ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать первый

№ 4 (84)

октябрь – декабрь 2017 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”
www.lomonosovclub.com

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№4 (84), 2017 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2017 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 21.01.2018 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (84), октябрь – декабрь 2017 г.

Содержание

Точки разрыва в математическом образовании

К. В. Козеренко

В статье автор обсуждает “точки разрыва” — различного рода препятствия, которые, с одной стороны, мешают школьникам в полной мере овладевать математической культурой (в ее современном понимании), а с другой стороны, делают бывших школьников неподготовленными к традиционной вузовской системе преподавания математики, сразу же требующей работы с абстрактными объектами. Обсуждаемые точки разрыва могут иметь характер содержательный, методический, в силу традиции преподавания, в силу консерватизма, а также ввиду определенных пробелов в подготовке самих преподавателей математики.

К середине XIX века «. . . математики (Буль, Грассман) начали понимать, что должно быть позволено рассуждать об объектах, не имеющих никакой чувственной интерпретации» (Н. Бурбаки [1], Исторический очерк к гл. I–IV). И тогда прорвало! Почти одновременно Кантор, Дедекинд и Вейерштрасс дали определение действительного числа, затем Вейерштрасс предложил идею введения отрицательных чисел в виде классов пар натуральных чисел, а в 1888 году Дедекинд сформулировал полную систему аксиом для арифметики (аксиомы Пеано). Кантор снимает запрет Аристотеля: бесконечность (актуальная) получает «права гражданства» (правда цена за это в виде парадоксов Кантора оказалась очень высокой). **Родился новый формальный язык! И новая интуиция!** Теперь «интуиция отнюдь не обязательно имеет пространственную или чувственную природу, как часто думают, а скорее представляет собой некоторое **знание поведения математических объектов,** часто прибегающее к помощи образов самой различной природы, но основанное прежде всего на повседневном знакомстве с этими объектами» (Н. Бурбаки [1], Введение).

Новый язык математики принципиальнейшим образом отличается от естественного, так сказать, бытового языка. Для естественного языка характерно наличие неоднозначности, т. е. наличие взаимоисключающих смыслов. В процессе восприятия естественной речи человек пользуется различными инструментами разрешения неоднозначности, такими как аналогии, апелляции к наглядным образам, но, прежде всего, контекстом. Поэтому естественно-языковые тексты информационно избыточны. Язык математики использует особый инструмент разрешения неоднозначности. В математическом тексте **каждый (!) термин** или понятие должны быть **определены,** что абсолютно исключает возможность неоднозначного их понимания. При этом стала возможной фиксация аналогий: похожие структуры выделяются термином и определенным набором аксиом, которые отражают те или иные свойства этих структур. Так, например, множество целых чисел похоже на множество многочленов. Тогда говорят, что и множество целых чисел, и множество многочленов есть “кольца”. Про очень похожие структуры горят, что они изоморфны («одинаковые вещи мы называем по-разному»). Например, комплексные числа как множество упорядоченных пар вещественных чисел изоморфны факторкольцу $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$. Эта особенность формального языка позволяет изучать одновременно целые классы структур: коль скоро выполнены аксиомы, справедлива и любая теорема, полученная логическим путём из этих аксиом.

Итак, формальный язык стал языком науки. Как же это отразилось на преподавании математики?

Почти сто лет тому назад Эмиль Борель [2] говорил, что «преподавание математики может получить полную воспитательную ценность лишь при условии, если оно будет избегать слишком распространенного софизма, будто реальные трудности можно разрешить с помощью простых словесных определений». Здесь я хочу быть правильно понятым и не перепугать тех, кто призывает учителей «быть реалистами и не пытаться научить строгим определениям с самого начала». О таких вещах, на мой взгляд, надо сначала просто рассказывать на уроках и не только не требовать, но и не ожидать немедленного понимания. Семя брошено в почву, надо подождать, пока оно прорастет. Сама по себе эта деятельность мне кажется очень полезной. Впрочем, как и во всем, и здесь уместно «чувство меры и сообразности». Степень погружения зависит от уровня класса. Однако, обязательно надо придерживаться принципа Н.Н. Константинова о **«честном умолчании»,** который подразумевает, что, если учитель в каком-то месте, либо пропустил доказательство (умолчал), понимая, что ученики воспримут этот факт как нечто естественное и не вызывающее возражений, либо просто сослался на очевидность, то добавить строгое доказательство можно **не разрушая структуры курса** [3].

На то, что математика — это совершенно особый язык, очень редко кто в школе обращает внимание, и, как правило, этому вообще не учат, хотя, может быть, математика включена в школьную программу именно для того, чтобы хотя бы с ним познакомиться, или, что значительно лучше, научить, хоть немного, говорить на этом языке. Но самое страшное то, что, как правило, в вузе эти формальные конструкции обрушиваются на голову совершенно не подготовленного к ним бывшего школьника. Не подготовленного потому, что «школьная» математика, в основном, конкретна. А к формальному языку надо еще привыкнуть. На это надо время.

Преподаватели же вузов считают, что студенты уже им владеют, и сразу начинают говорить с ними на незнакомом формальном языке (векторным пространством называется множество и т. д.), а бедные студенты не понимают, что происходит: какое векторное пространство, зачем оно нужно? В результате им приходится просто зазубривать непонятные определения и доказательства теорем, что приводит к потере смысла и разрыву образования.

Что делать? На этот вопрос Арнольд [4] дает такой ответ: избегать немотивированных определений и разъяснять фундаментальные идеи и методы!

Так вот, точки разрыва в образовании — это неверно сформированная интуиция, потеря ориентиров. Иными словами, можно сказать, что точки разрыва — это разрывы в математической культуре.

Точки разрыва в математическом образовании сильно снижают его уровень и качество.

С некоторыми разрывами справиться легко, например, просто указав на них.

Есть разрывы более серьезные. Известно, какое огромное влияние на развитие математики оказало открытие геометрии Лобачевского. Такую же роль эта геометрия должна играть, по-моему, и в образовании. Но, конечно, трудно предположить, что представление о том, что через точку, не лежащую на прямой, можно провести более одной прямой, параллельной данной, стало бы общедоступным. Это даже, скорее, точка отрыва школьной математики от общекультурных достижений.

Наконец, имеются и узаконенные, неустранимые разрывы. Школьная математика в старших классах уже давно стала, в основном, “конкурсной математикой”. Мы учим детей решать искусственные и при этом очень сложные задачи, причем в подборе этих задач, как правило, нет системы. Ни о каком формировании интуиции в этой ситуации говорить просто не приходится. Какое представление о математике после этого складывается у наших учеников, одному Богу известно. И с этой ситуацией сейчас, пожалуй, ничего не поделаешь.

Перейдем теперь к конкретным примерам.

Геометрия в школе

Одной из самых серьезных, на мой взгляд, точек разрыва в нашем математическом образовании является убеждение в том, что нельзя, и поэтому не надо, строить строгий логический курс геометрии в школе. Обосновывается такой подход следующими доводами. Во-первых, начинать с аксиом и теорем вроде того, например, что *две* медианы в треугольнике пересекаются, трудно и семиклассникам не под силу. Во-вторых, все равно без логических пробелов не обойдется, так зачем же зря стараться? В-третьих, «завязнув» на доказательстве очевидных фактов можно отбить всякую охоту у детей изучать геометрию.

Когда я всё это слышу, невольно возникает вопрос: «А зачем тогда геометрия включена в школьную программу?» Казалось бы, ясно. Геометрия, прежде всего, воспитывает уважение к доказательству, ибо доказательство есть единственный способ установления истины. Геометрия доставляет пример научной теории. В геометрии также вводятся такие фундаментальные понятия как прямая, плоскость, треугольник, расстояние, движение, равенство фигур, подобие, вектор и т. д. Ну, и, наконец, геометрия, безусловно, предоставляет уникальную возможность научить решать задачи. По всей видимости, именно последнее соображение является для многих смыслом и целью изучения геометрии. Научить решать задачи! И всё! Причем задача считается решенной, если так считает учитель, жюри олимпиады или конкурсная комиссия, которые договорились соответствующие рассуждения считать решением. А раз так, то не нужны аксиомы, вместо доказательств теорем подойдут описания экспериментов (наложим один треугольник на другой, перегнем лист (!) бумаги, повернем фигуру и т. д.), вместо определений сгодятся наглядные образы (хотя определения без наглядных образов — это другая крайность), вместо логических цепочек... Они вообще не нужны! Конечно, если есть доказательство, то его, разумеется, очень важно сопроводить экспериментом. Геометрия, как и физика, наука экспериментальная. Но нельзя путать эксперимент и доказательство. Вообще, при таком подходе подспудно прививается одна страшная, на мой взгляд, вещь: то, что видно очами, как сказано в одном учебнике геометрии, «не нуждается в доказательстве».

Можно ли построить строгий курс геометрии? Имея в своем распоряжении учебник А.В. Погорелова, можно, и это не так трудно, как кажется. Погорелову удалось, на мой взгляд, адаптировать аксиоматический метод Д. Гильберта для школы. Это методическое достижение трудно переоценить. Читая «Основания геометрии» Д. Гильберта или даже «Высшую геометрию» Н.В. Ефимова, невозможно себе представить, чтобы такой подход не мог бы быть реализован в школе. Однако, большинство учителей в силу, по всей видимости, естественного консерватизма, к сожалению, не приняли его, хотя то, что очевидные факты надо узреть умом (доказывать), вызывает у школьников, как показывает опыт, не просто интерес, а восторг. Здесь уместно вспомнить слова И.Ф. Шарыгина о том, что научной и нравственной основой курса геометрии является принцип доказательности всех(!) утверждений. И это единственный предмет, включая даже предметы математического цикла, полностью основанный на последовательном выводе всех(!) утверждений, см. [5].

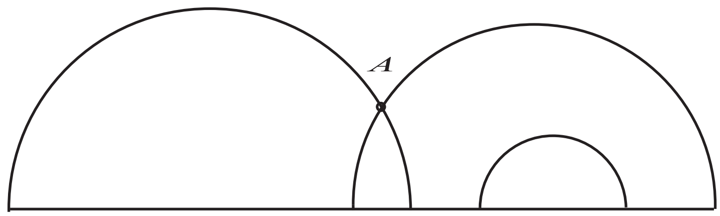
Отсутствие определений

Многие школьники даже не подозревают, что они не знают, что такое $0, -1, \frac{1}{2}, \sqrt{2}$, синус числа, логарифм, поворот против часовой стрелки, и т. д., что у этих понятий имеются определения Может быть, строгих определений здесь давать и не надо, хотя мой опыт показывает, что такие разговоры идут «на ура», но сказать , что вы их опустили, в этом случае необходимо. Иначе сложится ситуация, когда привыкание заменяет понимание, что, конечно, есть точка разрыва. Но в школьной математике есть точки разрыва и посерьезнее. Очень часто строгое определение подменяется наглядным представлением. Вообще, подспудно у школьников формируется совершенно неверное представление о принципах построения научной теории: наглядные образы не нуждаются в определении, например, равенство фигур или поворот (дескать, и так ясно, что это такое). Тем более, «остается за кадром» то, что для аккуратного определения равенства фигур надо сначала ввести движение, а для определения поворота композицию движений. В результате, через некоторое время они, конечно, не узнают в аффинных преобразованиях или гомеоморфизме «ближайших родственников» движения, а в эквивалентности фигур глубокий аналог их равенства.

Кстати говоря, исходя из определения поворота как композиции осевых симметрий, сразу и не догадаешься, при чем тут поворот. Как сказал мне один коллега: «Ваш поворот не поворачивает».

Определение и не должно «поворачивать». Не «царское» это дело! Для этого есть солдаты-теоремы. Иначе говоря, о том, чтобы поворот «повернул», должны побеспокоиться теоремы, а не определения. Это типичный для математики подход: сначала дается формальное определение, а затем теоремы, так называемые основные свойства, формируют наглядный образ. Разумеется, кроме определения, так сказать логического ядра, и основных свойств, которые являются расширением этого ядра и помогают лучше понять суть нового понятия, необходимы еще мотивировки введения этого понятия.

Аксиомы играют роль определений



Еще в 1882 году А. Пуанкаре нарисовал такую картинку, где в верхней полуплоскости изображены полуокружности, центры которых лежат на одной прямой. Если бы эти полуокружности можно было бы считать прямыми, то эта картинка иллюстрировала бы отрицание постулата о параллельных, поскольку через точку A проходят две полуокружности, не пересекающие среднюю полуокружность. Так можно ли считать полуокружности прямыми? Это вопрос, боюсь, поставит в тупик не только школьника, но и ... (не буду гадать, кого еще). Мы учим так, что, сталкиваясь с подобными вопросами, наши ученики испытывают те же психологические трудности, что и современники этих открытий. Как позже объяснил Гильберт, прямая, точка и плоскость **появляются только в связи с теми аксиомами, которые для них выбираются. Другими словами, не важно, назвать ли их точками, прямыми, плоскостями или же столами, стульями, пивными кружками, это будут те объекты, для которых справедливы соотношения, выражаемые аксиомами.**

В некотором смысле это похоже на то, как значение неизвестного слова проясняется по мере использования его в различных контекстах. Каждое дополнительное предложение, в котором оно участвует, исключает некоторые значения, которое могло бы иметь это слово в предыдущих предложениях.

Мотивировки

Математическое образование должно строго придерживаться принципа, так сказать, «снежного кома», т. е. должен даваться только тот материал, который ляжет на уже усвоенный и который может быть мотивирован. Перед тем как вводить новое понятие или начинать новый курс, нужно обязательно объяснять (хотя бы «на пальцах»), ради чего это делается. Спросите любого школьника, зачем нужны логарифмы или тригонометрические уравнения, и вы поймете то, что я имею в виду. И, конечно, объяснения должны соответствовать уровню математической культуры слушателя. Л. Выготский, имея в виду только что сказанное, говорил про зоны ближайшего развития. Отсутствие мотивировок вводимых понятий и направления исследования недопустимо и является не просто разрывом, а делает такое «образование» бессмысленным.

Бессодержательность формулировок большинства задач

Здесь я не буду даже приводить примеры, их полно в большинстве задачников. Вообще для многих сборников задач характерно полное отсутствие сюжетов, задачи в них появляются так, как будто они вылетели из «датчика случайных чисел». Именно из-за этого, наверное, после окончания школы некоторые считают, что математика представляет собой набор несвязанных между собой методов и фактов, является чем то вроде игры.

Неявные блокировки

Самый известный пример блокировки — это история геометрии Лобачевского. Даже ведущие математики того времени ее не признавали. Их интуиция не допускала существования двух прямых, проходящих через одну точку и параллельных третьей. Кстати говоря, мы и сейчас учим так, что наши ученики испытывают те же (а может быть и большие, поскольку слышали, что Лобачевский – великий ученый) психологические трудности, что и современники этого открытия. Прямыми в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского являются, как сказано выше, евклидовы полуокружности. Сложившийся наглядный образ прямой линии этого не допускает, как и существование двух прямых, проходящих через одну точку и параллельных третьей.

Ситуации, подобные этой, я и называю *неявными блокировками*. Неявными, потому, что никто специально не формирует неправильный интуитивный образ. Обычно он является просто результатом привыкания, а затем и абсолютизации этой привычки.

Ярким примером блокировки является «убеждение» об абсолютности прямого угла. Никто этого явно не утверждает, но почти все считают это само собой разумеющимся. Однако, скалярных произведений много, и, следовательно, прямой угол относителен. Если для одного скалярного произведения некоторый угол имеет градусную меру 1°, то для другого скалярного произведения этот же угол может быть равен 90°. Точно так же, с точки зрения одного скалярного произведения, фигура может являться окружностью, а для другого скалярного произведения — это эллипс.

Еще пример: эквивалентность геометрического и векторного языков. Это означает, что теория двумерного векторного пространства со скалярным произведением и школьный курс планиметрии говорят об одном и том же, только на разных языках. Для установления этой эквивалентности нужно, исходя из аксиом планиметрии, проверить выполнение аксиом векторного пространства, и наоборот, исходя из аксиом векторного пространства, доказать теоремы, которые в планиметрии играют роль аксиом. Разрыв здесь состоит в том, что эту эквивалентность многие просто упускают из виду.

Наконец, кто из студентов знает, что ортогональные преобразования и «школьные» движения — это одно и то же? В некоторых курсах линейной алгебры об этом сказано. В школе же часто забывают объяснить, что движение (и, кстати, подобие тоже) являются преобразованиями плоскости, и тогда, естественно, в ортогональном преобразовании невозможно узнать «старого доброго знакомого», которого только переименовали и ввели по-другому. Скажите об этом, и разрыв исчезнет.

Ничья земля

Образование похоже на освоение земель. Каждый чертит свою карту новой для него земли. Откуда берутся задачи? Сколько и каких задач надо решить, чтобы считать, что курс освоен? Боюсь, наши ученики даже не думают об этом, хотя, казалось бы, здесь, как в туристическом походе, они должны постоянно спрашивать, а долго ли осталось еще идти. И только тогда, когда основные реки, горы и равнины нанесены на карту (т. е., когда не осталось больших пробелов-проблем), можно начинать осваивать другую территорию.

Ничья земля — это разделы математики вроде аффинной геометрии, проективной геометрии, геометрии Лобачевского, теории систем, похожих на целые числа, но в которых разложение на простые неоднозначно и т.п. На изучение этих разделов не хватает времени ни в школе, ни в вузе, но без них нельзя представить себе полноценного математического образования. Разрыв здесь состоит в том, что в школе формируют такие навыки, которые очень затрудняют их освоение. Хороший способ устранения этих точек разрыва — исследовательские работы школьников и студентов. В результате будут ликвидированы не только «белые пятна» в образовании, но и, что еще важнее, будет выработан навык освоения новой земли.

В заключение напомним самое главное:

«Математика — это язык»

Как отметил В.А. Успенский, способность отличать осмысленное от бессмысленного и истинное от ложного следует неуклонно и неназойливо прививать уже с начальных классов школы. И не является ли это главным в школьном преподавании?

Литература

1. Бурбаки Н. Теория множеств. - М.: Мир, 1965.

2. Борель Э. Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки // Математическое просвещение. - Сер. 2. - Вып. 3. - 1958. - С. 89-100.

3. Интервью с Н.Н. Константиновым // Квант. - №1, - 2010. - С. 19-23.

4. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - С. 304.

5. Шарыгин И.Ф. // Математическое просвещение. - Сер. 3. - Вып. 8. - 2004. - с. 41.

Козеренко Константин Владимирович,
Лицей "Вторая школа", г. Москва,
заведующий кафедрой математики,
преподаватель математики,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: ckozerenko@mail.ru

Теорема Архимеда и задача ЕГЭ

В. Б. Дроздов

В статье приводится решение в общем виде трудной и интересной геометрической задачи с использованием теоремы Архимеда, упрощающей решение. Статья полезна для учащихся, претендующих на высокий балл ЕГЭ, а также для учителей.

1. Античная задача в книге XX века

В 1969 году издательство «Просвещение» выпустило тиражом 400 тысяч экземпляров пособие для учащихся «Дополнительные главы по курсу математики 7–8 классов для факультативных занятий». В ней на странице 309 приведена задача № 31, известная как теорема Архимеда: «Две окружности имеют внутреннее касание в точке C. В какой-либо точке M внутренней окружности проведена к ней касательная, встречающая внешнюю окружность в точках A и B. Доказать, что отрезки AM и BM видны из точки C под равными углами».

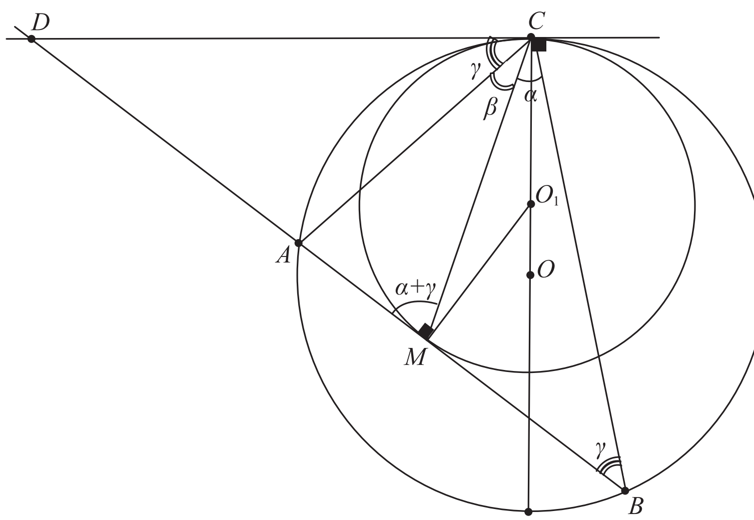


Рис. 1

Доказательство теоремы опирается на рис 1, из которого ясны обозначения углов. Сначала сделаем дополнительное построение: продолжим отрезок AB и общую касательную двух окружностей в точке C до их пересечения в точке D. Тогда $DC = DM$ как отрезки касательных, проведенных к окружности O_1 из одной точки D. По свойству внешнего угла треугольника $\angle DMC = \alpha + \gamma$. $\angle DBC = \angle DCA$, ибо первой угол — вписанный, опирающийся на дугу AC, а второй — угол между касательной и хордой, заключающими ту же дугу AC. В равнобедренном треугольнике DCM $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, откуда $\alpha = \beta$. Следовательно, CM — биссектриса угла C треугольника ABC. Теорема Архимеда доказана.

2. Формула длины биссектрисы угла треугольника

Выразим длину биссектрисы AM треугольника ABC через его стороны a, b, c (рисунок 2).

Сначала найдем длины отрезков $BM = x$ и $CM = y$, на которые биссектриса AM разбивает сторону $BC = a$. Так как $x + y = a$ и по свойству биссектрисы угла треугольника $\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$, то $x = \frac{ac}{b+c}$ и $y = \frac{ab}{b+c}$.

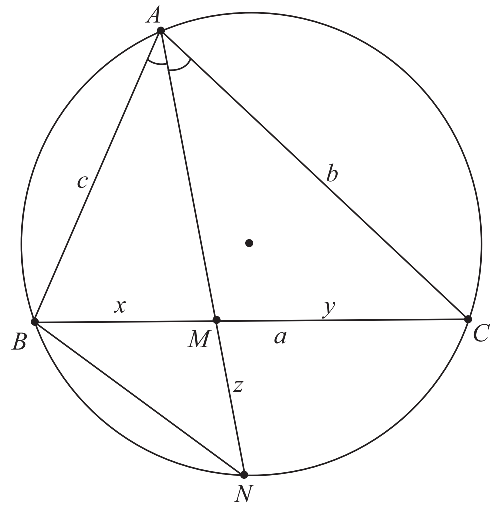


Рис. 2

Опишем вокруг треугольника ABC окружность, продолжим биссектрису AM до пересечения с окружностью в точке N, которую соединим с точкой B. Пусть $MN = z$. Из подобия треугольников ACM и ABN имеем: $\frac{AM+z}{c} = \frac{b}{AM}$, или $AM^2 = bc - AM \cdot z$. Из подобия треугольников ACM и BMN получим $AM \cdot z = xy$. Следовательно, $AM = \sqrt{bc - xy}$;

$$AM = \sqrt{bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)}. \tag{1}$$

3. Задача ЕГЭ в книге XXI века

В книге «Математика, подготовка к ЕГЭ-2016 Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год» (Издательство «Легион», Ростов-на-Дону, 2015) в варианте 1 на странице 15 приведена задача 16: «Две окружности касаются внутренним образом в точке A, при этом меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей окружности в точке R. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что DE параллельна BC.

б) L — точка пересечения RA и DE. Найдите AL, если радиус большей окружности 17, а $BC = 30$».

На с. 187–188 дано такое решение.

а) Пусть O и O_1 — центры большей и меньшей окружностей соответственно (см. рис. 3).

Точки A, O и O_1 лежат на одной прямой, AO — диаметр, значит, $\angle ODA = \angle OEA = \angle ORA = 90^\circ$. $\Delta ODA = \Delta OBD$ (по гипотенузе и катету), значит, $BD = DA$. Аналогично $\Delta OEA = \Delta OEC$ и E — середина AC. DE — средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow DE \parallel BC$.

б) Пусть $OH \perp BC$, тогда из ΔOBH получаем: $OH^2 = OB^2 - BH^2$, $OH = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$. R — точка касания, значит, $O_1R \perp CB$, тогда $O_1R \parallel OH$ (как перпендикуляры к одной прямой).

Проведем $O_1M \perp OH$, O_1MHR — прямоугольник, $O_1R = MH$.

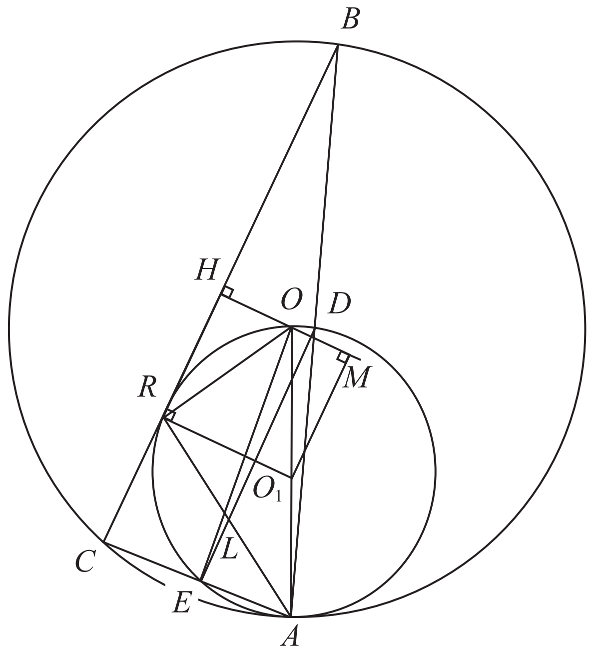


Рис. 3

$$OM = HM - OH = RO_1 - OH = \frac{AO}{2} - OH = \frac{17}{2} - 8 = 0{,}5.$$

$$MO_1 = \sqrt{O_1O^2 - OM^2} = \sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 6\sqrt{2}, \quad RH = MO_1 = 6\sqrt{2}.$$

Получаем из ΔOHR: $OR^2 = OH^2 + HR^2 = 8^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 136$. В ΔARO получим: $AR^2 = AO^2 - OR^2 = 17^2 - 136 = 153$.

$$DE \parallel BC, \quad BD = DA \Rightarrow AL = LR = \frac{1}{2}AR = \frac{\sqrt{153}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{153}}{2}$.

4. Классика помогает современности

Приведенное в книге решение содержит три весьма неочевидных дополнительных построения, к тому же загромождающих чертеж. Поэтому рассмотрим другое решение, основанное на теореме Архимеда, и, конечно, в общем виде. Обозначим радиус большей окружности R, а $BC = a$. См. рис. 4.

По теореме о касательной и хорде имеем: $RC^2 = \frac{b^2}{2}$ и $RB^2 = \frac{c^2}{2}$. Поскольку $RC + RB = a$, то

$$b + c = a\sqrt{2}. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) получим $(2AL)^2 = \frac{bc}{2}$ или

$$AL = \frac{\sqrt{2bc}}{4}. \tag{3}$$

По теореме косинусов для треугольника ABC, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ или

$$a^2 = (b + c)^2 - 2bc\,(1 + \cos A)\,. \tag{4}$$

Из формул (2) и (4) следует:

$$2bc\,(1+\cos A) = a^2. \tag{5}$$

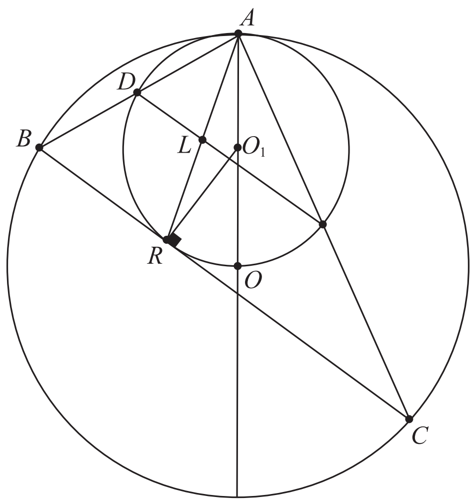


Рис. 4

Из формул (3) и (5) выражаем AL:

$$AL = \frac{a}{4\sqrt{1+\cos A}}. \tag{6}$$

По теореме синусов

$$\sin A = \frac{a}{2R}. \tag{7}$$

Формулы (6), (7) и основное тригонометрическое тождество образуют систему уравнений:

$$\begin{cases} AL = \frac{a}{4\sqrt{1+\cos A}}, \\ \sin A = \frac{a}{2R}, \\ \sin^2 A + \cos^2 A = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Из системы (8) легко исключаются $\sin A$ и $\cos A$. Геометрически очевидно, что угол A не может быть тупым. Значит, $\cos A \geqslant 0$. С учетом этого приходим к результату:

$$AL = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - R\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}}. \tag{9}$$

Если применить к формуле (9) формулу «сложного» радикала

$$\sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}} - \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}},$$

то формула (9) приобретает иной вид:

$$AL = \frac{\sqrt{R}}{4}\left(\sqrt{2R+a} - \sqrt{2R-a}\right).$$

Дроздов Виктор Борисович
г. Рязань.

E-mail: drozdov.viktor2012@yandex.ru

Средние функциональные величины набора действительных чисел, их сравнение и свойства

В. И. Войтицкий

В статье рассматривается обобщённый метод усреднения набора действительных чисел (из множества Y) с помощью непрерывной функции, монотонно отображающей множество X в Y. С помощью такой функции вводится понятие средней функциональной величины, обобщающей классические понятия среднего арифметического, геометрического, гармонического и др. На основе неравенства Йенсена устанавливается очевидная связь между выпуклостью функции и неравенством между ее средней функциональной величиной и средним арифметическим. Доказывается теорема о сравнимости двух средних функциональных величин. Приводятся примеры использования введенного понятия, в частности доказываются неравенства между средними p-ичными.

1. Классические неравенства средних. Определение понятия средней функциональной величины

Усреднённые величины и методы их вычисления играют в математике значительную роль. Знакомство с этим понятием начинается еще в младшей школе. Интуитивно каждый человек связывает понятие средней величины со средним арифметическим. Для любых двух действительных чисел a и b среднее арифметическое $c_1 = (a+b)/2$ лежит на числовой оси ровно посредине между a и b. Для набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ среднее арифметическое $c_1(a_i) := (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$ обладает тем важным свойством, что при замене каждого числа a_i на c_1, сумма $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ остается неизменной. Это свойство позволяет, например, равномерно поделить урожай между n областями, если каждая собрала на своей территории по a_i тонн зерна. Каждая после передела будет иметь по c_1 тонн (средний урожай). Средним арифметическим также называют среднее арифметическое взвешенное

$$c_{1,vz}(a_i) = \frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + \cdots + a_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \ \text{ где } \ m_i \in \mathbb{N}.$$

К подобному методу усреднения приведёт та же задача о распределения зерна между большим количеством областей, если известно, что m_1 областей собрали по a_1 тонн, m_2 областей собрали по a_2 тонн и т.д. В общем случае среднее арифметическое взвешенное можно задавать по формуле

$$c_{1,vz}(a_i) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n,$$

где $\alpha_i > 0, \ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$, являются заданными числами, которые называют также «весами». Очевидно, стандартная формула получается из данной как частный случай, соответствующий $\alpha_i = 1/n$.

Часто встречаются задачи, требующие иного (нелинейного) метода усреднения. Например, задача о вычислении средней скорости по известным скоростям a и b на половинах пути приводит к средней величине $c_{-1}(a,b) = \left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} = \dfrac{2ab}{a+b}$, которую называют средней гармонической величиной (или просто средним гармоническим чисел a и b). Если дан прямоугольный параллелепипед со сторонами a, b, c, то куб, имеющий ту же длину диагонали $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, будет иметь сторону $c_2(a,b,c) = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

Несложно найти общность между величинами c_1, c_{-1} и c_2. Все они являются средними p-ичными величинами, которые определяются по правилу

$$c_p(a_i) = \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n}\right)^{1/p}, \quad p \in \mathbb{R},\ p \neq 0. \tag{1}$$

Это определение корректно для всех ненулевых p, если все числа $a_i > 0$. Также несложно определить среднее p-ичное взвешенное чисел a_i. Оно определяется по заданному набору весовых чисел $\alpha_i > 0$ по формуле

$$c_{p,vz}(a_i) = (\alpha_1 a_1^p + \alpha_2 a_2^p + \dots + \alpha_n a_n^p)^{1/p}, \quad p \in \mathbb{R},\ p \neq 0. \tag{2}$$

Удивительным является тот факт, что при одних и тех же α_i в случае $p_1 > p_2$ ($p_i \neq 0$) для любого набора $a_i > 0$ выполнено неравенство

$$c_{p_1,vz}(a_i) \geq c_{p_2,vz}(a_i), \tag{3}$$

причем равенство возможно лишь при $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Это неравенство будет строго доказано ниже (см. теорему 4.1). Оно непосредственно следует из неравенства Йенсена, справедливого для любой выпуклой функции. Частным случаем (3) является хорошо известная цепочка неравенств между средним квадратичным ($p = 2$), средним арифметическим ($p = 1$) и средним гармоническим ($p = -1$)

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Применимость неравенства Йенсена, однако, выходит далеко за рамки доказательства неравенства (3). Его форма наталкивает на мысль введения и изучения более широкого класса средних величин, которые строятся по заданной монотонной функции $f(x)$.

Именно, пусть ставится задача поиска средней величины из некоторого набора чисел a_i, принадлежащих связному множеству Y, например отрезку $[a; b]$, интервалу $(a; b)$ или лучу $[a; +\infty)$. Тогда для ее решения можно использовать произвольную непрерывную функцию f, монотонно переводящую другое связное множество $X \subset \mathbb{R}$ в Y. При этом средней функциональной величиной будем называть число

$$c_f(a_i) := f\left(\frac{f^{-1}(a_1) + f^{-1}(a_2) + \dots + f^{-1}(a_n)}{n}\right), \tag{5}$$

где через $f^{-1}\colon Y \to X$ обозначена функция, обратная к $f(x)$. Аналогично вводится понятие средней функциональной взвешенной величины

$$c_{f,vz}(a_i) := f\left(\alpha_1 f^{-1}(a_1) + \alpha_2 f^{-1}(a_2) + \dots + \alpha_n f^{-1}(a_n)\right), \tag{6}$$

где $\alpha_i > 0$ — заданные числа, такие что $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$.

Этому понятию и его свойствам посвящена данная работа. Предлагаемый подход позволяет под другим углом взглянуть на понятие средней величины. Важным является тот факт, что неравенство вида $c_f \geq c_g$ порождается различной «степенью выпуклости» функций f и g. В его справедливости зачастую можно убедится наглядно по графикам функций f и g либо изучая их дополнительные свойства.

Отметим, что понятие средней функциональной величины было известно более столетия назад. В известной книге Г. Харди, Дж. Литтлвуда и Г. Полиа «Неравенства» (см. [1]) приводится понятие, аналогичное (6), где функции f^{-1} и f меняются местами. В этой книге перечислена масса интересных глубоких свойств, однако она мало известна широкому кругу российских математиков и достаточно сложна для чтения. На взгляд автора, определение (6) является методически более удобным и позволяет наглядно графически интерпретировать обобщённые неравенства средних величин. Интересной также является связь средних функциональных величин с возвратными последовательностями, см. теорему 2.2.

Понятию средних величин посвящено много научных и методических работ. Любителям популярной математики известны брошюры [2], [3], в которых можно найти доказательство неравенства Йенсена, неравенства между средними p-ичными, а также другие неравенства с упражнениями для самостоятельной работы. Также данной теме посвящен ряд статей в журнале «Квант». При этом понятие средней функциональной величины должным образом не освещалось.

2. Средняя функциональная величина для двух чисел

Рассмотрим для простоты и наглядности случай средней функциональной от двух чисел a и b. Пусть задана некоторая непрерывная функция f, монотонно переводящая отрезок $[f^{-1}(a); f^{-1}(b)]$ в отрезок $[a; b]$. Рассмотрим величину

$$c_f = f\left(\frac{f^{-1}(a) + f^{-1}(b)}{2}\right). \tag{7}$$

Графически данное определение означает, что функция $f(x)$ соединяет точки $A(f^{-1}(a); a)$ и $B(f^{-1}(b); b)$, а среднее функциональное является ординатой точки $C(\frac{f^{-1}(a)+f^{-1}(b)}{2}; c_f)$. Таким образом каждая монотонная функция f обладает тем замечательным свойством, что переводит среднее арифметическое чисел $f^{-1}(a)$ и $f^{-1}(b)$ в среднее функциональное их образов a и b, при этом в силу монотонности функции $f(x)$ получаем, что $c_f \in [a; b]$.

Определение 2.1. *Функция $f(x)$ называется выпуклой (вниз) на множестве X, если для всех $x, y \in X$ выполнено свойство*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x) + f(y)}{2}. \tag{8}$$

Если равенство в (8) возможно лишь при $x = y$, то функция называется строго выпуклой. Если в данном неравенстве поменять знак на противоположный, то функцию соответственно называют вогнутой либо строго вогнутой (выпуклой вверх).

Геометрически данное определение означает, что строго выпуклая функция на интервале $(x; y)$ находится ниже хорды, соединяющей точки на ее графике с абсциссами x и y. Соответственно, вогнутая функция находится выше такой хорды. Обозначая в этом определении $f(x) = a, f(y) = b$, для выпуклой монотонной функции $f(x)$ немедленно получаем неравенство

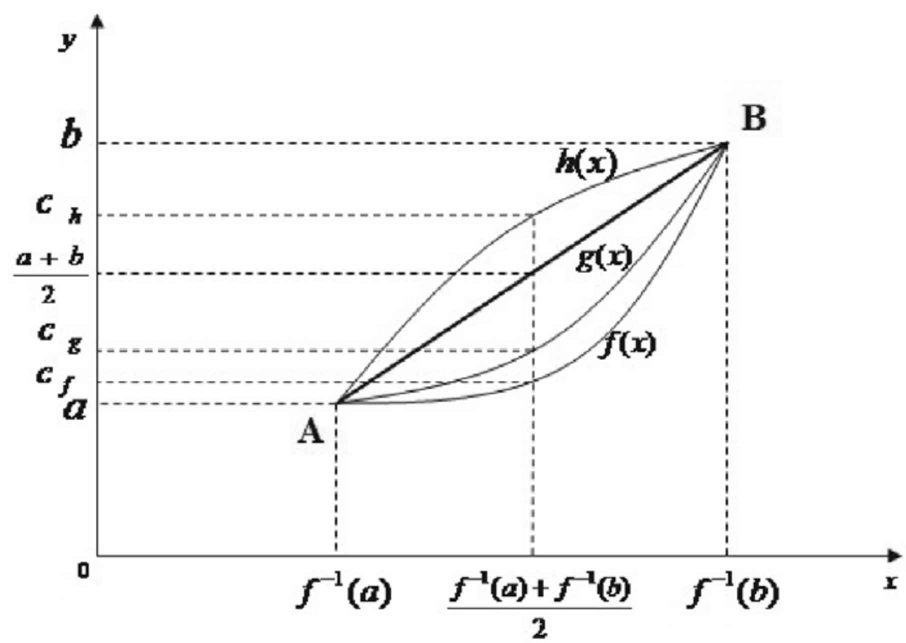
$$f\left(\frac{f^{-1}(a) + f^{-1}(b)}{2}\right) \le \frac{a+b}{2}. \tag{9}$$

Таким образом свойство выпуклости функции $f(x)$ эквивалентно тому, что ее среднее функциональное не больше среднего арифметического. В случае строгой выпуклости при $a \ne b$ в неравенстве (9) можно поставить строгий знак, т. е. среднее функциональное строго меньше среднего арифметического. Аналогично свойство вогнутости (строгой вогнутости) функции эквивалентно тому, что ее среднее функциональное не меньше (больше) среднего арифметического. Отсюда, в-частности, следует, что средние функциональные величины для вогнутых функций всегда больше соответствующих средних для выпуклых функций. Так, среднее квадратическое соответствует вогнутой функции $\sqrt{x}$, а среднее гармоническое — выпуклой (вниз) функции $1/x$, что отражается в неравенстве

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2} \ge \frac{2ab}{a+b}.$$

Еще одной известной средней величиной является среднее геометрическое $\sqrt{ab}$. Это среднее, например, соответствует стороне квадрата, имеющего ту же площадь, что и прямоугольник со сторонами a и b. Несложно убедиться, что среднее геометрическое является средней функциональной для любой функции $f(x) = q^x$ $(q > 0, q \neq 1)$. Действительно, $f^{-1}(x) = \log_q x$, поэтому $(f^{-1}(a) + f^{-1}(b))/2 = (\log_q a + \log_q b)/2 = \log_q(\sqrt{ab})$. Отсюда согласно основному логарифмическому тождеству $c_{q^x} = \sqrt{ab}$. Все показательные функции выпуклы, отсюда среднее геометрическое меньше среднего арифметического. Известно однако, что оно больше среднего гармонического. Этот факт строго доказан ниже, см. теорему 4.2.

Если даны две выпуклые функции $f(x)$ и $g(x)$, для которых $f^{-1}(a) = g^{-1}(a)$, $f^{-1}(b) = g^{-1}(b)$, то оба графика этих функций проходят через точки $A(f^{-1}(a); a)$ и $B(f^{-1}(b); b)$. Отсюда из геометрических соображений ясно, что чем более выпукла функция, тем ее среднее функциональное меньше. Аналогично, более вогнутая функция имеет большее среднее функциональное (см. рис. 1).



Если функция $f(x)$ является линейной, то несложно заключить, что она переводит среднее арифметическое в среднее арифметическое (центр прямоугольника с диагональю AB расположен на середине отрезка AB), т. е. для линейной функции мы имеем равенство в формуле (9). Таким образом, всем линейным функциям соответствует одна и та же средняя функциональная величина — среднее арифметическое.

Теорема 2.1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ монотонны на множестве X и содержат в образе отрезок $[a; b]$. Тогда соответствующие средние величины $c_f(c, d) \equiv c_g(c, d)$ для всех $c, d \in [a; b]$ в том и только том случае, когда $g(x) = f(kx + l)$, где $k, l \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.*

Доказательство. Если $g(x) = f(kx + l)$, то $g^{-1}(x) = (1/k)[f^{-1}(x) - l]$. Отсюда

$$c_g = g\left(\frac{(1/k)[f^{-1}(c) - l + f^{-1}(d) - l]}{2}\right) =$$

$$= f\left(\frac{f^{-1}(c) - l + f^{-1}(d) - l}{2} + l\right) = f\left(\frac{f^{-1}(c) + f^{-1}(d)}{2}\right) = c_f.$$

В обратную сторону, если

$$g\left(\frac{g^{-1}(c)+g^{-1}(d)}{2}\right) \equiv f\left(\frac{f^{-1}(c)+f^{-1}(d)}{2}\right),$$

то, осуществляя замену $f^{-1}(c)=\alpha,\ f^{-1}(d)=\beta$, получаем, что

$$(f^{-1}\circ g)\left(\frac{(g^{-1}\circ f)(\alpha)+(g^{-1}\circ f)(\beta)}{2}\right) \equiv \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Несложно заметить, что выражение, стоящее слева, является средним функциональным для композиции функций $(f^{-1}\circ g)(x) := f^{-1}(g(x))$. Отметим, что эта функция монотонно переводит множество X в себя (она является композицией двух монотонных функций). Справа стоит среднее арифметическое, которое может быть порождено лишь линейной функцией. Отсюда $(f^{-1}\circ g)(x) = kx+l$, т.е. $g(x)=f(kx+l)$. □

Как известно, в арифметической (геометрической) прогрессии среднее арифметическое (геометрическое) двух членов, стоящих через один, равно среднему члену. Более того, эти свойства являются характеристическими для этих последовательностей. Более сильным является следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Рекуррентное соотношение*

$$a_{n+1} = f\left(\frac{f^{-1}(a_{n+2})+f^{-1}(a_n)}{2}\right) = c_f(a_n, a_{n+2}) \tag{10}$$

при заданных a_0 и a_1 описывается явной формулой $a_n = f(nk+l)$, где числа $k\neq 0$ и l однозначно находятся по a_0 и a_1 (функцию $f(x)$ считаем непрерывной и монотонной на множестве, содержащем числа $nk+l$, $n=0,1,2,\dots$). Верно и обратное, последовательность $a_n=f(n)$, удовлетворяет свойству $a_{n+1}=c_g(a_n,a_{n+2})$, для любой функции $g(x)=f(kx+l)$, содержащей последовательность a_n в своём образе.

Доказательство. Рекуррентную формулу (10) можно записать в виде

$$2f^{-1}(a_{n+1}) = f^{-1}(a_{n+2}) + f^{-1}(a_n).$$

Обозначим $b_n := f^{-1}(a_n)$, тогда $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n$. Данное линейное соотношение имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Отсюда $\lambda = 1$ — двукратный корень, следовательно $b_n = nk+l$, где $k,l\in\mathbb{R}$ и однозначно определяются по первым двум членам (свойства линейных возвратных последовательностей описаны, например, в [4]). Таким образом, $a_n = f(nk+l)$. Очевидно, $l = f^{-1}(a_0)$, $k = f^{-1}(a_1) - f^{-1}(a_0)$.

В обратную сторону, если $a_n = f(n)$, то согласно теореме 2.1 достаточно доказать, что $a_{n+1} = c_f(a_n, a_{n+2})$. Последнее выполнено в силу очевидного тождества

$$f(n+1) = f\left(\frac{f^{-1}(f(n)) + f^{-1}(f(n+2))}{2}\right) = f\left(\frac{n+n+2}{2}\right). \qquad \square$$

Замечание 2.1. *Так как среднее геометрическое порождается функцией $f(x)=q^x$, то из рекуррентного соотношения $a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}}$ согласно теореме будет следовать, что $a_n = f(kn+l) = q^{kn+l} = a_0\cdot p^n$, где $p=q^k$, т. е. a_n — геометрическая прогрессия со знаменателем p.*

3. Неравенство Йенсена. Сравнение средних функциональных величин

Из определения выпуклой функции 2.1 следует более тонкое, но равносильное ему неравенство Йенсена (доказательство можно найти, например, в [5]).

Теорема 3.1. *Для любой выпуклой на множестве X функции $f(x)$ справедливо неравенство*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n), \tag{11}$$

где x_i — произвольные точки из X, числа $\alpha_i \ge 0$ таковы, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Причём для строго выпуклой вниз функции знак равенства для ненулевых α_i возможен лишь, если $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Согласно этому факту неравенства для взвешенных величин эквивалентны неравенствам для классических средних. Поэтому далее под терминам «средняя величина» будем полагать либо классическое либо взвешенное среднее, исходя из контекста.

Из курса математического анализа известно простое достаточное условие строгой выпуклости.

Теорема 3.2. *Дважды дифференцируемая на множестве X функция $f(x)$ строго выпукла на нем, если в любой точке этого множества $f''(x) > 0$. Аналогично для строгой вогнутости достаточно, чтобы $f''(x) < 0$.*

Замечание 3.1. *Очевидно, данное свойство не является необходимым. Например, функция $y = x^4$ является строго выпуклой на $\mathbb{R}$, при этом $y'' = 12x^2 = 0$ в точке $x = 0$.*

Если выпуклая функция является монотонной на X, то неравенство Йенсена (11) эквивалентно неравенству

$$f\Big(\alpha_1 f^{-1}(a_1) + \alpha_2 f^{-1}(a_2) + \dots + \alpha_n f^{-1}(a_n)\Big) \le \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n, \tag{12}$$

где $a_i = f(x_i)$. Данное неравенство устанавливает связь между средним функциональным и средним арифметическим. А именно, из неравенства Йенсена следует, что для любой выпуклой монотонной функции $f(x)$ среднее функциональное не больше среднего арифметического. Аналогично для любой вогнутой монотонной функции $f(x)$ среднее функциональное не меньше среднего арифметического. В случае строгой выпуклости $f(x)$ для ненулевых α_i знак равенства в (12) выполняется лишь в случае $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. На основании этого факта получаем следующее важное утверждение.

Теорема 3.3. *Для любых чисел $a_i \in Y$ и любых $\alpha_i \ge 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, выполнено неравенство*

$$\begin{aligned} c_f(a_i) = f\Big(\alpha_1 f^{-1}(a_1) + \alpha_2 f^{-1}(a_2) + \dots + \alpha_n f^{-1}(a_n)\Big) \le \\ \le g\Big(\alpha_1 g^{-1}(a_1) + \alpha_2 g^{-1}(a_2) + \dots + \alpha_n g^{-1}(a_n)\Big) = c_g(a_i), \end{aligned} \tag{13}$$

если непрерывные функции f и g монотонно переводят множество X в Y, и выполнено одно из двух условий:

1. функция $g(x)$ возрастает и композиция $g^{-1} \circ f$ выпукла;

2. функция $g(x)$ убывает и композиция $g^{-1} \circ f$ вогнута.

Если при тех же условиях на $g(x)$ функция $g^{-1} \circ f$ имеет иной характер выпуклости, то знак в (13) нужно поменять на противоположный. В случае строгой выпуклости (вогнутости) $g^{-1} \circ f$ для ненулевых α_i знак равенства в (13) возможен лишь в случае $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Доказательство. Функция $g^{-1} \circ f$ монотонна как композиция монотонных функций.

1) Если функция $g(x)$ возрастает и композиция $g^{-1} \circ f$ выпукла, то в силу возрастания $g^{-1}(x)$ неравенство (13) равносильно неравенству

$$(g^{-1} \circ f)\Big(\alpha_1 (f^{-1} \circ g)(b_1) + \alpha_2 (f^{-1} \circ g)(b_2) + \dots + \alpha_n (f^{-1} \circ g)(b_n)\Big) \le \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n, \tag{14}$$

где $b_i = g(a_i)$. Так как слева здесь стоит среднее функциональное, порождённое функцией $g^{-1} \circ f$, то согласно неравенству Йенсена выпуклость $g^{-1} \circ f$ равносильна неравенству (14).

2) Если функция $g(x)$ убывает и композиция $g^{-1} \circ f$ вогнута, то в силу убывания $g^{-1}(x)$ неравенство (13) равносильно неравенству

$$(g^{-1} \circ f)\Big(\alpha_1(f^{-1} \circ g)(b_1) + \alpha_2(f^{-1} \circ g)(b_2) + \cdots + \alpha_n(f^{-1} \circ g)(b_n)\Big) \geq \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n. \quad (15)$$

Аналогично предыдущему случаю согласно неравенству Йенсена вогнутость $g^{-1} \circ f$ равносильна неравенству (15). □

Замечание 3.2. *Выпуклость (вогнутость) дважды дифференцируемой функции $g^{-1} \circ f$ следует из сохранения знака ее второй производной. Проделав вычисления, можно доказать, что свойство выпуклости (вогнутости) функции $g^{-1} \circ f$ априори выполняется в случае $f''(x) \cdot g''(x) < 0$. Например, очевидно, что неравенство* (13) *выполняется, если функция $f(x)$ выпукла, а $g(x)$ — вогнута. В этом случае между левой и правой частью находится среднее арифметическое чисел a_i.*

4. Некоторые приложения неравенства между средними функциональными

Теорема 3.3 имеет богатые возможности для применения.

1. Классические неравенства между средними величинами являются следствиями двух следующих теорем.

Теорема 4.1. *Пусть $X = Y = (0; +\infty)$. Тогда для любых ненулевых чисел $p < q$ монотонные на X функции $f(x) = x^{1/p}$ и $g(x) = x^{1/q}$ порождают средние функциональные величины (p-ичное и q-ичное среднее), связанные неравенством $c_f(a_i) \leq c_g(a_i)$ для любого набора положительных чисел a_i.*

Доказательство. 1) Если $0 < p < q$ или $p < 0 < q$, то функция $g^{-1} \circ f = x^{q/p}$ обращена выпуклостью вниз. Так как функция $g(x)$ возрастает, то по теореме (3.3) имеем $c_f(a_i) \leq c_g(a_i)$.

2) Если $p < q < 0$, то функция $g^{-1} \circ f = x^{q/p}$ обращена выпуклостью вверх. Так как функция $g(x)$ убывает, то по теореме 3.3 имеем $c_f(a_i) \leq c_g(a_i)$. □

Из теоремы следует, что любое p-ичное среднее будет тем больше, чем больше число p. Например, в силу очевидного неравенства $3 > 1 > 1/2 > -1 > -2$ получаем, что

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} \geq \left(\frac{a^{-2}+b^{-2}}{2}\right)^{-1/2}.$$

Теорема 4.2. *Среднее геометрическое положительных чисел a_i больше любого их среднего p-ичного при $p < 0$ и меньше любого p-ичного при $p > 0$. В частности, среднее геометрическое больше среднего гармонического, но меньше среднего арифметического.*

Доказательство. Действительно, среднее геометрическое является средним функциональным, например, для функции $f(x) = e^x : \mathbb{R} \to (0; +\infty)$, при этом среднее p-ичное является средним функциональным для функции $g(x) = x^{1/p} : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$. Так как функция $\varphi(x) := (g^{-1} \circ f)(x) = e^{px}$ обладает свойством $\varphi''(x) = p^2 e^{px} > 0$, то она строго выпукла вниз. Поскольку при $p > 0$ функция $g(x)$ возрастает, то согласно теореме 3.3 для всех $p > 0$ имеем $c_f(a_i) \leq c_g(a_i)$. Так как при всех $p < 0$ функция $g(x)$ убывает, то согласно теореме 3.3 для всех $p < 0$ имеем $c_f(a_i) \geq c_g(a_i)$ □

Доказанные теоремы объясняют, почему многие авторы расширяют класс p-ичных средних величин на случай любого действительного p, полагая, что p-ичное среднее при $p = 0$ является средним геометрическим. Именно при таком подходе любое p-ичное среднее будет тем больше, чем больше число p при всех $p \in \mathbb{R}$.

2. Используя при $q > 1$ функцию $f(x) = \log_q x : \ (1; +\infty) \to (0; +\infty)$, можно построить «среднее логарифмическое» набора положительных чисел. В силу вогнутости этой функции, очевидно, что любое среднее логарифмическое больше среднего арифметического. При этом интересно отметить, что любое p-ичное при $p > 1$, вообще говоря, не сравнимо со средним логарифмическим при $Y = (0; +\infty)$. Однако, для любого $p > 1$ можно указать подмножества луча $(0; +\infty)$, зависящие от p, на которых среднее логарифмическое будет больше среднего p-ичного. Аналогично можно указать подмножества, на которых среднее логарифмическое будет меньше среднего p-ичного. Например, при $p = 2$ такими подмножествами будут соответственно $(q; +\infty)$ и $(1; q)$. Оставляю проверку данных утверждений в качестве упражнения.

3. Функции $f_p(x) = \ln^p x : \ [e; +\infty) \to [1; +\infty)$ при $p > 0$ образуют средние величины, усредняющие числа не меньшие единицы, при этом средняя функциональная величина тем больше, чем число p меньше. Те же функции, $f_p(x) = \ln^p x : \ [1; e] \to [0; 1]$ при $p > 0$ образуют средние величины, усредняющие числа в промежутке $[0; 1]$ таким образом, что средняя функциональная величина тем больше, чем число p больше. Последний факт наглядно интерпретируется графически. Каждая из функций $f_p(x)$ проходит через точки $A(1; 0)$ и $B(e; 1)$. Причём вогнутость дуги AB тем больше, чем больше число p.

4. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x : \ (0; \pi/2) \to (0; +\infty)$ образует среднее тангенсальное. В силу выпуклости этой функции, среднее тангенсальное меньше среднего арифметического. Несложно показать, однако, что среднее тангенсальное для любого набора положительных чисел больше среднего гармонического. Со всеми промежуточными p-ичными средними (при $-1 < p < 1$) среднее тангенсальное не сравнимо (для произвольного набора положительных чисел). Например, числа из промежутков $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ образуют разные знаки неравенств между средним тангенсальным и средним геометрическим.

5. По-аналогии можно исследовать неравенства между средними функциональными величинами, порожденными функциями $\operatorname{tg}^p x$, $\sin^p x$ и вообще $f^p(x)$ для заданной монотонной функции $f(x)$, имеющей обратную функцию, выражающуюся через элементарные функции. Такие средние функциональные величины также можно сравнивать с q-ичными средними величинами. Тут имеется значительное число задач для исследования.

Литература

[1] Харди Г., Литлвуд Дж. и Полиа Г. *Неравенства.* – М.: КомКнига, 2006. - 458 с.

[2] Коровкин П.П. *Неравенства («Популярные лекции по математике», выпуск 5).* – М.: Наука, 1966. - 56 с.

[3] Соловьёв Ю.П. *Неравенства (библиотека «Математическое просвещение», выпуск 30).* – М.: Издательство МЦНМО, 2005. - 16 с.

[4] Маркушевич А.И. *Возвратные последовательности («Популярные лекции по математике», выпуск 1).* – М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1950. ? Т. 1. - 48 с.

[5] Ижболдин О., Курляндчик Л. *Неравенство Йенсена* // Квант. - 2000, - №4. - С. 7-10.

Войтицкий Виктор Иванович,
доцент кафедры математического анализа
Таврической академии Крымского федерального
университета им. В.И. Вернадского,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: voytitsky@gmail.com

On Bounded and Unbounded Curves in Euclidian Space

Oleg Zubelevich

Редакция представляет читателям первый опыт публикации статьи на английском языке. Считаем, что такой опыт полезен как студентам, так и специалистам, поскольку в настоящее время английский фактически является международным научным языком. Статья относится к тематике классической дифференциальной геометрии и будет доступна студентам, прослушавшим стандартный курс дифференциальной геометрии, а также вузовский курс английского языка.

В статье для кривой в $\mathbb{R}^3$, приводятся в терминах кривизны и кручения кривой достаточные условия неограниченности кривой в $\mathbb{R}^3$. Также, в терминах кривизны, приводятся достаточные условия ограниченности кривой в $\mathbb{R}^4$.

Abstract

We consider a curve in $\mathbb{R}^3$ and provide sufficient conditions for the curve to be unbounded in terms of its curvature and torsion. We also present sufficient conditions on the curvatures for the curve to be bounded in $\mathbb{R}^4$.

1. Introduction

This short note concerns a smooth curve γ in the standard three-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^3$. It is well known that the curve is uniquely defined (up to translations and rotations of $\mathbb{R}^3$) by its curvature $\kappa(s)$ and its torsion $\tau(s)$, the argument s is the arc-length parameter. The pair $(\kappa(s), \tau(s))$ is called the intrinsic equation of the curve.

In the sequel we assume that $\kappa, \tau \in C[0, +\infty)$.

To obtain the radius-vector of the curve γ one must solve the system of Frenet-Serret equations:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}'(s) &= \kappa(s)\boldsymbol{n}(s),\\
\boldsymbol{n}'(s) &= -\kappa(s)\boldsymbol{v}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s),\\
\boldsymbol{b}'(s) &= -\tau(s)\boldsymbol{n}(s).
\end{aligned} \tag{1}$$

The vectors $\boldsymbol{v}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)$ stand for the Frenet-Serret frame at the curve's point with parameter s. Then the radius-vector of the curve is computed as follows $\boldsymbol{r}(s) = \int_0^s \boldsymbol{v}(\xi)d\xi + \boldsymbol{r}(0)$.

If the curve γ is flat (it is so iff $\tau(s) \equiv 0$) then the system (1) is integrated explicitly. In three dimensional case nobody can integrate this system with arbitrary smooth functions τ, κ.

So we obtain a very natural and pretty problem: to restore the properties of the curve γ having the curvature $\kappa(s)$ and the torsion $\tau(s)$.

For example, under which conditions on the functions κ, τ a curve γ is closed? This is a hard open problem. There may by another question: Which are sufficient conditions for the whole curve to be contained in a sphere? This question is much simpler. Such a type questions have been discussed in [4], [3], [5].

There is a sufficient condition for the curve to be unbounded [1]. In this article the condition is formulated in terms of curvature only and this condition is valid in a big class of spaces, including Hilbert spaces and Riemannian manifolds of non-positive curvature.

In general case, (1) is a linear system of the ninth order with the right-hand side matrix depending on s. To describe the properties of γ one must study this system.

In this note we formulate and prove some sufficient conditions for unboundedness of the curve γ.

We also present sufficient conditions for the curve to be bounded in the four dimensional Euclidean space.

It is interesting that in $\mathbb{R}^m$ of odd m the curves are in generic case unbounded but for the even m they are generically bounded. Some justification of this very informal observation is given below.

2. Main Theorem

We shall say that γ is unbounded iff $\sup_{s\ge 0}|\boldsymbol{r}(s)|=\infty$.

Theorem 1. *Suppose there exists a function $\lambda(s)$ such that the functions*

$$k(s)=\lambda(s)\kappa(s),\quad t(s)=\lambda(s)\tau(s)$$

are monotone[1] *and belong to $C[0,\infty)$. Introduce a function $T(s)=\int_0^s t(\xi)d\xi$. Suppose also that the following equalities hold*

$$\lim_{s\to\infty}T(s)=\infty,\quad \lim_{s\to\infty}\frac{k(s)}{T(s)}=\lim_{s\to\infty}\frac{t(s)}{T(s)}=0. \tag{2}$$

Then the curve γ is unbounded.

The proof of this theorem is contained in Section 4.1.

Putting $\lambda=1/\tau$ in this Theorem, we deduce the following corollary.

Corollary 1. *Suppose that the function $\kappa(s)/\tau(s)$ is monotone and*

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\kappa(s)}{s\cdot\tau(s)}=0. \tag{3}$$

Then the curve γ is unbounded.

Note that the geodesic curvature of the tantrix[2] $\kappa_T(s)$ is equal to $\tau(s)/\kappa(s)$ [3]. So that formula (3) can be rewritten as follows

$$\lim_{s\to\infty}\kappa_T(s)s=\infty.$$

Theorem 1 is not reduced to Corollary 1. Consider an example. Let the curve γ be given by

$$\kappa(s)=1,\quad \tau(s)=\frac{1}{1+s}.$$

Since $\tau(s)\to 0$ as $s\to\infty$ it may seem that this curve is about a circle with $\kappa(s)=1$. Nevertheless applying Theorem 1 with $\lambda=1$ we see that the curve γ is unbounded.

Consider a system which consists of (1) together with the equation $\boldsymbol{r}'(s)=\boldsymbol{v}(s)$. From viewpoint of stability theory, Theorem 1 states that under certain conditions this system is unstable.

Since $|\boldsymbol{r}(s)|=O(s)$ as $s\to\infty$, this instability is too weak to study it by standard methods such as the Lyapunov exponents method.

3. Supplementary Remarks: Bounded Curves in $\mathbb{R}^4$

Actually the above developed technique can be generalized to the curves in any multidimensional Euclidean space $\mathbb{R}^m$. For the case of the odd m we can prove a theorem similar to Theorem 1. But for the case when m is even our method allows to obtain sufficient conditions for the curve to be bounded.

In this section we illustrate such an effect. To avoid long formulas we consider only the case $m=4$.

So let a curve $\gamma\subset\mathbb{R}^4$ be given by its curvatures

$$\kappa_i(s)\in C[0,\infty),\quad i=1,2,3.$$

[1] e. g. one of these functions, $k(s)$ is monotonically increasing: $s'<s''\Rightarrow k(s')\le k(s''),\quad s',s''\in[0,\infty)$ while the other one $t(s)$ is monotonically decreasing: $s'<s''\Rightarrow t(s')\ge t(s''),\quad s',s''\in[0,\infty)$. The inverse situation is also allowed, or the both functions can be increasing or decreasing simultaneously .

[2] The tangential spherical image of the curve γ is the curve on the unit sphere. This curve has the radius-vector $\boldsymbol{r}'(s)$.

And let $\boldsymbol{v}_j(s), \quad j=1,2,3,4$ be the Frenet-Serret frame. Then the Frenet-Serret equations are

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v_1}\\ \boldsymbol{v_2}\\ \boldsymbol{v_3}\\ \boldsymbol{v_4}\end{pmatrix}(s)=A(s)\begin{pmatrix}\boldsymbol{v_1}\\ \boldsymbol{v_2}\\ \boldsymbol{v_3}\\ \boldsymbol{v_4}\end{pmatrix}(s),$$

$$A(s)=\begin{pmatrix}0&\kappa_1(s)&0&0\\ -\kappa_1(s)&0&\kappa_2(s)&0\\ 0&-\kappa_2(s)&0&\kappa_3(s)\\ 0&0&-\kappa_3(s)&0\end{pmatrix}$$

Theorem 2. *Suppose that the function $\kappa_1(s)\kappa_3(s)$ does not take the value zero, the functions*

$$f_1(s)=\frac{1}{\kappa_1(s)},\quad f_2(s)=\frac{\kappa_2(s)}{\kappa_1(s)\kappa_3(s)}$$

are monotone, and

$$\sup_{s\ge 0}|f_i(s)|<\infty,\quad i=1,2.$$

Then the curve γ is bounded.

The proof of this theorem is contained in Section 4.2.

4. Proofs

4.1. Proof of Theorem 1

Let us expand the radius-vector by the Frenet-Serret frame

$$\boldsymbol{r}(s)=r_1(s)\boldsymbol{v}(s)+r_2(s)\boldsymbol{n}(s)+r_3(s)\boldsymbol{b}(s).$$

Differentiating this formula we obtain

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(s)&=r_1'(s)\boldsymbol{v}(s)+r_2'(s)\boldsymbol{n}(s)+r_3'(s)\boldsymbol{b}(s)\\ &\quad+r_1(s)\boldsymbol{v}'(s)+r_2(s)\boldsymbol{n}'(s)+r_3(s)\boldsymbol{b}'(s).\end{aligned}$$

Using the Frenet-Serret equations, one yields

$$r'(s)=\begin{pmatrix}0&\kappa(s)&0\\ -\kappa(s)&0&\tau(s)\\ 0&-\tau(s)&0\end{pmatrix}r(s)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad r=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}. \tag{4}$$

(The author was informed about system (4) by Professor Ya. V. Tatarinov.) Let us multiply both sides of system (4) by the row-vector

$$\lambda(s)\big(\tau(s),0,\kappa(s)\big)$$

from the left:

$$t(s)r_1'(s)+k(s)r_3'(s)=t(s).$$

Then we integrate this equation:

$$\int_0^s t(a)r_1'(a)da+\int_0^s k(a)r_3'(a)da=T(s). \tag{5}$$

From the Second Mean Value Theorem [2], we know that there is a parameter $\xi \in [0, s]$ such that

$$\begin{aligned}\int_0^s t(a) r_1'(a) da &= t(0) \int_0^\xi r_1'(a) da + t(s) \int_\xi^s r_1'(a) da \\ &= t(0)\big(r_1(\xi) - r_1(0)\big) + t(s)\big(r_1(s) - r_1(\xi)\big).\end{aligned}$$

By the same argument for some $\eta \in [0, s]$ we have

$$\int_0^s k(a) r_3'(a) da = k(0)\big(r_3(\eta) - r_3(0)\big) + k(s)\big(r_3(s) - r_3(\eta)\big).$$

Thus formula (5) takes the form

$$\begin{aligned}t(0)\big(r_1(\xi) - r_1(0)\big) &+ t(s)\big(r_1(s) - r_1(\xi)\big) \\ &+ k(0)\big(r_3(\eta) - r_3(0)\big) + k(s)\big(r_3(s) - r_3(\eta)\big) = T(s).\end{aligned} \tag{6}$$

Since the Frenet-Serret frame is orthonormal we have

$$|\boldsymbol{r}(s)|^2 = r_1^2(s) + r_2^2(s) + r_3^2(s) = |r(s)|^2.$$

Assume the Theorem is not true: the curve γ is bounded, i.e. $\sup_{s \geq 0} |\boldsymbol{r}(s)| < \infty$. Then due to conditions (2) the left-hand side of formula (6) is $o(T(s))$ as $s \to \infty$. This contradiction proves the theorem.

The Theorem is proved.

4.2. Proof of Theorem 2

Let $\boldsymbol{r}(s)$ be a radius-vector of the curve γ. Then one can write

$$\boldsymbol{r}(s) = \sum_{i=1}^4 r_i \boldsymbol{v}_i(s), \quad \boldsymbol{r}'(s) = \boldsymbol{v}_1(s).$$

Similarly as in the previous section, due to the Frenet-Serret equations this gives

$$r'(s) = A(s) r(s) + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\\r_4\end{pmatrix}.$$

First we multiply this equation by $r'^T(s) A^{-1}(s)$, $\quad (\det A = (\kappa_1 \kappa_3)^2)$:

$$r'^T(s) A^{-1}(s) r'(s) = r'^T(s) r(s) + r'^T(s) A^{-1}(s) \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Since A^{-1} is a skew-symmetric matrix we have $r'^T(s) A^{-1}(s) r'(s) = 0$, and some calculation yields

$$r'^T(s) A^{-1}(s) \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = r_2'(s) f_1(s) + r_4'(s) f_2(s).$$

Then formula (7) takes the form

$$-\frac{1}{2}\Big(|r(s)|^2\Big)' = r_2'(s)f_1(s) + r_4'(s)f_2(s).$$

Integrating this formula we obtain

$$-\frac{1}{2}\Big(|r(s)|^2 - |r(0)|^2\Big) = \int_0^s r_2'(a)f_1(a) + r_4'(a)f_2(a)da.$$

By the same argument which was employed to obtain formula (6), it follows that

$$-\frac{1}{2}\Big(|r(s)|^2-|r(0)|^2\Big) = f_1(0)\big(r_2(\xi)-r_2(0)\big)+f_1(s)\big(r_2(s)-r_2(\xi)\big)+f_2(0)\big(r_4(\eta)-r_4(0)\big)+f_2(s)\big(r_4(s)-r_4(\eta)\big), \tag{8}$$

here $\xi, \eta \in [0, s]$.

To proceed with the proof assume that the curve γ be unbounded: $\sup_{s\ge 0}|r(s)| = \infty$. Take a sequence s_k such that

$$|r(s_k)| = \max_{s\in[0,k]}|r(s)|, \quad k \in \mathbb{N}, \quad s_k \in [0, k].$$

It is easy to see that

$$s_k \to \infty, \quad |r(s)| \le |r(s_k)|, \quad s \in [0, s_k]$$

and $|r(s_k)| \to \infty$ as $k \to \infty$. Substitute this sequence to formula (8):

$$-\tfrac{1}{2}\Big(|r(s_k)|^2 - |r(0)|^2\Big) =$$

$$f_1(0)\big(r_2(\xi_k) - r_2(0)\big) + f_1(s_k)\big(r_2(s_k) - r_2(\xi_k)\big) + f_2(0)\big(r_4(\eta_k) - r_4(0)\big) + f_2(s_k)\big(r_4(s_k) - r_4(\eta_k)\big), \tag{9}$$

here $\xi_k, \eta_k \in [0, s_k]$ and thus $|r_2(\xi_k)| \le |r(s_k)|, \quad |r_4(\eta_k)| \le |r(s_k)|$.

Due to conditions of the Theorem and the choice of the sequence s_k the right-hand side of formula (9) is $O(|r(s_k)|)$ as $k \to \infty$. But the left-hand one is of order $-|r(s_k)|^2/2$. This gives a contradiction.

The Theorem is proved.

References

[1] Alexander S., Bishop R., and Ghrist R. Total curvature and simple pursuit on domains of curvature bounded above // Geometriae Dedicata. - 147. - 2010. - p. 275-290.

[2] Courant R. Differential and Integral Calculus. - Vol. 1. - John Wiley and Sons, 1988.

[3] Frenchel W. On the differential geometry of closed space curves // Bull. Amer. Math. Soc. - 57. - 1951, - p. 44-54.

[4] Gifford P.W. Some refinements in theory of specialized space curves // Amer. Math. Monthly. - 60. - 1953. - p. 384-393.

[5] Yung-Chow Wong, Hon-Fei Lai. A Critical Examination of the Theory of Curves in Three Dimensional Differential Geometry // Tohoku Math. Journ. - Vol. 19. - No. 1. - 1967.

Зубелевич Олег Эдуардович,
профессор кафедры теоретической
механики и мехатроники
механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова,
доктор физ.-мат. наук.

E-mail: ozubel@yandex.ru

Неравенство Ки Фана могло быть открыто существенно раньше

С. И. Калинин

Работа посвящается рассмотрению доказательства весового неравенства Ки Фана методом, который представлен в хорошо известной математикам монографии Харди, Литтльвуда, Пойа о неравенствах от 1934 г.

Напомним читателю, что *неравенством Ки Фана* называется неравенство

$$\frac{G_n}{G'_n} \leq \frac{A_n}{A'_n}, \tag{$*$}$$

где $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ и $A_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ есть классические средние геометрическое и арифметическое чисел $a_1, \ldots, a_n$ из промежутка $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ соответственно, а G'_n и A'_n — аналогичные средние чисел $1-a_1, \ldots,\ 1-a_n$. Равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = \cdots = a_n$.

Неравенство $(*)$ впервые было опубликовано в 1961 году в монографии [1]. В издании [2] цитируемой книги на русском языке авторы на с. 14 на него ссылаются как на «неопубликованное неравенство Фань Цзы, которое может быть доказано индукцией вверх и вниз».

Неравенство $(*)$ специалистами часто называется *простым* неравенством Ки Фана, поскольку существует его обобщение — так называемое обобщенное, или весовое неравенство Ки Фана. Приведем его.

Пусть снова $a_1, \ldots, a_n$ суть числа из промежутка $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ и $p_1, \ldots,\ p_n$ — положительные числа, именуемые *весами*, для которых выполняется условие $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Образуем весовые средние: геометрическое $\tilde{G}_n = a_1^{p_1} \cdot \cdots \cdot a_n^{p_n}$, арифметическое $\tilde{A}_n = p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n$ и аналогичные средние $\tilde{G}'_n$, $\tilde{A}'_n$ чисел $1-a_1, \ldots,\ 1-a_n$ с тем же набором весов. *Обобщенное* (*весовое*) неравенство Ки Фана есть неравенство

$$\frac{\tilde{G}_n}{\tilde{G}'_n} \leq \frac{\tilde{A}_n}{\tilde{A}'_n}, \tag{$**$}$$

Равенство в этом неравенстве опять же достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = \cdots = a_n$.

Очевидно, при равенстве весов неравенство $(**)$ влечет неравенство $(*)$.

Неравенство $(**)$ впервые было приведено в работе [3] от 1990 года (в цитируемой статье в отношении его доказательства приводится ссылка на работу [4], еще находившуюся в печати).

Мы преднамеренно внимание читателя акцентируем на хронологии появления неравенств $(*)$ и $(**)$ в научной печати, поскольку хотим показать, что в связи с выходом в свет в 1934 г. фундаментальной монографии [5] (на русский язык данная книга была переведена в 1948 г. [6]) исследователи получили возможность открытия рассматриваемых неравенств существенно раньше — монография содержит утверждения, позволяющие легко обосновать неравенства Ки Фана. Реализуем обозначенную цель.

Пусть $f : l \to \mathbb{R}$ — непрерывная и строго монотонная функция, где l — некоторый промежуток числовой прямой Ox. Пусть, далее, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — произвольный набор чисел из промежутка l, $p = (p_1, \ldots,\ p_n)$ — набор весов (положительных чисел), удовлетворяющий условию $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Введем в рассмотрение величину

$$M_f(a,p) \stackrel{def}{=} f^{-1}\left(p_1 f(a_1) + \cdots + p_n f(a_n)\right). \tag{1}$$

Так как $A_f = p_1 f(a_1) + \cdots + p_n f(a_n)$ есть взвешенное среднее арифметическое значений $f(a_1), \ldots,$ $f(a_n)$, то $A_f \in f(l)$. Последнее включение можно уточнить: $A_f \in \left[\min\limits_{1\leq k\leq n}\{f(a_k)\}; \max\limits_{1\leq k\leq n}\{f(a_k)\}\right]$. Отсюда в силу непрерывности и строгой монотонности функции f заключаем, что

$$M_f(a,p) \in \left[\min_{1\leq k\leq n}\{a_k\}; \max_{1\leq k\leq n}\{a_k\}\right],$$

то есть (1) определяет некоторое среднее чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Условимся $M_f(a,p)$ называть *средним* чисел $a_1, \ldots, a_n$ с весами $p_1, \ldots,\ p_n$, *порождаемым функцией* f.

Средние вида (1) впервые были введены в цитируемой выше монографии [5] (см. [6, гл. III]), такие средние авторы назвали средними с произвольной функцией. Не умаляя значимости великой работы по тематике неравенств, мы условимся пользоваться предложенными нами обозначениями и терминологией, поскольку они отвечают современному стилю оформления различными авторами исследований о неравенствах.

Установим одну теорему, нужную нам для реализации своих целей. Упоминаемая теорема содержится в утверждениях 85 и 92 книги [6].

Теорема A. *Пусть f и g — непрерывные и строго монотонные на промежутке l числовой прямой Ox функции. Пусть, далее, $M_f(a,p)$ и $M_g(a,p)$ — средние чисел кортежа $a = (a_1, \ldots, a_n) \subset l$ с весами $p = (p_1, \ldots,\ p_n)$, $p_1 + \cdots + p_n = 1$, порождаемыми функциями f и g соответственно. Если выполняется одно из условий*

1) функция g строго возрастает на l, а функция $g \circ f^{-1}$ является строго выпуклой на множестве $f(l)$;

2) функция g — строго убывающая на промежутке l, а функция $g \circ f^{-1}$ — строго вогнутая на множестве $f(l)$,
то

$$M_f(a,p) \le M_g(a,p), \tag{2}$$

при этом равенство в данном соотношении достигается лишь тогда, когда $a_1 = \cdots = a_n$.

Доказательство. Пусть выполняется условие 1). Тогда неравенство (2) равносильно неравенству

$$g\left(f^{-1}\left(p_1 f(a_1) + \cdots + p_n f(a_n)\right)\right) \le p_1 g(a_1) + \cdots + p_n g(a_n).$$

Но последнее неравенство справедливо в силу неравенства Иенсена для выпуклой функции $g \circ f^{-1}$:

$$\begin{aligned} g\left(f^{-1}\left(p_1 f(a_1) + \cdots + p_n f(a_n)\right)\right) &= \left(g \circ f^{-1}\right)\left(p_1 f(a_1) + \cdots + p_n f(a_n)\right) \le \\ &\le p_1\left(g \circ f^{-1}\right)\left(f(a_1)\right) + \cdots + p_n\left(g \circ f^{-1}\right)\left(f(a_n)\right) = p_1 g(a_1) + \cdots + p_n g(a_n). \end{aligned}$$

Поскольку равенство в произведенной оценке достигается только при условии $a_1 = \cdots = a_n$, то в рассматриваемом случае неравенство (2) полностью обосновано.

Пусть теперь выполняется условие 2). Тогда (2) равносильно неравенству

$$g\left(f^{-1}\left(p_1 f(a_1) + \cdots + p_n f(a_n)\right)\right) \ge p_1 g(a_1) + \cdots + p_n g(a_n),$$

которое справедливо в силу вогнутости функции $g \circ f^{-1}$:

$$\begin{aligned} g\left(f^{-1}\left(p_1 f(a_1) + \cdots + p_n f(a_n)\right)\right) &= \left(g \circ f^{-1}\right)\left(p_1 f(a_1) + \cdots + p_n f(a_n)\right) \ge \\ &\ge p_1\left(g \circ f^{-1}\right)\left(f(a_1)\right) + \cdots + p_n\left(g \circ f^{-1}\right)\left(f(a_n)\right) = p_1 g(a_1) + \cdots + p_n g(a_n). \end{aligned}$$

В последней оценке равенство снова достигается только, если $a_1 = \cdots = a_n$.

Таким образом, и в условиях 2) соотношение (2) обосновано. Теорема доказана.

Используя теорему A, докажем неравенство (**). С этой целью введем в рассмотрение функции $f(x) = \ln\frac{1-x}{x}$, $g(x) = x$, $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. Легко видеть, что g — возрастающая на промежутке $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ функция. Так как $f'(x) = -\frac{1}{x(1-x)}$, то функция f, наоборот, является убывающей на данном промежутке.

Далее, нетрудно убедиться в том, что функцией, обратной f, будет являться функция $f^{-1}(y) = \frac{1}{e^y+1}$, $y \in [0; +\infty)$. Следовательно, для композиции $g \circ f^{-1}$ имеем представление: $(g \circ f^{-1})(y) = \frac{1}{e^y+1}$, $y \in [0; +\infty)$.

Поскольку $\left(g \circ f^{-1}\right)''(y) = \frac{e^y(e^y-1)}{(e^y+1)^3} > 0$ при $y > 0$, то $g \circ f^{-1}$ — строго выпуклая на промежутке $[0; +\infty)$ функция.

Образуем теперь средние $M_f(a,p)$ и $M_g(a,p)$, порождаемые введенными функциями, где $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — кортеж произвольных чисел из промежутка $(0; \frac{1}{2}]$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_1 + \cdots + p_n = 1$, — кортеж весов. Будем иметь

$$M_f(a,p) = \frac{1}{e^{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k \ln \frac{1-a_k}{a_k}} + 1}, \quad M_g(a,p) = \sum_{k=1}^{n} p_k a_k. \tag{3}$$

Для введенных функций выполняется условие 1) теоремы А, значит, для средних (3) будет выполняться соотношение (2), равенство в котором может достигаться только при условии $a_1 = \cdots = a_n$. Распишем данное соотношение подробно:

$$\frac{1}{e^{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k \ln \frac{1-a_k}{a_k}} + 1} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k a_k, \quad \text{или} \quad \frac{1}{e^{\ln \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1-a_k}{a_k}\right)^{p_k}} + 1} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k a_k.$$

Легко видеть, что последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k} \leq \frac{\tilde{G}'_n}{\tilde{G}_n} + 1,$$

или $\frac{1 - \sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k} \leq \frac{\tilde{G}'_n}{\tilde{G}_n}$. Так как $1 - \sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k - \sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k (1 - a_k)$, то отсюда получаем неравенство $\frac{\tilde{A}'_n}{\tilde{A}_n} \leq \frac{\tilde{G}'_n}{\tilde{G}_n}$, эквивалентное $(**)$. Требуемое доказано.

Итак, мы доказали обобщенное неравенство Ки Фана $(**)$, опираясь на теорему А, то есть методом весьма давней работы [5]. Еще раз подчеркнем, что данная работа интересующимся тематикой неравенств известна с 1934 г., это была первая монография по теории неравенств с систематическим изложением предмета. Нам представляется, что наличие книг [5]–[6] потенциально позволяло исследователю обнаружить неравенства Ки Фана (как своеобразные аналоги простого и обобщенного неравенств Коши) до 60-ых гг. прошлого столетия. Именно этим обстоятельством и обусловлено название настоящей заметки.

Литература

1. Beckenbach E.F., Bellman R. Inequalities. — Berlin: Springer, 1961.

2. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965. — 276 с.

3. Alzer H. On weighted arithmetic, geometric and harmonic mean values // Glasnik matematicki. — 1990. — Vol. 25 (45). — 279–285.

4. Alzer H., Ando T. and Nakamura Y. The inequalities of W. Sierpinski and Ky Fan // J. Math. Anal. Appl. — 1990. — 149. — P. 497–512.

5. Hardy G. H., Littlwood J. E., Polya G. Inequalities. — Oxford, 1934.

6. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: ГИИЛ, 1948. — 456 с.

Калинин Сергей Иванович,
профессор кафедры фундаментальной
и компьютерной математики
Вятского государственного университета,
доктор педагогических наук.

E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Аксиоматический метод в курсе математической логики в вузе: от Эвклида до Гёделя

И. В. Сухан, Г. Г. Кравченко, О. В. Иванисова

В статье дан краткий исторический обзор развития математической логики, а также приведено изложение некоторых важных результатов современной логики, в частности, теорем Гёделя.

Дисциплина «Математическая логика» входит в учебные планы ряда направлений подготовки бакалавров и специалистов, например, по специальностям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Фундаментальная математика и механика», и обычно включает раздел, посвященный аксиоматическому методу (неформальным и формальным аксиоматическим теориям).

Изучение аксиоматического метода способствует формированию системных знаний обучающихся, целостному представлению об окружающей действительности и становлению научного мировоззрения. Аксиоматический метод формирует умение проводить логические рассуждения и доказывать утверждения на основе данных предложений, что способствует развитию логического мышления, а также позволяет строить математические модели с определенными свойствами и моделировать реальные ситуации, что развивает творческие умения и познавательную самостоятельность учащихся, повышая их интерес к обучению.

Рассматривая развитие аксиоматического метода, целесообразно начать с вопроса, почему он был разработан. Знакомство с историей культуры, историей идей способствует эстетическому развитию учащихся, прививает им умение ценить интеллектуальные достижения человечества, способствует пониманию значения аксиоматического метода.

1. История аксиоматического метода

Понятие аксиоматической теории берет начало от метода, использованного Евклидом при изложении классической геометрии греков. Поэтому изложение аксиоматического метода в курсе математической логики принято начинать с истории его возникновения и развития.

Говоря об истории становления аксиоматического метода, недостаточно привести рассказ о безуспешных попытках доказать пятый постулат Евклидовой геометрии и, в связи с этим, сформулировать отрицание пятого постулата и упомянуть о неевклидовой геометрии. По нашему мнению, стоит подробнее показать причины желания доказать пятый постулат, а также рассказать о нелегком становлении неевклидовой геометрии.

«Начала» Евклида построены следующим образом. Сначала даются определения некоторых **первичных терминов**, таких как **точка**, **прямая** и **плоскость**. Затем описываются различные свойства этих первичных терминов [1].

Некоторые из этих описаний Евклид называл **аксиомами**, а некоторые — **постулатами**.

Аксиомами Евклид называл описания, в основном относящиеся к любым (не только геометрическим) объектам.

Постулатами Евклид называл описания, относящиеся только к геометрическим объектам.

Списки аксиом Евклида в разных сохранившихся старинных копиях «Начал» отличаются друг от друга. Самым распространенным является следующий список аксиом.

1. Равные одному и тому же равны и между собой.
2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.
4. И если к неравным прибавляются равные, то и целые не будут равны.
5. И удвоенные одного и того же равны между собой.

6. И половины одного и того же равны между собой.
7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.
8. И целое больше части.
9. И две прямые не содержат пространства.

Постулатов у Евклида пять.

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние односторонние углы, в сумме меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы в сумме меньше двух прямых.

Так как геометрия Евклида являлась описанием реального физического пространства, то естественно, что Евклид полагал значение первичных терминов достаточно ясным, а относящиеся к ним аксиомы и постулаты считал очевидными истинами.

Далее с помощью первичных терминов определялись некоторые другие понятия, а из аксиом и постулатов выводились логическим путем описания новых свойств, называемые **теоремами**.

Пятый постулат не является таким простым и очевидным, как другие постулаты и аксиомы Евклида, и потому в течение двух тысячелетий не прекращались попытки вывести его как теорему из остальных аксиом и постулатов [2].

Наверное, поэтому первые 28 теорем «Начал» Евклида доказываются без использования пятого постулата и составляют так называемую «абсолютную геометрию». При этом теоремы № 27 и № 28 посвящены параллельным прямым.

Современная формулировка теоремы № 28 выглядит так: «Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна двум прямым, то эти две прямые параллельны».

Теорема, обратная теореме № 28, формулируется так: «Если две прямые параллельны, то сумма внутренних односторонних углов равна двум прямым» и является утверждением, эквивалентным пятому постулату.

Видимо, это и было основной причиной стремления доказать её как теорему «абсолютной геометрии» (обычно, доказав теорему, математик всегда исследует обратную). Если бы это удалось, то пятый постулат можно было бы исключить из списка аксиом!

Однако все попытки доказать или опровергнуть обратную теорему окончились неудачей.

Далее последовали попытки заменить пятый постулат эквивалентным утверждением, таким же «очевидным», как и другие постулаты Евклида.

Было найдено достаточно много эквивалентных формулировок пятого постулата. Наиболее известны формулировки, приписываемые Плейферу и Лежандру.

Формулировка Плейфера: «Через точку C, не лежащую на прямой AB в плоскости ABC, можно провести только одну прямую, не пересекающую прямую AB».

Формулировка Лежандра: «Перпендикуляр и наклонная к общей секущей, расположенные в одной плоскости, обязательно пересекутся».

Но поскольку все эти формулировки были эквивалентны теореме, обратной теореме № 28 «абсолютной геометрии», проблема пятого постулата осталась нерешенной.

Глубокое исследование пятого постулата, основанное на совершенно оригинальном принципе, провёл в 1733 году итальянский математик Джироламо Саккери. Он опубликовал труд под названием «Евклид, очищенный от всех пятен, или же геометрическая попытка установить самые первые начала всей геометрии».

Идея Саккери состояла в том, чтобы заменить пятый постулат противоположным утверждением, вывести из новой системы аксиом как можно больше следствий, тем самым построив «ложную геометрию», и найти в этой геометрии противоречия или заведомо неприемлемые положения. Тогда справедливость пятого постулата будет доказана от противного.

Допустив ошибку в рассуждениях, Саккери пришел к противоречию, и считая, что доказал пятый постулат, закончил исследование. Фактически же Саккери доказал несколько десятков теорем неевклидовой геометрии.

К сожалению, пионерская работа Саккери, изданная посмертно, не обратила на себя того внимания математиков, которого заслуживала, и только спустя 150 лет (1889) его соотечественник Бельтрами обнаружил этот забытый труд и оценил его историческое значение.

2. Неевклидова геометрия

В первой половине XIX века по пути, проложенному Саккери, пошли К.Ф. Гаусс, Я. Бойяи, Н.И. Лобачевский и Ф.К. Швайкарт. Но цель у них была уже иная — не разоблачить неевклидову геометрию как невозможную, а наоборот, построить альтернативную геометрию и выяснить её возможную роль в реальном мире. На тот момент это была совершенно еретическая идея, так как никто из учёных ранее не сомневался, что физическое пространство евклидово.

В 1818 году Швайкарт отправил Гауссу письмо с серьёзным анализом основ неевклидовой геометрии, однако воздержался от вынесения своих взглядов на публичное обсуждение.

Гаусс тоже не решился опубликовать работу на эту тему, но его черновые заметки и несколько писем однозначно подтверждают глубокое понимание неевклидовой геометрии.

Лобачевский и Бойяи проявили бóльшую смелость, чем Гаусс, и почти одновременно (Лобачевский — в докладе 1826 года и публикации 1829 года; Бойяи — в письме 1831 года и публикации 1832 года), независимо друг от друга опубликовали изложение того, что сейчас называется геометрией Лобачевского.

Лобачевский продвинулся в исследовании новой геометрии дальше всех, и она в настоящий момент носит его имя. Но главная его заслуга не в этом, а в том, что он поверил в новую геометрию и имел мужество отстаивать своё убеждение (он даже предложил экспериментально проверить пятый постулат, измерив сумму углов треугольника).

Трагическая судьба Лобачевского, подвергнутого жесткой критике в научном мире и служебном окружении за слишком смелые мысли, показала, что опасения Гаусса были не напрасны.

По иронии судьбы торжество смелых идей Лобачевского обеспечил (посмертно) осторожный Гаусс. В 1860-е годы была опубликована переписка Гаусса, в том числе несколько восторженных отзывов о геометрии Лобачевского, и это привлекло внимание к трудам русского математика.

В 1868 году вышла статья Э. Бельтрами, который показал, что плоскость Лобачевского имеет постоянную отрицательную кривизну (у евклидовой плоскости кривизна нулевая, у сферы — положительная), и неевклидова геометрия приобрела легальный научный статус, хотя всё ещё рассматривалась как чисто умозрительная.

Истинность этой новой геометрии вначале казалась сомнительной. Однако геометрия Лобачевского, как и геометрия Евклида, рассматриваемая как дедуктивная система, оказалась непротиворечивой — в ней не было обнаружено противоречивых утверждений.

Измерения, проводимые в доступной части физического пространства, не смогли выявить заметных расхождений между прогнозами, исходящими из геометрии Лобачевского и геометрии Евклида.

Далее были построены различные модели геометрии Лобачевского средствами геометрии Евклида.

Например, в 1871 году Феликс Клейн предложил модель, в которой плоскость интерпретировалась как внутренность некоторого круга евклидовой плоскости; точка интерпретировалась как евклидова точка внутри этого круга; прямая интерпретировалась как хорда этого круга без концов.

Из этой интерпретации следует относительная непротиворечивость геометрии Лобачевского, т. е. если геометрия Евклида представляет собой непротиворечивую систему, то геометрия Лобачевского также является непротиворечивой системой.

3. Аксиоматические теории

Быстрое развитие математической логики в начале XX века связано с кризисом в основаниях математики. Причиной этого кризиса стало открытие парадоксов в теории множеств.

Для систематического (последовательного) изложения математики (как и любой другой науки) необходимо выбрать начальные (исходные) понятия и принципы, которые будут положены в основу всего изложения.

При систематизации математики в конце XIX века было установлено, что в качестве единственного изначального понятия можно использовать **понятие множества**.

Б. Больцано, Р. Дедекинд, Г. Кантор и другие математики создали новую математическую дисциплину — **теорию множеств**, которая привлекла внимание многих ведущих математиков того времени перспективами использования в основаниях математики. Была проделана большая работа по теоретико-множественному обоснованию математических и логических понятий.

Появление парадоксов в теории множеств привлекло к вопросам оснований математики внимание практически всех ведущих математиков начала XX века. Была проделана большая работа по теоретико-множественному обоснованию математических и логических понятий. Основным итогом этой деятельности является становление математической логики как самостоятельной математической дисциплины, а принципиальным достижением математической логики — разработка **современного аксиоматического метода.**

Открытие неевклидовой геометрии, а также построение различных моделей геометрии Лобачевского средствами геометрии Евклида означало отказ от обязательного приписывания какого-либо физического смысла таким исходным понятиям, как точка, прямая, плоскость и позволяло приписывать различные значения первичным терминам аксиоматической теории.

Отношение к аксиомам также претерпело решительные изменения.

Эволюция взглядов на природу аксиоматического метода привела к следующей концепции аксиоматической теории.

Современный аксиоматический метод содержит следующую концепцию аксиоматической теории, см. [3, 4]:

Выбирается **несколько первоначальных понятий**, которые не определяются и используются без объяснения их смысла. Все другие понятия, которые будут использоваться, должны быть определены через первоначальные понятия и через понятия, смысл которых был определен ранее.

Затем выбирается **несколько утверждений (высказываний, формул)** о первоначальных и определяемых понятиях, эти утверждения объявляются **истинными** и называются **аксиомами теории**.

После этого, пользуясь правилами логического умозаключения, выводят новые утверждения о первоначальных и определяемых понятиях, которые называются **теоремами**.

Доказательством называется конечная последовательность высказываний (формул) теории $w_1, w_2, \ldots, w_k$, каждое из которых либо является аксиомой, либо выводится из одного или нескольких предыдущих высказываний (формул) этой последовательности по правилам вывода.

Теоремой называется высказывание (формула), являющееся последним в доказательстве.

Замечание. Любая аксиома является теоремой — доказательство состоит из одного шага.

Аксиоматической теорией называют систему из двух множеств высказываний (формул) T и W, таких, что $T \subset W$. Множество W состоит из всех высказываний (формул) данной теории, множество T состоит из доказуемых высказываний (формул) данной теории, называемых **теоремами**, выводимых из заданного множества высказываний (формул) $T_0 \subset W$, называемых **аксиомами**.

Таким образом, $T_0 \subset T \subset W$.

Основными свойствами аксиоматических теорий являются **непротиворечивость** и **полнота**.

Непротиворечивость теории означает невозможность вывода в данной теории некоторой формулы и ее отрицания.

Полнота теории означает возможность вывода для любой формулы либо самой этой формулы, либо ее отрицания.

В математической логике рассматривают **неформальные** и **формальные** аксиоматические теории.

Неформальные аксиоматические теории служат для построения содержательных математических теорий (геометрия, арифметика, теория вероятностей, теоретическая механика и т.п.). Правила вывода в неформальную аксиоматическую теорию не включаются — используется какая-либо известная система логических правил вывода.

Обычно в неформальных аксиоматических теориях используется формальная классическая логика Аристотеля. В принципе, можно использовать и другую систему логики, например, **конструктивную**, в которой, в отличие от классической, считают неприемлемым применение закона исключенного третьего к бесконечным множествам.

Формальные аксиоматические теории возникают, когда предметом изучения является некоторая математическая теория. Правила вывода включаются в формальную аксиоматическую теорию.

Таким образом, в неформальных аксиоматических теориях изучаются формальные объекты (числа, точки, прямые, множества и т.п.), однако при применении логических правил вывода рассуждают содержательно, а не формально. Например, считается известным и понятным смысл слов: «утверждение A противоречит утверждению B» или «из утверждения A следует утверждение B».

В формальных аксиоматических теориях делается следующий шаг, состоящий в формализации процессов построения умозаключений (логических следствий).

4. Неформальные аксиоматические теории

При построении неформальной аксиоматической теории обычно исходят из некоторой достаточно развитой интуитивной теории и предполагают известной систему формальной классической логики. В качестве примеров можно привести такие теории, как арифметика, геометрия, механика, теория вероятностей.

После того, как интуитивная теория развита настолько, что ее основные свойства считаются известными, можно попытаться ее аксиоматизировать.

Первым шагом в построении неформальной аксиоматической теории является составление перечня объектов данной теории S_0 и выбор символов для их обозначения. Эти символы называются **первичными терминами** или **первичными символами**.

Вторым шагом в построении неформальной аксиоматической теории является составление перечня основных свойств T_0 отобранных объектов, т. е. высказываний об основных объектах, и запись их при помощи первичных символов. Эти свойства называются **аксиомами**.

Упорядоченная пара множеств $\langle S_0,\ T_0\rangle$ называется **формулировкой аксиоматической теории**.

Далее, следуя принятой системе логики, выводят из аксиом теоремы, т. е. строят множество T. Очевидно, что принадлежность определенной формулы множеству T связана с тем, на какой системе логики основывается данная теория.

Первичные термины неформальных аксиоматических теорий не определяются, перечисляются только их свойства в виде аксиом.

Обычно при построении неформальных аксиоматических теорий в качестве первичных терминов берутся некоторые множества. Это означает, что при построении таких неформальных аксиоматических теорий предусматривается некоторая аксиоматизация теории множеств, позволяющая затем определять эти теории посредством теоретико-множественных предикатов.

При построении неформальной аксиоматической теории предполагается, что значения (смысл) первичных символов определяются соответствующей интуитивной теорией. Однако, после того, как теория построена, входящие в нее первичные термины могут быть наделены новым смыслом, т. е. им могут быть приписаны другие значения.

Интерпретацией неформальной аксиоматической теории называется приписывание значений (смысла) первичным терминам теории.

Моделью неформальной аксиоматической теории называется совокупность объектов, выбранных в качестве ее интерпретации, удовлетворяющих аксиомам теории.

5. Пример неформальной аксиоматической теории

Первичные термины: непустое множество G, бинарная операция $\times$, элемент $e \in G$, т. е. $S_0 = \{G,\ \times,\ e \in G)\}$.

Аксиомы:

G1. $\forall a \in G,\ \forall b \in G$: $\exists!\ a \times b \in G$.

G2. $\forall a \in G,\ \forall b \in G,\ \forall c \in G$: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

G3. $\forall a \in G$: $a \times e = e \times a = a$.

G4. $\forall a \in G,\ \exists a' \in G$: $a \times a' = a' \times a = e$. То есть $T_0 = \{G1,\ G2,\ G3,\ G4\}$

Эта неформальная аксиоматическая теория называется **теорией групп**.

Примеры моделей теории групп:

• множество целых чисел с операцией сложения и числом 0 в качестве e;

• множество $R^+ = (0;\ +\infty)$ с операцией умножения и числом 1 в качестве e;

• множество всех подмножеств любого непустого множества с операцией симметрической разности и множеством $\emptyset$ в качестве e.

Неформальная аксиоматическая теория называется **непротиворечивой**, если она не содержит такого высказывания A, что A и $\neg A$ являются теоремами.

Неформальная аксиоматическая теория называется **противоречивой**, если она содержит такое высказывание A, что A и $\neg A$ являются теоремами.

Противоречивые теории не имеют смысла, так как если в используемую систему логики входит правило отделения: $A,\ A \to B \mid = B$, то можно доказать, что любая формула такой теории является теоремой.

Действительно, пусть C — любое высказывание противоречивой теории, содержащей теоремы A и $\neg A$. Используя тавтологию $A \to (\neg A \to C)$ получаем: $A,\ A \to (\neg A \to C)| = \neg A \to C$, далее получаем: $\neg A,\ \neg A \to C| = C$.

Для неформальных аксиоматических теорий вопрос о непротиворечивости может быть решен с помощью модели. Если теория противоречива, то любая ее модель содержит противоречие, так как пара противоречащих теорем переводится в два противоречащих высказывания о модели.

Если для неформальной аксиоматической теории можно найти такую интерпретацию, что T является конечным множеством, то отсутствие противоречивости можно проверить непосредственно.

Например, теория групп непротиворечива, так как ее моделью служит одноэлементное множество $\{e\}$ с операцией $e \times e = e$.

Если теория имеет только бесконечные модели, то установление непротиворечивости с помощью модели носит относительный характер, т. е. теория непротиворечива, если непротиворечива модель. Например, геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива геометрия Евклида.

Непротиворечивость геометрии Евклида, как и непротиворечивость практически всех классических математических теорий, сводится к непротиворечивости арифметики натуральных чисел.

Проблему полноты для неформальных аксиоматических теорий не рассматривают, так как ответ на вопрос о том, является ли некоторая формула неформальной аксиоматической теории теоремой или нет, может зависеть от выбора системы логических правил вывода.

6. Формальные аксиоматические теории

При изложении содержательных математических теорий широко используются символы, которые заменяют некоторые математические объекты (точки, прямые, числа, вектора, матрицы, функции и т.п.).

В отличие от обычного употребления символов в математике, в формальных аксиоматических теориях символы не заменяют собой никаких других объектов. Символы в формальных аксиоматических теориях трактуются как значки, с которыми обращаются согласно определенным правилам, зависящим лишь от формы выражений, образованных из символов.

Для построения формальной аксиоматической теории используется **формальный язык теории**.

Алфавитом $A(T)$ формальной аксиоматической теории называется непустое конечное множество символов, называемых **буквами**.

Словом или **выражением** в алфавите $A(T)$ называется любая конечная последовательность букв.

Формальным языком формальной аксиоматической теории называется пара $\langle A(T), E(T)\rangle$, где $E(T)$ множество слов алфавита $A(T)$.

Формулами в формальной аксиоматической теории являются последовательности символов определенного вида, т. е. не всякое слово (выражение) является формулой данной формальной аксиоматической теории.

Из множества формул выделяется некоторое подмножество формул, называемых **аксиомами.**

Задается конечное множество отношений между формулами, называемых **правилами вывода**.

Выводом в формальной аксиоматической теории называется конечная последовательность формул этой теории $B_1, B_2, \ldots, B_n$, каждая из которых либо является аксиомой, либо выводится из одной или нескольких предыдущих формул этой последовательности по одному из правил вывода.

Формула Ф формальной аксиоматической теории называется **теоремой**, если существует вывод, последней формулой которого является Ф.

Замечание. Любая аксиома является теоремой — вывод состоит из одной формулы.

При построении формальных аксиоматических теорий используется понятие **эффективной процедуры** (или **эффективного алгоритма**).

Под эффективной процедурой понимается совокупность предписаний, позволяющая посредством формального выполнения этих предписаний за конечное число шагов получить ответ на любой вопрос из некоторого класса вопросов.

Для формальной аксиоматической теории должны выполняться следующие требования:

• понятие формулы должно быть эффективным, т. е. должна существовать эффективная процедура, позволяющая для произвольной строчки символов решить, является ли она формулой;

• понятие аксиомы должно быть эффективным, т. е. должна существовать эффективная процедура, позволяющая для произвольной формулы решить, является ли она аксиомой;

• понятие вывода должно быть эффективным, т. е. должна существовать эффективная процедура, позволяющая для произвольной конечной последовательности формул решить, может ли каждый член этой последовательности быть выведен из одной или нескольких предшествующих формул этой последовательности посредством правил вывода.

Формальные аксиоматические теории в математической логике принято называть **исчислениями**.

7. Пример формальной аксиоматической теории

Простым примером формальной аксиоматической теории является **исчисление высказываний**, которое можно определить следующим образом.

Алфавит исчисления высказываний содержит:

1. Символы: $\neg$, $\to$, (,).

2. Буквы и буквы с нижним индексом: A, B, C, ..., A_1, B_1, C_1, ...

Формулы исчисления высказываний определяются следующим образом:

1. $A, B, C, \ldots, A_1, B_1, C_1, \ldots$ — формулы.

2. Если A формула, то $\neg(A)$ — формула.

3. Если A и B формулы, то $(A) \to (B)$ — формула.

4. Строчка символов является формулой, только если она удовлетворяет условиям 1–3.

Аксиомы исчисления высказываний.

Для любых формул A, B и C следующие формулы являются аксиомами:

1. $(A \to (B \to A))$.

2. $\Big((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)\Big)$.

3. $\Big((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)\Big)$.

Правило вывода: из A и $A \to B$ следует B.

Доказано, что исчисление высказываний является полной и непротиворечивой формальной аксиоматической теорией.

Для формализации рассуждений, которые не могут быть обоснованы в рамках исчисления высказываний, в математической логике используют **исчисление предикатов.**

Язык исчисления предикатов содержит:

1. Конечное или счетное множество предметных постоянных $\{a_1 a_2, \ldots\}$.

2. Конечное или счетное множество предметных переменных $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

3. Конечное или счетное множество предикатных букв $A_1^1(x_1), A_2^1(x_1), \ldots,\ A_1^2(x_1, x_2), A_2^2(x_1, x_2), \ldots, A_j^k(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots.$

4. Конечное или счетное множество функциональных букв $f_1^1(x_1), f_2^1(x_1), \ldots, f_1^2(x_1, x_2), f_2^2(x_1, x_2), \ldots,\ f_j^k(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots.$

5. Логические связки $\neg$, $\to$, символ квантора $\forall$, скобки (,) и запятую.

Верхний индекс предикатной или функциональной буквы указывает число аргументов, а нижний индекс служит для различения букв с одним и тем же числом аргументов.

Аргументами функциональных букв и результатом их применения являются **термы**.

Термы определяются следующим образом:

1. Предметная переменная или предметная постоянная — **терм**.

2. Если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы, то $f_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — терм.

3. Строчка символов является термом, только если она удовлетворяет условиям 1 и 2.

Аргументами предикатных букв являются термы. Результатом применения предикатных букв являются **элементарные формулы**: если A_j^n — предикатная буква, а $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы, то $A_j^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — элементарная формула.

Формулы исчисления предикатов определяются следующим образом:

1. Любая элементарная формула — формула.

2. Если A формула, то $\neg(A)$ — формула.

3. Если A и B формулы, то $(A) \to (B)$ — формула.

4. Если A — формула, а x — предметная переменная, то $\forall x\ A$ — формула. При этом формула A называется **областью действия квантора** $\forall x$.

5. Строчка символов является формулой, только если она удовлетворяет условиям 1–4.

Вхождение переменной x в формулу называется **связанным**, если x является переменной входящего в эту формулу квантора $\forall x$ или находится в области действия входящего в эту формулу квантора $\forall x$, в противном случае вхождение переменной x в данную формулу называется **свободным**.

Переменная называется **свободной переменной в формуле**, если существуют свободные ее вхождения в эту формулу.

Переменная называется **связанной переменной в формуле**, если существуют связанные ее вхождения в эту формулу.

Таким образом, переменная может быть одновременно свободной и связанной в одной и той же формуле.

Терм t называется **свободным для переменной** x_i в формуле A, если никакое свободное вхождение x_i в A не лежит в области действия никакого квантора $\forall x_j$, где x_j — переменная, входящая в t.

Пример. Терм $f_1^2(x_1, x_3)$ свободен для x_1 в $\forall x_2 A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^1(x_1)$, но несвободен для x_1 в $\forall x_3 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^1(x_1)$.

Интерпретацией языка формальной аксиоматической теории называется соответствие, сопоставляющее каждому элементу языка теории единственный элемент некоторого множества D, называемого **областью интерпретации**.

При этом каждой предикатной букве A_j^n соответствует некоторое $n-$местное отношение в D, каждой функциональной букве f_j^n — некоторая n-местная операция в D (т. е. функция, отображающая D^n в D), каждой предметной постоянной a_i — некоторый элемент из D.

При интерпретации предметные переменные принимают значения из области D, логические связки и кванторы имеют обычный смысл.

При интерпретации всякая формула формальной аксиоматической теории без свободных переменных представляет собой высказывание, которое или истинно или ложно, а всякая формула со свободными переменными представляет некоторое отношение на области интерпретации, которое для одних значений истинно, а для других ложно.

Пример. Если в качестве области интерпретации взять множество целых положительных чисел, а формулу $A_1^2(x_1, x_2)$ интерпретировать как отношение $x_1 \leq x_2$, то $A_1^2(x_1, x_2)$ истинно для всех упорядоченных пар (a, b) целых положительных чисел таких, что $a \leq b$.

В этой интерпретации формула $\forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$ представляет собой свойство (т. е. отношение с одним аргументом) «для каждого целого положительного x_2: $x_1 \leq x_2$» которое выполняется только для числа 1, а формула $\exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$ является истинным высказыванием, утверждающим существование наименьшего целого положительного числа, т. е. 1.

Моделью формальной аксиоматической теории называется интерпретация языка формальной аксиоматической теории, в которой истинны все аксиомы теории.

Например, моделью исчисления высказываний является алгебра высказываний.

8. Формальные аксиоматические теории первого порядка

Для формализации математических теорий в математической логике используют **формальные аксиоматические теории первого порядка**, в которых не допускаются предикаты, имеющие аргументами предикаты и функции, а также не допускаются кванторы по предикатам и функциям.

Язык формальной аксиоматической теории первого порядка совпадает с языком исчисления предикатов. Термы и формулы теории первого порядка определяются так же, как и в исчислении предикатов.

Аксиомы теории первого порядка разбивают на два класса: **логические аксиомы** и **собственные (нелогические)** аксиомы.

Перечни логических аксиом и правил вывода теорий первого порядка — это дополненные соответствующие перечни исчисления высказываний.

Логические аксиомы теории первого порядка.

Для любых формул A, B и C следующие формулы являются аксиомами:

1. $(A \to (B \to A))$.

2. $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))))$.
3. $((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B))$.
4. $\forall x_i A(x_i) \to A(t)$, где t — терм, свободный для x_i в **формуле** $A(x_i)$.
5. $\forall x_i (A \to B) \to (A \to \forall x_i B)$, если формула A не содержит свободных вхождений x_i.

Собственные аксиомы не могут быть сформулированы в общем случае и меняются от теории к теории.

Правила вывода:

1. Из A и $A \to B$ следует B.
2. Из A следует $\forall x_i (A)$.

Теория первого порядка, не содержащая собственных аксиом, называется **исчислением предикатов первого порядка**.

Доказано, что исчисление предикатов первого порядка является полной и непротиворечивой теорией.

Моделью исчисления предикатов первого порядка является логика предикатов.

Пример теории первого порядка, содержащей собственные аксиомы.

Теория имеет одну предикатную букву $A_1^2(x_1, x_2)$, одну функциональную букву $f_1^2(x_1, x_2)$ и одну предметную константу a_1.

В соответствии с общепринятыми обозначениями будем писать $t = s$ вместо $A_1^2(x_1, x_2)$, $t + s$ вместо $f_1^2(x_1, x_2)$ и 0 вместо a_1.

Собственными аксиомами теории являются формулы:

1. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3)$.
2. $\forall x_1 (0 + x_1 = x_1)$.
3. $\forall x_1 \exists x_2 (x_2 + x_1 = 0)$.
4. $\forall x_1 (x_1 = x_1)$.
5. $\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 = x_2) \to (x_2 = x_1))$.
6. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_1 = x_2) \to ((x_2 = x_3) \to (x_1 = x_3)))$.
7. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_2 = x_3) \to ((x_1 + x_2 = x_1 + x_3) \land (x_2 + x_1 = x_3 + x_1)))$.

Всякая модель этой теории называется **группой**.

Если в группе истинна формула $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 + x_2 = x_2 + x_1)$, то группа называется **абелевой**, или **коммутативной**.

В качестве моделей теории групп, как теории первого порядка, можно взять, например, модели, приведенные для теории групп, как неформальной аксиоматической теории:

- множество целых чисел с операцией сложения и числом 0 в качестве 0;
- множество $R^+ = (0;\ +\infty)$ с операцией умножения и числом 1 в качестве 0;
- множество всех подмножеств любого непустого множества с операцией симметрической разности и множеством $\emptyset$ в качестве 0.

Метаматематика

Язык, на котором дается описание какой-либо формальной аксиоматической теории, называется **метаязыком**.

Соотношение между метаязыком и формальным (предметным) языком формальной аксиоматической теории примерно такое же, как соотношение между русским и французским языками с точки зрения человека, изучающего французский язык и владеющего русским языком. Все начальные сведения и пояснения в словарях и учебниках учащийся получает на русском языке (на метаязыке), впоследствии же он начинает писать и говорить по-французски (на предметном языке).

В качестве метаязыка можно использовать некоторый узкий фрагмент какого-либо национального языка, например, русского. Если разрешить использовать в качестве метаязыка весь национальный язык, то возникает опасность вывода парадоксов — например, парадокса Рассела.

Теоремы, описывающие какие-либо свойства формальной аксиоматической теории, называются **метатеоремами**.

Метатеоремы следует отличать от теорем соответствующей формальной аксиоматической теории. Теоремы формальной аксиоматической теории записываются на формальном языке формальной аксиоматической теории, а метатеоремы — на метаязыке.

Например, $A \to A$ — теорема исчисления высказываний, а «Исчисление высказываний непротиворечиво» — метатеорема.

Для доказательства метатеорем допускаются только бесспорные средства обычной логики, так например, должны быть исключены доказательство от противного, а также доказательства, апеллирующие к бесконечному множеству операций над формулами. Доказательства метатеорем существования должны быть конструктивными — для объекта, существование которого утверждается, должен быть указан метод его построения.

Изучение формальных аксиоматических теорий с использованием логических средств, соответствующих указанным ограничениям, называется **метаматематикой**.

Формальная арифметика

Первое, полуаксиоматическое, построение арифметики было предложено в 1901 году Дедекиндом и стало известно под названием «система аксиом Пеано».

Аксиомы этой системы формулируются следующим образом:

1. 0 есть натуральное число.

2. Для любого натурального числа x существует другое натуральное число, обозначаемое x' и называемое **следующее** за x.

3. $0 \neq x'$ для любого натурального числа x.

4. Если $x' = y'$, то $x = y$.

5. Если Q есть свойство, которым обладает натуральное число 0, и для всякого натурального числа x из того, что x обладает свойством Q, следует, что и натуральное число x' обладает свойством Q, то свойством Q обладают все натуральные числа.

Пятую аксиому принято называть **принципом индукции**.

Этих аксиом достаточно для построения не только арифметики натуральных чисел, но и для построения теорий рациональных, вещественных и комплексных чисел.

Однако эта система аксиом содержит такое интуитивное понятие, как «**свойство**», что не позволяет ей быть формальной аксиоматической теорией.

Для формализации теорий, подобных арифметике, в математической логике используют **формальные аксиоматические теории первого порядка с равенством**, см. [5].

Теория первого порядка называется **теорией первого порядка с равенством**, если она содержит предикатную букву $A_1^2(t,s)$, для которой следующие формулы являются аксиомами:

1. $\forall x_1\ A_1^2(x_1, x_1)$.

2. $A_1^2(x,y) \to (B(x,x) \to B(x,y))$, где $B(t,s)$ — произвольная формула.

Для сокращения вместо $A_1^2(t,s)$ пишут $t = s$ и тогда аксиомы принимают вид:

1. $\forall x_1\ (x_1 = x_1)$.

2. $(x = y) \to (B(x,x) \to B(x,y))$, где $B(t,s)$ — произвольная формула.

Для вывода всех основных результатов элементарной арифметики была построена теория первого порядка S.

Эта теория первого порядка с равенством имеет единственную предикатную букву $A_1^2(t,s)$, единственную предметную константу a_1 и три функциональные буквы $f_1^1(t),\ f_1^2(t,s),\ f_2^2(t,s)$.

Используя обозначения неформальной арифметики, пишут $t = s$ вместо $A_1^2(t,s)$, 0 вместо a_1 и t', $t + s, t \cdot s$ вместо $f_1^1(t),\ f_1^2(t,s),\ f_2^2(t,s)$ соответственно.

Теория S имеет следующие собственные аксиомы:

1. $(x_1 = x_2) \to ((x_1 = x_3) \to (x_2 = x_3))$.

2. $x_1 = x_2 \to x_1' = x_2'$.

3. $0 \neq x_1'$.
4. $x_1' = x_2' \to x_1 = x_2$.
5. $x_1 + 0 = x_1$.
6. $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$.
7. $x_1 \cdot 0 = 0$.
8. $x_1 \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 + x_1$.
9. $A(0) \to (\forall x(A(x) \to A(x')) \to \forall x A(x))$, где $A(x)$ — произвольная формула теории S.

Девятую аксиому принято называть принципом математической индукции.

Эта аксиома не соответствует пятой аксиоме системе аксиом Пеано, так как в системе аксиом Пеано интуитивно предполагается, что мощность множества свойств натуральных чисел — континуум, а в девятой аксиоме теории S может рассматриваться только счетное число свойств натуральных чисел, так как теория S — теория первого порядка, см. [5].

С помощью правила отделения из девятой аксиомы получается следующее **правило индукции**: из $A(0)$ и $\forall x(A(x) \to A(x'))$ выводится $\forall x A(x)$.

Рассмотрим интерпретацию теории S, в которой:

1. Областью служит множество всех неотрицательных чисел.
2. Целое число 0 интерпретирует символ a_1.
3. Операция взятия следующего (т. е. прибавление единицы) интерпретирует функциональную букву $f_1^1(t)$.
4. Сложение и умножение интерпретируют функциональные буквы $f_1^2(t,s)$, $f_2^2(t,s)$.
5. Отношение тождества интерпретирует предикатная буква $A_1^2(t,s)$.

Если считать истинность аксиом теории S в этой интерпретации интуитивно очевидной, то эта интерпретация является моделью теории S. Эта модель называется **стандартной моделью** теории S.

Термы $0; 0'; 0''; 0''';\ldots$ в теории S называют **цифрами** и обозначают соответственно $0; \overline{1}; \overline{2}; \overline{3};\ldots$, т. е. 0 с n штрихами обозначают $\overline{n}$.

В теории S можно ввести отношение порядка и понятие делимости. Далее можно показать, что теоремы, доказываемые в курсах элементарной теории чисел, можно перевести на язык теории S и построить вывод полученной теоремы.

Для сокращения утверждения: «A есть теорема теории S» применяют запись $| = A$.

9. Арифметические функции и арифметические отношения

Для изучения основных свойств теории S — непротиворечивости и полноты — используют арифметические функции и арифметические отношения, которые являются понятиями стандартной модели теории S, см. [5].

Арифметическими функциями называются функции, у которых область определения и множество значений состоит из натуральных чисел.

Арифметическими отношениями называются отношения, заданные на множестве натуральных чисел.

Например, умножение — арифметическая функция с двумя аргументами, а выражение $x + y < z$ является арифметическим отношением с тремя аргументами.

Арифметическое отношение $R(x_1,\ldots,x_n)$ называется **выразимым** в теории S, если существует формула $A(x_1,\ldots,x_n)$ теории S с n свободными переменными такая, что для любых натуральных чисел $k_1,\ldots,k_n$ выполняются условия: если $R(k_1,\ldots,k_n)$ истинно, то $| = A(\overline{k_1},\ldots,\overline{k_n})$ и если $R(k_1,\ldots,k_n)$ ложно, то $| = \neg A(\overline{k_1},\ldots,\overline{k_n}))$.

В теориях первого порядка с равенством выражения вида «существует один и только один x такой, что $A(x)$» символически можно записать так: $\exists x A(x) \wedge \forall x \forall y (A(x) \wedge A(y) \to x = y))$, для сокращения используют запись $\exists_1 x A(x)$.

Арифметическая функция $f(x_1, \ldots,\ x_n)$ называется **представимой** в теории S, если существует формула $A(x_1, \ldots, x_{n+1})$ теории S со свободными переменными $x_1, \ldots, x_{n+1}$ такая, что для любых натуральных чисел $k_1, \ldots, k_{n+1}$ выполняются условия:

1. Если $f(k_1, \ldots, k_n) = k_{n+1}$, то $| =\ A(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n},\ \overline{k_{n+1}})$.
2. $| =\ \exists_1 x_{n+1} A(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, x_{n+1}))$.

Арифметическая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется **сильно представимой** в теории S, если существует формула $A(x_1, \ldots, x_{n+1})$ теории S со свободными переменными $x_1, \ldots, x_{n+1}$такая, что для любых натуральных чисел $k_1, \ldots, k_{n+1}$ выполняются условия:

1. Если $f(k_1, \ldots, k_n) = k_{n+1}$, то $| = A(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, \overline{k_{n+1}})$.
2. $| = \exists_1 x_{n+1} A(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}))$.

Характеристической функцией отношения $R(x_1, \ldots, x_n)$ называется функция $C_R(x_1, \ldots, x_n)$, которая равна 1, если отношение $R(x_1, \ldots, x_n)$ истинно, и равна 0, если отношение $R(x_1, \ldots, x_n)$ ложно.

Теорема. *Если отношение $R(x_1, \ldots, x_n)$ выразимо в теории S, то характеристическая функция $C_R(x_1, \ldots, x_n)$ этого отношения сильно представима в теории S, а если характеристическая функция $C_R(x_1, \ldots, x_n)$ отношения $R(x_1, \ldots, x_n)$ представима в теории S, то в теории S выразимо отношение $R(x_1, \ldots, x_n)$.*

При изучении представимости арифметических функций в теории S в качестве простейших функций выбраны следующие функции:

1. Нуль-функция: $Z(x) =0$ при всех x.
2. Прибавление единицы: $N(x) = x+1$ при всех x.
3. Проектирующие функции: $U_i^n(x_1, \ldots,\ x_n)) = x_i$ при всех $x_1, \ldots, x_n$, $i = 1, \ldots, n$.

Для получения новых функций из простейших используют операции: суперпозиция функций, схема примитивной рекурсии и операция минимизации (μ-оператор).

Если $f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$, то говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ получена с помощью **операции суперпозиции** из функций $g(y_1, \ldots, y_m), h_1(x_1, \ldots, x_n),\ \ldots,$ $h_m(x_1, \ldots, x_n)$.

Если $f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$ и $f(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$ то говорят, что $(n{+}1)$-местная функция f получена с помощью **схемы примитивной рекурсии** из n-местной функции g и $(n + 2)$-местной функции h.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется **примитивно рекурсивной,** если она может быть получена из исходных функций с помощью конечного числа суперпозиций функций и схем примитивной рекурсии.

Обозначим через $\mu y[g_1(x_1, \ldots, x_n, y) = g_2(x_1, \ldots, x_n, y)]$ наименьшее значение y, при котором $g_1(x_1, \ldots, x_n, y) = g_2(x_1, \ldots, x_n, y)$.

Если $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[g_1(x_1, \ldots, x_n, y) = g_2(x_1, \ldots, x_n, y)]$, то говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ получена из функций $g_1(x_1, \ldots, x_n, y)$ и $g_2(x_1, \ldots, x_n, y)$ с помощью **операции минимизации (μ-оператора)**.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется **частично рекурсивной**, если она может быть получена из исходных функций с помощью конечного числа суперпозиций функций, схем примитивной рекурсии и операций минимизации.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется **общерекурсивной** или **рекурсивной**, если она частично рекурсивна и всюду определена.

Доказано, что класс рекурсивных функций совпадает с классом функций, представимых в теории S, см. [5].

Отношение $R(x_1, \ldots, x_n)$ называется **примитивно рекурсивным**, если примитивно рекурсивной является его характеристическая функция $C_R(x_1, \ldots, x_n)$.

Отношение $R(x_1, \ldots, x_n)$ называется **рекурсивным**, если рекурсивной является его характеристическая функция $C_R(x_1, \ldots, x_n)$.

В теориях первого порядка с равенством для сокращенной записи выражений вида «При всяком y, если $y < z$, то $R(x_1, \dots, x_n, y)$» используют запись $\forall y_{y<z} R(x_1, \dots, x_n, y)$. В аналогичном смысле употребляются выражения $\forall y_{y\leq z} R(x_1, \dots, x_n, y)$, $\exists y_{y<z} R(x_1, \dots, x_n, y)$, $\exists y_{y\leq z} R(x_1, \dots, x_n, y)$.

Выражения $\forall y_{y<z}$, $\forall y_{y\leq z}$, $\exists y_{y<z}$, $\exists y_{y\leq z}$ называются **ограниченными кванторами**.

Для отношений $R(x_1, \dots, x_n, y)$ **операция минимизации (μ-оператор)** определяется следующим образом: через $\mu y[R(x_1, \dots, x_n, y)]$ обозначают наименьшее значение y, при котором отношение $R(x_1, \dots, x_n, y)$ истинно.

Выражения $\mu y_{y<z}[R(x_1, \dots, x_n, y)]$ и $\mu y_{y\leq z}[R(x_1, \dots, x_n, y)]$ называются **ограниченными μ-операторами** и обозначают наименьшее значение $y < z$ (соответственно $y \leq z$), при котором отношение $R(x_1, \dots, x_n, y)$ истинно.

Теорема. *Отношения, которые можно получить из примитивно рекурсивных (рекурсивных) отношений с помощью логических связок и ограниченных кванторов, также примитивно рекурсивны (рекурсивны).*

Теорема. *Применение ограниченных $\mu-$операторов к примитивно рекурсивным (рекурсивным) отношениям приводит к примитивно рекурсивным (рекурсивным) отношениям.*

Теорема. *Всякая рекурсивная функция представима в теории S.*

Теорема. *Всякое рекурсивное отношение выразимо в теории S.*

10. Гёделева нумерация формул и выводов в формальной арифметике

В 1931 году Гёделем была предложена нумерация символов, выражений и конечных последовательностей теорий первого порядка с целью **арифметизации метаматематики**, т. е. с целью замены утверждений о формальной системе эквивалентными высказываниями о натуральных числах.

Каждому символу u произвольной теории первого порядка ставится в соответствие положительное число $g(u)$, называемое **гёделевым номером символа** u, следующим образом:

$$g(() = 3; g()) = 5; g(,) = 7;\ g(\neg) = 9;\ g(\rightarrow) = 11;$$
$$g(x_k) = 5 + 8k, \quad \text{где } k = 1, 2, \dots;$$
$$g(a_k) = 7 + 8k, \quad \text{где } k = 1, 2, \dots;$$
$$g(f_k^n) = 9 + 8(2^n \cdot 3^k)) \text{ для } k, n \geq\ 1;$$
$$g(A_k^n) = 11 + 8(2^n \cdot 3^k)) \text{ для } k, n \geq\ 1.$$

Таким образом, различным символам поставлены в соответствие различные гёделевы номера, являющиеся положительными нечетными числами.

Например, $g(x_2) = 5 + 8 \cdot 2 = 21$; $g(a_4) = 7 + 8 \cdot 4 = 39$; $g(f_1^2) = 9 + 8(2^2 \cdot 3^1)) = 105$; $g(A_2^1)) = 11 + 8(2^1 \cdot 3^2)) = 155$.

Гёделев номер выражения $u_0 u_1 \dots u_r$ определяется следующим образом: $g(u_0 u_1 \dots u_r) = 2^{g(u_0)} 3^{g(u_1)} \dots p_r^{g(u_r)}$, где p_i есть i-е простое число, при этом $p_0 = 2$.

Например,

$$g(A_1^2(x_1, x_2)) = 2^{g(A_1^2)} \cdot 3^{g(\,(\,)} \cdot 5^{g(x_1)} \cdot 7^{g(,)} \cdot 11^{g(x_2)} \cdot 13^{g(\,)\,)} =$$
$$= 2^{11+8\cdot(2^2\cdot3^1))} \cdot 3^3 \cdot 5^{5+8\cdot1} \cdot 7^7 \cdot 11^{5+8\cdot2} \cdot 13^5 = 2^{107} \cdot 3^3 \cdot 5^{13} \cdot 7^7 \cdot 11^{21} \cdot 13^5.$$

Так как любое натуральное число единственным образом разлагается в произведение степеней простых чисел, то различные выражения получат разные гёделевы номера.

Гёделевы номера выражений четны и поэтому отличаются от гёделевых номеров символов.

Если символ рассматривать как выражение, то он будет иметь гёделев номер, отличный от того, который ставится ему в соответствие как символу.

Гёделев номер последовательности выражений $e_0,\ e_1,\dots,e_r$ определяется следующим образом: $g(e_0, e_1, \dots,\ e_r) = 2^{g(e_0)}3^{g(e_1)}\dots\ p_r^{g(e_r)}$, где p_i есть $i-$е простое число, при этом p_0 =2.

Различные последовательности выражений имеют различные гёделевы номера, а так как они четны и имеют четный показатель степени при 2, то они отличны от гёделевых номеров символов выражений.

Таким образом, функция g взаимно однозначно отображает множество всех символов, выражений и конечных последовательностей выражений в множество целых положительных чисел.

Множество значений функции g не совпадает с множеством всех целых положительных чисел, например, число 12 не является гёделевым номером.

11. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики

В формулировке теоремы о неполноте формальной арифметики Гёдель использовал понятие ω-непротиворечивой теории первого порядка, что представляет собой более сильное условие, чем просто непротиворечивость.

Теория первого порядка называется **ω-непротиворечивой**, если для всякой формулы $A(x)$ этой теории из того, что при любом $n| = A(\overline{n})$, следует невозможность $| = \exists x \neg A(x)$, другими словами для всякой формулы $A(x)$ этой системы невозможно одновременно вывести формулы $A(0),\ A(\overline{1}),\ A(\overline{2}),\dots$ и $\exists x \neg A(x)$.

Доказано, что ω-непротиворечивая теория первого порядка является непротиворечивой, см. [5].

Если признать стандартную интерпретацию теории S в качестве модели этой теории, то тогда теорию S следует признать $\omega-$непротиворечивой.

Для доказательства неполноты формальной арифметики используется примитивно рекурсивное отношение $W_1(u, y)$ = «u есть гёделев номер формулы $A(x_1)$, содержащей свободную переменную x_1, и y есть гёделев номер вывода в S формулы $A(\overline{u})$)», см. [5].

Так как отношение $W_1(u, y)$ примитивно рекурсивно, то оно выразимо в теории S некоторой формулой $V_1(x_1, x_2)$ с двумя свободными переменными x_1, x_2. Значит, если $W_1(k_1, k_2)$ истинно, то $| = V_1(\overline{k_1}, \overline{k_2}))$, и если $W_1(k_1, k_2)$ ложно, то $| = \neg V_1(\overline{k_1}, \overline{k_2}))$.

Рассмотрим формулу $A(x_1) = \forall x_2 \neg V_1(x_1, x_2))$. Пусть m — гёделев номер этой формулы. Подставим в эту формулу $\overline{m}$ вместо x_1, получим замкнутую формулу: $A(\overline{m}) = \forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2))$.

Из определения $W_1(u, y)$ следует, что $W_1(m,\ y)$ истинно тогда и только тогда, когда y есть гёделев номер вывода в S формулы $A(\overline{m}) = \forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$.

Теорема (Гёдель, 1931 год). *Если теория S непротиворечива, то формула $\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$ невыводима в теории S, и если теория S ω-непротиворечива, то формула $\neg(\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2))))$ невыводима в теории S.*

Доказательство. Предположим, что теория S непротиворечива и $| = \forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$.

Пусть k — гёделев номер какого-либо вывода в S формулы $| = \forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$.

Следовательно, справедливо отношение $W_1(m, k)$. Так как V_1 выражает W_1 в S, то $| = V_1(\overline{m}, \overline{k})$.

Из $| = \forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$ следует, что $| = \neg V_1(\overline{m}, \overline{k})$.

Таким образом, в теории S оказываются выводимыми формулы $| = V_1(\overline{m}, \overline{k})$ и $| = \neg V_1(\overline{m}, \overline{k})$, что противоречит предположению о непротиворечивости S.

Предположим, что теория S $\omega-$непротиворечива и $| = \neg(\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)))$.

Из ω-непротиворечивости теории следует ее непротиворечивость и, следовательно, формула $\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2))$ невыводима в теории S.

Поэтому никакое натуральное число n не является гёделевым номером вывода в S формулы $\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$, т. е. отношение $W_1(m, n)$ ложно для любого n, а это означает, что $| = \neg V_1(\overline{m}, \overline{n}))$ для любого n.

Возьмем в качестве формулы теории S формулу $A(x_2) = \neg V_1(\overline{m}, x_2)$. Из предположения о $\omega-$непротиворечивости теории S следует, что в теории S невыводима формула

$\exists x_2 \neg A(x_2)) = \exists x_2 \neg(\neg V_1(\overline{m}, x_2)) = \exists x_2 V_1(\overline{m}, x_2) = \neg(\forall x_2 \neg(V_1(\overline{m}, x_2)))$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Таким образом, в непротиворечивой теории S невыводимы как формула $\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$, так и ее отрицание $\neg(\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)))$.

Рассмотрим стандартную интерпретацию неразрешимого предложения $\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$.

Так как V_1 выражает в теории S отношение W_1, то, в соответствии со стандартной интерпретацией, формула $\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$ утверждает, что отношение $W_1(m, x_2)$ ложно для любого натурального числа x_2, а это означает, что не существует вывода формулы $\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2))$ в теории S. Таким образом, формула $\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2))$ утверждает свою собственную невыводимость в теории S.

Из теоремы Гёделя следует, что если теория S непротиворечива, то эта формула и в самом деле невыводима в теории S и поэтому истинна при стандартной интерпретации.

Итак, в стандартной интерпретации формула $\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2))$ верна, но невыводима в теории S.

Это наводит на мысль, что теорема Гёделя справедлива потому, что для теории S выбранная система аксиом содержит недостаточно аксиом, и если добавить новые аксиомы, в частности истинную формулу $\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$, то можно получить новую теорию S_1, для которой теорема Гёделя, возможно, окажется неверной.

Однако, всякая рекурсивная функция, будучи представимой в теории S, будет также представима и в теории S_1, и отношение $W_1(u, y)$ в теории S_1 будет являться примитивно рекурсивным, а этого достаточно для доказательства теоремы Гёделя.

Поэтому, если теория S_1 $\omega-$непротиворечива, то она будет содержать неразрешимую формулу, отличающуюся от формулы $\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2))$, но имеющую такую же форму.

В теореме Гёделя содержится предположение о ω-непротиворечивости теории S. Однако ценой некоторого усложнения доказательства можно ограничиться предположением об обычной непротиворечивости теории S.

В этом случае необходимо будет воспользоваться примитивно рекурсивным отношением $W_2(u, y)$ = «u есть гёделев номер формулы $A(x_1)$, содержащей свободную переменную x_1, и y есть гёделев номер вывода в S формулы $\neg A(\overline{u})$», см. [5].

Так как отношение $W_2(u, y)$ примитивно рекурсивно, то оно выразимо в теории S некоторой формулой $V_2(x_1, x_2)$ с двумя свободными переменными x_1, x_2. Значит, если $W_2(k_1, k_2)$ истинно, то $| = V_2(\overline{k_1}, \overline{k_2})$, и если $W_2(k_1, k_2)$ ложно, то $| = \neg V_2(\overline{k_1}, \overline{k_2})$.

Рассмотрим формулу $\forall x_2(V_1(x_1, x_2) \to \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge V_2(x_1, x_3)))$. Пусть n — гёделев номер этой формулы. Подставим в эту формулу $\overline{n}$ вместо x_1 — получим замкнутую формулу: $\forall x_2(V_1(\overline{n}, x_2) \to \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge V_2(\overline{n}, x_3)))))$.

Теорема (Россер, 1936 год). *Если теория S непротиворечива, то в ней невыводимы обе формулы $\forall x_2(V_1(\overline{n}, x_2) \to \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge V_2(\overline{n}, x_3)))$ и $\neg(\forall x_2(V_1(\overline{n}, x_2) \to \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge V_2(\overline{n}, x_3))))$ и, следовательно, существует неразрешимое предложение этой теории.*

Эту теорему называют теоремой Гёделя в форме Россера.

12. Теорема Гёделя о непротиворечивости формальной арифметики

Рассмотрим вопрос о непротиворечивости теории S.

Для доказательства непротиворечивости формальной арифметики помимо отношений $W_1(u, y)$ и $W_2(u, y)$ используется примитивно рекурсивное отношение $Pf(y, x)$ = «y есть гёделев номер вывода в S формулы с гёделевым номером x» выразимое в теории S с помощью некоторой формулы $Pf(x_1, x_2)$, см. [5].

Далее, если x — гёделев номер формулы A, то через $Neg(x)$ обозначают гёделев номер формулы $\neg A$. Доказано, что функция $Neg(x)$ рекурсивна и, следовательно, представима в теории S некоторой формулой $Neg(x_1, x_2)$, см. [5].

Вторая теорема Гёделя. *Если теория S непротиворечива, то в ней невыводима формула, утверждающая непротиворечивость теории S.*

Доказательство.

Формула $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \neg(Pf(x_1, x_3)) \wedge Pf(x_2, x_4) \wedge Neg(x_3, x_4))$ в стандартной интерпретации выражает невозможность вывода в теории S какой-либо формулы вместе с ее отрицанием и является истинной в том и только том случае, когда теория S непротиворечива. Иными словами, эту формулу можно интерпретировать как утверждение непротиворечивости теории S.

В соответствии со стандартной интерпретацией, гёделева неразрешимая формула $\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$ выражает свою собственную невыводимость.

Тогда формула $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \neg(Pf(x_1, x_3) \wedge Pf(x_2, x_4) \wedge Neg(x_3, x_4)) \rightarrow \forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$ утверждает, что если теория S непротиворечива, то формула $\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$ в ней невыводима. То есть эта формула есть формальная запись первой части теоремы Гёделя.

Математические рассуждения, доказывающие теорему Гёделя, могут быть выражены и проведены средствами теории S, так что в результате оказывается возможным получить вывод формулы

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \neg(Pf(x_1, x_3) \wedge Pf(x_2, x_4) \wedge Neg(x_3, x_4)) \rightarrow \forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$ в теории S[2].

Таким образом, $| = \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \neg(Pf(x_1, x_3) \wedge Pf(x_2, x_4) \wedge Neg(x_3, x_4)) \rightarrow \forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$.

Если $| = \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \neg(Pf(x_1, x_3) \wedge Pf(x_2, x_4) \wedge Neg(x_3, x_4))$, то по правилу отделения получаем, что $| = \forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2))$.

Из теоремы Гёделя следует, что если теория S непротиворечива, то формула $\forall x_2 \neg V_1(\overline{m}, x_2)$ в ней невыводима. Следовательно, если теория S непротиворечива, в ней невыводима формула $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \neg(Pf(x_1, x_3) \wedge Pf(x_2, x_4) \wedge Neg(x_3, x_4))$.

Таким образом, если теория S непротиворечива, то в ней невыводима формула, утверждающая непротиворечивость теории S.

Другими словами, если теория S непротиворечива, то доказательство непротиворечивости теории S не может быть проведено средствами самой теории S.

Литература

1. Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. — М.: Просвещение, 1968. — 232 с.

2. Смилга В.П. В погоне за красотой. — М.: «Молодая гвардия», 1968. — 288 с.

3. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. — М.: Издательство Московского университета, 1982. — 120 с.

4. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. — М.: Издательский центр «Академия», 2010. — 448 с.

5. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

Сухан Ирина Владимировна,
старший преподаватель кафедры
вычислительной математики и информатики
Кубанского государственного университета,
г. Краснодар.

E-mail: irina-sukhan@yandex.ru

Кравченко Григорий Григорьевич,
доцент кафедры
вычислительной математики и информатики
Кубанского государственного университета,
кандидат техн. наук.

E-mail: grigoriks1@mail.ru

Иванисова Ольга Владимировна,
доцент кафедры
вычислительной математики и информатики
Кубанского государственного университета,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: zah-ivanisov@yandex.ru

Задачи по теории вероятностей на студенческих олимпиадах

А. Ю. Эвнин, Э. Ю. Лернер, Ю. А. Игнатов, И. С. Григорьева

Мы рассмотрим задачи по теории вероятностей со студенческих олимпиад последних лет, а также задачи, которые могли бы быть предложены на такой олимпиаде. Эта подборка может служить основой нескольких занятий математического кружка (как школьного, так и студенческого).

Вероятностное мышление и представления о статистических закономерностях играют важную роль в формировании мировоззрения, видимо поэтому элементы теории вероятностей и статистики включены даже в школьную программу. В этой статье мы ни в кой мере не претендуем на охват всех тем популярного вводного курса. Напомним в этой связи об известной книге [10]; замечательный иллюстративный материал как по теории вероятностей, так и по статистике можно найти в [4, главы 4, 5] и в более наукоёмкой книге [13]; отметим также недавно изданную небольшую книгу [14], по которой можно строить и школьный курс. Однако, мы будем рады, если обсуждаемые ниже задачи позволят интересующимися студентам и продвинутым школьникам почувствовать радость нахождения некоторых закономерностей случайного мира.

Составление подборки олимпиадных и занимательных вероятностных задач не является оригинальной идеей. Наиболее известной такой подборкой, часто используемой на различных конкурсах, является сборник Мостеллера [12]. Настоятельно рекомендуем читателю с ним ознакомиться (элементарные занимательные задачи содержатся также в [1, глава 1]). Мы старались избежать пересечения нашей подборки задач с [12]. Тем не менее, часть оставшихся задач являются фольклорными или же так или иначе связанными с задачами из указанных сборников. Обратим внимание на задачу 25 про неразборчивого жениха, пародирующую задачу про разборчивую невесту (последней также посвящена отдельная брошюра Гусейн-Заде [5]); задачу 35 о математиках, надевающих шляпы наугад; новый сюжет на известную тему в задаче 7 (ср. с первым решением задачи 6, не использующим понятие условной вероятности).

Авторство задач мы решили отмечать лишь в исключительных ситуациях, когда задача уже стала классической и, при этом, авторство известно. Авторам статьи очень редко принадлежат задачи целиком (их мы не стали отмечать, такие отметки могли бы обидеть тех, чьё авторство других задач осталось бы из-за нашего незнания неотмеченным), несколько чаще может идти речь об авторстве задачных легенд. Заметим, что ниже условия задач 9, 26 прошедших олимпиад по разным причинам чуть изменены (математическая сущность задач осталась неизменной). Задачи 33, 34, 39 известны авторам как предлагавшиеся студентам ФИВТ МФТИ (в несколько иной формулировке).

Задачи сгруппированы по темам (хотя деление это весьма условно: некоторые задачи можно отнести к разным темам, например, из-за возможности разных способов решения). В конце мы даём список задач для самостоятельного решения, к которым приводим лишь ответы и иногда краткие указания.

Названия городов в условиях задач означают следующее:

Йошкар-Ола — Открытая международная студенческая интернет-олимпиада по математике (организатор — Поволжский технический университет);

Казань — Открытая Поволжская олимпиада студентов, посвящённая дню рождения Н.И. Лобачевского, проводимая Казанским университетом [8, 9] (отметим, что председателем жюри в 2009–2012 гг. был известный вероятностник Д.Х. Муштари);

Тула — Всероссийский студенческий турнир математических боёв, организуемый Тульским педагогическим университетом им. Л.Н. Толстого [7, 6];

Уфа — Всероссийская студенческая олимпиада (организатор — УГАТУ) [2];

Челябинск — олимпиады, проводящиеся в Южно-Уральском университете [15, 16, 17, 18].

Классическая вероятность

1. (Казань, 2007) Имеется 3 ящика и 5 призов. Каждый приз независимо от других помещается в произвольный ящик. Какова вероятность того, что хотя бы один ящик окажется пустым?

2. (Тула, 2013) /[11, задача 27.3]/ Из вершин правильного n-угольника ($n \geqslant 6$) наугад выбираются две тройки различных точек. Какова вероятность того, что два треугольника, вершинами которых являются выбранные тройки, не пересекаются?

3. (Челябинск, 2012) Среди вершин правильного $(2n+1)$-угольника случайным образом выбираются три различные точки. Они соединяются отрезками. С какой вероятностью получится остроугольный треугольник?

4. (Челябинск, 2013) Джордж, Гаррис и Джей выбирают один из трёх маршрутов своего будущего путешествия. Каждый упорядочивает маршруты по своему предпочтению. Они договорились считать вариант a лучше варианта b, если a предпочтительнее b по мнению большинства. С какой вероятностью найдётся маршрут, который в глазах путешественников лучше двух других, если их предпочтения равновероятны и независимы?

5. (Казань, 2010) В игре «Что? Где? Когда?» в каждом раунде волчок останавливается в секторе номер n, где n равновероятно принимает одно из значений $0, 1, \ldots, 13$. При этом играет первый из секторов по часовой стрелке, который ранее не играл. Найдите вероятность того, что после шести раундов сыграют (в любом порядке) секторы $1, 2, \ldots, 6$.

Условная вероятность

6. (Йошкар-Ола, 2010) /М. Беррондо, [1, задача 13]/ В одном маленьком французском городке полиция разыскивает бродягу. Вероятность того, что он находится в одном из восьми баров этого городка, безразлично в каком, равна 0,8. Двое полицейских посетили семь баров, но бродягу не обнаружили. С какой вероятностью он будет найден в восьмом баре?

7. (Челябинск, 2011) Предположим, что Клавдия Ивановна (тёща Кисы) спрятала бриллианты в одном из 12 стульев с вероятностью 90%, а с вероятностью 10% не спрятала их вовсе. Предположим также, что мы вскрыли 11 стульев и ни в одном из них бриллиантов не нашли. Какова вероятность того, что мы найдём их в последнем, 12-м, стуле?

Теоремы сложения и умножения

8. (Казань, 2008) В вершинах правильного тетраэдра сидят муравьи (по одному в каждой вершине). В некоторый момент времени они начинают ползти по рёбрам в одну из соседних вершин. Какова вероятность того, что какие-то два муравья встретятся на ребре (не в вершине)?

9. (Казань, 2006) Людей с положительным резус-фактором 15%. Известно, что положительный резус-фактор рецессивен, т. е. проявляется, только если он получен и от матери, и от отца. Этот ген распределён одинаково у женщин и у мужчин. Пусть у некоторой женщины резус-фактор положителен. Какова вероятность того, что и у её ребёнка он будут положителен?

10. (Казань, 2004) Из n вопросов, вынесенных на зачёт, студент выучил m вопросов ($m \leqslant n-3$). Зачёт ставится, если студент ответит не менее чем на половину вопросов. Какой билет ему выгоднее брать, с двумя вопросами или с четырьмя? Ответ зависит от n и m. (Билеты составляются случайным образом).

11. (Казань, 2002) /[11, задача 27.1]/ В двух урнах лежит 25 шаров белого и чёрного цвета. Из каждой урны вынимается по одному шару. Вероятность того, что они оба белые, равна 0,54. Найдите вероятность того, что они оба чёрные.

12. (Йошкар-Ола, 2015) Игральный кубик подбросили 3 раза. Найдите вероятность того, что полученные три числа могут быть длинами сторон некоторого треугольника.

13. (Тула, 2004) Три теннисиста (A, B и C) играют в турнире по следующей схеме. Сначала A играет с B, а во всех следующих партиях победитель последней партии встречается с участником, не игравшим в этой партии. Победителем турнира считается тот, кто выиграет две партии подряд. Найдите вероятность победы для каждого участника.

Формула полной вероятности

14. (Тула, 2011) Двое по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у которого раньше выпадут подряд два орла. Найдите вероятность выигрыша для первого игрока.

15. (Казань, 2009) Монету подбрасывают несколько раз до тех пор, пока не выпадут подряд три орла или две решки. Какова вероятность того, что бросания завершатся выпадением трех орлов? Вероятности выпадения орла и решки равны $1/2$, результаты бросков независимы один от другого.

16. (Йошкар-Ола, 2015) По паутине, имеющей вид правильного шестиугольника, разбитого на правильные треугольники, двигается мошка. В середине паутины (точка O) сидит паук. На каждой развилке нитей паутины мошка выбирает маршрут случайным образом, в частности, может повернуть назад. Если мошка попадает в точку O, то паук её съедает. Найдите вероятность того, что начав прогулку по паутине в вершине шестиугольника, мошка в неё вернется.

Геометрическая вероятность (см. также задачи 36–38)

17. (Йошкар-Ола, 2009) На сторонах прямоугольника независимо друг от друга случайным образом выбраны две точки. Найдите математическое ожидание квадрата расстояния между этими точками, если стороны прямоугольника равны a и b.

Рекуррентные соотношения

18. (Йошкар-Ола, 2014) Монету подбросили 10 раз. Найдите вероятность того, что в последовательности результатов этого опыта не будет двух последовательных орлов.

19. (Уфа, 2008) На плоскости расположен правильный тетраэдр. Раз в минуту он переворачивается через одно из рёбер, причём перевороты через разные рёбра равновероятны. Найдите вероятность того, что через n минут тетраэдр будет лежать на той же грани, что и вначале.

Математическое ожидание

20. (Казань, 2013) При приёме в старшую группу детского сада проводится следующий экзамен. Перед ребёнком случайной стороной раскладываются в ряд 35 карточек, на одной стороне карточек написана буква «м», на другой «а». Ребенок должен найти 4 подряд идущие карточки, на которых написано слово «мама». Сколько в среднем перед ним таких слов?

21. (Тула, 2013) Рассматриваются всевозможные последовательности из чисел 1 и -1 длиной n. Для каждой вычисляется квадрат суммы членов. Найдите среднее арифметическое получившихся величин.

22. (Челябинск, 2017) Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — случайная перестановка чисел от 1 до n. Найдите среднее число инверсий в этой перестановке (инверсия — это пара чисел $a_j > a_k$, для которой $j < k$).

23. (Челябинск, 2015) В группе детского сада n человек разного роста. Они встали в круг. Ребёнок скажет, что он высокий, если он выше двух своих соседей. Сколько в среднем детсадовцев назовут себя высокими?

24. (Казань, 2009) В комнате n ящиков, в каждом лежит по одному подарку. По очереди в комнату заходит m детей, каждый из которых случайным образом выбирает ящик и забирает оттуда подарок, если таковой там ещё есть. Сколько в среднем детей уйдут без подарка?

25. (Челябинск, 2015; Казань, 2016) Пьяница находится на расстоянии всего лишь одного метра от входа в свой двор, однако, из-за нетвёрдости походки, каждый шаг (независимо от предыдущих шагов) приближает пьяницу к цели всего лишь на расстояние ξ_i, (i — номер шага), равномерно распределённое от 0 до 1 метра. Сколько в среднем шагов придётся совершить пьянице до того момента, когда он окажется во дворе?

26. (Челябинск, 2016) На игровой рулетке n секторов с числами $1, 2, \ldots, n$. Сколько в среднем раз нужно прокрутить барабан, чтобы общая сумма выпавших очков стала не меньше n?

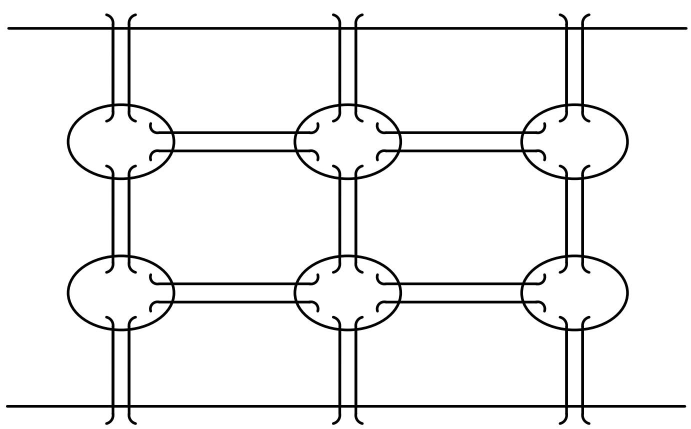
Разные задачи

27. (Челябинск, 2009) Две равные по силе команды играют в волейбол до тех пор, пока каждая из них не одержит по n или более побед. Найдите вероятность того, что будет проведено ровно $2n+k$ партий.

28. (Тула, 2004) В клетках таблицы $n \times n$ случайным образом расставляются n звёздочек, по одной в каждом столбце и каждой строке. Из левого верхнего угла таблицы в правый нижний также случайным образом проводится ломаная длины $2n$ по линиям сетки. Какова вероятность того, что все звёздочки окажутся по одну сторону от этой линии?

29. (Тула, 2011) Имеются $2n$ шаров с числами $1, \ldots, n$, каждое число встречается по два раза. Эти шары случайным образом раскладываются по два в n урн. Из каждой урны вынимается один шар. Какова вероятность того, что на вынутых шарах все числа различные?

30. (Тула, 2015) Между двумя берегами реки расположены 6 островов, соединенных мостами, как показано на рисунке. В результате урагана часть мостов могла разрушиться. Для каждого моста вероятность быть разрушенным равна 0,5. С какой вероятностью после урагана можно будет пройти по мостам с одного берега реки на другой?



31. (Казань, 2012) На окружность бросают случайным образом $n > 1$ точек. Найдите вероятность того, что окружность можно разбить на n равных дуг так, что на каждой дуге будет ровно одна точка (считаем, что в дугу входит ровно один из ее концов).

32. (Челябинск, 2011; Тула, 2011) /Н. Н. Константинов/ Каждый из n пассажиров купил по билету на n-местный самолет ($n > 1$). Первой зашла сумасшедшая старушка и села на случайное место. Далее, каждый вновь зашедший занимает своё место, если оно свободно; иначе занимает случайное. Какова вероятность того, что последний пассажир займёт своё место?

Задачи для самостоятельного решения

33. Флаги n стран (в том числе России) вывешивают на m мачтах корабля. Разные способы вывешивания отличаются порядком следования флагов на каждой мачте, при этом на некоторых мачтах (возможно даже на всех, кроме одной) флаги могут совсем отсутствовать. Считая, что все способы вывешивания флагов имеют равные шансы, найдите вероятность того, что российский флаг будет висеть выше других на одной из мачт.

34. n рассеяных математиков пришли на семинар в шляпах, повесили их на одной вешалке и уходя каждый из них взял шляпу наугад. Кроме того, по дороге домой каждый из рассеяных математиков, независимо от других, мог потерять надетую шляпу с вероятностью p (здесь p — константа, $p \in [0,1]$). Найдите предел вероятности того, что ни один из рассеяных математиков не вернулся домой в своей шляпе, при $n \to \infty$.

35. На сторонах параллелограмма с периметром p берутся две случайные точки. Найдите средний квадрат расстояния между ними.

36. На окружности радиуса r берутся две случайные точки. Найдите средний квадрат расстояния между ними.

37. n случайных чисел из интервала $(0,1)$ являются длинами n отрезков, $n > 2$. Какова вероятность того, что из этих отрезков можно составить n-угольник?

38. Математик каждую секунду с вероятностью $1/2$ делает шаг вперед, а с вероятностью $1/2$ стоит и *обдумыает мысль*. По истечении каждой секунды (независимо от продолжительности предыдущего обдумывания) с вероятностью $1/3$ математику может прийти в голову *гениальная идея*. Какова вероятность того, что перед тем, как *гениальная идея* придёт математику в голову, он сделает ровно 2 шага?

39. Из множества $\{1, 2, \ldots, 100\}$ случайно выбираются 3 числа. Какова вероятность того, что из них можно составить арифметическую прогрессию?

40. /по сути А. Реньи/ Авиакомпания «Эконом» собирается соединить некоторые из 10 городов, среди которых город К, двусторонними рейсами так, что из любого из этих городов в любой другой можно было долететь только одним способом (возможно с пересадками). Считая, что всевозможные реализации планов авиакомпании имеют равные шансы, найдите вероятность того что из К будет ровно 3 рейса в остальные 9 городов.

Ответы

1. $\dfrac{31}{81}$. **2.** 0,3. **3.** $\dfrac{n+1}{4n-2}$. **4.** $\dfrac{17}{18}$. **5.** $\dfrac{1}{448}$. **6.** $\dfrac{1}{3}$. **7.** $\dfrac{3}{7}$. **8.** $\dfrac{17}{27}$. **9.** $\sqrt{0{,}15} \approx 0{,}387$. **10.** При $m < \dfrac{2n}{3} - 1$ — с двумя вопросами, при $m > \dfrac{2n}{3} - 1$ — с четырьмя. В случае равенства $3m = 2n - 3$ оба билета одинаково выгодны. **11.** 0,04. **12.** $\dfrac{37}{72}$. **13.** A и B выигрывают с вероятностью $\dfrac{5}{14}$, C — с вероятностью $\dfrac{2}{7}$. **14.** $\dfrac{14}{25}$. **15.** 0,3. **16.** $\dfrac{7}{27}$. **17.** $\dfrac{(a+b)^2}{6}$. **18.** $\dfrac{9}{64}$. **19.** $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$. **20.** 2. **21.** n. **22.** $C_n^2/2$. **23.** $\dfrac{1}{3}$. **24.** $m - n + n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^m$. **25.** e. **26.** $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n-1}$. **27.** $C_{2n+k-1}^{n-1} \cdot 0{,}5^{2n+k-1}$. **28.** $\dfrac{1}{2^{n-1}}$. **29.** $\dfrac{n!}{(2n-1)!!} = \dfrac{(n!)^2 \cdot 2^n}{(2n)!}$. **30.** $\dfrac{1}{2}$. **31.** $\dfrac{(n-1)!}{n^{n-2}}$. **32.** $\dfrac{1}{2}$. **33.** $\dfrac{m}{n+m-1}$. **34.** e^{p-1}. **35.** $\dfrac{p^2}{24}$. **36.** $2r^2$. **37.** $1 - \dfrac{1}{(n-1)!}$. **38.** $\dfrac{3}{16}$. **39.** $\dfrac{1}{66}$. **40.** $\dfrac{C_8^2 9^6}{10^8} \approx 0{,}1488$.

Решения задач 1–32

1. Пусть A_i — множество распределений подарков по ящикам, когда i-й ящик пуст, $i = 1, 2, 3$. Очевидно, $|A_i| = 2^5$. Кроме того, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ и $|A_i \cap A_j| = 1$ при $i \neq j$. Поэтому

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_3 \cap A_1|) = 3 \cdot 2^5 - 3 = 93,$$

а искомая вероятность равна $93/3^5 = 31/81$.

Замечание. В случае m ящиков и n подарков задача решается с помощью формулы для числа сюръекций n-элементного множества в m-элементное [3]. Оно равно $\sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_m^k (m-k)^n$.

2. Выделим произвольную шестёрку точек, а в ней какую-то точку A. Число способов добавить к A две точки, чтобы получить тройку, равно $C_5^2 = 10$ (оставшиеся три точки образуют другую тройку). Число способов, при которых треугольники с вершинами в этих тройках не пересекаются, равно 3 (точки в треугольниках должны идти в порядке их следования по часовой стрелки, при этом точка A в своём треугольнике будет первой, второй или третьей). Значит, для выделенной шестёрки точек вероятность того, что треугольники не пересекаются, равна 3/10. Поскольку это верно для любой шестёрки точек, искомая вероятность также равна 0,3.

3. Зафиксируем одну из трёх выбранных точек. Обозначим её B. Следующие за ней по часовой стрелке точки обозначим $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$.

В качестве двух других вершин треугольника могут быть выбраны любые две из $2n$ точек. Всего возможных вариантов C_{2n}^2.

Подсчитаем, в скольких случаях получится остроугольный треугольник. Ясно, что из групп точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{2n}$ должно быть выбрано ровно по одной точке. Пусть из первой группы выбирается точка A_i, а из второй — A_j. При этом в треугольнике BA_iA_j углы при вершинах A_i и A_j будут острыми.

Для того, чтобы был острым и угол при вершине B, необходимо и достаточно выполнение условия $j - i \leqslant n$. При $i = k$ индекс j может быть равен $n+1, n+2, \ldots, n+k$ — всего имеем k вариантов. Значит, общее число способов выбрать вершины A_i и A_j равно

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Осталось подсчитать искомую вероятность:

$$P = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{C_{2n}^2} = \frac{n+1}{4n-2}.$$

Замечание. Хорошо известен предельный вариант этой задачи, в которой требуется найти вероятность того, что три случайно выбранные на окружности точки будут вершинами остроугольного треугольника. Это несложная задача на геометрическую вероятность, в которой, тем не менее, легко запутаться, вследствие чего ответ будет неправильным. Правильный ответ можно получить, рассмотрев предел P при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n-2} = \frac{1}{4}.$$

4. Проще найти вероятность того, что предпочтительного маршрута не окажется. Если какой-то маршрут был на первом месте у двоих или троих, то он окажется предпочтительным. Поэтому можно считать, что на первом месте каждый маршрут встречался по одному разу. Если при этом какой-то маршрут будет вторым в списках предпочтений путешественников дважды, то он (всякий раз по мнению двух из трёх) будет лучше каждого из двух других маршрутов. Таким образом, если выбор первого (a, b, c), то второй и третий должны в каком-то порядке выбрать (b, c, a) и (c, a, b). Вероятность этого $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$. А вероятность противоположного события, которую и требуется найти в задаче, равна 17/18.

5. Искомая вероятность равна $m/n(14)$, где $n(14)$ — общее число вариантов остановки волчка в 14 секторах в 6 опытах, а m — число вариантов, при которых выпадут секторы $1, 2, \ldots, 6$. Очевидно, что $n(14) = 14^6$. Заметим, что число m не зависит от общего числа секторов на волчке (лишь бы оно было больше 6). Действительно, исследуемое событие означает, что волчок останавливался только на секторах 1–6, но никогда — на остальных секторах. Поэтому не важно, сколько именно секторов есть от седьмого до нулевого включительно.

Рассмотрим аналогичную задачу в случае 7 секторов. Здесь событие, состоящее в том, что будут играть какие-то 6 конкретных секторов, означает, что не играет оставшийся седьмой сектор. Для каждого невыпавшего сектора она одна и та же и равна $\dfrac{1}{7} = \dfrac{m}{n(7)} = \dfrac{m}{7^6}$. Значит, $m = 7^5$, а искомая вероятность равна $\dfrac{7^5}{14^6} = \dfrac{1}{2^6 \cdot 7} = 1/448$.

6. Добавив два виртуальных бара, получим 10 баров, в каждом из которых бродяга оказывается с вероятностью 0,1. Известно, что в 7 «реальных» барах его не было. Из трёх оставшихся баров реален только один. Поэтому вероятность, с которой он окажется там, равна 1/3.

Замечание. Решим более общую задачу, заменив в условии 8 на n, а 0,8 на p. Рассмотрим события A_i: «бродяга находится в i-м баре», $i = 1, \ldots, n$, и B: «бродяга — не в баре». Вычислим условную вероятность

$$P\left(A_n / \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_{n-1}}\right) = P(A_n/(A_n + B)) = \frac{P(A_n)}{P(A_n + B)} = \frac{P(A_n)}{P(B) + P(A_n)} =$$

$$= \frac{p/n}{1 - p + p/n} = \frac{p}{n(1-p) + p}.$$

7. Задача аналогична предыдущей. Её решение (в общем виде) приведено выше.

8. Пусть A_i — событие, состоящее в том, что на i-м ребре состоится встреча муравьёв, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Нужно найти вероятность суммы этих событий. Одновременно может произойти не более двух из них. Поэтому

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_6) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j).$$

Очевидно, $\forall i \quad P(A_i) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$. Если события A_i и A_j совместны (а таких пар ровно три), то $P(A_i A_j) = 1/81$. Стало быть, $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_6) = 6/9 - 3/81 = 17/27$.

9. Пусть p — вероятность того, что один из родителей передаст ребёнку ген данного признака. Тогда вероятность его проявления равна $p^2 = 0{,}15$. Отсюда $p = \sqrt{0{,}15}$. В силу того, что мать в данном случае передаёт признак с вероятностью 1, искомая вероятность равна $1 \cdot p = p$.

10. Вычислим вероятность P_k не сдать зачёт, если в билете k вопросов.

1) Пусть в билете два вопроса. Студент не сдаст зачёт, только если не ответит на оба вопроса. Поэтому

$$P_2 = \frac{n-m}{n} \cdot \frac{n-m-1}{n-1}.$$

2) Если в билете четыре вопроса, зачёт не будет сдан в следующих случаях: студент не ответил ни на один вопрос; студент ответил ровно на один (любой из четырёх). Значит,

$$P_4 = P_2 \cdot \frac{n-m-2}{n-2} \cdot \frac{n-m-3}{n-3} + 4 \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{n-m}{n-1} \cdot \frac{n-m-1}{n-2} \cdot \frac{n-m-2}{n-3} =$$

$$= P_2 \cdot \frac{n-m-2}{n-2} \left(\frac{n-m-3}{n-3} + 4 \cdot \frac{m}{n-3} \right) = P_2 \cdot \frac{(n-m-2)(n+3m-3)}{(n-2)(n-3)}.$$

Разность двух вероятностей равна

$$P_4 - P_2 = P_2 \cdot \left(\frac{(n-m-2)(n+3m-3)}{(n-2)(n-3)} - 1 \right) = P_2 \cdot \frac{m(2n-3m+3)}{(n-2)(n-3)}.$$

Если $P_4 > P_2$, то вероятность сдать зачёт больше, когда в билете два вопроса. Так будет, если $3m < 2n-3$. Если знак неравенства противоположный, то выгодней билет с 4 вопросами. В случае равенства $3m = 2n-3$ оба билета одинаково выгодны.

11. Пусть в i-й урне n_i шаров, среди которых k_i белых, $i = 1,2$. Тогда $\dfrac{k_1}{n_1} \cdot \dfrac{k_2}{n_2} = 0{,}54 = \dfrac{27}{50}$. Поэтому для некоторого натурального m справедливы равенства $k_1k_2 = 27m$, $n_1n_2 = 50m$. Одно из чисел n_i делится на 5, тем же свойством обладает и второе из них (так как их сумма равна 25). Пусть $n_1 \leqslant n_2$. Возможны два случая.

1) $n_1 = 5$, $n_2 = 20$. Тогда $k_1k_2 = 54$, причём $k_1 \leqslant 5$, $k_2 \leqslant 20$, так что $k_1 = 3$, $k_2 = 18$.

2) $n_1 = 10$, $n_2 = 15$. Тогда $k_1k_2 = 81$, причём $k_1 \leqslant 10$, $k_2 \leqslant 15$, так что $k_1k_2 = 9$.

Несложно подсчитать, что в обоих случаях вероятность вынуть два чёрных шара равна $\left(1 - \dfrac{k_1}{n_1}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{k_2}{n_2}\right) = 0{,}04$.

12. Пусть A — интересующее нас событие. Для $i = 1,2,3$ и $k = 2,3,4,5,6$ рассмотрим событие $B_{i,k}$, состоящее в том, что при i-м броске выпало k очков, а в двух других бросках сумма очков не больше k. Тогда сумма (очевидно, попарно несовместных) событий $B_{i,k}$ по всем i и k есть событие, противоположное A. Несложно убедиться в том, что количество решений в натуральных числах неравенства $x + y \leqslant k$, где натуральное число $k \geqslant 2$, равно $1 + 2 + \dots + (k-1) = \dfrac{k(k-1)}{2}$. Отсюда $P(B_{i,k}) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{k(k-1)}{2 \cdot 6^2}$. Поэтому

$$P(\overline{A}) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=2}^{6} P(B_{i,k}) = \frac{3}{6^3} \sum_{k=2}^{6} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{35}{72}.$$

13. Вероятности выигрыша для A и B одинаковы. Найдём вероятность p_C победы игрока C. Введём события M_i: «выигрыш игрока M в i-й игре», $i = 1,2,\dots$. Для C неважно, кто выиграет в первой партии. Обозначим её победителя через X, а побежденного через Y. Тогда событие «выигрыш C» можно записать в виде:

$$C_2C_3 + C_2Y_3X_4C_5C_6 + C_2Y_3X_4C_5Y_6X_7C_8C_9 + \dots.$$

Отсюда

$$p_C = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \dots = \frac{1/4}{1 - 1/8} = \frac{2}{7}.$$

Стало быть, вероятности выигрышей для A и B равны по 5/14.

14. Пусть событие A означает победу первого игрока, а $P(A) = p$ (существование вероятности события A обосновывается стандартным образом — как предела монотонной ограниченной последовательности вероятностей победы после первых n бросков). Рассмотрим полную группу событий $H_1, H_2, \dots, H_6$ (эти события описаны в приводимой ниже таблице последовательностью результатов подбрасывания монеты). Для каждого i вычислим $P(H_i)$ и $P(A/H_i)$.

H_i	ООО	OOPO	OOPP	OPO	OPP	P
$P(H_i)$	1/8	1/16	1/16	1/8	1/8	1/2
$P(A/H_i)$	1	0	p	1	$1-p$	$1-p$

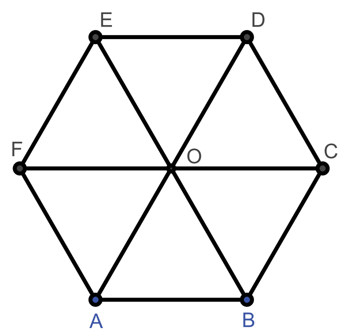
По формуле полной вероятности,

$$p = P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(H_i)P(A/H_i) = \frac{1}{8} + \frac{p}{16} + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right)(1-p).$$

Отсюда $p = 14/25$.

15. Пусть вероятность выпадения 3-х орлов (ООО) после того, как уже выпали два орла (ОО) равна x; вероятность выпадения 3-х орлов после выпадения орла и решки (ОР) равна y; вероятность выпадения 3-х орлов после выпадения решки и орла (РО) равна z. Вероятности выпадения наборов ОО, ОР, РО равны 1/4.

После ОО с равной вероятностью (1/2) можно получить либо ООО, либо OOP. После OOP вероятность выпадения ООО равна y. По формуле полной вероятности $x = 1/2 + y/2$. Аналогично, после ОР получаем две возможности ОРР и ОРО, поэтому $y = 0 + z/2$; после РО можем получить РОО и РОР, откуда $z = x/2 + y/2$. Решение системы уравнений: $x = 0{,}6$, $y = 0{,}2$, $z = 0{,}4$. Искомая вероятность есть $(x + y + z)/4 = 0{,}3$.



16. Обозначим вершины шестиугольника так, как показано на рис. Пусть паук сидел в вершине A. Обозначим через r вероятность интересующего нас события, а через P_{XY} вероятность попадания из точки X в точку Y. Пусть $P_{BA} = x$, $P_{CA} = y$, $P_{DA} = z$. Из соображений симметрии следует, что $P_{FA} = P_{BA} = x$, $P_{EA} = P_{CA} = y$. Ясно также, что $P_{OA} = 0$. По формуле полной вероятности,

$$r = \frac{1}{3}P_{BA} + \frac{1}{3}P_{FA} + \frac{1}{3}P_{OA} = \frac{2}{3}x;$$

$$P_{BA} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}P_{CA}; \quad P_{CA} = \frac{1}{3}P_{BA} + \frac{1}{3}P_{DA}; \quad P_{DA} = \frac{1}{3}P_{CA} + \frac{1}{3}P_{EA}.$$

Значит, имеем систему уравнений

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y; \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z; \quad z = \frac{2}{3}y.$$

Решив эту систему, получим $x = 7/18$, откуда $r = 7/27$.

17. Возможны следующие пять случаев взаимного расположения двух точек:

H_1 (H_2): «обе точки попадают на одну сторону длиной a (b)»;

H_3 (H_4): «обе точки попадают на противоложные стороны длиной a (b)»;

H_5: «точки попадают на смежные стороны».

Несложно видеть, что

$$P(H_1) = P(H_3) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{2(a+b)} = \frac{a^2}{2(a+b)^2};$$

$$P(H_2)=P(H_4)=\frac{b^2}{2(a+b)^2};\quad P(H_5)=\frac{2ab}{(a+b)^2}.$$

Пусть δ — квадрат расстояния между двумя точками.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие (легко проверяемые) факты.

Если случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0;a]$, то $D\xi=a^2/12$, $M\xi^2=a^2/3$.

Если случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены, то $M(\xi-\eta)^2=2D\xi$.

Отсюда и с помощью теоремы Пифагора находим

$$M(\delta/H_1)=\frac{a^2}{6};\quad M(\delta/H_2)=\frac{b^2}{6};\quad M(\delta/H_3)=\frac{a^2}{6}+b^2;$$

$$M(\delta/H_4)=\frac{b^2}{6}+a^2;\quad M(\delta/H_5)=\frac{a^2+b^2}{3}.$$

Осталось подсчитать окончательный результат по формуле полной вероятности:

$$M\delta=\sum_{i=1}^{5}P(H_i)\cdot M(\delta/H_i)=\frac{(a+b)^2}{6}.$$

18. Результаты подбрасываний монеты запишем двоичной последовательностью, в которой 1 (0) на i-м месте означает, что при i-м броске выпал орёл (соответственно, решка). Назовём двоичную последовательность *хорошей*, если в ней нет двух соседних единиц. Пусть a_n — количество хороших последовательностей длины n. Очевидно, $a_1=2$, $a_2=3$.

Если хорошая последовательности из n символов оканчивается нулём, то её можно получить из произвольной хорошей последовательности длины $n-1$ приписыванием справа нуля. Значит, имеется ровно a_{n-1} таких последовательностей.

Если же хорошая последовательности из n символов оканчивается единицей, то её предпоследняя цифра — ноль, и эту последовательность можно получить из произвольной хорошей последовательности длины $n-2$ приписыванием справа нуля и единицы. Поэтому имеется ровно a_{n-2} таких последовательностей.

Таким образом, при $n\geqslant 3$ имеет место рекуррентное соотношение $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$. Отсюда получаем числа Фибоначчи:

$$a_3=5,\quad a_4=8,\quad a_5=13,\quad a_6=21,\quad a_7=34,\quad a_8=55,\quad a_9=89,\quad a_{10}=144.$$

Искомая вероятность равна доле хороших последовательностей длины 10 среди всех двоичных последовательностей этой длины $\dfrac{a_{10}}{2^{10}}=\dfrac{9}{64}$.

19. Пусть p_k — вероятность того, что через k минут тетраэдр будет лежать на той же грани, что и вначале. Очевидно, $p_0=1$, $p_1=0$. Выразим p_{k+1} через p_k. Если через k минут тетраэдр будет лежать на первоначальной грани, то $p_{k+1}=0$, а если на другой грани, то $p_{k+1}=1/3$ в силу равновероятности поворотов через разные рёбра.

По формуле полной вероятности $p_{k+1}=0\cdot p_k+\dfrac{1}{3}\cdot(1-p_k)$. Положим $y_k=p_k-\dfrac{1}{4}$. Тогда $y_0=\dfrac{3}{4}$ и $y_{k+1}=-\dfrac{1}{3}y_k$, $k=0,1,\ldots$ Отсюда $y_n=\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

20. Рассмотрим случайную величину ξ_i, которая равна 1, если 4 карточки с номерами i, $i+1$, $i+2$, $i+3$ составляют слово «мама», и 0 в противном случае. Вероятность того, что $\xi_i=1$, есть 1/16.

Искомое количество способов есть сумма $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{32}$. Поскольку математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их матожиданий,

$$M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 + \dots + M\xi_{32} = 32\left(1 \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \frac{15}{16}\right) = 2.$$

21. Рассмотрим n независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, принимающих значения -1 и 1 с вероятностью $1/2$. Сумма членов этой последовательности есть случайная величина $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, а математическое ожидание её квадрата есть искомое среднее арифметическое. Имеем

$$M\xi_i = 0;\ M\xi = 0;\ M\xi_i^2 = 1;\ D\xi_i = 1;\ D\xi = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i = n,\ M(\xi^2) = D\xi + (M\xi)^2 = n.$$

22. Пусть $\xi_{i,j} = 1$, если числа a_i и a_j образуют инверсию, и $\xi_{i,j} = 0$ в противном случае. Оба указанных события равновероятны. Поэтому $M\xi_{i,j} = 1/2$. Общее число инверсий в случайной перестановке равно $\xi = \sum\limits_{i<j} \xi_{i,j}$. В данной сумме C_n^2 слагаемых. Из свойства линейности математического ожидания случайной величины имеем $M\xi = C_n^2/2$.

23. Пусть ξ_i — случайная величина, равная 1, если стоящий на i-м месте детсадовец назовёт себя высоким, и нулю в противном случае. Самый высокий из трёх человек, стоящих на i-м месте и двух соседних с ним, с равной вероятностью может быть на любом из этих трёх мест. Поэтому $\xi_i = 1$ с вероятностью $1/3$ и $\xi_i = 0$ с вероятностью $2/3$. Отсюда математическое ожидание ξ_i равно $1/3$. Общее число назвавших себя высокими равно $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Из линейности математического ожидания получаем $M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 + \dots + M\xi_n = n/3$.

24. Пусть ξ_i — случайная величина, равная 1, если подарок из i-го ящика взят, и 0, если не взят. Очевидно,

$$P\{\xi_i = 0\} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m, \quad P\{\xi_i = 1\} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m.$$

Поэтому

$$M\xi_i = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m, \quad M\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M\xi_i = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right).$$

Мы нашли среднее число взятых подарков. Но число взятых подарков в нашей задаче совпадает с количеством детей, их получивших. Значит, без подарков уйдут в среднем $m - n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right)$ детей.

Замечание. Простое решение получилось за счёт случайных величин, связанных с *подарками*, несмотря на то, что вопрос задачи касался *детей*. Найти вероятность того, что заходящий i-м ребёнок уйдёт с подарком значительно сложнее и для решения задачи этого не требуется. Отметим, что при $m = n$ доля детей, оставшихся без подарка, составляет $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \approx (1/e)$-ю часть.

25. Мы должны посчитать матожидание натуральнозначной случайной величины, принимающий значения i, $i = 1, 2, \dots$ с некими вероятностями p_i, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} ip_i$. Один из способов подсчета такой суммы заключается в представлении её в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n$, где $q_n = \sum\limits_{i:i>n} p_i$ — вероятность того, что случайная величина принимает значения строго большие n (очевидно, что $q_0 = 1$).

Итак, подсчитаем вероятность q_n того, что после n шагов пьяница ещё на улице, то есть, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \leqslant 1$. Вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ равномерно распределён в n мерном единичном кубе $[0,1]^n$, мы должны найти объём его части, в которой сумма координат не превышает 1. Это пирамида с единичными рёбрами, образующими прямые углы, её объём есть $1/n!$. Искомое матожидание есть $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n = e$.

Вот такой неожиданный ответ!

26. Будем вращать барабан до тех пор, пока сумма выпавших очков впервые не станет большей либо равной n. Пусть случайная величина ξ — число таких вращений, а $p_k = P(\xi = k)$. Нужно вычислить $M\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} kp_k$.

Вычислим вероятность p_k в общем случае. Пусть x_i — количество очков, выпавшее при i-м вращении барабана. Если после k-го вращения текущая сумма выпавших очков меньше n, то существует решение в натуральных числах уравнения

$$x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1} = n.$$

Количество решений такого уравнения равно C_{n-1}^k. Значения x_1, $x_2, \ldots$, x_k описывают благоприятный исход интересующего нас опыта, а общее число исходов опыта, состоящего в том, что барабан крутится k раз, равно n^k. Поэтому

$$a_k = P(\xi > k) = \frac{C_{n-1}^k}{n^k}.$$

Очевидно, $p_n = a_{n-1}$, а при $k < n$ имеем

$$p_k = P(\xi > k-1) - P(\xi > k) = a_{k-1} - a_k.$$

Дальнейшие выкладки похожи на преобразование Абеля, являющееся дискретным аналогом интегрирования по частям:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k-1} - a_k) + na_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} (k-1)a_{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} ka_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^i}{n^i} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

Последний переход использует формулу бинома Ньютона.

Замечание. Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1} = e$, что соответствует ответу предыдущей задачи. Данная задача представляет собой её дискретный вариант.

27. Серия игр останавливается, когда обе команды одерживают по n или более побед. Поэтому окончательный счёт после серии $n : (n+k)$, причём последнюю игру выигрывает именно та команда, для которой эта победа n-я (иначе серия закончилась бы ранее). В предыдущих $2n+k-1$ играх она должна была выиграть ровно $n-1$ раз, неважно в каком порядке. Отсюда получаем (по формуле Бернулли) искомую вероятность.

28. Положение ломаной можно задать, составив последовательность из n символов X и n символов Y. В порядке прохождения этой последовательности мы строим ломаную, проводя звено ломаной вправо, если очередной член последовательности X, и вниз, если этот член Y.

Положение звёздочек зададим перестановкой $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$. Звёздочку в i-й строке расположим в клетке с номером π_i. В построенной выше последовательности символов X и

Y i-му по счёту символу Y присвоим индекс π_i, а символы X нам удобно занумеровать в порядке их следования. Получившаяся индексированная последовательность символов X, Y однозначно определяет и ломаную, и положение звёздочек.

Определим вероятность того, что все звёздочки окажутся левее ломаной. Чтобы это выполнялось, перед каждым символом Y_j должно стоять не менее j символов X, так как только в этом случае ломаная пересечёт соответствующую строку таблицы правее j-й клетки, в которой расположена звёздочка.

Свяжем это условие с геометрической вероятностью. Выберем случайным образом в единичном квадрате n точек, положения которых равновозможны в любом месте квадрата. Пронумеруем их координаты (X_i, Y_i) в порядке возрастания абсцисс. Затем расставим символы X_i, Y_i в порядке возрастания их значений. Так как эти значения являются независимыми случайными величинами, последовательности, получающиеся при этом, равновозможны. Это именно те последовательности, которые определяют расположение ломаной и звёздочек в таблице. При этом условие, отмеченное в предыдущем абзаце, означает, что $X_j < Y_j$ для всех j, то есть, что все n точек в квадрате располагаются выше диагонали $y = x$. Вероятность этого $1/2^n$. Тогда вероятность того, что все звёздочки расположены по одну сторону от ломаной, в два раза больше и равна $1/2^{n-1}$.

29. 1-й способ. Введём событие A_n: «все числа на вынутых шарах различные». Пусть $P(A_n) = p_n$. Очевидно, $p_1 = 1$. Выразим p_{k+1} через p_k. Выделим первую урну и рассмотрим две гипотезы:

H_1: «в урне шары с одинаковыми числами»;

H_2: «в урне шары с разными числами».

Если выполняется H_1, то первая урна ни на что не влияет, и искомая вероятность равна p_k. Пусть теперь выполняется H_2, причём в первой урне шары с числами a и b, а вынут шар с числом a. Рассмотрим другую урну с числом b, содержащую также число c. Для осуществления события A_{k+1} требуется, чтобы из этой урны было вынут шар с числом b; вероятность этого равна $1/2$.

Если это произойдёт, то ситуация будет равносильна тому, что исключили вторую урну и два шара с числом b, а в первой урне находились шары с числами a и c. При этом нет никаких ограничений на распределение шаров в оставшихся урнах: числа a и c могут быть равными. Поэтому соответствующая условная вероятность также равна p_k. Тогда, по формуле полной вероятности, получаем

$$p_{k+1} = P(A_k) = P(H_1)P(A_{k+1}/H_1) + P(H_2)P(A_{k+1}/H_2) =$$
$$= \frac{1}{2k+1} \cdot p_k + \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{1}{2} p_k = \frac{k+1}{2k+1} p_k,$$

откуда $p_n = 1 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{5} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n}{2n-1} = \dfrac{n!}{(2n-1)!!}$.

2-й способ. Пусть из i-й урны извлекается шар с номером a_i, после чего в нём остаётся шар с номером b_i. Все исходы опыта можно описать последовательностью $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$, в которой каждое число от 1 до n встречается по два раза. Всего таких перестановок с повторениями $\dfrac{(2n)!}{(2!)^n} = \dfrac{(2n)!}{2^n}$. В благоприятных исходах опыта числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ образуют перестановки чисел от 1 до n. Поэтому количество благоприятных исходов равно $(n!)^2$. Значит, искомая вероятность равна $\dfrac{(n!)^2 \cdot 2^n}{(2n)!}$.

30. Пусть искомая вероятность x (то, что она существует, следует из конечности числа мостов).

Предположим, что лодка не может проплыть под неразрушенным мостом, а под разрушенным может. Тогда перейти с северного берега на южный можно тогда и только тогда, когда лодка не может переплыть с запада на восток. Видно, что схема возможного движения лодки получается поворотом на 90° схемы возможного движения пешехода. Поэтому вероятность переплыть равна вероятности перейти, т. е. $x = 1 - x$. Отсюда $x = 1/2$.

31. «Брошенные» точки обозначим через A_i, а граничные точки равных дуг — через B_i. Без ограничения общности можно считать, что одна из вершин B_k совпадает с одной из точек A_ℓ. Действительно, множество $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ можно поворачивать вокруг центра окружности до тех пор, пока не произойдёт совпадения; при этом, если разбиение на дуги было искомым, то оно останется таковым и после «поворота до упора». Заметим также, что если искомое разбиение на дуги существует, то, с точностью до нулевой вероятности, точка A_ℓ определена однозначно — совместив конец дуги с любой другой точкой A_m, мы обнаружим на одной из дуг две точки. Действительно, центральный угол по часовой стрелке между A_ℓ и любой точкой A_m при $m > \ell$ составляет более $2\pi(m-\ell)/n$. Поэтому, если мы совместим начало дуги с A_m, то, дойдя по часовой стрелке до A_ℓ, мы обнаружим «лишние» точки.

Итак, для каждого ℓ и фиксированного набора дуг, «стартующего» с A_ℓ, нужно найти вероятность того, что остальные $n-1$ точек распределятся по одной на дуге (конкретно, на $n-1$ дугах, не считая той, что занята точкой A_ℓ), а потом просуммировать по всем выборам точки A_ℓ, то есть умножить на n. Легко видеть, что для фиксированного ℓ эта вероятность (вероятность каждого из n несовместных событий) равна

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}.$$

После умножения на n получаем окончательный ответ: $\dfrac{(n-1)!}{n^{n-2}}$.

32. Доказательство того, что ответ в задаче 1/2, может быть произведено индукцией по n, если воспользоваться формулой полной вероятности и тем, что пассажир, чьё место заняла старушка, сам начинает играть её роль. Однако, у этой задачи имеется другое более элементарное решение, позволяющее моментально решить не только эту задачу, но и её обобщение.

Достаточно заметить, что для последнего пассажира имеются только две альтернативы — в конце посадки в самолёте останется свободным либо его место, либо место старушки, причём все ранее заходящие одинаково индефферентны к обоим этим местам. Поэтому ответ задачи обратен количеству альтернатив, то есть равен 1/2.

В случае «k старушек» (и соответственно $n > k$) аналогично получаем, что вероятность того, что последний пассажир окажется на своём месте, есть $\dfrac{1}{k+1}$.

Краткие комментарии к задачам 33–40

33. У этой задачи имеется решение в «одно соображение», аналогично решению предыдущей задачи.

34. Случай $p = 0$ известен со времен Л. Эйлера — см., например, [4, задача 46], предел в общем случае несложно свести к частному.

35. Это задача, очевидно, обобщение задачи 17.

36. Достаточно рассмотреть случай единичной окружности с фиксированной первой точкой $(1, 0)$.

37. Для решения задачи через геометрическую вероятность надо из n-мерного единичного кубика исключить n пирамидок объёма $\dfrac{1}{n!}$.

38. Задача взята из [9, раздел «Вместо заключения»].

39. Количество искомых троек совпадает с количеством способов выбора пары чисел одинаковой чётности, т.е. с $2C_{50}^2$.

40. Ответ легко получается, если воспользоваться кодом Прюфера при рассмотрении помеченных деревьев на 10 вершинах.

Литература

[1] Беррондо, М. *Занимательные задачи* — М.: Мир, 1983. — 230 с.

[2] Бронштейн, Е. М. *Задачи студенческих олимпиад по математике УГАТУ* / Е. М. Бронштейн, В. В. Водопьянов, Р. Д. Муртазин и др. — Уфа: УГАТУ, 2011. — 72 с.

[3] *Вся высшая математика:* учебник / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко и др. — М.: КомКнига, 2017. — Т. 7 — 208 с.

[4] Гарднер, М. *А ну-ка, догадайся!* — М.: Мир, 1984. — 213 с.

URL: http://golovolomka.hobby.ru/books/gardner/gotcha/content.shtml

[5] Гусейн-Заде, С. М. *Разборчивая невеста.* (Серия: Библиотека «Математическое просвещение». Вып. 25) — М.: МЦНМО, 2003. — 24 с.

URL: http://www.math.ru/lib/files/pdf/mp-seria/book.25.pdf

[6] Игнатов, Ю. А. *Задачи студенческих математических боёв* / Ю. А. Игнатов, В. А. Шулюпов, А. Ю. Эвнин. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2005. — 43 с.

[7] Игнатов, Ю. А. *Всероссийские студенческие турниры математических боёв. Тула, 2002–2015* В 2-х ч. Часть I / Ю. А. Игнатов, В. А. Шулюпов, И. Ю. Реброва и др. — Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2016. — 148 с.

[8] *Казанские студенческие олимпиады по математике:* сборник задач / сост.: И. С. Григорьева. — Казань: Казанский университет, 2011. — 48 с.

URL: http://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F1556774232/Stud..olimpiady.pdf

[9] *Казанские студенческие олимпиады по математике, посвящённые дню рождения Н. И. Лобачевского, ч. 2:* сборник задач / И. С. Григорьева, Э. Ю. Лернер. — Казань: Казанский университет, 2015. — 36 с.

URL: http://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F476091938/ForPrintProblems2010_2015Final.pdf

[10] Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. *Введение в теорию вероятностей* — М., 1995. — 176 с. (Б-чка «Квант»; Вып. 23).

[11] Конягин, С.В. *Зарубежные математические олимпиады* / С. В. Конягин, Г. А. Тоноян, И. Ф. Шарыгин и др.; под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука, 1987. — 416 с.

[12] Мостеллер, Ф. *Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями* — М.: Наука, 1975. — 112 с.

URL: http://ilib.mccme.ru/djvu/50zadach.htm

[13] Секей Г. *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике* — М.: Мир, 1990. — 240 с.

[14] Шень А. *Вероятность: примеры и задачи.* 3-е изд., дополненное — М.: МЦНМО, 2012. — 72 с.

URL: https://hal-lirmm.ccsd.cnrs.fr/lirmm-00786358/document

[15] Эвнин, А. Ю. *Сто пятьдесят красивых задач для будущих математиков* / А. Ю. Эвнин. — М.: КРАСАНД, 2017. — 224 с.

[16] Эвнин, А. Ю. *Математический конкурс в ЮУрГУ* / А. Ю. Эвнин. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. — 86 с.

[17] Эвнин, А. Ю. *Задачи математического конкурса в ЮУрГУ* / А. Ю. Эвнин // Математическое образование. — 2015. — № 4(76). — С. 26–52.

[18] Эвнин, А. Ю. *Математические олимпиады в ЮУрГУ 2010–2015 гг.* / А. Ю. Эвнин. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. – 63 с.

Эвнин Александр Юрьевич,
доцент кафедры прикладной математики и программирования Южно-Уральского государственного университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru

Лернер Эдуард Юльевич,
доцент кафедры анализа данных и исследования операций Казанского (Приволжского) федерального университета,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: eduard.lerner@gmail.com

Игнатов Юрий Александрович,
доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: ignatov-yurii@mail.ru

Григорьева Ирина Сергеевна,
доцент кафедры мат. статистики Института ВМ и ИТ Казанского (Приволжского) федерального университета,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: igrigori_@mail.ru