\delta_V(v, (s, a)) = v$, $\omega_V(v, (s, a)) = \omega_S(s, a)$, где $s \in S$, $a \in \Sigma$.

Обозначим $\omega_U(u_0, x) = z$. Тогда $\omega_V(v_0, z) = y$.

Построим автомат $(W, \Sigma'', \delta_W, w_0, \mathcal{F}_W)$. Состояниями этого автомата будут пары (t, Q), где $t \in T$, $Q \subseteq T$. Начальное состояние $w_0 = (t_0, \varnothing)$; функция перехода $\delta_W((t, Q), a) =$

$(\delta_T(t,\omega_V(v,a)),Q_{t,a})$, где $Q_{t,a}=\{\delta_T(t,\omega_V(v,a)[0,n-1]) : n=\overline{1,|\omega_V(v,a)|}\}$, в частности, $\delta_T(t,\omega_V(v,a))\in Q_{t,a}$; множество допускающих состояний $\mathcal{F}_W=\{(t,Q) : Q\cap\mathcal{F}_T\neq\varnothing\}$.

Пусть W проходит через допускающее состояние при чтении сверхслова z, тогда $\delta_W((t_0,\varnothing),z[0,n])\in\mathcal{F}_W$ для некоторого натурального n. В силу определения $\mathcal{F}_W$ для проверки принадлежности ему указанного состояния достаточно рассмотреть лишь вторую компоненту этого состояния. Будем считать, что

$$\delta_W((t_0,\varnothing),z[0,n])=\delta_W((t',Q'),z(n)),\quad \text{где}\ \ (t',Q')=\delta_W((t_0,\varnothing),z[0,n-1]).$$

Тогда $Q_{t',z(n)}=\{\delta_T(t',\omega_V(v,z(n))[0,k-1]) : k=\overline{1,|\omega_V(v,z(n))|}\}$ и $Q_{t',z(n)}\cap\mathcal{F}_T\neq\varnothing$.

В силу того, что $\omega_V(v,z)=y$, получаем $\omega_V(v,z(n))=y[l,m]$ для некоторых натуральных l и m, причем $l\le m$. Значит, $Q_{t',z(n)}=\{\delta_T(t',(y[l,m])[0,k-1]) : k=\overline{1,m-l+1}\}$. Тогда для некоторого натурального k_0, где $1\le k_0\le m-l+1$, верно $\delta_T(t',(y[l,m])[0,k_0-1])\in\mathcal{F}_T$ или $\delta_T(t_0,y[0,l+k_0-1])\in\mathcal{F}_T$, т. е. при чтении сверхслова y автомат T проходит через допускающее состояние.

Пусть W при чтении сверхслова z не проходит через допускающие состояния, т. е. для любого натурального n верно $\delta_W((t_0,\varnothing),z[0,n])\notin\mathcal{F}_W$. В силу определения δ_W имеем $\delta_W((t_0,\varnothing),z[0,n])=\delta_W((t^{(n)},Q^{(n)}),z(n))=(\delta_T(t^{(n)},\omega_V(v,z(n))),Q_{t^{(n)},z(n)})$, где $(t^{(n)},Q^{(n)})=\delta_W((t_0,\varnothing),z[0,n-1])$, и $Q_{t^{(n)},z(n)}=\{\delta_T(t^{(n)},\omega_V(v,z(n))[0,k-1]) : k=\overline{1,|\omega_V(v,z(n))|}\}$. В силу определения $\mathcal{F}_W$ имеем $Q_{t^{(n)},z(n)}\cap\mathcal{F}_T=\varnothing$ для любого натурального n.

Если предположить, что автомат T при чтении сверхслова y проходит через допускающее состояние, то $\delta_T(t_0,y[0,k])\in\mathcal{F}_T$ для некоторого натурального k. Всегда можно взять наименьшее k, удовлетворяющее этому условию. Поскольку y есть образ z при действии конечного автомата V, то найдется наименьшее l такое, что $y[0,k]$ является префиксом слова $\omega_V(v,z[0,l])$. В силу того, что l — наименьшее число с таким свойством, $y[0,k]$ не является префиксом $\omega_V(v,z[0,l-1])$.

Рассмотрим $\delta_W((t_0,\varnothing),z[0,l])=\delta_W((t^{(l)},Q^{(l)}),z(l))=(t^{(l+1)},Q^{(l+1)})$, где $Q^{(l+1)}=Q_{t^{(l)},z(l)}$. В силу определения $Q^{(l)}$ и $Q^{(l+1)}$ получаем $\delta_T(t_0,y[0,k])\in Q^{(l+1)}$ и $\delta_T(t_0,y[0,k])\notin Q^{(l)}$. Поскольку $\delta_T(t_0,y[0,k])\in\mathcal{F}_T$ и $\delta_T(t_0,y[0,k])\in Q_{t^{(l)},z(l)}$, то $Q_{t^{(l)},z(l)}\cap\mathcal{F}_T\neq\varnothing$, что противоречит предположению. Следовательно, автомат T при чтении сверхслова y не проходит через допускающие состояния.

Отсюда следует, что если для сверхслова z задача префиксной реализуемости разрешима, то для сверхслова y указанная задача также разрешима. Итак, образ префиксно разрешимого сверхслова при действии на него конечным автоматом V является префиксно разрешимым сверхсловом.

Построим автомат $(\widetilde{T},\Sigma,\delta_{\widetilde{T}},\widetilde{t}_0,\mathcal{F}_{\widetilde{T}})$, множество состояний которого $\widetilde{T}=U\times W=S\times W$, начальное состояние $\widetilde{t}_0=(u_0,w_0)=(s_0,w_0)$, функция перехода

$$\delta_{\widetilde{T}}((u,w),a)=(\delta_U(u,a),\delta_W(w,\omega_U(u,a))),$$

множество допускающих состояний $\mathcal{F}_{\widetilde{T}}=\{(u,w) : w\in\mathcal{F}_W\}$.

Пусть автомат $\widetilde{T}$ проходит через допускающее состояние при чтении сверхслова x, тогда $\delta_{\widetilde{T}}((u_0,w_0),x[0,n])\in\mathcal{F}_{\widetilde{T}}$ для некоторого натурального n. В силу определения $\delta_{\widetilde{T}}$ и того, что $\omega_U(u_0,x)=z$, получаем $\delta_{\widetilde{T}}((u_0,w_0),x[0,n])=(\delta_U(u_0,x[0,n]),\delta_W(w_0,\omega_U(u_0,x[0,n])))=(\delta_U(u_0,x[0,n]),\delta_W(w_0,z[0,n]))$. В силу определения $\mathcal{F}_{\widetilde{T}}$ имеем $\delta_W(w_0,z[0,n])\in\mathcal{F}_{\widetilde{T}}$, т. е. при чтении сверхслова z автомат W проходит через допускающее состояние.

Пусть $\widetilde{T}$ при чтении x не проходит через допускающие состояния, т. е. $\delta_{\widetilde{T}}((u_0,w_0),x[0,n])\notin\mathcal{F}_{\widetilde{T}}$ для любого натурального n. В силу определения $\delta_{\widetilde{T}}$ это означает, что $(\delta_U(u_0,x[0,n]),$

$\delta_W(w_0, z[0,n])) \notin \mathcal{F}_{\widetilde{T}}$. В силу определения $\mathcal{F}_{\widetilde{T}}$ имеем $\delta_W(w_0, z[0,n]) \notin \mathcal{F}_W$, т. е. автомат W при чтении z не проходит через допускающие состояния.

Таким образом, если для сверхслова x задача префиксной реализуемости разрешима, то для сверхслова z указанная задача также разрешима, т. е. образ префиксно разрешимого сверхслова при действии на него конечным автоматом U является префиксно разрешимым сверхсловом.

Согласно условию теоремы сверхслово x префиксно разрешимо, тогда $\omega_U(u_0, x) = z$ также префиксно разрешимо, откуда $\omega_V(v_0, z) = y$ префиксно разрешимо. □

Следствие. Пусть x — префиксно разрешимое сверхслово над конечным алфавитом Σ, $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega, s_0)$ — конечный инициальный автомат Мили. Тогда $y = \omega(s_0, x)$ — префиксно разрешимое сверхслово над алфавитом Σ'.

Отношение автоматной сводимости на множестве сверхслов индуцирует отношение эквивалентности на указанном множестве, а именно сверхслово x автоматно эквивалентно сверхслову y, если y автоматно сводится к x и, наоборот, x автоматно сводится к y. Приведем формальное

Определение 5 ([14])**.** Сверхслово x конечно-автоматно эквивалентно сверхслову y, если существуют конечные инициальные автоматы Мили (S, s_0), (T, t_0) и блоки $A \in \Sigma_S'^*$ и $B \in \Sigma_T'^*$, определяющие конечные задержки, такие, что

$$\omega_S(s_0, x) = Ay, \quad \omega_T(t_0, y) = Bx,$$

где x — сверхслово над алфавитом Σ_S или Σ_T', а y — сверхслово над алфавитом Σ_T или Σ_S'.

Определение 6 ([15])**.** Сверхслово x асинхронно автоматно эквивалентно сверхслову y, если существуют конечные инициальные асинхронные автоматы (S, s_0) и (T, t_0) такие, что

$$\omega_S(s_0, x) = y, \quad \omega_T(t_0, y) = x,$$

где x — сверхслово над алфавитом Σ_S или Σ_T', а y — сверхслово над алфавитом Σ_T или Σ_S'.

Классы конечно-автоматной и асинхронно автоматной эквивалентности сверхслова x обозначаются через $[x]$ и $[x]^*$ и называются степенями конечно-автоматных преобразований и асинхронно автоматных преобразований соответственно. На множестве степеней естественным образом определяется частичный порядок $[x] \geq [y]$ ($[x]^* \geq [y]^*$), если существуют конечный инициальный автомат Мили (соответственно конечный инициальный асинхронный автомат) (S, s_0) и блок $A \in \Sigma_S'^*$ такие, что $\omega_S(s_0, x) = Ay$ (соответственно $\omega_S(s_0, x) = y$). Возникающие частично упорядоченные множества степеней обозначаются V и V^*.

В структурах V и V^* существует наименьший элемент, состоящий из заключительно периодических сверхслов [14], [15]. Наиболее близкими элементами к наименьшему являются атомы. Существование атомов в указанных структурах доказано в [14], [15]. Возникает естественный вопрос, существуют ли атомы, состоящие из префиксно разрешимых сверхслов, и атомы, состоящие из разрешимых по Бюхи сверхслов.

Существование атомов в V, состоящих из разрешимых по Бюхи сверхслов, доказано В.Р. Байрашевой [11], так как разрешимость по Бюхи сверхслова эквивалентна разрешимости монадической теории сверхслова. Поскольку разрешимые по Бюхи сверхслова являются префиксно разрешимыми, то, следовательно, существуют атомы в V, состоящие из префиксно разрешимых сверхслов. Далее покажем, что существуют атомы в V и V^*, состоящие из префиксно разрешимых сверхслов, которые не разрешимы по Бюхи (т. е. имеют неразрешимую монадическую теорию).

Алгоритмы построения атомов структур V и V^* описаны соответственно в работах [14] и [15], в которых строятся сверхслова над алфавитом {0,1}, являющиеся пределом последовательности блоков I_i, построенных из вспомогательных блоков A_i и B_i, удовлетворяющих приводимым ниже условиям.

Для структуры степеней конечно-автоматных преобразований V имеем следующее.

$(V.1)$ A_1 начинается с 0, B_1 — с 1 и они имеют одинаковую длину.

$(V.2)$ Каждый блок A_{i+1} и B_{i+1} представляет собой последовательность копий блоков A_i и/или B_i, начинающуюся с A_i и B_i соответственно. Они имеют одинаковую длину, бо́льшую i. Ни A_{i+1}, ни B_{i+1} не являются частью никакого периодического сверхслова периода i.

$(V.3)$ I_{i+1} состоит из I_i и следующими за ними копиями блоков A_i и/или B_i.

$(V.4)$ Перенумеруем конечные инициальные автоматы Мили (S, s_0). Если вход I_i переводит i-й автомат (S, s_0) в состояние s, то, начиная работать в состоянии s, автомат S возвращается в состояние s как под действием входного блока A_i, так и под действием входного блока B_i.

Для структуры степеней асинхронно автоматных преобразований V^* имеем следующее.

$(V^*.1)$ A_1 начинается с 0, B_1 — с 1.

$(V^*.2)$ Каждый блок A_{i+1} и B_{i+1} представляет собой последовательность копий блоков A_i и/или B_i, начинающуюся с A_i и B_i соответственно. Они имеют длину, большую i. Ни A_{i+1}, ни B_{i+1} не являются частью никакого периодического сверхслова периода i.

$(V^*.3)$ I_{i+1} состоит из I_i и следующими за ними копиями блоков A_i и/или B_i.

$(V^*.4)$ Перенумеруем конечные инициальные асинхронные автоматы (S, s_0). Если вход I_i переводит i-й автомат (S, s_0) в состояние s, то, начиная работать в состоянии s, автомат S возвращается в состояние s как под действием входного блока A_i, так и под действием входного блока B_i.

Теперь необходимо будет только добавить условия, чтобы строящееся сверхслово было префиксно разрешимо и имело неразрешимую монадическую теорию.

Согласно определению монадическая теория сверхслова x разрешима, если

$$\exists n\ \forall k[[\varphi_n(k) = 1 \leftrightarrow F_k(x) \text{ истинна}] \wedge [\varphi_n(k) = 0 \leftrightarrow F_k(x) \text{ ложна}]].$$

Здесь $F_0(y), F_1(y), F_2(y), \dots$ — нумерация всех формул с одной свободной старшей переменной y, $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ — нумерация частично вычислимых функций. Если значение функции φ_n вычисляется на аргументе, равном номеру формулы F_k, то вместо $\varphi_n(k)$ будем записывать $\varphi_n(F_k)$.

Теорема 3. *Существуют атомы в каждой из структур V и V^*, состоящие из префиксно разрешимых сверхслов.*

Доказательство. Будем строить сверхслово x над алфавитом $\Sigma = \{0, 1\}$ такое, что x — префиксно разрешимо и степень сверхслова x является атомом структуры V или V^*, методом начальных сегментов.

Определим последовательность блоков I_i, A_i и B_i индукцией по i, удовлетворяя условиям $(V.1)$–$(V.4)$ или $(V^*.1)$–$(V^*.4)$ и дополнительно следующему условию.

$(V.5, V^*.5)$ Перенумеруем конечные детерминированные инициальные автоматы $(T, \Sigma, \delta_T, t_0, \mathcal{F}_T)$. Если i-й автомат (T, t_0) не пройдет через допускающее состояние при чтении I_i, то он не пройдет через допускающие состояния и при чтении I_i, за которым следуют копии блоков A_i и/или B_i.

Опишем построение блоков I_i, A_i и B_i.

Шаг 0. Определим I_0 как пустой блок (длины нуль), A_0 как символ 0 и B_0 как символ 1.

Шаг $(i+1)$. К этому шагу уже построены блоки I_i, A_i и B_i. Построим I_{i+1}, A_{i+1} и B_{i+1}.

Вначале построим блоки, удовлетворяющие условиям $(V.1)$–$(V.4)$ или $(V^*.1)$–$(V^*.4)$, следуя конструкции из [14], [15].

Пусть (S, s_0) — $(i+1)$-й инициальный автомат (Мили или асинхронный).

Обозначим через $\langle s\rangle$ множество состояний, в которые приходит автомат (S, s) при подаче на его вход слов, являющихся последовательностями копий блоков A_i и/или B_i.

Пусть $\overline{s}_0$ — состояние, в которое приходит автомат (S, s_0) при чтении входного блока I_i. Выберем состояние $s' \in \langle\overline{s}_0\rangle$ так, чтобы мощность множества $\langle s'\rangle$ была минимальна и $s' \in \langle s'\rangle$. Определим блок I'_{i+1} состоящим из блока I_i и следующей за ним последовательности копий блоков A_i и/или B_i так, чтобы автомат (S, s_0) при чтении I'_{i+1} приходил в состояние s'.

Построим теперь блоки A_{i+1} и B_{i+1}. По предположению индукции A_i и B_i имеют длину не меньше i и отличаются первыми символами. Следовательно, либо A_iA_i, либо A_iB_i не являются частью никакого периодического сверхслова периода i. Выберем то слово, которое не является частью периодического сверхслова. Обозначим его A_iX_i. Пусть s_A — состояние, в которое приходит автомат (S, s') при чтении слова A_iX_i. Тогда $s_A \in \langle s'\rangle \subseteq \langle\overline{s}_0\rangle$ и в силу минимальности $\langle s'\rangle$ имеем $\langle s_A\rangle = \langle s'\rangle$. Поэтому $s' \in \langle s_A\rangle$. Обозначим через A'_{i+1} последовательность копий блоков A_i и/или B_i, начинающуюся с A_iX_i, при чтении которой автомат (S, s') снова приходит в состояние s'. Аналогично строится блок B'_{i+1}.

При построении атома структуры V^* полагаем $A_{i+1} = A'_{i+1}$, $B_{i+1} = B'_{i+1}$.

При построении атома структуры V уравняем длины строящихся блоков. Пусть A'_{i+1} имеет длину k, B'_{i+1} — длину l и m — наименьшее общее кратное чисел k и l. Положим $A_{i+1} = (A'_{i+1})^{m/k}$, $B_{i+1} = (B'_{i+1})^{m/l}$.

Осталось удовлетворить условию ($V.5$, $V^*.5$). Рассмотрим $(i+1)$-й конечный детерминированный инициальный автомат $(T, \Sigma, \delta_T, t_0, \mathcal{F}_T)$ и подадим на его вход слово I'_{i+1}. Пусть $\overline{t}_0 = \delta_T(t_0, I'_{i+1})$ — состояние, в которое приходит автомат T при чтении I'_{i+1}, начиная с состояния t_0. Обозначим $[\overline{t}_0] = \{t : t = \delta_T(\overline{t}_0, u)$, u — префикс слова, которое является последовательностью копий блоков A_{i+1} и/или $B_{i+1}\}$.

Если $[\overline{t}_0] \cap \mathcal{F}_T = \varnothing$, то полагаем $I_{i+1} = I'_{i+1}$.

Если $[\overline{t}_0] \cap \mathcal{F}_T \neq \varnothing$, то существует слово v, являющееся последовательностью копий блоков A_{i+1} и/или B_{i+1} такое, что $u = v[0, k]$ для некоторого натурального k и $\delta_T(\overline{t}_0, u) \in \mathcal{F}_T$. Полагаем $I_{i+1} = I'_{i+1}v$. Для таким образом построенного слова I_{i+1} выполняется условие ($V.5$, $V^*.5$) и остаются верными условия $(V.3)$–$(V.4)$ или $(V^*.3)$–$(V^*.4)$. После этого переходим к шагу $(i+2)$. Описание конструкции завершено.

Определим теперь сверхслово x как предел последовательности блоков I_i при $i \to \infty$. В [14], [15] показано, что сверхслово, удовлетворяющее условиям $(V.1)$–$(V.4)$ или $(V^*.1)$–$(V^*.4)$, является атомом V или V^* соответственно.

Осталось показать, что x — префиксно разрешимое сверхслово. Пусть T — произвольный конечный детерминированный инициальный автомат. Допустим, что он имеет номер i в нашей нумерации конечных детерминированных инициальных автоматов. Сверхслово x можно рассматривать как сверхслово, содержащее в качестве префикса конечный блок I_i, за которым следует последовательность копий блоков A_i и/или B_i. В силу ($V.5$, $V^*.5$) при чтении сверхслова x автомат T проходит через допускающее состояние при прочтении I_i или не проходит через допускающие состояния вовсе. Следовательно, задача префиксной реализуемости для сверхслова x разрешима. $\square$

Теорема 4. *Существуют атомы в каждой из структур V и V^*, состоящие из префиксно разрешимых сверхслов с неразрешимой монадической теорией (т. е. неразрешимых по Бюхи).*

Доказательство. Построим сверхслово x над алфавитом $\Sigma = \{0, 1\}$ такое, что степень сверхслова x является атомом структуры V или V^*, x — префиксно разрешимо и монадическая теория сверхслова x неразрешима. Будем строить x методом начальных сегментов.

Последовательность блоков I_i, A_i и B_i строим индукцией по i, удовлетворяя условиям $(V.1)$, $(V.3)$, $(V.4)$ или $(V^*.1)$, $(V^*.3)$, $(V^*.4)$, условию $(V.5,\ V^*.5)$ из предыдущей теоремы, следующим модифицированному второму условию и дополнительному условию.

$(V.2',\ V^*.2')$ Каждый блок A_{i+1} и B_{i+1} представляет собой последовательность копий блоков A_i и/или B_i, начинающуюся с A_i и B_i соответственно, при этом в A_{i+1} и B_{i+1} входят как A_i, так и B_i. Блоки A_{i+1} и B_{i+1} имеют длину, большую i (для построения атома структуры V дополнительно накладывается условие, что указанные блоки имеют одинаковую длину). Ни A_{i+1}, ни B_{i+1} не являются частью никакого периодического сверхслова периода i.

$(V.6,\ V^*.6)$ $\forall n\ \exists k[[\varphi_n(F_k(y)) \notin \{0,1\}] \vee [(\varphi_n(F_k(y)) = 1) \wedge (F_k(x)$ ложна$)] \vee [(\varphi_n(F_k(y)) = 0) \wedge (F_k(x)$ истинна$)]]$.

Опишем конструкцию блоков.

Шаг 0. Определим I_0 как пустой блок, $A_0 = 0$, $B_0 = 1$. Положим $C_0 = A_0A_0A_0$ и определим формулу $U_0(y) = \forall s\ \exists t[(t \geq s) \wedge (y(t) = 0) \wedge (y(t+1) = 0) \wedge (y(t+2) = 0)]$. Формула U_0 истинна на сверхслове y, если и только если y содержит бесконечное число вхождений слова C_0.

Шаг $(i+1)$. К этому шагу уже построены блоки I_i, A_i и B_i, а также C_i и определены формулы $U_0(y), U_1(y), \ldots, U_i(y)$.

Сделаем еще по $(i+1)$ шагов в вычислении функций $\varphi_0(U_0(y)), \varphi_1(U_1(y)), \ldots, \varphi_i(U_i(y))$. Обозначим общее число шагов, сделанных в вычислении указанных функций, через j^0_{i+1}, $j^1_{i+1}, \ldots, j^i_{i+1}$. Для краткости будем писать $\varphi_0^{j^0_{i+1}}(U_0(y)), \varphi_1^{j^1_{i+1}}(U_1(y)), \ldots, \varphi_i^{j^i_{i+1}}(U_i(y))$.

Пусть k — такое число, что $\varphi_k^{j^k_{i+1}}(U_k(y))$ определено, а $\varphi_k^{j^k_i}(U_k(y))$ не определено.

Если такого числа k не существует, то строим блоки A'_{i+1}, B'_{i+1} как описано в доказательстве предыдущей теоремы. Если A'_{i+1} заканчивается на A_i или B'_{i+1} заканчивается на B_i, то полагаем $A_{i+1} = A'_{i+1}B'_{i+1}$, $B_{i+1} = B'_{i+1}A'_{i+1}$, в противном случае оставляем блоки без изменений: $A_{i+1} = A'_{i+1}$, $B_{i+1} = B'_{i+1}$. Тогда в построенные блоки входят как A_i, так и B_i. Блок I_{i+1} строим как в предыдущей теореме.

Положим $C_{i+1} = A_{i+1}A_{i+1}A_{i+1}$ и определим формулу $U_{i+1}(y)$, истинную на сверхсловах, содержащих бесконечное число вхождений слова C_{i+1}. Пусть $C_{i+1} = a_0a_1 \ldots a_{m-1}$, тогда $U_{i+1}(y) = \forall s\ \exists t[(t \geq s) \wedge (y(t) = a_0) \wedge (y(t+1) = a_1) \wedge \cdots \wedge (y(t+m-1) = a_{m-1})]$.

После этого переходим к шагу $(i+2)$.

Если такие числа существуют, то выбираем наименьшее из них.

Если $\varphi_k^{j^k_{i+1}}(U_k(y)) \notin \{0,1\}$, то вычеркиваем функцию φ_k из списка и больше ее не рассматриваем, блоки I_{i+1}, A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1} и формулу U_{i+1} определяем как в предыдущем случае.

Если $\varphi_k^{j^k_{i+1}}(U_k(y)) = 0$, то алгоритм с номером k (k-я частично вычислимая функция) не может устанавливать разрешимость монадической теории сверхслова, в котором бесконечно часто встречается слово C_k. Полагаем $A'_k = A_k^4$, $B'_k = B_kA_k^3$. Обозначим построенные блоки через A_k, B_k: $A_k = A'_k$, $B_k = B'_k$. Положим $I_k = I_i$ и перейдем к шагу с номером $k+1$.

Если $\varphi_k^{j_{i+1}^k}(U_k(y)) = 1$, то алгоритм с номером k (k-я частично вычислимая функция) не может устанавливать разрешимость монадической теории сверхслова, в котором слово C_k встречается конечное число раз. Положим $A'_k = A_k B_k$, $B'_k = B_k A_k$. Если A'_k заканчивается на A_{k-1} или B'_k заканчивается на B_{k-1}, то определим $A_k = A'_k B'_k$, $B_k = B'_k A'_k$, в противном случае положим $A_k = A'_k$, $B_k = B'_k$. Положим $I_k = I_i$ и перейдем к шагу с номером $k+1$. Описание конструкции завершено.

Сверхслово x определим как предел последовательности блоков I_j при $j \to \infty$.

Степень построенного сверхслова является атомом V или V^* согласно первым четырем условиям. Согласно условию ($V.5$, $V^*.5$) оно префиксно разрешимо.

Осталось показать, что монадическая теория сверхслова x неразрешима.

Согласно конструкции на некотором шаге $i+1$ можно вернуться к шагу с меньшим номером k и пройти шаги с номерами $k+1, \dots, i, i+1$ заново. Но, очевидно, что каждый шаг будет проходиться только конечное число раз. Например, шаг с номером k будет проходиться до тех пор, пока не вычислятся все функции $\varphi_0(U_0(y)), \varphi_1(U_1(y)), \dots, \varphi_{k-1}(U_{k-1}(y))$, $\varphi_k(U_k(y))$, которые могут вычислиться.

Допустим, что монадическая теория сверхслова x разрешима. Значит, существует вычислимая функция f такая, что

$$\forall k\ [[(f(F_k(y)) = 1) \leftrightarrow (F_k(x) \text{ истинна})] \vee [(f(F_k(y)) = 0) \leftrightarrow (F_k(x) \text{ ложна})]].$$

Пусть f имеет номер n, т.е. $f = \varphi_n$. И пусть j — шаг с наименьшим номером такой, что $\varphi_n(U_n(y))$ является вычислившейся и при этом функции с меньшими номерами либо уже вычислились, либо не будут вычислены никогда, т.е. после этого шага не будет больше возврата к шагам с номерами не более n.

Если $\varphi_n(U_n(y)) = 1$, то согласно конструкции в сверхслове x с некоторого момента не встречается слово C_n, что означает $U_n(x)$ ложна.

Если $\varphi_n(U_n(y)) = 0$, то в сверхслове x бесконечно часто встречается слово C_n, входящее в A_n и B_n, что означает $U_n(x)$ истинно.

Таким образом, алгоритм (функция) с номером n ошибается на формуле U_n. Значит, монадическая теория построенного сверхслова x неразрешима. □

В конце докажем существование атома, состоящего из разрешимых по Бюхи сверхслов (т.е. сверхслов с разрешимой монадической теорией), в структуре V^*. Конструкция построения атома с указанным свойством, приведенная в данной статье, работает и для структуры V, но отлична от конструкции из [11].

Теорема 5. *Существуют атомы в каждой из структур V и V^*, состоящие из разрешимых по Бюхи сверхслов (сверхслов с разрешимой монадической теорией).*

Доказательство. Строим сверхслово x над алфавитом $\Sigma = \{0, 1\}$, являющееся разрешимым по Бюхи и степень конечно-автоматных или асинхронно автоматных преобразований которого есть атом соответствующей структуры, методом начальных сегментов.

Последовательность блоков I_i, A_i и B_i строим индукцией по i, удовлетворяя условиям ($V.1$)–($V.4$) или ($V^*.1$)–($V^*.4$) и дополнительному условию.

($V.5, V^*.5$) Перенумеруем конечные детерминированные инициальные автоматы $(T, \Sigma, \delta_T, t_0, \mathcal{F}_T)$. Пусть t — состояние, в которое приходит автомат (T, t_0) при чтении слова I_i, тогда либо автомат (T, t) проходит через допускающие состояния как при чтении A_i, так и при чтении B_i, либо вовсе не проходит через допускающие состояния при чтении A_i и B_i.

Опишем конструкцию блоков.

Шаг 0. Определим I_0 как пустой блок, $A_0 = 0$, $B_0 = 1$.

Шаг $(i+1)$. К этому шагу уже построены блоки I_i, A_i и B_i. Построим I_{i+1}, A_{i+1} и B_{i+1}.

Блоки I_{i+1}, A'_{i+1} и B'_{i+1}, удовлетворяющие условиям $(V.1)$–$(V.4)$ или $(V^*.1)$–$(V^*.4)$, строим так, как это делалось в теореме 3.

Теперь необходимо удовлетворить условию $(V.5,\ V^*.5)$. Рассмотрим $(i+1)$-й конечный детерминированный инициальный автомат $(T, \Sigma, \delta_T, t_0, \mathcal{F}_T)$ и подадим на его вход I_{i+1}. Пусть $\bar{t}_0 = \delta_T(t_0, I_{i+1})$ — состояние, в которое приходит автомат T при чтении I_{i+1}, начиная с состояния t_0. Обозначим $[\bar{t}_0] = \{t : t = \delta_T(\bar{t}_0, u)$, u — префикс слова, которое является последовательностью копий блоков A'_{i+1} и/или $B'_{i+1}\}$.

Если $[\bar{t}_0] \cap \mathcal{F}_T = \varnothing$, то ничего не делаем, полагаем $A_{i+1} = A'_{i+1}$ и $B_{i+1} = B'_{i+1}$.

Если $[\bar{t}_0] \cap \mathcal{F}_T \neq \varnothing$, то существует слово v, которое является последовательностью копий блоков A'_{i+1} и/или B'_{i+1}, такое, что $u = v[0,k]$ для некоторого натурального k и $\delta_T(\bar{t}_0, u) \in \mathcal{F}_T$. Полагаем $A_{i+1} = A'_{i+1}v$ и $B_{i+1} = B'_{i+1}v$. Для таким образом построенных слов A_{i+1} и B_{i+1} выполняется условие $(V.5,\ V^*.5)$ и остаются справедливыми первые четыре условия. Переходим к шагу $(i+2)$. Описание конструкции завершено.

Сверхслово x определим как предел последовательности блоков I_i при $i \to \infty$. Из условий $(V.1)$–$(V.4)$ или $(V^*.1)$–$(V^*.4)$ следует, что степень сверхслова x является атомом V или V^* соответственно.

Покажем, что x разрешимо по Бюхи. Пусть T — произвольный конечный детерминированный инициальный автомат. Допустим, что он имеет номер i в нашей нумерации конечных детерминированных инициальных автоматов. Сверхслово x можно рассматривать как сверхслово, содержащее в качестве префикса конечный блок I_i, за которым следует последовательность копий блоков A_i и/или B_i. Тогда в силу условия $(V.5,\ V^*.5)$ при чтении сверхслова x автомат T либо проходит через допускающие состояния бесконечно часто (как при чтении A_i, так и при чтении B_i), либо проходит лишь конечное число раз (только при чтении I_i). Чтобы проверить, какой из случаев выполняется, достаточно лишь определить, проходит ли автомат (T,t) через допускающие состояния при чтении слова $I_{i+1}[|I_i|, |I_{i+1}|-1]$, где t — состояние, в которое приходит автомат (T, t_0) при чтении слова I_i. Значит, для сверхслова x задача Бюхи-реализуемости разрешима. □

Литература

[1] Семенов А.Л. *Логические теории одноместных функций на натуральном ряде*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **47** (3), 623–658 (1983).

[2] Muchnik An., Semenov A., Ushakov M. *Almost periodic sequences*, Theoret. Comput. Sci. **304**, 1–33 (2003).

[3] Мучник Ан.А., Притыкин Ю.Л., Семенов А.Л. *Последовательности, близкие к периодическим*, УМН **64** (5), 21–96 (2009).

[4] Притыкин Ю.Л. *Конечно-автоматные преобразования строго почти периодических последовательностей*, Матем. заметки **80** (5), 751–756 (2006).

[5] Притыкин Ю.Л. *Почти периодичность, конечно-автоматные преобразования и вопросы эффективности*, Изв. вузов. Матем., № 1, 74–87 (2010).

[6] Dekking F.M. *Iteration of maps by an automaton*, Discrete Math. **126** (1–3), 81–86 (1994).

[7] Cobham A. *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory **6** (1–3), 164–192 (1972).

[8] Вялый М.Н., Рубцов А.А. *Алгоритмическая разрешимость задач о поведении автоматов на сверхсловах*, Дискретн. анализ и исследов. операций **19** (2), 3–18 (2012).

[9] Buchi J.R. *On a decision method in restricted second order arithmetic*, Logic, Methodology and Philosophy of Sci., Proc. of 1960 Intern. Congr. (Stanford Univ. Press, Stanford, CA, 1962), 1–11.

[10] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. *Введение в теорию автоматов* (Наука, М., 1985).

[11] Байрашева В.Р. *Степени автоматных преобразований почти периодических сверхслов и сверхслов с разрешимой монадической теорией*, ВИНИТИ, № 3103-В89 (Казань, 1989).

[12] Корнеева Н.Н. *Об автоматных преобразованиях и монадических теориях бесконечных последовательностей*, Изв. вузов. Матем., № 8, 90–93 (2011).

[13] Корнеева Н.Н. *Монадические теории последовательностей при асинхронно автоматных преобразованиях*, Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **154** (2), 117–124 (2012).

[14] Рейна Г. *Степени автоматных преобразований*, Кибернетический сб. № 14, 95–106 (1977).

[15] Корнеева Н.Н. *Степени асинхронно автоматных преобразований*, Изв. вузов. Матем., № 3, 30–40 (2011).

Н.Н. Корнеева

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` Natalia.Korneeva@kpfu.ru

N.N. Korneeva

Automata transformations of prefix decidable and decidable by Buchi superwords

Abstract. We show that the set of prefix decidable superwords is closed under finite automata and asynchronous automata transformations. We prove that structures of degrees of finite automata and asynchronous automata transformations contain an atom which consists of prefix decidable superwords with undecidable monadic theory (or undecidable by Buchi). Also we prove that the structure of degrees of asynchronous automata transformations contains an atom which consists of superwords with decidable monadic theory (decidable by Buchi).

Keywords: superword, prefix decidability, decidability by Buchi, monadic theory, automata transformation, degrees, atom.

N.N. Korneeva

Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Natalia.Korneeva@kpfu.ru