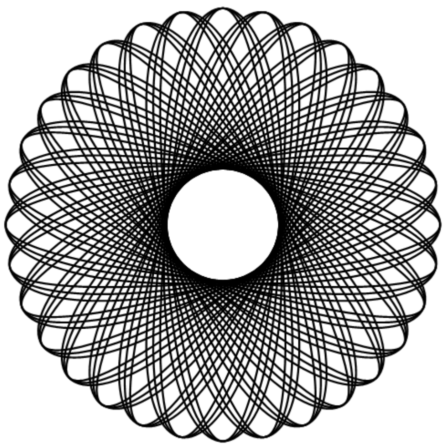
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ (ПОВОЛЖСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ОЛИМПИАДНЫЙ ЦЕНТР РТ

Математические олимпиады школьников Татарстана

2019-2020 и 2020-2021



Казань – 2022

УДК 373.167.1:51
ББК 74.200.58:22.1

Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики и механики КФУ
им. Н.И. Лобачевского

Киндер М.И.

Математические олимпиады школьников Татарстана. 2019-2020 и 2020-2021: Учебно-методическое пособие / Автор–составитель М.И. Киндер. — Казань: Казанский федеральный университет, 2022. — 153 с.

Брошюра предназначена для школьников, учителей, преподавателей математических кружков и просто любителей математики. В ней представлены задачи, предлагавшиеся в 2019-2020 и 2020-2021 учебных годах на муниципальном и региональном этапах математических олимпиад школьников Татарстана, а также задачи открытой олимпиады имени В. Р. Фридлендера, олимпиады «Путь к Олимпу», межрегиональной предметной олимпиады Казанского федерального университета и задачи Турнира юных математиков им. Н. И. Лобачевского для учеников 5-7 классов.

Все задачи приведены с подробными решениями, условия и решения геометрических задач сопровождаются рисунками.

2019-2020 учебный год

Муниципальный этап 46-й Всероссийской олимпиады по математике среди школьников Республики Татарстан состоялся 21 ноября 2019 г. В составлении задач муниципальной олимпиады принимали участие преподаватели Казанского университета:

И. С. Григорьева, М. И. Киндер, В. А. Сочнева.

17 января 2020 г. прошла открытая Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике. Олимпиада традиционно проводится в два этапа: отборочный (дистанционно) и заключительный (очно). Составители задач:

Шурыгин В.В.-мл. (9 класс) и *Киндер М.И.* (10-11 классы).

С 20 по 21 января 2020 г. прошла республиканская математическая олимпиада «Путь к Олимпу», её основные участники – сельские школьники 8-11-х классов РТ.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников и олимпиада им. Л. Эйлера состоялись 5–6 февраля 2020 г.

1 ноября этого же года состоялась 10-я ежегодная городская математическая олимпиада, посвящённая памяти В. Р. Фридлендера. По традиции на неё были приглашены ученики 8-11 классов города Казани. Отличительная особенность этой олимпиады в том, что предлагавшиеся задачи были общими для всех участников. По традиции победители и призёры олимпиады получили приглашение в летнюю школу «Квант».

В составлении задач олимпиады принимали участие:

М. Д. Бронштейн, И. С. Григорьева, В. А. Сочнева.

6-го декабря 2020 года Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Региональный научно-образовательный математический центр КФУ совместно с лицеем имени Н. И. Лобачевского КФУ и IT-лицеем КФУ провели Турнир юных математиков имени Н. И. Лобачевского для учеников 5-7-х классов. В олимпиаде приняли участие около 800 школьников Республики Татарстан. Составитель задач Турнира юных математиков:

М. И. Киндер.

Ниже представлены условия и подробные решения задач всех перечисленных олимпиад. Для Турнира юных математиков приведены условия и подробные решения только одного из четырёх вариантов, задачи других вариантов аналогичны. В скобках после условия задачи указана фамилия её автора.

Муниципальный этап

8 класс

1. Начинающий цветовод высадил на свою грядку ромашки, лютики и маргаритки. Когда они взошли, оказалось, что ромашек в 5 раз больше, чем не-ромашек, лютиков — в 5 раз меньше, чем не-лютиков. Какую долю среди проросших растений занимают маргаритки?

2. Коля старше Толи, и возраст каждого из них — целое число, меньшее 100. Если поменять местами цифры возраста Коли, получится возраст Толи. Более того, разность между квадратами их возрастов является квадратом целого числа. Сколько лет каждому?

3. Вика записывает свои оценки с начала года. В начале второй четверти она получила пятерку, вследствие чего доля пятерок увеличилась на 0,15. После очередной оценки доля пятерок увеличилась еще на 0,1. Сколько пятерок ей нужно теперь получить, чтобы увеличить их долю еще на 0,2?

4. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M, лежащей на стороне CD. Обозначим точку пересечения биссектрис углов C и D через N. Докажите, что $MN \parallel AD$.

5. Трудолюбивая Ася перемножила два трёхзначных числа, а ленивый Петя просто написал их подряд одно за другим. Результат Пети оказался в 7 раз больше, чем у Аси. Какие числа она перемножала?

9 класс

6. Почтальон Печкин подсчитал, что две трети пути он шел пешком со скоростью 5 *км/ч*, и только треть времени — ехал на велосипеде со скоростью 8 *км/ч*. Не ошибся ли он в расчетах?

7. Школьная волейбольная команда провела несколько матчей. После того, как она выиграла очередной матч, доля побед стала на величину $1/6$ больше. Чтобы увеличить долю побед ещё на $1/6$, волейболистам пришлось выиграть ещё два матча подряд. Какое минимальное число побед нужно одержать команде, чтобы доля выигрышей увеличилась ещё на $1/6$?

8. Можно ли среди чисел $2^{2^n}+1$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, найти хотя бы один куб целого числа?

9. В равнобедренном треугольнике ABC угол A равен $90°$, точка M — середина AB. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная CM, пересекает сторону BC в точке P. Докажите, что $\angle AMC = \angle BMP$.

10. На доске записан пример на умножение двух трёхзначных чисел. Если вместо знака умножения написать 0, получим семизначное число, которое в целое число раз больше произведения. Во сколько именно?

10 класс

11. У Пятачка есть воздушные шарики пяти цветов. Ему удалось расположить их в ряд таким образом, что для *любых* двух различных цветов в ряду всегда найдутся два соседних шарика этих цветов. Какое наименьшее количество воздушных шариков могло быть у Пятачка?

12. Действительные числа a, b и c таковы, что $|\,a\,| \geqslant |\,b+c\,|$, $|\,b\,| \geqslant |\,c+a\,|$ и $|\,c\,| \geqslant |\,a+b\,|$. Докажите, что $a+b+c=0$.

13. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y = |\,2x+3\,| - |\,2x-3\,| \\ 4x = \ |\,y+2\,| - |\,y-2\,|. \end{cases}$$

14. В остроугольном треугольнике ABC биссектрисы углов A. B и C пересекают описанную окружность треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямые AB и B_1C_1 пересекаются в точке M, прямые BC и A_1B_1 — в точке N. Верно ли, что прямая MN проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC?

15. Из 80 одинаковых деталей лего собрали несколько фигурок, причём число использованных деталей во всех фигурках разное. На изготовление трёх самых маленьких фигурок ушло 14 деталей, в трёх самых больших использовано суммарно 43. Сколько собрали фигурок? Сколько деталей в самой большой фигурке?

11 класс

16. Даны три числа. Если их все уменьшить на 1, то их произведение тоже уменьшится на 1. Если все исходные числа уменьшить на 2, то их произведение тоже уменьшится на 2.

а) На сколько уменьшится произведение, если все исходные числа уменьшить на 3?

б) Укажите какие-нибудь три числа, удовлетворяющие условию задачи.

17. В некоторой системе координат построили график функции $y = \cos^2 x$. После чего координатные оси стерли. Постройте систему координат так, чтобы эта же линия стала графиком функции $z = \cos t$ в новой системе координат.

18. Действительные числа a, b и c таковы, что $|a| \geqslant |b+c|$, $|b| \geqslant |c+a|$ и $|c| \geqslant |a+b|$. Докажите, что $a+b+c=0$.

19. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1 проведена диагональ AC_1. Для каждой точки N, лежащей на этой диагонали, построено сечение куба плоскостью, перпендикулярной AC_1 и проходящей через N. Пусть P — периметр этого сечения. Постройте график зависимости P от величины $x = AN$.

20. Дед Мороз готовит подарки. Он разложил 115 конфет в пакеты, причём все они разные по числу конфет. В трёх самых маленьких подарках находится 20 конфет, в трёх самых больших — 50. Во сколько пакетов разложены конфеты? Сколько конфет в самом маленьком подарке?

Межрегиональная олимпиада КФУ

9 класс

21. График функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает оси координат в трёх различных точках. Докажите, что треугольник с вершинами в этих точках является прямоугольным тогда и только тогда, когда $ac = -1$.

22. Найдите две последние цифры перед запятой (цифры единиц и десятков) в десятичной записи числа

$$\frac{10^{120}}{10^5+1}.$$

23. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P так, что $PC = BC$. Точка E — середина отрезка AP, а точка F — середина отрезка CD. Докажите, что прямые BP и EF перпендикулярны.

24. Дан квадрат 7×7 (сторона клетки равна 1). *Клетчатой фигуркой* назовём многоугольник, составленный из клеток. *а*) Можно ли его разбить на 12 клетчатых фигурок, периметры которых одинаковы? *б*) Можно ли его разбить на 13 клетчатых фигурок, периметры которых одинаковы?

10 класс

25. Провод длиной d метров разрезали на два куска. Можно ли из образовавшихся двух частей провода вырезать куски длиной 1, 2, 3, 6 и 12 метров, если *а*) $d = 25$; *б*) $d = 24,99$?

26. Многочлен $f(x) = ax^{100} + bx + c$ принимает целые значения при любых целых x. Какое наименьшее положительное значение может принимать a?

27. На каждой грани куба написано по одному положительному числу. Для каждой вершины подсчитали произведение чисел на трёх примыкающих к ней гранях, сумма восьми полученных чисел оказалась равной 1000. Найдите наименьшее возможное значение суммы шести чисел, написанных на гранях куба.

28. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке M, а прямые BC и AD — в точке N. Пусть B_1 — точка пересечения данной окружности с окружностью, проходящей через точки B, M и N, отличная от B. В каком отношении прямая B_1D делит отрезок MN?

11 класс

29. Провод длиной d метров разрезали на два куска. Можно ли из образовавшихся двух частей провода вырезать куски длиной 1, 2, 3, 6 и 12 метров, если *а*) $d = 25$; *б*) $d = 24,99$?

30. Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет равенству $f(x)f(y) = f(x - y)$. Известно, что $f(\frac{1}{2}) = 1$. Чему равно $f(2020)$?

31. Неотрицательные числа a, b, c и d таковы, что $a + b + c + d = 4$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $S = ab+bc+cd$ и определите все четвёрки (a, b, c, d) чисел, для которых это максимальное значение достигается.

32. На сторонах BC и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно так, что $BD = AE$. Прямая, соединяющая центры описанных окружностей треугольников ADC и BEC, пересекает прямые AC и BC в точках K и L соответственно. Чему равно отношение $KC : LC$?

Олимпиада имени Л. Эйлера

8 класс

33. Сумму цифр шестизначного числа умножили на произведение его цифр. Получилось 390. Найдите хотя бы одно такое шестизначное число. (*И. Рубанов*)

34. На доске написано n целых чисел, любые два из которых отличаются хотя бы на 3. Сумма квадратов двух наибольших из них меньше 500. Сумма квадратов двух наименьших из них также меньше 500. При каком наибольшем n это возможно?

(*Р. Женодаров, С. Берлов*)

35. Биссектриса угла A выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекает сторону CD в точке K. Оказалось, что $DK = BC$ и $KC + AB = AD$. Докажите, что $\angle BCD = \angle ADC$. (*С. Берлов*)

36. На полуокружности расположено 50 точек. Любые две точки, между которыми не более 9 других точек, соединены отрезком. *Степенью точки* назовём количество отрезков, выходящих из неё. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. Панда своим ходом может стереть один отрезок, соединяющий точки, сумма степеней которых чётна. Вомбат может своим ходом стереть один отрезок, соединяющий точки, сумма степеней которых нечётна. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из зверей выиграет при правильной игре?

(*С. Берлов*)

37. Замкнутая ломаная состоит из 1001 звена и такова, что никакие три её вершины не лежат на одной прямой. Известно, что каждое её звено, кроме, может быть, двух, пересекает все 998 звеньев, не имеющих с ним общих концов. Верно ли, что каждое из двух оставшихся звеньев тоже пересекает все 998 звеньев, не имеющих с ним общих концов?

(*Р. Женодаров, О. Дмитриев, жюри*)

38. Петя и Вася стартуют по круговой дорожке из одной точки в направлении против часовой стрелки. Оба бегут с постоянными скоростями, скорость Васи вдвое больше скорости Пети.

Петя всё время бежит против часовой стрелки, а Вася может менять направление бега, если он перед этим пробежал полкруга или больше в одном направлении. Покажите, что пока Петя бежит первый круг, Вася может трижды, не считая момента старта, поравняться (встретиться или догнать) с ним. (*И. Рубанов*)

39. Зелёный хамелеон всегда говорит правду, а коричневый хамелеон врёт, после чего зеленеет. В компании из 2019 хамелеонов каждый по очереди ответил на вопрос, сколько среди них сейчас зелёных. Ответами были числа 1, 2, 3, ..., 2019 (в некотором порядке, не обязательно в указанном выше). Какое наибольшее число зелёных хамелеонов могло быть изначально?

(*Р. Женодаров, О. Дмитриев*)

40. Можно ли отметить в ряду всех натуральных чисел бесконечно много чисел так, чтобы разность любых двух отмеченных чисел (где из большего вычитается меньшее) была квадратом натурального числа? (*А. Голованов*)

41. В строку выписано 1999 натуральных чисел. Во вторую строку под каждыми двумя соседними числами выписали их наибольший общий делитель. Аналогичным образом получили третью, четвёртую и т. д. строки. Может ли 1000-я строка состоять из 1000 последовательных чисел в некотором порядке?

(*С. Берлов*)

42. На средней линии равностороннего треугольника ABC, параллельной стороне BC, взята точка D. Точка E на продолжении стороны BA за точку A такова, что $\angle ECA = \angle DCA$. Точка F на продолжении стороны CA за точку A такова, что $\angle FBA = \angle DBA$. Докажите, что точка A лежит на средней линии треугольника DEF, параллельной стороне EF. (*А. Кузнецов*)

Региональный этап

9 класс

43. Изначально на столе лежали 10 куч конфет, в которых было $1, 2, \ldots, 10$ конфет соответственно. Малыш решил перераспределить конфеты. На каждой нечётной минуте он выбирает одну из куч и делит её на две кучи, в каждой из которых хотя бы по одной конфете. На каждой чётной минуте он выбирает две кучи и объединяет их в одну (таким образом, первым действием он делит кучу на две). Может ли в некоторый момент оказаться, что все кучи на столе содержат одно и то же количество конфет?

(*Н. Агаханов, жюри*)

44. На доске написаны n различных целых чисел, любые два из них отличаются хотя бы на 10. Сумма квадратов трёх наибольших из них меньше трёх миллионов. Сумма квадратов трёх наименьших из них также меньше трёх миллионов. При каком наибольшем n это возможно? (*Р. Женодаров, С. Берлов*)

45. Коля и Дима играют в игру на доске 8×8, делая ходы по очереди, начинает Дима. Коля рисует в клетках крестики, а Дима накрывает прямоугольниками 1×2 (*доминошками*) пары соседних по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (то есть в клетку, в которой ещё не нарисован крестик и которая ещё не покрыта доминошкой). Дима за свой ход должен накрыть доминошкой две соседних клетки (ещё не накрытые другими доминошками), в которых суммарно чётное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию? (*М. Дидин*)

46. Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число y, меньшее $p/2$ и такое, что число $py+1$ невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше y. (*М. Антипов*)

47. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Докажите, что диаметр окружности ω не превосходит длины отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD. (*О. Южаков*)

48. Петя и Миша стартуют по круговой дорожке из одной точки в направлении против часовой стрелки. Оба бегут с постоянными скоростями, скорость Миши на 2% больше скорости Пети. Петя всё время бежит против часовой стрелки, а Миша может менять направление бега в любой момент, непосредственно перед которым он пробежал полкруга или больше в одном направлении. Покажите, что пока Петя бежит первый круг, Миша может трижды, не считая момента старта, поравняться (встретиться или догнать) с ним. (*И. Рубанов*)

49. Зелёный хамелеон всегда говорит правду, а коричневый хамелеон врёт, после чего зеленеет. В компании из 2019 хамелеонов (зелёных и коричневых) каждый по очереди ответил на вопрос, сколько среди них сейчас зелёных. Ответами были числа 1, 2, 3, …, 2019 (в некотором порядке, причём не обязательно в указанном выше). Какое наибольшее число зелёных хамелеонов могло быть изначально? (*Р. Женодаров, О. Дмитриев*)

50. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Окружность, описанная около треугольника ABL, пересекает сторону BC в точке D. Оказалось, что точка S, симметричная точке C относительно прямой DL, лежит на стороне AB и не совпадает с её концами. Какие значения может принимать $\angle ABC$? (*Б. Обухов, жюри*)

51. Назовём многоугольник *хорошим*, если у него найдётся пара параллельных сторон. Некоторый правильный многоугольник разрезали непересекающимися (по внутренним точкам) диагоналями на несколько многоугольников так, что у всех этих многоугольников одно и то же нечётное количество сторон. Может ли оказаться, что среди этих многоугольников есть хотя бы один хороший? (*И. Богданов*)

52. Докажите, что для любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_9$ верно неравенство

$$\frac{x_1-x_3}{x_1x_3+2x_2x_3+x_2^2}+\frac{x_2-x_4}{x_2x_4+2x_3x_4+x_3^2}+\ldots+ \\ +\frac{x_8-x_1}{x_8x_1+2x_9x_1+x_9^2}+\frac{x_9-x_2}{x_9x_2+2x_1x_2+x_1^2}\geqslant 0.$$

(*П. Бибиков*)

10 класс

53. Найдите хотя бы одно четырёхзначное число, обладающее следующим свойством: если сумму всех цифр этого числа умножить на произведение всех его цифр, то в результате получится 3990. (*И. Рубанов*)

54. Множество A состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Множество B также состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Докажите, что найдётся число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B. (*Д. Храмцов*)

55. Коля и Дима играют в игру на доске 8×8, делая ходы по очереди, начинает Коля. Коля рисует в клетках крестики, а Дима накрывает прямоугольниками 1×2 (*доминошками*) пары соседних по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (то есть в клетку, в которой ещё не нарисован крестик и которая ещё не покрыта доминошкой). Дима за свой ход должен накрыть доминошкой две клетки (ещё не накрытые другими доминошками), в которых суммарно чётное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию? (*М. Дидин*)

56. Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число y, меньшее $p/2$ и такое, что число $py+1$ невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше y. (*М. Антипов*)

57. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Докажите, что диаметр окружности ω не превосходит длины отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD. (*О. Южаков*)

58. На доске написано выражение $\cos x$. Разрешается сложить или перемножить несколько написанных на доске выражений (одно выражение может использоваться несколько раз) и дописать полученное новое выражение на доску. Можно ли за несколько действий получить выражение, которое при $x = \pi$ принимает значение 0? (*Н. Агаханов*)

59. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены прямоугольники. Оказалось, что все вершины этих прямоугольников, отличные от точек A, B, C, D, лежат на одной окружности. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — вписанный. (*А. Кузнецов*)

60. На доске пишут n квадратных трёхчленов вида $*x^2 + *x + *$ (вместо коэффициентов написаны звёздочки). Можно ли при каком-либо $n > 100$ поставить вместо $3n$ звёздочек некоторые $3n$ последовательных натуральных чисел (в каком-то порядке) так, чтобы каждый из n данных трёхчленов имел два различных целых корня? (*О. Южаков*)

61. Назовём многоугольник *хорошим*, если у него найдётся пара параллельных сторон. Некоторый правильный многоугольник разрезали непересекающимися (по внутренним точкам) диагоналями на несколько многоугольников так, что у всех этих многоугольников одно и то же нечётное количество сторон. Может ли оказаться, что среди этих многоугольников есть хотя бы один хороший? (*И. Богданов*)

62. Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax^2 + bx + c$ (то есть степень каждого многочлена не превышает двух). За ход Вася называет Пете число t, а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После n ходов Вася должен определить один из петиных многочленов. При каком наименьшем n у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться? (*М. Антипов*)

11 класс

63. На доске написано n различных целых чисел. Произведение двух наибольших равно 77. Произведение двух наименьших тоже равно 77. При каком наибольшем n это возможно? (*Р. Женодаров, жюри*)

64. Множество A состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Множество B также состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Докажите, что найдётся число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B. *(Д. Храмцов)*

65. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. На стороне BC отмечена точка D, на отрезке BH — точка E, а на отрезке CH — точка F так, что $\angle BAD = \angle CAE$ и $\angle AFE = \angle CFD$. Докажите, что $\angle AEF = 90^\circ$. *(Б. Обухов)*

66. Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число y, меньшее $p/2$ и такое, что число $py+1$ невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше y. *(М. Антипов)*

67. В таблице $N \times N$ расставлены все натуральные числа от 1 до N^2. Число назовём *большим*, если оно наибольшее в своей строке, и *малым*, если оно наименьшее в своём столбце (таким образом, число может быть и большим, и малым одновременно, а может не быть ни тем, ни другим). Найдите наименьшую возможную разность между суммой всех больших чисел и суммой всех малых чисел. *(С. Токарев)*

68. На доске написаны функции: $x+1$, x^2+1, x^3+1, x^4+1. Разрешается дописывать на доску новые функции, получаемые из написанных на доске с помощью операций вычитания и умножения. Покажите, как получить ненулевую функцию, которая при положительных значениях аргумента принимает неотрицательные значения, а при отрицательных значениях аргумента — неположительные значения. *(Н. Агаханов)*

69. Можно ли раскрасить все натуральные числа в два цвета так, чтобы никакая сумма двух различных одноцветных чисел не являлась степенью двойки? *(Д. Храмцов)*

70. Известно, что для некоторых x и y суммы $\sin x + \cos y$ и $\sin y + \cos x$ — положительные рациональные числа. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и n, что $m \sin x + n \cos x$ — натуральное число. *(Н. Агаханов)*

71. Три сферы попарно касаются внешним образом в точках A, B и C, а также касаются плоскости α в точках D, E и F. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, меньше, чем радиус окружности, описанной около треугольника DEF. *(А. Кузнецов)*

72. Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax^2 + bx + c$ (то есть степень каждого многочлена не превышает двух). За ход Вася называет Пете число t, а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После n ходов Вася должен определить один из петиных многочленов. При каком наименьшем n у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться? *(М. Антипов)*

Олимпиада имени В. Р. Фридлендера

73. Петя складывал два натуральных числа и нечаянно приписал в конце одного из них какую-то цифру. Поэтому вместо правильного ответа 13 579 он получил число 24 689. Какие числа должен был сложить Петя?

74. Существует ли функция $f(x)$, заданная на всей числовой прямой, для которой равенство $f(x) + f(1/x) = x^2$ выполняется для всех $x \neq 0$?

75. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин и всех сторон треугольника наименьшая.

76. Среднее арифметическое 101 различного натурального числа равно 70. Каким может быть наибольшее значение наибольшего из этих чисел? Каким может быть наименьшее значение наибольшего из них?

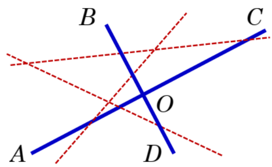


Рис. 1

77. В городе 2020 домов, в каждом по 2019 комнат, в каждой 2018 кошек, каждая из которых держит по 2017 мышек. Можно ли рассадить всех этих мышек по одной на все клетки квадратного игрового поля, если к ним добавить ещё одну?

78. Все корни уравнения $x^2 - 2(p-1)x + 3p - 5 = 0$ положительны. При каких значениях p это возможно?

79. Дан многочлен $P(x) = x^{2020} - 12x^{1002} + 7x^{201} + 10x^{14} + 9x^3 - 12x + 4$. Найдите остаток от деления его на $x^3 - x$.

80. На рисунке 1 показаны оси декартовой системы координат (жирные линии) и графики прямых $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$. Укажите положительное направление оси Ox.

81. Отрезки AC и BC равны и перпендикулярны. Найдите множество всех точек M таких, что $\angle AMC = \angle BMC$.

82. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Точки P и Q являются серединами ребер AB и BC.

а) Постройте сечение куба плоскостью PQD_1.

б) Какова площадь этого сечения?

Турнир юных математиков им. Н. И. Лобачевского

5 класс

83. Буратино купил мороженое в пачках по 30 рублей и по 50 рублей. Стоимость всех 30-рублёвых пачек мороженого равна общей стоимости 50-рублёвых. Сколько всего пачек мороженого купил Буратино, если было куплено не более 20 пачек?

84. Найдите наименьшее натуральное n, для которого произведение чисел n, $n+1$ и $n+2$ делится на 100.

85. За круглым столом сидят 99 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Среди сидящих за столом есть хотя бы один рыцарь. Каждый из них утверждает: «Мои соседи — рыцарь и лжец». Сколько рыцарей сидит за столом?

86. Разрежьте клетчатый прямоугольник размером 6×7 по клеточкам на максимальное количество «уголков» шириной в одну клетку так, чтобы все «уголки» состояли из *разного* числа клеток. (Длины «сторон» уголка могут быть как одинаковыми, так и различными.)

87. В наборе были гирьки с массами 11, 12 и 13 граммов, поровну каждого вида. После того как несколько гирек потерялось, все оставшиеся гирьки взвесили, их масса оказалась равной 1000 граммов. Какое *наименьшее* количество гирек могло быть потеряно?

6 класс

88. Найдите *наименьшее* натуральное число n, для которого произведение $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 100.

89. Вокруг круглого стола сидят девять человек — каждый либо рыцарь, либо лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжет. Каждого из них спросили: «Кто сидит *справа* от тебя?» *а*) Могли ли они все ответить «рыцарь»? *б*) Могли ли они все ответить «лжец»?

90. Числа 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 расставили в кружочках на рисунке 2 так, что суммы всех пяти троек чисел, расположенных «на отрезках», оказались равны между собой. Чему равно число x, стоящее в верхнем кружочке? Укажите все возможные варианты.

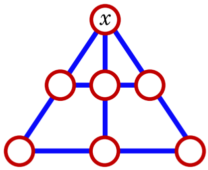


Рис. 2

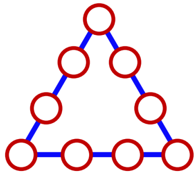


Рис. 3

91. В игре «Морской бой» на клетчатой доске 8×14 расположен один клетчатый корабль размера 1×3. Одним выстрелом можно прострелить целиком *все* клетки одной строки или одного столбца. Какого *минимального* количества выстрелов хватит, чтобы гарантированно ранить корабль?

92. В наборе были гирьки с массами 13, 14 и 15 граммов, поровну каждого вида. После того как несколько гирек потерялось, все оставшиеся гирьки взвесили, их масса оказалась равной 1000 граммов. Какое *наименьшее* количество гирек могло быть потеряно?

7 класс

93. За столом сидят несколько детей. Из пакета с конфетами первый взял 1 конфету, второй — 2, третий — 3 и так далее: каждый следующий брал на одну конфету больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 81 конфету больше, чем на первом. Сколько детей сидело за столом?

94. Вокруг круглого стола сидят двенадцать человек — каждый либо рыцарь, либо лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжет. Каждого из них спросили: «Кто сидит *справа* от тебя?» Могла ли половина из них ответить «рыцарь», а половина — «лжец»?

95. Числа $1, 2, 3, \ldots, 9$ расставили в кружочках на рисунке 3 так, что суммы чисел на каждой стороне треугольника одинаковы и равны s. Какое *наибольшее* значение может принимать s?

96. На доске были написаны одиннадцать последовательных натуральных чисел. Когда из них стёрли шесть подряд идущих чисел, то сумма пяти оставшихся оказалась равна 100. Какие числа стёрли? Найдите все возможные варианты.

97. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BC = CD$, $AO = 8$ и $\angle BOC = 120°$. Чему равно DO?

Олимпиада «Путь к Олимпу»

8 класс

98. Карлсон, Малыш и Фрёкен Бок едят конфеты. Пока Фрёкен Бок съедает 3 конфеты, Малыш успевает съесть 5 конфет. Пока Малыш съедает 3 конфеты, Карлсон уплетает 5 конфет. Малыш и Фрёкен Бок посчитали, что вместе они съели 120 конфет. Сколько конфет съел Карлсон?

99. Найдите *наибольшее* трёхзначное число, которое без остатка делится на 4, 5, 6 и не делится на 7, 8 и 9. (*М. Киндер*)

100. На доске 2×15 расставлены фишки так, что если в какой-то клетке фишки нет, то фишка есть хотя бы в одной соседней с ней по стороне клетке. Какое *наименьшее* количество фишек может быть на доске?

101. Дан набор попарно различных целых чисел. Каждое из чисел набора является суммой каких-то двух других чисел, входящих в этот набор. *а*) Может ли такой набор состоять из 5 чисел? *б*) Каково наименьшее возможное количество чисел в таком наборе? (*И. Рубанов, вариация задачи*)

102. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне BC — точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $KN + LM \geqslant AC$. В каком случае $KN + LM = AC$? (*И. Богданов, вариация задачи*)

9 класс

103. Найдите *наибольшее* четырёхзначное число, которое без остатка делится на 4, 5, 6 и не делится на 7, 8 и 9. (*М. Киндер*)

104. Один раджа имел n сыновей и оставил им в наследство 100 бриллиантов. Завещание гласило, что первый сын получит $\frac{1}{n}$ часть всего наследства, второй — $\frac{1}{n}$ часть оставшегося наследства и ещё один бриллиант, третий — $\frac{1}{n}$ часть оставшегося после этого наследства и ещё два бриллианта, четвертый — $\frac{1}{n}$ часть оставшегося и ещё три бриллианта и так далее. Сколько было сыновей у раджи, если в результате все сыновья получили поровну?

105. Два игрока вставляют в запись $\ldots x + \ldots = \ldots x + \ldots$ вместо пропусков по одному из *данных* различных чисел a, b, c, d (в любом порядке, но без повторений). Когда все пропуски заполнятся, решают полученное уравнение. Если его корень — положительное число, выигрывает первый, иначе — второй. Кто выигрывает при правильной игре? (*В. Шорин*)

106. Пусть x и y — различные положительные числа. Какая из дробей больше:
$$\frac{2}{x+y} \quad \text{или} \quad \frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\ ?$$
(*М. Киндер*)

107. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне BC — точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $KM + LN \geqslant AC$. В каком случае $KM + LN = AC$? (*И. Богданов, вариация задачи*)

10 класс

108. *а*) Существует ли натуральное число n такое, что у n и $n + 2019$ одинаковая сумма цифр?

б) Тот же вопрос про числа n и $n + 2025$?

109. Пусть x и y — различные положительные числа. Какая из дробей больше:
$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \quad \text{или} \quad \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}\ ?$$
(*М. Киндер*)

110. На доске записаны натуральные числа от 1 до n. Паша выбирает два числа и находит их произведение, а Саша вычисляет сумму оставшихся $(n-2)$ чисел. Могут ли результаты мальчиков совпасть, если *а*) $n = 10$? *б*) $n = 15$?

111. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность. Высота BH вторично пересекает эту окружность в точке F. Из точки F провели перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке D. Найдите отношение $AH : HD$.

(*М. Киндер*)

112. Сумма неотрицательных чисел a, b, c, d равна 1. Найдите наибольшее возможное значение выражения $s = ab+bc+cd+da$.

11 класс

113. *а*) Существует ли натуральное число n такое, что у n и $n + 2020$ одинаковая сумма цифр?

б) Тот же вопрос про числа n и $n + 2025$?

114. Один из корней квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равен $1 + \sqrt{2020}$. Найдите числа p и q, если известно, что они рациональны.

115. Пусть x и y — положительные числа. Какая из дробей больше:

$$\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4} \quad \text{или} \quad \frac{x^5+y^5}{x^6+y^6}\,?$$

(*М. Киндер*)

116. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность. Высота BH вторично пересекает эту окружность в точке F. Из точки F провели перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке D. Найдите отношение $AB : BD$.

(*М. Киндер*)

117. Произведение положительных чисел a, b и c равно 1. Известно, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant a + b + c$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

(*С. Злобин*)

2020-2021 учебный год

Муниципальный этап 47-й Всероссийской олимпиады по математике среди школьников Республики Татарстан состоялся 16 ноября 2020 г. Задачи муниципальной олимпиады подготовили учителя физико-математического лицея № 131.

Следующий этап Всероссийской олимпиады школьников по математике — региональный этап — состоялся 5–6 февраля 2021 г.

18 января 2021 г. прошла открытая Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике. Организатором олимпиады является Казанский (Приволжский) федеральный университет. Олимпиада проводится в два этапа: отборочный (дистанционно) и заключительный (очно). Победители и призеры очного этапа предметной олимпиады получают льготы при поступлении в Казанский федеральный университет. Задачи для Межрегиональной предметной олимпиады КФУ-2021 составили

М. И. Киндер, Шурыгин В.-мл.

С 18 по 20 января 2021 г. на базе «Дуслык» Республиканского олимпиадного центра Министерства образования и науки Республики Татарстан состоялся заключительный этап республиканской олимпиады школьников 8-11 классов «Путь к Олимпу» по математике. В олимпиаде приняли участие около 200 обучающихся общеобразовательных организаций из 40 муниципальных районов республики.

4 апреля этого же года состоялись сразу две математические олимпиады – 11-я ежегодная городская математическая олимпиада, посвящённая памяти В. Р. Фридлендера, и Турнир юных математиков. По традиции на олимпиаду В. Р. Фридлендера были приглашены ученики 8-11 классов города Казани. Отличительная особенность этого соревнования в том, что предлагавшиеся задачи были общими для всех участников. Победители олимпиады получили приглашение в летнюю школу «Квант». В составлении задач олимпиады принимали участие:

М. Д. Бронштейн, И. С. Григорьева, В. А. Сочнева.

4-го апреля 2021 года Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Региональный научно-образовательный математический центр КФУ совместно с лицеем имени Н. И. Лобачевского КФУ и IT-лицеем КФУ провели Турнир юных математиков имени Н. И. Лобачевского. В Турнире приняли участие более 700 школьников 5-7 классов города Казани, Республики Татарстан, Башкортостана, Чувашии и других соседних регионов. Составитель задач Турнира юных математиков:

М. И. Киндер.

Ниже представлены условия и подробные решения задач всех перечисленных олимпиад. Для Турнира юных математиков приведены условия и подробные решения только одного из четырёх вариантов, задачи других вариантов аналогичны. В скобках после условия задачи указана фамилия её автора.

Муниципальный этап

8 класс

118. Можно ли, используя знаки «$+$», «$-$», «$\cdot$» и несколько выражений a^4 и a^6-1, получить a^6?

119. Можно ли вырезать из прямоугольника 15×8 три клеточки и провести в полученной фигуре два прямолинейных разреза так, чтобы из полученных частей можно было сложить прямоугольник?

120. Клетчатый прямоугольник 5×9 Петя разрезает на две части по границам клеток так, чтобы линия разреза имела форму буквы «Г» — состояла из двух перпендикулярных друг другу отрезков. Вася также поступает с любой из двух получившихся фигур, потом Петя — с одной из трёх получившихся, и так далее. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает — Петя или Вася?

121. Дан квадрат $ABCD$. Точка N лежит на стороне AD, причём $AN : ND = 2 : 3$, точка F лежит на стороне CD и $DF : FC = 1 : 4$, точка K лежит на стороне AB, причём $AK : KB = 1 : 4$. Найдите угол KNF.

122. Можно ли на некоторые клетки шахматной доски расставить шашки так, чтобы на каждой горизонтали, на каждой вертикали и на каждой диагонали (любой длины, даже состоящей из одной клетки) стояло нечётное количество шашек?

9 класс

123. У Васи есть калькулятор, который для любых чисел a и b вычисляет числа $a+b$, $a-b$, $\frac{1}{a+1}$ $(a \neq -1)$. Может ли Вася, сделав не более 7 таких операций, вычислить квадрат любого положительного числа?

124. Из клетчатого листочка вырезали фигурку, изображенную жирной линией на рисунке 4. Петя разрезает эту фигуру на две части по границам клеток так, чтобы линия разреза имела форму буквы «Г» — состояла из двух перпендикулярных друг другу отрезков. Вася также поступает с любой из двух получившихся фигур, потом Петя — с одной из трёх получившихся, и так далее. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает — Петя или Вася?

125. Длины сторон параллелограмма равны 3 и 5. Биссектрисы всех его внутренних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найдите отношение его площади к площади параллелограмма.

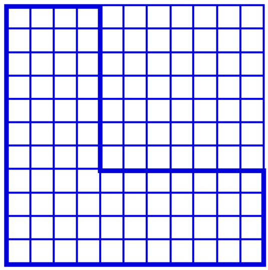


Рис. 4

126. Найдите наибольшее чётное трёхзначное число x, дающее при делении на 5 остаток 2 и удовлетворяющее условию $\text{НОД}(30, \text{НОД}(x,\ 15)) = 3$.

127. Сколькими способами можно покрыть прямоугольную доску размером 2×13 прямоугольными плитками размером 1×2? (Плитки укладываются так, чтобы они не пересекались и чтобы целиком помещались на доске.)

10 класс

128. Дан отрезок длины 1. Можно ли с помощью циркуля и линейки без делений построить отрезок длины $\sqrt{6}$?

129. Нёд — это фигура из двух клеток, имеющих ровно одну общую вершину. (На рисунке 5 два нёда — белый и заштрихованный). Какое максимальное количество нёдов по непересекающимся клеткам можно вырезать из клетчатой доски 7×6?

Рис. 5

130. В правильном треугольнике ABC проведены отрезки AE, BF, CD так, как показано на рисунке 6. Площади заштрихованных треугольников равны S_0, S_1, S_2, S_3, причем $S_0 = S_1 + S_2 + S_3$, $S = 5S_0$, где S — площадь треугольника ABC. Докажите, что $BC = BE + CF + AD$.

131. Функция $f(x)$ такова, что для всех значений x выполняется равенство $f(x+1) - f(x) = x + 1$. Известно, что $f(0) = 4$. Найдите $f(62)$.

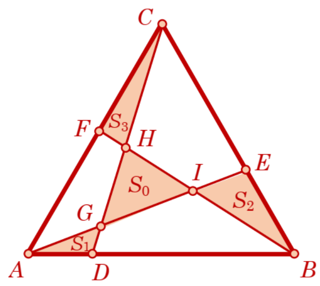


Рис. 6

132. Дан многочлен $2020x^4+x+1$. Прибор способен изменять коэффициенты многочлена с помощью двух операций: 1) увеличить или уменьшить на 1 какой-либо один (на каждом шаге любой) коэффициент многочлена; 2) увеличить или уменьшить одновременно на единицу какие-либо два (на каждом шаге любые) коэффициента многочлена. Можно ли с помощью этого прибора получить многочлен $x^4 + 2020x + 1$ так, чтобы ни на одном из шагов не получался многочлен с целыми корнями?

11 класс

133. Разобьём ряд натуральных чисел на группы:

$$(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), \ldots .$$

Обозначим S_n сумму n-ой группы чисел. Найдите $S_{16} - S_4 - S_1$.

134. Докажите, что если при любом значении x и постоянном c имеет место равенство

$$f(x+c) = \frac{2}{1+f(x)} - 1,$$

то $f(x)$ — периодическая функция.

135. Хорда AB окружности радиуса R продолжена на отрезок $BC = AB$, точка C соединена отрезком с центром окружности O, причем CO пересекает окружность в точке D. Докажите, что $CD = 4R\sin 18^\circ$, если известно, что на AB можно построить квадрат, вписанный в данную окружность.

136. Найдите все решения уравнения $x^2 - 12 \cdot [x] + 20 = 0$, где $[x]$ — наибольшее целое, не превосходящее x.

137. В каждую ячейку таблицы 6×6 поместили числа $+1$ или -1 так, что произведение всех чисел любой строки и любого столбца является положительным. Сколькими способами это можно сделать?

Межрегиональная олимпиада КФУ

9 класс

138. У Миши есть 32 кирпичных блока размером $2 \times 3 \times 3$. Сможет ли он уложить их в коробку в форме прямоугольного параллелепипеда размером $8 \times 8 \times 9$? Должны быть использованы все кубики, наружу из коробки ничего не должно выдаваться.

139. Каждый из приведённых квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + ax + c$ имеет два ненулевых целых корня. Один из корней второго трёхчлена в 87 раз больше, чем первый корень первого трёхчлена, а другой — в 95 раз больше, чем второй корень первого трёхчлена. Найдите минимально возможное значение $|b|$.

140. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD такая, что $AB+CD = AD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямая, параллельная основаниям трапеции и проходящая через точку O, пересекает боковую сторону AD в точке K. Докажите, что $\angle BKC = 90°$.

141. Действительные числа x и y таковы, что $x > 2$, $y > 3$. Докажите, что

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-9}} \geqslant 10.$$

10 класс

142. На доске написаны числа a, b и c. Их стёрли, а взамен записали числа $a^2 + 2bc$, $b^2 + 2ca$, $c^2 + 2ab$. После этого оказалось, что на доске написаны те же числа, что и вначале (возможно, в ином порядке). Найдите все возможные значения суммы $a+b+c$.

143. Найдите наименьшее возможное значение функции

$$f(x) = |x+1| + |x+2| + \ldots + |x+100|.$$

144. Найдите все значения c, при которых для *любых* положительных a, b и $a > b$ выполнено неравенство: $a + \sqrt{b+c} > b + \sqrt{a+c}$.

145. В треугольнике ABC сторона AC больше AB, прямая l — биссектриса внешнего угла C. Прямая, проходящая через середину AB и параллельная l, пересекает AC в точке E. Найдите CE, если $AC = 7$ и $CB = 4$. (Внешний угол треугольника — это угол, смежный с внутренним углом при данной вершине.)

11 класс

146. Даны три целых числа. Из первого числа вычли сумму цифр второго числа, из второго вычли сумму цифр третьего, а из третьего вычли сумму цифр первого числа. Могут ли эти разности равняться соответственно *а*) 2, 3, 4? *б*) 3, 4, 5?

(*Киндер М.И.*)

147. Существует ли такая непостоянная функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, что при всех действительных x выполняется равенство

а) $f(\sin x) + f(\cos x) = 1$? *б*) $f(\sin x) - f(\cos x) = 1$?

148. Натуральное число n назовём *удачным*, если его можно единственным образом разбить в сумму 10 различных натуральных чисел (порядок слагаемых не важен). Найдите все удачные числа.

149. В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C. Прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках D и E. Хорда BX параллельна прямой DE. В каком отношении прямая XC делит хорду DE?

Олимпиада имени Л. Эйлера

8 класс

150. Натуральное число, большее 1 000 000, даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 125. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде сотен? (*Агаханов Н.*)

151. Числа x и y, не равные 0, удовлетворяют неравенствам $x^2 - x > y^2$ и $y^2 - y > x^2$. Какой знак может иметь произведение xy? (Укажите все возможности.) (*Агаханов Н.*)

152. В группе из 79 школьников у каждого не более 39 знакомых, причем у любого мальчика есть знакомая девочка, а у любой девочки — знакомый мальчик. Может ли оказаться, что все девочки из этой группы имеют в ней поровну знакомых мальчиков, а все мальчики — поровну знакомых девочек? Все знакомства — взаимные. (*Берлов С.*)

153. Петя и Вася играют в игру. Вася кладёт в ряд 150 монет: некоторые «орлом» вверх, некоторые — «решкой». Петя своим ходом может показать на любые три лежащие подряд монеты, после чего Вася обязан перевернуть какие-то две монеты из этих трёх по своему выбору. Петя хочет, чтобы как можно больше монет лежали «решкой» вверх, а Вася хочет ему помешать. При каком наибольшем k Петя сможет независимо от действий Васи добиться того, чтобы хотя бы k монет лежали «решкой» вверх? (*Берлов С., Власова Н.*)

154. CL — биссектриса треугольника ABC. $CLBK$ — параллелограмм. Прямая AK пересекает отрезок CL в точке P. Оказалось, что точка P равноудалена от диагоналей параллелограмма $CLBK$. Докажите, что $AK \geqslant CL$. (*Берлов С.*)

155. У уголка из трёх клеток центральной назовём клетку, соседнюю по стороне с двумя другими. Существует ли клетчатая фигура, которую можно разбить на уголки из трёх клеток тремя способами так, чтобы каждая её клетка в одном из разбиений была центральной в своём уголке? (*Дёмин Д.*)

156. Точка M — середина стороны AC равностороннего треугольника ABC. Точки P и R на отрезках AM и BC соответственно выбраны так, что $AP = BR$. Найдите сумму углов ARM, PBM и BMR. (*Берлов С.*)

157. Сначала Саша прямолинейными разрезами, каждый из которых соединяет две точки на сторонах квадрата, делит квадрат со стороной 2 на 2020 частей. Затем Дима вырезает из каждой части по кругу. Докажите, что Дима всегда может добиться того, чтобы сумма радиусов этих кругов была не меньше 1.

(*Кузнецов А.*)

158. Дано натуральное число n, большее 2. Докажите, что если число $n! + n^3 + 1$ — простое, то число $n^2 + 2$ представляется в виде суммы двух простых чисел. (*Дёмин Д.*)

159. В квадратной таблице 2021×2021 стоят натуральные числа. Можно выбрать любой столбец или любую строку в таблице и выполнить одно из следующих действий:

1) прибавить к каждому выбранному числу 1;

2) разделить каждое из выбранных чисел на какое-нибудь натуральное число.

Можно ли за несколько таких действий добиться того, чтобы каждое число в таблице было равно 1? (*Дидин М.*)

Региональный этап

9 класс

160. Ослик Иа-Иа составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и покрасил шесть палочек в два цвета: три самых коротких — в жёлтый цвет, а три остальных — в зелёный. Обязательно ли ослику удастся составить два треугольника, один — из трёх жёлтых палочек, а другой — из трёх зелёных? (*Емельянов Л.*)

161. Числа x и y, не равные 0, удовлетворяют неравенствам $x^2 - x > y^2$ и $y^2 - y > x^2$. Какой знак может иметь произведение xy? (Укажите все возможности.) (*Агаханов Н.*)

162. Рассмотрим такие натуральные числа a, b и c, что дробь

$$k = \frac{ab + c^2}{a + b}$$

является натуральным числом, меньшим a и b. Какое наименьшее количество натуральных делителей может быть у числа $a + b$?

(*Козлов П.*)

163. Окружности Ω и ω касаются друг друга внутренним образом в точке A. Проведём в бо́льшей окружности Ω хорду CD, касающуюся ω в точке B (хорда AB не является диаметром ω). Точка M — середина отрезка AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника CMD, проходит через центр ω.

(*Бибиков П.*)

164. Петя и Вася играют на доске 100×100. Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. (На рисунке 7 показаны возможные первые ходы Пети и Васи на доске 4×4.) Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? (*Дидин М.*)

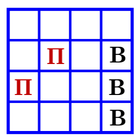


Рис. 7

165. Десятизначные натуральные числа a, b, c таковы, что $a + b = c$. Какое наибольшее количество из 30 их цифр могут оказаться нечётными? (*Богданов И.*)

166. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающиеся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

(*Подлипский О.*)

167. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Оказалось, что точка пересечения медиан треугольника ABD лежит на биссектрисе угла BCD. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC лежит на биссектрисе угла ADC.

(*Кузнецов А.*)

168. В алфавите $n > 1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

(*Храмцов Д.*)

169. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии? (*Берлов С.*)

10 класс

170. Первоклассник составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и разбил шесть палочек на две группы по три палочки: в первой группе оказались три самых длинных палочки, а во второй — три самых коротких. Обязательно ли можно составить треугольник из трёх палочек первой группы? А из трёх палочек второй группы?

(*Емельянов Л.*)

171. Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^4 - y^4 > x$ и $y^4 - x^4 > y$. Может ли произведение xy равняться отрицательному числу? (*Агаханов Н.*)

172. Пусть S — множество, состоящее из натуральных чисел. Оказалось, что для любого числа a из множества S существуют два числа b и c из множества S такие, что $a = \frac{b(3c-5)}{15}$. Докажите, что множество S бесконечно. (*Крачун Д.*)

173. Вписанная окружность касается сторон AB, BC и CA неравнобедренного треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Пусть m — средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$, параллельная стороне B_1C_1. Биссектриса угла $B_1A_1C_1$ пересекает m в точке K. Докажите, что описанная окружность треугольника BCK касается m. (*Богданов И.*)

174. Петя и Вася играют на доске 100×100. Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. (На рисунке 8 показаны возможные первые ходы Пети и Васи на доске 4×4.) Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? (*Дидин М.*)

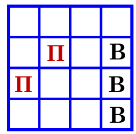


Рис. 8

175. На доску выписали три натуральных числа: два десятизначных числа a и b, а также их сумму $a+b$. Какое наибольшее количество нечётных цифр могло быть выписано на доске? (*Богданов И., Кожевников П.*)

176. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающиеся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6? (*Подлипский О.*)

177. Точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На продолжении отрезков AC и BC за точку C отмечены точки D и K соответственно так, что $BC = CD$ и $CM = CK$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABD и MCK, касаются. (*Кузнецов А.*)

178. Фокусник с помощником собираются показать следующий фокус. У них есть $n > 3$ карточек с номерами $1, 2, \ldots, n$, и ряд из n клеток размером в карточку. Оборотные стороны всех карточек неразличимы. Зритель выкладывает на некоторые два места карточки 1 и 2; помощник фокусника, видя это, выкладывает на свободные места остальные карточки. Затем все карточки переворачиваются числами вниз, и входит фокусник. Он переворачивает одну из карточек, а затем зритель переворачивает другую. После этого фокусник должен правильно указать карточку 1 и правильно указать карточку 2. При каких n фокусник и помощник смогут договориться так, чтобы гарантированно фокус удался? (*Богданов И., Кноп К.*)

179. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии? (*Берлов С.*)

11 класс

180. Натуральное число, большее 1 000 000, даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 625. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде тысяч? (*Агаханов Н., Сухов К.*)

181. Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^4 - y^4 > x$ и $y^4 - x^4 > y$. Какой знак может иметь произведение xy? (Укажите все возможности.) (*Агаханов Н.*)

182. На оси Ox отметили точки $0, 1, 2 \ldots, 100$ и нарисовали графики 200 различных квадратичных функций, каждый из которых проходит через две из отмеченных точек и касается прямой $y = -1$. Для каждой пары графиков Олег написал на доске число, равное количеству общих точек этих графиков. После чего он сложил все 19 900 чисел, написанных на доске. Мог ли он получить число 39 699? (*Подлипский О.*)

183. Треугольная пирамида $SABC$ вписана в сферу Ω. Докажите, что сферы, симметричные Ω относительно прямых SA, SB, SC и плоскости ABC, имеют общую точку. Сфера, симметричная данной относительно прямой l — это сфера такого же радиуса, центр которой симметричен центру исходной сферы относительно прямой l. (*Богданов И.*)

184. В Цветочном городе живёт 99^2 коротышек. Некоторые из коротышек рыцари (всегда говорят правду), а остальные — лжецы (всегда лгут). Дома в городе расположены в клетках квадрата 99×99 (всего 99^2 домов, расположенных в 99 вертикальных и в 99 горизонтальных улицах). В каждом доме живет ровно один коротышка. Номер дома обозначается парой чисел $(x; y)$, где $1 \leqslant x \leqslant 99$ — номер вертикальной улицы (номера возрастают слева направо), а $1 \leqslant y \leqslant 99$ — номер горизонтальной улицы (номера возрастают снизу вверх). *Цветочным расстоянием* между двумя домами с номерами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ называется число $\rho = |\,x_1 - x_2\,| + |\,y_1 - y_2\,|$. Известно, что на каждой улице — вертикальной или горизонтальной — проживает не менее k рыцарей. Кроме того, все коротышки знают, в каком доме живет рыцарь Знайка. Вы хотите найти его дом, но не знаете, как выглядит Знайка. Вы можете подходить к любому дому и спрашивать живущего в нём коротышку: «Каково цветочное расстояние от вашего дома до дома Знайки?». При каком наименьшем k вы можете гарантированно найти дом Знайки? (*Новиков В.*)

185. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающиеся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

(*Подлипский О.*)

186. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, M и N — точки касания вписанной окружности сторон AB и BC соответственно. Через точку I проведена прямая l, параллельная стороне AC, и на неё опущены перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности. (*Женодаров Р., Дмитриев О.*)

187. В алфавите $n > 1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

(*Храмцов Д.*)

188. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеет степень 10^5, а его старший коэффициент равен 1. Найдите наименьшую возможную степень многочлена

$$R(x) = P(x^{1000} + 1) - P(x)^{1000}.$$

(*Богданов И.*)

189. На доску записали три рациональных положительных числа. Каждую минуту числа x, y, z на доске стираются, а вместо них выписываются числа $x + \frac{1}{yz}$, $y + \frac{1}{zx}$, $z + \frac{1}{xy}$. Докажите, что начиная с некоторого момента на доске не будет появляться целых чисел. (*Кудря С.*)

Олимпиада имени В. Р. Фридлендера

190. Антон, Борис и Виктор — тройняшки. Антон и Борис всегда врут, а Виктор всегда говорит правду. На улице вы повстречались с одним из братьев. Как, с помощью простого вопроса (не более трёх слов), ответом на который могут быть только слова «да» или «нет», выяснить, зовут ли его Антоном?

191. Башня состоит из 4 ярусов, каждый из них имеет форму параллелепипеда с квадратным основанием. Нижний ярус по всем направлениям в 4 раза больше верхнего, второй снизу — в три раза, третий — в два. Объем башни 22 500 $м^3$, площадь боковых стен 5 400 $м^2$. Найдите высоту башни.

192. Учитель написал на доске пример на умножение. Ученый с мировым именем Иннокентий стёр с доски две цифры и написал на месте каждой из них другую. Получилась запись

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 2021.$$

Что было написано на доске изначально? Приведите все возможные варианты.

193. Усердный Петя взял несколько чисел, возвел каждое в квадрат и сложил полученные значения. Усердная Маша прибавила к каждому Петиному числу по 1 и проделала те же действия. Не менее усердный Иннокентий вычел из каждого Петиного числа 1 и проделал то же самое.

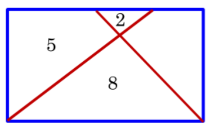


Рис. 9

а) Как ни странно, Машина сумма оказалась такой же как у Пети, а сумма Иннокентия — даже на 120 больше! Сколько чисел написал Петя?

б) Как ни странно, Машина сумма оказалась на 1000 меньше, чем у Пети, а сумма Иннокентия — на 1000 больше! Все ли трое сделали вычисления правильно?

194. Из двух соседних углов прямоугольника проведены две прямые, разделившие фигуру на 4 части. Площади трёх частей отмечены на рисунке 9. Найдите площадь оставшейся части.

195. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(\sqrt{3}+\sqrt{5})=0$?

196. Алиса долго шла по Зазеркалью. Она выяснила, что половину пути она двигалась со скоростью 4 *км/час*, а половину времени — со скоростью 5 *км/час*. Верно ли она подсчитала?

197. Пусть ABC — остроугольный треугольник. Будем называть прямоугольник вписанным в ABC, если две его вершины лежат на основании AB треугольника, а две других — на остальных сторонах. Может ли оказаться, что периметр каждого такого прямоугольника равен 20? Если да, то чему равна площадь треугольника ABC?

198. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{2018} + x_{2019} + x_{2020} + x_{2021} = 2018, \\ x_{2019} + x_{2020} + x_{2021} + x_1 = 2019, \\ x_{2020} + x_{2021} + x_1 + x_2 = 2020, \\ x_{2021} + x_1 + x_2 + x_3 = 2021. \end{cases}$$

Найдите x_{2021}.

199. $ABCO$ и $A_1B_1C_1O_1$ — два правильных тетраэдра с ребром a, расположенные так, что O — центр треугольника $A_1B_1C_1$, а O_1 — центр треугольника ABC. Кроме того, плоскости ABO и $A_1B_1O_1$ параллельны (то есть основание одного тетраэдра повёрнуто относительно основания другого на 180°). Найдите площадь поверхности тела, содержащего общую часть этих тетраэдров.

200. Дана таблица $n \times n$ клеток, заполненная целыми числами от 1 до n. В каждом столбце все числа различны, кроме того, таблица симметрична относительно диагонали. Докажите, что на этой диагонали тоже все числа различны.

а) (6-7 классы) $n=5$; *б*) (8-11 классы) $n=111$.

201. Имеется белый квадрат 21×21, разбитый на клетки 1×1. Петя покрасил какие-то n клеток. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 есть ровно две покрашенных клетки. Найдите все значения, которые может принимать n.

Турнир юных математиков им. Н. И. Лобачевского

5 класс

202. На доске написаны два натуральных числа. Одно из них увеличили в 6 раз, а другое уменьшили на 100, при этом сумма чисел не изменилась. *а*) Найдите хотя бы одну пару таких чисел. *б*) Чему равно наименьшее значение суммы таких чисел?

203. Вася подсчитал общее число своих оценок за год. (Среди оценок только двойки, тройки, четвёрки и пятёрки.) Ровно треть из них — тройки, ровно четверть — четвёрки, ровно пятая часть — пятёрки, причём троек у Васи на 14 больше, чем двоек. Сколько всего оценок у Васи?

204. На острове живёт 1001 человек, каждый из которых всегда говорит правду или всегда лжёт. Каждый житель острова заявил, что если он покинет остров, то среди оставшихся жителей большинство будет лжецами. Сколько лжецов на острове?

205. У Тима и Алекса есть большой мешок с монетами и две копилки. В одну копилку помещается 200 монет, а в другую 250. Тим и Алекс по очереди бросают монеты в копилки. За один ход можно бросить сколько угодно монет, но только в одну копилку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Тим ходит первым. У кого есть выигрышная стратегия?

206. На волшебной берёзе каждый день вырастают либо банан и две груши, либо банан и два яблока, либо банан, груша и яблоко. Через несколько дней на берёзе оказалось 200 груш, 100 яблок и несколько бананов. А сколько именно? (Укажите все возможные варианты.)

6 класс

207. При каком наименьшем натуральном n число $2019n + 2020$ делится на 2021?

208. На доске в строчку написаны двадцать четвёрок. Поставив между некоторыми из них знак «+», Вася обнаружил, что сумма равна 800. Сколько плюсов поставил Вася? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.

209. Квадрат 8×8 разрезали по клеточкам на 11 прямоугольников, у которых длины обеих сторон больше 1. Могло ли оказаться так, что среди этих прямоугольников нет ни одного квадрата? Приведите пример такого разрезания.

210. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В один день 12 жителей острова собрались вместе и высказали несколько утверждений. Сначала двое из них сказали: «Среди нас ровно два лжеца». Потом другие четверо сказали: «Среди нас ровно четыре лжеца». Наконец, оставшиеся шестеро сказали: «Среди нас ровно шесть лжецов». Сколько было лжецов на самом деле? (Укажите все возможные варианты.)

211. У Пети есть 8 пакетов, в каждом различное число конфет. Петя знает, что конфеты из каждого пакета можно полностью разложить по остальным так, что число конфет во всех них станет равным. Каким может быть наименьшее число конфет в самом большом пакете?

7 класс

212. Придумайте *наибольшее* десятизначное число, которое обладает следующими свойствами. Если вычеркнуть две его последние цифры, получится число, делящееся на 2, вычеркнув три его последние цифры, получится число, делящееся на 3, и так далее, наконец, вычеркнув девять его последних цифр, получится число, делящееся на 9.

213. На конгрессе математиков собрались 100 человек, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Каждый из 100 конгрессменов — арифметик, геометр или алгебраист, и никто не обладает несколькими специальностями. Каждому из них задали последовательно три вопроса: «Вы — алгебраист?», «Вы — арифметик?», «Вы — геометр?». Количество ответов «да», которые дали конгрессмены на каждый из этих вопросов — 30, 40 и 50, соответственно. Сколько лжецов в конгрессе?

214. Три пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл $1/2$ своих денег и отдал их второму, потом второй проиграл $1/3$ своих монет и отдал их третьему и, наконец, третий проиграл $1/4$ своих денег и отдал их первому пирату. В результате у всех пиратов стало монет поровну. Сколько денег первоначально было у каждого пирата, если у первого пирата вначале было не больше 20 монет? (Укажите все возможные варианты.)

215. Дано число 2021. Разрешается за один ход либо вычесть из числа сумму его цифр, либо переставить его цифры в любом порядке. (Например, из числа 13 можно за один ход получить либо число 9, либо число 31.) Какое наименьшее положительное число можно получить, действуя таким образом?

216. Дан правильный треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка D, а на продолжении стороны BC за точку C — точка E так, что $BD = DE$. Известно, что $AD = 5$. Найдите CE.

Олимпиада «Путь к Олимпу»

9 класс

217. Найдите *наименьшее* натуральное $n > 1$, для которого число $n^3 - n$ делится на 500.

218. Имеются 2021 яблоко и весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых 10 яблок. Можно ли за 212 взвешиваний узнать общий вес всех яблок?

219. Числитель и знаменатель дроби — натуральные числа, сумма которых не превосходит 2021, а сама дробь меньше $1/4$. Какое наибольшее значение может иметь такая дробь?

220. В комнате 28 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сделал заявление. Первый сказал: «Количество рыцарей в комнате — делитель 1», второй сказал: «Количество рыцарей в комнате — делитель 2» и так далее до 28-го, который сказал: «Количество рыцарей в комнате — делитель 28». Сколько в комнате рыцарей?

221. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ABC?

10 класс

222. Найдите *наименьшее* натуральное число n, для которого произведение $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 1000.

223. Числа a и b — различные корни уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$. Чему равно значение $a^2 + ab + b^2$?

224. Ученик заполняет анкету из 22 вопросов. За ответ на каждый вопрос он получает оценку 5, 6, 7, 8, 9 или 10 баллов. Среднее арифметическое этих 22 оценок — целое число. Верно ли, что какую-то оценку ученик получил не более двух раз?

225. Для натуральных чисел x и y нашлись такие различные простые числа p, q, r, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$. Верно ли, что одно из этих простых чисел равно 2?

226. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle BAD=60^\circ$. Точки K и L — середины отрезков BC и CD соответственно. Известно, что $ABKL$ — вписанный четырёхугольник. Найдите $\angle ABD$.

11 класс

227. Провод длиной d метров разрезали на три части. Вам нужно из этих частей вырезать куски провода длиной 4, 5, 6 и 7 метров. Всегда ли это можно сделать, если

а) $d=30$? *б*) $d=29,99$? (*Киндер М.И.*)

228. Существуют ли такие 10 попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя

а) ровно в 6 раз? *б*) ровно в 5 раз? (*Акулич И.Ф.*)

229. Найдите все пары натуральных чисел $x, y \in [1;\, 8]$, удовлетворяющих уравнению $\sqrt{xx,xxx\ldots}=y,yyy\ldots$. (Десятичная запись каждого из чисел $xx,xxx\ldots$ и $y,yyy\ldots$ состоит из бесконечного количества одинаковых цифр.)

230. Склад имеет форму прямоугольного параллелепипеда, его высота 4 метра. При ремонте склада выяснилось, что на все его вертикальные стены краски уходит не больше, чем на пол. Какое *наименьшее* значение может быть у площади пола этого склада?

231. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ прямая, проходящая через точку C перпендикулярно CD, пересекает отрезок AB в точке F. Верно ли, что $AE+AF=BE$?

(*Alireza Cheraghi, IV Иранская олимпиада по геометрии, 2017.*)

Решения задач

1. *Ответ: нулевую, они ещё не взошли.*

Ромашки составляют $5/6$ от всех цветов, а лютики — $1/6$. Значит, их общее количество равно количеству *всех* цветов. Поэтому маргариток нет среди выращенных цветов.

2. *Ответ: Коле — 65 лет, Толе — 56 лет.*

Пусть возраст Коли равен $\overline{ab} = 10a + b$, где a и b — цифры от 0 до 9. Тогда возраст Толи $\overline{ba} = 10b + a$, и $a > b$. Тогда

$$(10a + b)^2 - (10b + a)^2 = 9 \cdot 11(a + b)(a - b).$$

Эта разность является квадратом целого числа, поэтому $a+b$ или $a-b$ должны делиться на 11. Поскольку a и b — цифры, очевидно, возможно только равенство $a + b = 11$. Значит, $a - b = 11 - 2b$ — квадрат целого числа. Несложный перебор приводит только к одному варианту: $a = 6$, $b = 5$. Таким образом, возраст Коли — 65 лет, а Толи — 56 лет.

3. *Ответ:* 4.

Пусть в первой четверти у Вики было n оценок, из которых k пятёрок. Тогда после первой пятёрки второй четверти их доля увеличилась на $\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n} = 0,15$. Аналогично после второй пятёрки прирост составил $\frac{k+2}{n+2} - \frac{k+1}{n+1} = 0,1$. Упрощая каждое уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} n - x = 0,15n(n+1) \\ n - x = 0,1(n+1)(n+2). \end{cases}$$

В частности, $0,15n(n+1) = 0,1(n+1)(n+2)$, то есть $1,5n = n+2$, $n = 4$. Подставляя это значение в первое уравнение, получим $k = 4 - 0,15 \cdot 4 \cdot 5 = 1$. Значит, после двух пятёрок, полученных во второй четверти, их доля составила $3/6 = 0,5$. Вика хочет, чтобы после получения ещё m пятёрок их доля стала равной $0,5 + 0,2 = 0,7$, то есть $\frac{m+3}{m+6} = 0,7$. Решая это уравнение, находим $m = 4$.

4. (Рис. 10.) Из параллельности прямых AB и CD и условия задачи следует, что углы DMA, MAB и MAD равны, и значит, треугольник ADM — равнобедренный, $AD = DM$.

Аналогично доказывается, что $MC = BC$, и так как $BC = AD = DM$, отсюда получаем, что M — середина CD. Точно так же можно показать, что биссектрисы углов C и D пересекают сторону AB в ее середине. Значит, эта середина и есть точка N, откуда и следует, что $MN \parallel AD$.

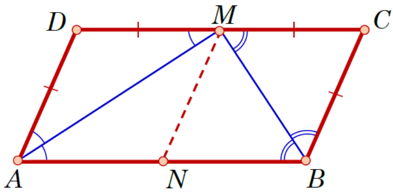


Рис. 10

5. *Ответ:* 143 *и* 143.

Обозначим исходные числа через a и b. Результат Аси — $a \cdot b$, результат Пети — $\overline{ab} = 1000a + b$. Эти числа связаны соотношением:

$$1000a + b = 7ab, \quad \text{откуда} \quad b = \frac{1000a}{7a - 1}.$$

Заметим, что числа a и $7a-1$ не имеют общих делителей, поэтому b будет целым лишь при условии, что $7a - 1 = p$ — делитель 1000. Так как a — трёхзначное число, то $a \geqslant 100$, и поэтому $p \geqslant 7 \cdot 100 - 1 = 699$. Но тогда $p = 1000$, $a = 1001\,/\,7 = 143$ и $b = a$.

6. *Ответ: ошибся.*

Обозначим весь путь Печкина через $3S$ *км*. Тогда пешком он прошел путь $2S$ *км* и потратил на это $2S\,/\,5 = 0,4S$ (*час*). По условию это составило $2/3$ всего потраченного времени, то есть весь путь занял $0,4\,S : 2/3 = 0,6\,S$ (*час*), и значит, на велосипеде он ехал $0,2\,S$ *часа*. Но тогда его скорость на велосипеде должна составлять $S\,/\,(0,2\,S) = 5$ *км/ч*, противоречие.

7. *Ответ: ошибся.*

Пусть в начале команда провела n матчей, из которых k выиграла. Тогда после очередного выигрыша доля побед увеличилась на $\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n} = \frac{1}{6}$. Аналогично после ещё двух побед прирост составил $\frac{k+3}{n+3} - \frac{k+1}{n+1} = \frac{1}{6}$. После упрощений этих соотношений получаем систему

$$\begin{cases} \quad n-k \quad = \frac{1}{6}n(n+1) \\ 2(n-k) = \frac{1}{6}(n+1)(n+3)\,. \end{cases}$$

Поделив второе уравнение на первое, получим $2 = \frac{n+3}{n}$, откуда $n = 3$. Подставляя значение n в первое уравнение, найдем $k = 1$. Значит, к началу событий доля побед была $1\,/\,3$, после очередной победы — $2\,/\,4$, после ещё двух команда одержала $1 + 1 + 2 = 4$ победы в $3 + 1 + 2 = 6$ играх. Если команда одержит ещё m побед, то их доля будет $\frac{4+m}{6+m}$, что должно составить $\frac{4}{6} + \frac{1}{6}$. Решая соответствующее уравнение, получим $m = 6$.

8. *Ответ: нет.*

Предположим, что существуют такие натуральные числа k и n, что $2^{2^n} + 1 = k^3$. Тогда k — нечётное, и

$$2^{2^n} = k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1).$$

Значит, $k - 1 = 2^s$ и $k^2 + k + 1 = 2^t$, где s и t — некоторые натуральные числа. Теперь имеем $2^{2s} = (k-1)^2 = k^2 - 2k + 1$ и $2^t - 2^{2s} = 3k$. Но число $2^t - 2^{2s}$ — чётное, в то время как $3k$ — нечётное, противоречие.

9. Достроим равнобедренный прямоугольный треугольник до квадрата $ABKC$ (рис. 11). Пусть N — точка пересечения AP и BK. Прямые CM и AN взаимно перпендикулярны, поэтому $\angle AMC = \angle BNA$. Отсюда следует равенство прямоугольных треугольников MAC и BNA, и значит, $AM = BN$. Так как $MB = BN$ и $\angle MBP = \angle PBN = 45°$, треугольники MBP и NBP равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle BMP = \angle BNP$; и так как $\angle BNP = \angle BNA = \angle AMC$, требуемое равенство доказано.

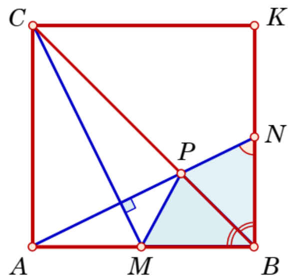


Рис. 11

10. *Ответ: в* 73 *раза.*

Обозначим исходные числа через a и b. Тогда указанное семизначное число будет иметь вид $10000a + b$, по условию $10000a +$

$+\, b = nab$, откуда
$$b = \frac{10000a}{na-1}\,.$$
Заметим, что числа a и $na-1$ не имеют общих делителей, так что $na-1 = p$ — делитель 10 000. Кроме того, $nab > 10000a$, то есть $n > \frac{10000}{b} \geqslant \frac{10000}{999}$, и значит, $n \geqslant 11$. Тогда $p = na-1 \geqslant 11\cdot 100-1$, то есть $p \geqslant 1099$. Таким образом, надо проверить значения p, равные 10 000, 5 000, 2 500, 2 000, 1 250, и выбрать среди них те, для которых $p+1$ раскладывается на двузначный (n) и трёхзначный (a) делители. Для последних четырёх значений это условие не выполняется, а для $p = 10\,000$ имеем $p+1 = 73\cdot 137$, то есть $n = 73$, $a = 137$, при этом $b = a$, и условие задачи выполняется: $137\,0\,137 = 73\cdot 137\,137$.

11. *Ответ:* 11.

Рассмотрим шарики цвета a. По условию их соседями должны быть шарики всех 4 остальных цветов. Но у каждого шарика не более двух соседей, поэтому шарики цвета a встречаются не менее двух раз. Это же верно для каждого из 5 цветов, так что всего шариков не менее 10.

Рассмотрим теперь какой-нибудь крайний шарик цвета b. У него только один сосед, так что у двух шариков цвета b не более $1+2=3$ соседей. Значит, для выполнения условий нам нужно добавить ещё как минимум один шарик цвета b. Таким образом, всего понадобится не менее 11 шариков.

Покажем, что 11 шариков хватит. Пусть a, b, c, d, e — цвета шариков. Их можно расположить, например, так:
$$a\ b\ c\ d\ e\ c\ a\ d\ b\ e\ a.$$

12. Возведём в квадрат обе части каждого неравенства:
$$\begin{cases} a^2 \geqslant (b+c)^2, \\ b^2 \geqslant (c+a)^2, \\ c^2 \geqslant (a+b)^2. \end{cases}$$
Сложим эти неравенства и после перегруппировки слагаемых получим $(a+b+c)^2 \leqslant 0$. Отсюда, очевидно, следует, что $a+b+c=0$.

13. *Ответ:* $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 2x$.

Будем решать задачу графическим способом. Обозначим через M — множество точек $(x; y)$, являющихся решением системы. Отметим, что если точка $(x; y)$ принадлежит M, то и точка $(-x; -y)$ также принадлежит M, то есть множество M *симметрично* относительно начала координат.

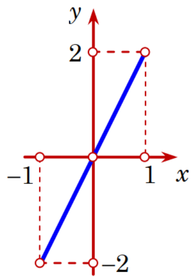


Рис. 12

Таким образом, достаточно построить часть графика M для всех $y \geqslant 0$, а затем отразить эту часть относительно точки $(0; 0)$.

Если $y > 2$, из второго уравнения системы получаем: $4x = (y + 2) - (y - 2)$, то есть $x = 1$. Подставив в первое уравнение, находим $y = 2$, противоречие.

При $0 \leqslant y \leqslant 2$ из второго уравнения системы получаем: $4x = (y + 2) + (y - 2)$, то есть $y = 2x$, и поскольку $y \in [0; 2]$, имеем $x \in [0; 1]$. Но тогда первое уравнение принимает вид: $2y = (2x + 3) + (2x - 3)$, то есть опять приходим к условию $y = 2x$.

Итак, при $y \geqslant 0$ множество M состоит из точек прямолинейного отрезка $y = 2x$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$. Осталось дополнить этот график точками, симметричными относительно начала координат, и приходим к ответу (рис. 12).

14. *Ответ: да, верно.*

Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC (I является точкой пересечения биссектрис AA_1, BB_1 и CC_1), и пусть прямая B_1C_1 пересекает сторону AC и биссектрису AA_1 в точках P и Q соответственно (рис. 13). Тогда

$$\angle AQC_1 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC_1} + \overset{\frown}{A_1B_1}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{CA}\right) = 90^\circ.$$

Поскольку BB_1 — биссектриса, из равенства углов ABB_1 и B_1BC следует равенство дуг CB_1 и B_1A, а значит, и равенство углов AC_1B и B_1C_1C, опирающихся на эти дуги. Поэтому B_1C_1 — биссектриса угла AC_1I. Кроме того, из перпендикулярности прямых AI и B_1C_1 следует, что треугольник AC_1I — равнобедренный, $AC_1 = C_1I$, и значит, CQ — медиана. Поскольку MQ тоже делит AI пополам, отсюда также получается свойство равнобедренности треугольника AMI, $AM = MI$.

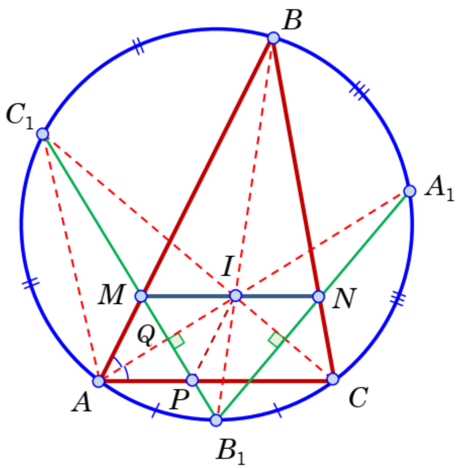


Рис. 13

Аналогично доказывается, что B_1C_1 — биссектриса углов AB_1I и равнобедренность треугольника API. Так как AI — биссектриса угла A, треугольники AMI и API имеют общую сторону AI и два равных прилежащих к этой стороне угла. Значит, эти треугольники равны, и четырёхугольник $AMIP$ — ромб, поэтому $MI \parallel AC$. Аналогично устанавливается, что $NI \parallel AC$, то есть точки M, I и N лежат на одной прямой.

15. *Ответ:* 8 *фигурок;* 16 *деталей.*

Пусть n — число собранных фигурок, a_i — число деталей в i-й фигурке. Будем считать, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Если $a_3 \leqslant 5$, то $a_2 \leqslant 4$, $a_1 \leqslant 3$, и поэтому $a_1 + a_2 + a_3 \leqslant \leqslant 5 + 4 + 3 < 14$, противоречие. Значит, $a_3 \geqslant 6$.

Аналогичную оценку получим для a_{n-2}, рассматривая три самых «больших» фигурки. Поскольку $14 + 15 + 16 = 45 > 43$, имеем $a_{n-2} \leqslant 13$.

Теперь уберём три самых больших и три самых маленьких фигурки. Тогда в оставшихся фигурках будет $80-14-43 = 23$ детали, причем в каждой от 7 до 12. Одной фигурки явно не хватит, а три будет лишнего: $7 + 8 + 9 = 24$. Значит, 23 детали образуют ровно 2 фигурки. Это возможно, причём единственным способом:

$23 = 11 + 12$, и значит, всего было собрано $n = 8$ фигурок.

В трёх самых больших фигурках $a_6 + a_7 + a_8 = 43$ детали. Поскольку $a_6 \leqslant 13$, это равенство возможно только в виде: $43 = 13 + 14 + 16$, то есть в самой большой фигурке 16 деталей.

16. *Ответ: а) на* 9*; б)* $1, 1, 1$.

а) Пусть нам даны изначально числа a, b и c. Обозначим $ab+bc+ca = x$ и $a+b+c = y$. По условию $(a-1)(b-1)(c-1) = abc-1$ и $(a-2)(b-2)(c-2) = abc-2$. Раскрывая скобки и сокращая подобные слагаемые, получим $x - y = 0$ и $-2x + 4y = 6$, откуда $x = y = 3$. Тогда нужная нам разность равна $abc - (a-3)(b-3)(c-3) = 3x - 9y + 27 = 3 \cdot 3 - 9 \cdot 3 + 27 = 9$.

б) Подходят, например, числа $a = b = c = 1$.

Замечание. Можно доказать, что приведённый набор действительных чисел — единственный.

17. *Ответ: рисунок* 14.

Используя формулу косинуса двойного угла $y = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, введём замены $t = 2x$, $z = \cos 2x$. Тогда $y = \frac{1}{2}(1+z)$, причём переменные z и t связаны соотношением $z = \cos t$. Пара (t, z) задаёт положение точки в искомой системе координат.

Отметим, что $t = 0$ при $x = 0$ и $t = 2$ при $x = 1$. Это значит, что эталон единицы по оси x вдвое меньше, чем по оси t, а точка отсчёта не изменилась. С другой стороны, начало отсчёта $z = 0$ соответствует значению $y = \frac{1}{2}(1 + z) = \frac{1}{2}$, а $z = 1$ — значению $y = 1$. Таким образом, по оси Oy эталон единицы также уменьшился вдвое, но ось абсцисс сместилась на $\frac{1}{2}$ вверх относительно «старой» системы координат.

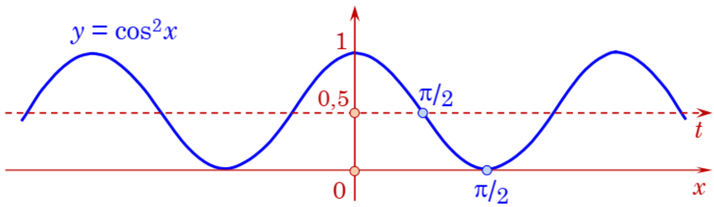


Рис. 14

18. Совпадает с задачей **12**.

19. *Ответ: рис. 16.*

(Рис. 15.) Заметим, что сечения BDA_1 и B_1D_1C перпендикулярны диагонали AC_1 и делят её на три равные части, каждая длиной $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Достаточно рассмотреть след, который сечение оставляет на двух гранях, например, ABB_1A_1 и BCC_1B_1, весь периметр сечения будет в три раза больше. Все сечения параллельны между собой. Следы проходят под углом 45°.

С ростом x сначала сечение имеет форму правильного треугольника, периметр которого растет пропорционально x, затем принимает форму правильного шестиугольника периметра $3\sqrt{2}$, и наконец, — снова форму правильного треугольника. Самое большое сечение — то, которое проходит через точки B, D и A_1, его периметр равен $P = 3\sqrt{2}$, тот же периметр у треугольника B_1D_1C.

С помощью несложных вычислений находим зависимость периметра от x: при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ имеем $P = 3\sqrt{6}\,x$; при $\frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}$ имеем $P = 3\sqrt{2}$; при $\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$ имеем $P = 3\sqrt{6}\,(\sqrt{3} - x)$.

График функции $P = P(x)$ представлен на рисунке 16.

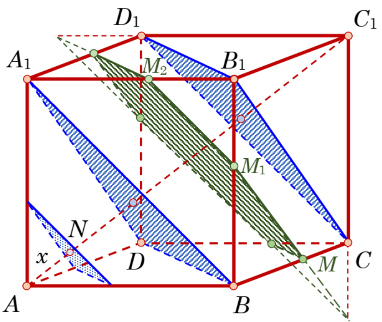


Рис. 15

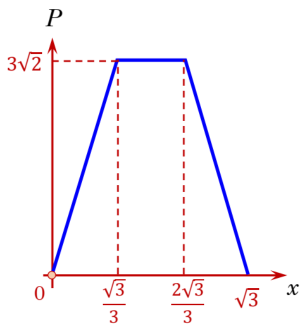


Рис. 16

20. *Ответ:* 10 *пакетов;* 5 *конфет.*

Пронумеруем подарки от меньшего к большему, от 1 до n. Если в третьем 7 или меньше конфет, то в трёх меньших подарках не более $7 + 6 + 5 = 18$ конфет, противоречие. Значит, в третьем подарке не менее 8 конфет. Аналогично, в третьем с конца подарке не более 15 конфет; в противном случае, в трёх самых больших подарках будет не менее $16 + 17 + 18 = 51 > 50$ конфет, противоречие.

Уберём три самых больших и три самых маленьких подарка. В оставшихся будет $115 - 20 - 50 = 45$ конфет, причем в каждом от 9 до 14. Трёх пакетов явно не хватит $(14+13+12 = 39)$, а пять будет лишнего $(9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55)$. Значит, оставшиеся 45 конфет разложены ровно в 4 пакета. Это возможно, например: $45 = 9 + 11 + 12 + 13$.

Оценим количество конфет в третьем подарке. Снова заметим, что в четвёртом пакете не более 9 конфет; иначе в пакетах с номерами 4-7 не менее $10 + 11 + 12 + 13 = 46 > 45$ конфет, противоречие.

Если в четвёртом пакете 9 конфет, то в третьем не больше 8, во втором — не больше 7, так что в первом пакете — не менее $20-8-7 = 5$ конфет. Но и не более; иначе в трёх самых маленьких подарках будет не менее $6+7+8 = 21 > 20$ конфет, противоречие.

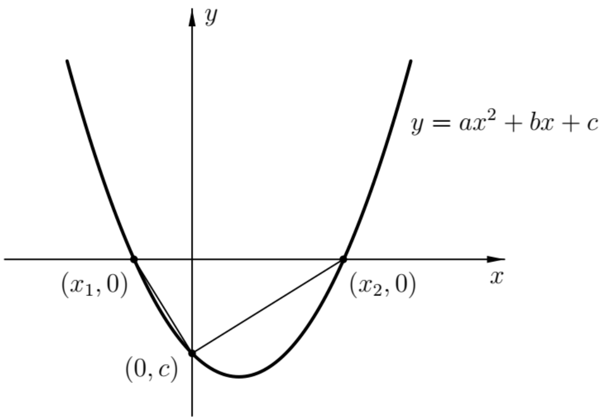


Рис. 17

21. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Можно считать, что $a > 0$ и ветви параболы направлены вверх. В противном случае умножим $f(x)$ на -1, произведение ac от этого не изменится, а треугольник с вершинами в точках пересечения с осями отразится симметрично относительно оси абсцисс.

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $f(x) = 0$. Ясно, что если $x_1 = x_2$, то парабола касается оси абсцисс, и тогда все три точки пересечения совпадают, поэтому треугольник из условия задачи является вырожденным. Поэтому будем считать, что $x_1 < x_2$. Кроме того, ясно, что точка пересечения с осью ординат имеет координаты $(0; c)$.

Квадраты длин сторон этого треугольника равны $x_1^2 + c^2$, $x_2^2 + c^2$ и $(x_1 - x_2)^2$. Ясно, что прямым может быть только угол при вершине $(0; c)$ (два других — острые). Значит, треугольник будет прямоугольным тогда и только тогда, когда

$$(x_1^2 + c^2) + (x_2^2 + c^2) = (x_2 - x_1)^2.$$

Раскрыв скобки в правой части этого равенства, получим

$$(x_1^2 + c^2) + (x_2^2 + c^2) = x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2,$$

откуда $x_1x_2 = -c^2$. По теореме Виета $x_1x_2 = -c/a$. Следовательно, треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда $-c^2 = c/a$, то есть $ac = -1$.

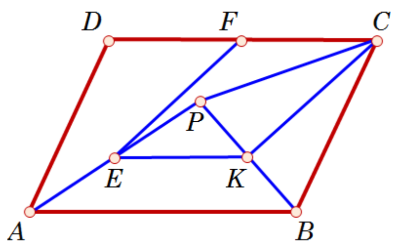


Рис. 18

22. *Ответ:* 99.

Заметим, что для любого x справедливо равенство

$$x^{120} - 1 = (x^5 + 1)(x^{115} - x^{110} + x^{105} - \ldots + x^5 - 1).$$

Следовательно, $10^{120} - 1$ делится нацело на $10^5 + 1$, причём частное имеет вид $B = 10^5 \cdot k - 1$, так как в нём все слагаемые, кроме последнего, делятся на 10^5. Значит, это частное заканчивается на цифры $\ldots 9999$.

Число $A = 10^{120}/(10^5 + 1)$ можно представить в виде

$$A = \frac{10^{120}}{10^5 + 1} = \frac{10^{120} - 1}{10^5 + 1} + \frac{1}{10^5 + 1} = B + \frac{1}{10^5 + 1}.$$

Очевидно, что второе слагаемое положительно и меньше 1, поэтому оно не влияет на цифры перед запятой (целую часть числа A). Поэтому две последние цифры перед запятой (цифры единиц и десятков) совпадают с последними двумя цифрами числа B, то есть равны 99.

23. (Рис. 18.) Треугольник CBP по условию равнобедренный, поэтому его медиана CK совпадает с высотой, то есть перпендикулярна BP. Значит, достаточно доказать, что $CK \parallel EF$.

В треугольнике APB отрезок EK — средняя линия, следовательно, $EK \parallel AB$ и $EK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$. По условию отрезок FC тоже параллелен AB и равен $\frac{1}{2}CD$. Поэтому отрезки EK и FC равны и параллельны, значит, четырёхугольник $EKCF$ — параллелограмм, тогда $CK \parallel EF$.

24. *Ответ: а) можно; б) нельзя.*

а) Один из примеров на рисунке 19.

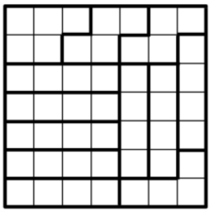


Рис. 19

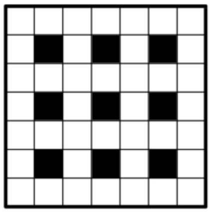


Рис. 20

б) Заметим, что $49/13 < 4$, поэтому среди фигурок найдется хотя бы одна площади не больше, чем 3. Рассмотрим все клетчатые фигурки площади не более 4 (рис. 21).

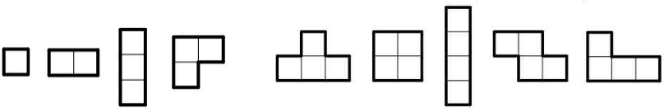


Рис. 21

Далее, периметр единственной одноклеточной фигурки равен 4, а единственной двухклеточной равен 6, причем никакая другая клеточная фигурка не может иметь такой маленький периметр. Периметр обеих трёхклеточных фигурок (тримино) равен 8. Следовательно, пробовать разрезать квадрат 7×7 можно только на фигурки периметра 8.

Из всех четырёхлеточных фигурок (тетрамино) только квадрат 2×2 имеет периметр 8, а все остальные — периметр 10. Кроме того, понятно, что любая фигурка из более, чем 4 клеток, будет иметь периметр хотя бы 10. Значит, разрезать мы сможем только на тримино и квадраты 2×2. Пусть в разрезании участвует x тримино и y квадратов. Тогда

$$\begin{cases} x + y = 13, \\ 3x + 4y = 49. \end{cases}$$

(Второе уравнение следует из сравнения площадей.) Эта система уравнений имеет единственное решение $x = 3$, $y = 10$. Осталось показать, что в квадрате 7×7 невозможно разместить 10 непересекающихся квадратов 2×2. Действительно, покрасим 9 клеток квадрата в черный цвет, как показано на рисунке 20. Тогда каждый квадрат 2×2, который можно разместить внутри квадрата 7×7, обязательно содержит ровно одну чёрную клетку. Поэтому больше 9 таких квадратов разместить нельзя.

Замечание. Аналогичные рассуждения можно использовать при построении примера в пункте *а*). Прямая проверка показывает, что единственная пятиклеточная фигурка (пентамино) периметра 10 — это , а периметр всех остальных больше 10. Следовательно, резать нужно на фигурки периметра 10. Аналогичная система уравнений $x + y = 12$, $4x + 5y = 49$ имеет решение $x = 11$, $y = 1$. Поэтому нужно задействовать ровно одну фигурку пентамино, и 11 тетрамино, причем нельзя использовать квадраты 2×2.

25. *Ответ: а) можно; б) нельзя.*

а) Нужные куски всегда можно получить, например, так. Выберем из образовавшихся частей ту, которая не короче другой (и значит, не короче $12,5$ метров), вырезаем из неё 12-метровый кусок. У нас останется две части, сумма длин которых равна 13 *м*. По крайней мере одна из этих частей будет не короче $6,5$ *м*; вырезаем 6-метровый кусок и так далее. (Оставаться будут пары частей с суммами длин 7 *м*, 4 *м* и 2 *м*, а вырезаться куски длиной 3 *м*, 2 *м* и 1 *м* соответственно.)

б) Если провод длиной $l = 24,99$ метров разрезали, например, на части с длинами $0,995$ *м* и $23,995$ *м*, то получить требуемые куски нельзя. В самом деле, из куска $0,995$ *м* невозможно вырезать ни одного требуемого куска, а из куска $23,995$ *м* это сделать не получится, поскольку сумма длин $1+2+3+6+12=24$ больше $23,995$.

26. *Ответ:* $\frac{1}{2}$.

По условию $f(x)$ принимает целые значения при всех целых x, поэтому числа $f(0)=c$, $f(1)=a+b+c$ и $f(-1)=a-b+c$ — целые. Значит, $f(1)+f(-1)=2a+2c$ — целое, а так как c — целое, то и $2a$ — целое. Если $a>0$, то $2a$ не меньше 1, и значит, $a \geqslant \frac{1}{2}$. Функция $f(x)=\frac{1}{2}(x^{100}+x)$ с коэффициентом $a=\frac{1}{2}$ удовлетворяет условию задачи, поскольку сумма $x^{100}+x$ делится на 2 для всех чётных и нечётных x.

27. *Ответ:* 30.

Обозначим пары чисел на противоположных гранях куба через a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2. Тогда сумма восьми произведений равна $(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)=1000$. Воспользуемся неравенством о среднем арифметическом и геометрическом для трёх положительных чисел a_1+a_2, b_1+b_2 и c_1+c_2:

$$\sqrt[3]{(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)} \leqslant \frac{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)}{3}.$$

Левая часть равна $\sqrt[3]{1000}=10$, поэтому наименьшее значение суммы $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)$ равно 30.

Знак равенства достигается только в случае, когда $a_1+a_2=$ $=b_1+b_2=c_1+c_2=10$. Этим условиям удовлетворяют, например, числа 1 и 9, 2 и 8, 3 и 7.

28. *Ответ:* $1:1$.

Пусть K — точка пересечения прямой B_1D с описанной окружностью треугольника BNM (рис. 22). Докажем, что четырёхугольник $NDMK$ — параллелограмм. Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, отсюда будет следовать, что прямая B_1DK делит MN в отношении $1:1$.

Сначала докажем параллельность прямых MD и NK.

Вписанные углы BB_1D и BCD опираются на дугу BAD, значит, $\angle BCD=\angle BB_1D$. Равными будут и вписанные углы BB_1K и BNK как опирающиеся на дугу BMK, то есть $\angle BB_1K=\angle BNK$, поэтому $\angle BCD=\angle BNK$. Это означает, что $MC \parallel NK$.

Аналогично доказывается параллельность MK и ND.

Четырёхугольники $BADC$ и $BMKN$ — вписанные, поэтому $\angle BAD = 180^\circ - \angle BCD$ и $\angle BMK = 180^\circ - \angle BNK$. Так как $\angle BCD = \angle BNK$, отсюда следует, что $\angle BAN = \angle BMK$, и значит, $MK \parallel ND$.

Итак, $NDMK$ — параллелограмм, B_1D делит MN пополам.

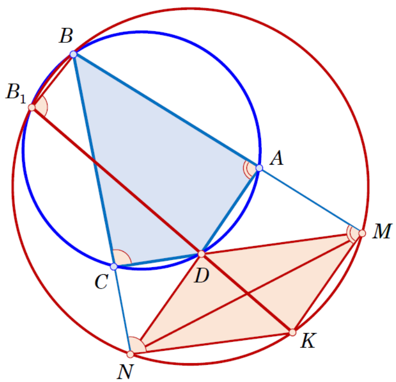


Рис. 22

29. Совпадает с задачей **25**.

30. *Ответ:* 1.

Подставив в равенство $x = 1$ и $y = \frac{1}{2}$, получим $f(1)\cdot f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$, откуда $f(1) = 1$.

Теперь возьмём $y = 1$, тогда $f(x)\cdot f(1) = f(x-1)$, и значит, $f(x) = f(x-1)$. Полученное равенство означает, что f — периодическая функция с периодом 1. Поэтому $1 = f(1) = f(2) = \ldots = f(2020)$.

31. *Ответ:* 4.

При $a = b = 2$, $c = d = 0$ имеем $S = 4$. Докажем, что это значение наибольшее. Оценим сумму S, добавив к ней неотрицательное число da:

$$S = ab + bc + cd \leqslant (ab + bc) + (cd + da) = (a + c)(b + d).$$

Учтём, что $b + d = 4 - (a + c)$, и обозначим $x = a + c$, тогда $S \leqslant x(4 - x) \leqslant 4$. Последнее неравенство легко доказывается, поскольку эквивалентно очевидному $0 \leqslant (x-2)^2$. Знак равенства достигается при $a+c=b+d=2$ и $da=0$, то есть $c=2-a$, $d=2-b$ и $ad=a(2-b)=0$. Следовательно, наибольшее значение $S=4$ достигается только для четвёрок (a,b,c,d) вида $(0,t,2,2-t)$, $(t,2,2-t,0)$, где $0 \leqslant t \leqslant 2$.

32. *Ответ:* 1 : 1.

Пусть описанные окружности треугольников ADC и BEC пересекаются в точках C и P (рис. 23). Докажем, что $KC=LC$, и значит, искомое отношение равно 1.

Как известно, линия, соединяющая центры описанных окружностей ADC и BEC, перпендикулярна общей хорде CP этих окружностей, так что $CP \perp KL$.

Так как точки A, P, D, C принадлежат одной окружности, сумма углов CAP и CDP равна $180°$. Но сумма смежных углов CDP и BDP тоже равна $180°$, значит, $\angle EAP = \angle BDP$. Аналогично, $\angle AEP = \angle DBP$. Из этих двух равенств, а также из условия $AE=BD$ следует, что треугольники APE и DPB равны. Отсюда $PE=PB$. Из равенства этих хорд следует равенство соответствующих дуг, а значит, и равенство вписанных углов BCP и PCE.

Таким образом, треугольник LCK — равнобедренный, так как CP является биссектрисой и высотой; поэтому $KC=LC$.

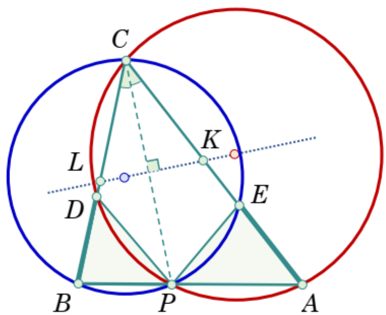


Рис. 23

Замечание. Тот факт, что CP — биссектриса можно доказать и по-другому. По теореме о секущей $AE \cdot AC = AP \cdot AB$ и $BD \cdot BC = BP \cdot BA$, отсюда

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{BP}.$$

то есть прямая CP делит сторону AB на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам треугольника. Значит, CP — биссектриса, что и требовалось.

33. *Ответ: например,* 111235.

Разложим число 390 на простые множители: $390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$. Явным кандидатом на роль суммы цифр является простое число 13. И действительно, $13 = 2 + 3 + 5 + 1 + 1 + 1$. Поэтому подойдет любое шестизначное число, в записи которого есть по одной двойке, тройке и пятерке и три единицы, например, 111235.

34. *Ответ: при* $n = 12$.

Оценка. Рассмотрим второе по величине число. Если оно не меньше 15, то самое большое число не меньше 18, и сумма квадратов двух наибольших чисел не меньше, чем $15^2 + 18^2 = 549 > 500$, что невозможно. Поэтому второе по величине число не превосходит 14. Аналогично второе с конца число не меньше, чем -14. Таким образом, все искомые числа, кроме, может быть, наибольшего и наименьшего, не больше 14 и не меньше -14. Так как $14-(-14) = 28 < 3\cdot 10$, написанные на доске числа разбивают отрезок числовой оси между -14 и 14 не более чем на 9 частей, то есть всего между -14 и 14 не более 8 наших чисел. Так как это все наши числа, кроме, может быть, двух наибольших и двух наименьших, всего на доске написано не более 12 чисел.

Пример. -17, -14, -11, -8, -5, -2, 2, 5, 8, 11, 14, 17.

35. Пусть точка D' симметрична D относительно прямой AK. Тогда $BC = DK = D'K$ и $KC = AD - AB = AD' - AB = BD'$, откуда следует равенство треугольников $BD'K$ и BCK по трём сторонам. Значит, $\angle BCK = \angle BD'K = \angle AD'K = \angle ADK = \angle ADC$.

36. *Ответ: Панда.*

Если Панда не может сделать ход, то любой отрезок соединяет вершину чётной и нечётной степени. В этом случае количество отрезков равняется сумме степеней точек с чётной степенью, и значит, обязательно делится на два. Посчитаем (последовательно, начиная с крайней точки) сколько отрезков было изначально: $(10 + 11 + \ldots + 18 + 19 + 30 \cdot 20 + 19 + 18 + \ldots + 11 + 10)/2 = 10 \cdot 29/2 + 30 \cdot 10$, что не делится на 2. Так как за один ход количество отрезков уменьшается ровно на 1, перед ходом Панды всегда будет нечётное число отрезков. Следовательно, Панда всегда может сделать ход. Очевидно, игра закончится, поэтому Панда победит.

37. *Ответ: верно.*

Назовём два звена, названных в условии, *особыми.* По условию с каждым особым звеном пересекаются все не соседние с ним не особые. Поэтому достаточно доказать, что, если особые рёбра (назовём их p и q) не соседние, то они пересекаются.

Предположим, это не так, и одно из рёбер (скажем, p) не пересекает прямую, содержащую другое ребро (*). Пусть наша ломаная — это $A_1A_2\ldots A_{1001}$, где A_1A_2 — ребро q. Пусть ребро p — это A_kA_{k+1}.

Поскольку рёбра A_1A_{1001} и A_2A_3 — не особые, они пересекаются. Значит, точки A_{1001} и A_3 лежат в одной полуплоскости относительно прямой A_1A_2. Далее, каждое ребро A_iA_{i+1}, где $i \neq k$ и $3 \leqslant i \leqslant 999$, пересекает A_1A_2, то есть точки A_i и A_{i+1} лежат в разных полуплоскостях относительно A_1A_2. Поскольку точки A_3 и A_{1001} лежат в одной полуплоскости (и число 1001 нечётно), отсюда следует, что все точки A_i с нечётными i лежат в той же полуплоскости, а с чётными i — в другой. Но тогда точки A_k и A_{k+1} лежат в разных полуплоскостях относительно A_1A_2, что противоречит нашему предположению (*).

38. Поделим дорожку на шесть равных частей последовательными точками A_1, ..., A_6 так, чтобы бегуны стартовали из точки A_1 в направлении A_2. Добежав до A_4, Вася поворачивает и в точке A_3 впервые встречает Петю. Затем Вася продолжает бежать по часовой стрелке, пока не встретит Петю во второй раз в точке A_5. Пробежав ещё по часовой стрелке не дальше точки A_4, Вася поворачивает (он имеет на это право, так как перед этим пробежал по часовой стрелке более половины дорожки) и обгоняет Петю не позже, чем тот добежит до финиша, так как Пете после второй встречи осталось бежать до точки A_1 треть круга, а Васе — не более двух третей круга.

39. *Ответ:* 1010.

Оценка. Присвоим хамелеону, высказавшемуся первым, номер 1, высказавшемуся вторым — номер 2 и так далее. Разобьём хамелеонов на пары: 1 с 2, 3 с 4, ..., 2017 с 2018. Получим 1009 пар и одиночного хамелеона 2019. Оба хамелеона из одной пары не могут быть зелёными, так как тогда они назвали бы одинаковые числа. Поскольку в каждой паре был коричневый, исходное количество зелёных хамелеонов было не больше $2019 - 1009 = 1010$.

Пример. Осталось показать, что 1010 зелёных хамелеонов быть могло. Пронумеруем хамелеонов в порядке их высказываний. Пусть все нечётные хамелеоны — зелёные, а все чётные — коричневые. Тогда первый скажет — 1010, второй — 1 и станет зелёным. Тогда третий скажет — 1011, а четвёртый — 2 и станет зелёным, и так далее. В результате нечётные хамелеоны произнесут все числа от 1010 до 2019, а чётные — от 1 до 1009.

Замечание. Из приведённой оценки следует, что в любом оптимальном примере коричневыми должны являться в точности хамелеоны с чётными номерами.

40. *Ответ: нельзя.*

Пусть так отметить числа можно. Пронумеруем отмеченные числа в порядке возрастания: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Положим $b_n = a_{n+1} - a_n$. По условию в последовательности $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ любое число является квадратом натурального числа. Кроме того, квадратом является любая сумма $b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n = a_{n+1} - a_k$. Пусть $b_2 + \ldots + b_n = c_n^2$. Очевидно, $c_1 < c_2 < \ldots < c_n < \ldots$. Поэтому найдется такое n, что $2c_n + 1 > b_1$. Сумма $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ должна быть квадратом некоторого натурального числа d. При этом $d^2 > c_n^2$, и поскольку числа d и c_n — натуральное, можем записать $d^2 \geqslant (c_n + 1)^2 = c_n^2 + 2c_n + 1 > c_n^2 + b_1 = d^2$. Противоречие.

41. *Ответ: не может.*

Назовем число a из таблицы *предком* числа b, если от a до b можно добраться сверху вниз по цепочке описанных в условии наибольших общих делителей (НОД). Двигаясь по строкам снизу вверх, нетрудно убедиться, что у каждого числа a из 1000-ой строки 1000 предков из первой строки, все эти предки идут в строке подряд, и a равно их НОД.

Пусть числа a и b из 1000-й строки делятся на простое число p. Тогда делятся на p и все предки каждого из них. Если число c записано в 1000-ой строке между a и b, то каждый его предок является также предком либо a, либо b. Поэтому c также делится на p. Но среди 1000 последовательных чисел найдутся числа, дающие при делении на 30 остатки 6, 10 и 15, которые, в силу доказанного, не могут стоять ни в каком порядке, так как любые два из них делятся на простое число, на которое не делится третье.

42. (Рис. 24.) Обозначим через P и Q середины сторон AB и AC, а через M и N — точки, в которых DE и DF пересекают стороны AC и AB соответственно. Тогда треугольник DPB будет подобен треугольнику FAB по двум углам ($\angle DBP = \angle FBA$ по условию, $\angle BPD = \angle BAF = 120°$) с коэффициентом 2, так как $AB = 2PB$. Тогда по свойству биссектрисы

$$\frac{DN}{NF} = \frac{DB}{BF} = \frac{PB}{AB} = \frac{1}{2}.$$

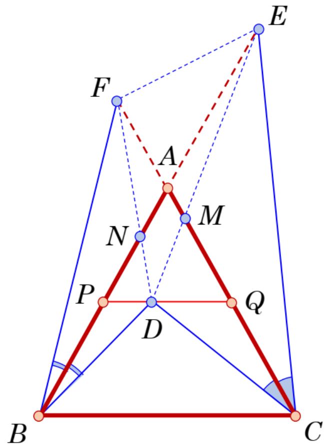


Рис. 24

Аналогично $DM/ME = 1/2$. Следовательно, $S_{\triangle FAE} = 2S_{\triangle FDA}$ (так как сторона AF у треугольников общая, а отношение опущенных на неё высот равно $DM/ME = 1/2$) и, аналогично, $S_{\triangle FAE} = 2S_{\triangle EDA}$, откуда $S_{\triangle FDE} = 2S_{\triangle FAE}$, и потому высота из вершины A на EF вдвое меньше высоты из вершины D на EF, откуда и вытекает утверждение задачи.

43. *Ответ: может.*

Приведём пример, как Малыш может добиться такого распределения. На первой минуте он делит кучку из 10 конфет на две кучки по 5 конфет. Далее на 2-й, 4-й, 6-й, 8-й минутах он соединяет кучки $1 + 9$, $2 + 8$, $3 + 7$, $4 + 6$ соответственно, а на 3-й, 5-й, 7-й, 9-й минутах делит только что полученную кучу из 10 конфет на две равных части. На 9-й минуте он получает 11 куч по 5 конфет.

Замечание. Существуют и другие способы получить 11 куч по 5 конфет. С другой стороны, количество куч на столе всегда равно 10 или 11; отсюда нетрудно видеть, что если требуемое произошло, то на столе появилось именно 11 куч по 5 конфет в каждой.

44. *Ответ: при* $n = 202$.

Оценка. Заметим сразу, что

$$990^2 + 1000^2 + 1010^2 = (1000 - 10)^2 + 1000^2 + (1000 + 10)^2 = \\ = 3 \cdot 1000^2 + 2 \cdot 10^2,$$

что больше трёх миллионов. С другой стороны, $989^2 + 999^2 + 1009^2 = (1000 - 11)^2 + (1000 - 1)^2 + (1000 + 9)^2 = 3 \cdot 1000^2 - 6 \cdot 1000 + (9^2 + 1^2 + 11^2)$, что меньше трёх миллионов.

Если неотрицательных чисел на доске не меньше, чем 102, то три наибольших из них не меньше, чем $99 \cdot 10 = 990$, $100 \cdot 10 = 1000$ и $101 \cdot 10 = 1010$ соответственно. Тогда по замечанию выше сумма их квадратов больше трёх миллионов, что невозможно. Поэтому неотрицательных чисел на доске не больше 101. Аналогично, отрицательных чисел не больше 101. Таким образом, общее количество чисел не больше, чем $101 + 101 = 202$.

Пример при $n = 202$ дают числа $-1009, -999, -989, \ldots, -9, 9, 19, \ldots, 999, 1009$. Из замечания выше, он подходит.

Замечание. Также в качестве примера подходят, например, числа $-1005, -995, -985, \ldots, -5, 5, 15, \ldots, 995, 1005$.

45. *Ответ: Коля.*

Приведём выигрышную стратегию за Колю. Мысленно раскрасим доску шахматным образом и будем ставить крестики только в чёрные клетки. Дима за один свой ход покрывает ровно одну из чёрных клеток; значит, Коля сможет сделать 16 ходов. Покажем, что Дима не сможет сделать свой 17-й ход.

Пока Коля действует по стратегии, под каждой Диминой доминошкой будет белая клетка без крестика. Поэтому Дима не сможет накрыть доминошкой ни один крестик. Тогда за 16 пар ходов все чёрные клетки будут покрыты доминошками или крестиками, но ни в одной белой клетке не будет крестика. Значит, Дима не сможет поставить доминошку, соблюдая правила игры.

46. Положим $p = 2k+1$. Предположим противное: для каждого из чисел $y = 1, 2, \ldots, k$ существует разложение $py+1 = a_y b_y$, где $a_y > y$, $b_y > y$. Заметим, что каждое из чисел a_y и b_y строго больше 1, а также, что $a_y < p$, $b_y < p$, иначе $a_y b_y \geqslant p(y+1) > py+1$. Значит, каждое из $p - 1$ чисел набора $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k$ лежит в множестве из $p - 2$ чисел $\{2, 3, \ldots, p - 1\}$. Таким образом, в этом наборе найдутся два равных числа. Пусть каждое из этих двух чисел равно d.

Пусть эти равные числа имеют равные индексы в наборе, то есть $a_y = b_y = d$ при некотором y. Тогда $py + 1 = d^2$, поэтому число $d^2 - 1 = (d-1)(d+1) = py$ делится на простое p. Так как $1 \leqslant d - 1 < d + 1 \leqslant p$, это может быть лишь при $d + 1 = p$. Тогда соответствующее значение y равно $d - 1 = p - 2 = 2k - 1$, что при $p > 3$ больше, чем k. Противоречие (так как $y \leqslant k$).

В противном случае существуют индексы $y_1 < y_2$ такие, что $1 \leqslant y_1 < y_2 < d$, для которых числа $py_1 + 1$ и $py_2 + 1$ делятся на d. Тогда и $p(y_2 - y_1) = (py_2 + 1) - (py_1 + 1)$ также делится на d. Из взаимной простоты чисел d и p получаем, что $y_2 - y_1$ делится на d, а это невозможно, так как $0 < y_2 - y_1 < y_2 < d$.

Таким образом, в каждом случае получено противоречие и, значит, указанное в условии задачи число y всегда найдётся.

47. Имеем $S_{ABCD} = pr$, где p — полупериметр четырёхугольника, а r — радиус ω. Из описанности вытекает $AB + CD = BC + DA$, откуда

$$S_{ABCD} = (BC + AD) \cdot r. \tag{1}$$

С другой стороны, если M и N — середины сторон BC и AD соответственно (см. рисунок 25), имеем

$$S_{ABCD} = (S_{ABM} + S_{ACM}) + (S_{ACN} + S_{DCN}) =$$
$$= 2S_{ACM} + 2S_{ACN} = 2 \cdot S_{AMCN} = 2S_{AMN} + 2S_{CMN} \leqslant$$
$$\leqslant MN \cdot AN + MN \cdot CM = MN \cdot (AN + CM) =$$
$$= \tfrac{1}{2} MN \cdot (AD + BC).$$

Сравнивая с (1), после деления на $AD + BC$ получим требуемое неравенство $MN \geqslant 2r$.

Замечание. Из решения нетрудно видеть, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $ABCD$ — равнобокая описанная трапеция с основаниями AD и BC.

48. Пусть Миша, пробежав полкруга, развернётся и побежит назад. Пока он пробежит полкруга обратно, он встретит Петю. Когда Миша добежит до точки старта, Петя ещё не добежит до неё. Значит, если Миша продолжит бежать в том же направлении, он встретит Петю в какой-то точке на расстоянии d от старта. Пусть он пробежит ещё положительное расстояние ε, меньше $0,01d$, а затем развернётся (он может это сделать). Тогда, пока Петя преодолевает оставшееся расстояние d, Вася пробежит $1,02d > \varepsilon + (d+\varepsilon)$. Значит, он уже минует точку старта, а значит, перед этим он поравняется с Петей в третий раз.

49. Совпадает с задачей **39**.

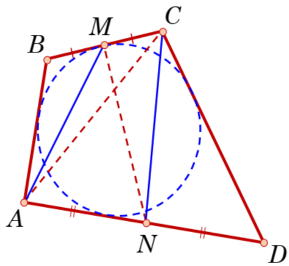


Рис. 25

50. *Ответ:* 60°.

Первое решение. Из симметрии треугольники CLD и SLD равны, поэтому $DS = DC$, $\angle CDL = \angle SDL$ и $\angle DLC = \angle DLS$. Поскольку четырёхугольник $ALDB$ вписан в окружность, имеем $\angle BAL = \angle LDC$ (см. рис. 26). На хорды AL и DL этой окружности опираются равные углы, поэтому $AL = DL$.

Отложим на луче AB отрезок $AS' = DS = DC$. Тогда треугольники $S'LA$ и SLD равны по двум сторонам ($AS' = DS$, $AL = DL$) и углу между ними. Значит, $LS' = LS$ и $\angle AS'L = \angle DSL$. Если точки S' и S не совпадают, то в равнобедренном треугольнике LSS' углы при основании SS' равны, поэтому $\angle AS'L = \angle BSL$. Значит, $\angle DSL = \angle BSL$, то есть D лежит на AB; это невозможно.

Итак, $S' = S$, и $\angle ALS = \angle DLS = \angle DLC$. Сумма этих трёх углов равна 180°, поэтому они равны по 60°. Отсюда $\angle ABC = 180^\circ - \angle ALD = 60^\circ$.

Второе решение. Пусть Ω — окружность, описанная около треугольника BCS (см. рис. 27). В этом треугольнике прямая BL является биссектрисой угла B, а прямая LD — серединным перпендикуляром к стороне CS. Эти прямые различны; обе они проходят через середину дуги CS окружности Ω, не содержащей B. Значит, их точка пересечения L и есть эта середина дуги, то есть $L \in \Omega$.

Поскольку четырёхугольник $ALDB$ вписан, имеем $\angle ABC = \angle DLC = \beta$. Из симметрии, $\angle DLC = \angle DLS = \beta$. Теперь из окружности Ω получаем $180^\circ = \angle CBS + \angle SLC = \angle\beta + \angle DLS + \angle DLC = 3\beta$, откуда $\beta = 60^\circ$.

Замечание. Существуют и другие решения. Можно, например, заметить, что точка L является центром вневписанной окружности треугольника BDS

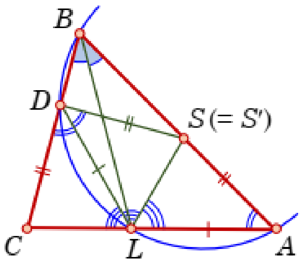


Рис. 26

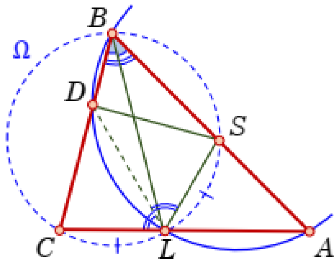


Рис. 27

(поскольку BL — биссектриса внутреннего угла этого треугольника, а DL — биссектриса его внешнего угла). Это приводит к вычислению $\angle ABC = \angle DLC = \angle DLS = 90^\circ - \angle ABC/2$, откуда следует ответ.

Можно также рассмотреть точку T, симметричную точке C относительно LB, а также проекции S' и T' точки C на LD и LB соответственно. Из вписанности четырёхугольников $ABDL$ и $LT'S'C$ имеем $\angle ABC = \angle DLC = \angle S'T'C = \angle STC = \angle BTC$. Но треугольник BTC — равнобедренный, поэтому $\angle BTC = 90^\circ - \angle ABC/2$.

51. *Ответ: нет, не может.*

Докажем следующую несложную лемму.

Лемма. *Если n-угольник разбит непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники, количество которых равно t, то $n = td + 2$.*

Доказательство. Индукция по t; база при $t = 1$ очевидна.

Сделаем шаг индукции. Предполагая, что утверждение верно для количеств $(d+2)$-угольников, равных $1, 2, \ldots, t-1$, рассмотрим разрезание n-угольника P на t таких многоугольников. Возьмём в разрезании любую диагональ. Она делит наш n-угольник на два многоугольника P_1 и P_2, один из которых разрезан на s, а другой — на r многоугольников, где $s + r = t$, причём $s < t$, $r < t$. По предположению индукции в многоугольниках P_1 и P_2 соответственно $sd + 2$ и $rd + 2$ сторон, а значит (поскольку P_1 и P_2 склеены по стороне), в многоугольнике P всего $(sd+2)+(rd+2) - 2 = (s+r)d + 2 = td + 2$ сторон.

Перейдём к задаче. Предположим противное: пусть некоторый правильный многоугольник Q разбит непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники ($d > 3$ — нечётно), среди которых есть хороший $(d+2)$-угольник $A_0A_1\dots A_{d+1}$ — пусть, скажем, сторона $A_{d+1}A_0$ параллельна некоторой другой стороне A_kA_{k+1}, где $k\in\{1,2,\dots,d-1\}$.

Опишем вокруг Q окружность. Поскольку $A_{d+1}A_0 \parallel A_kA_{k+1}$, меньшие дуги A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ равны.

Пусть на меньшей дуге A_0A_1 расположены (в порядке следования от A_0 к A_1) m вершин многоугольника Q, назовем их B_1, $B_2,\dots,B_m$. Возможно, что $m=0$. Если $m>0$, вырежем из многоугольника Q многоугольник $A_0B_1B_2\dots B_mA_1$. Видим, что этот $(m+2)$-угольник оказывается разбитым непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники. Согласно лемме, m делится на d (это верно и при $m=0$).

Аналогично доказываем, что внутри каждой из дуг (не считая концов дуг) $A_1A_2,\dots,A_{k-1}A_k$ количество вершин многоугольника Q кратно d. Тогда количество вершин многоугольника Q внутри (меньшей) дуги A_0A_k (не считая самих концов дуг A_0 и A_k) равно $td+k-1$ для некоторого целого t. Аналогичный подсчёт количества вершин многоугольника Q, лежащих внутри (меньшей) дуги $A_{k+1}A_{d+1}$, даёт $sd+d-k-1$. Приравнивая, получаем $td+k-1=sd+d-k-1$, откуда $2k$ делится на d. В силу нечётности d получаем, что k делится на d; это противоречит условию $k\in\{1,2,\dots,d-1\}$.

Замечание. В приведённом решении противоречие получается из подсчёта числа вершин на равных дугах A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ и приравнивании этих количеств.

У этого рассуждения есть вариации; например, можно осуществить двойной подсчёт суммы углов в (равных) многоугольниках, отсекаемых от Q отрезками A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$.

52. Продолжим нумерацию циклически: будем считать, что $x_{i+9}=x_i$. Зафиксируем индекс i и обозначим для простоты: $a = x_i$, $b=x_{i+1}$, $c=x_{i+2}$. Заметим, что при $a\geqslant c$ выполнено неравенство

$$ac+2bc+b^2\leqslant ac+ab+bc+b^2=(a+b)(b+c),$$

а при $a\leqslant c$ — неравенство

$$ac+2bc+b^2\geqslant ac+ab+bc+b^2=(a+b)(b+c).$$

Значит, в любом случае имеем

$$\frac{a-c}{ac+2bc+b^2}\geqslant\frac{a-c}{(a+b)(b+c)}=\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b},$$

то есть

$$\frac{x_i - x_{i+2}}{x_i x_{i+2} + 2x_{i+1}x_{i+2} + x_{i+1}^2} \geqslant \frac{1}{x_{i+1} + x_{i+2}} - \frac{1}{x_i + x_{i+1}}.$$

Складывая такие неравенства при всех $i = 1, 2, \ldots, 9$, получаем требуемое.

53. *Ответ: например,* 1567.

Заметим, что $3990 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 = 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$ и $6 + 5 + 7 + 1 = 19$. Поэтому подойдёт любое четырёхзначное число, в записи которого по одной единице, шестёрке, пятёрке и семёрке, например, 1567.

54. Предположим противное: множества A и B не пересекаются. Тогда их объединение содержит $2n$ различных натуральных чисел. Следовательно, сумма S всех элементов объединения множеств A и B будет не меньше суммы $1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n+1)$. С другой стороны, по условию $S = 2n^2$, что меньше, чем $n(2n+1)$. Противоречие.

55. *Ответ: Дима.*

Первое решение. Приведём стратегию за Диму. Разобьём доску на 32 прямоугольника 1×2 до начала игры. За первые 16 ходов соперник может поставить свои крестики в не более чем 16 из них, значит, мы сможем покрыть 16 остальных прямоугольников своими доминошками, и все крестики соперника будут стоять в каких-то клетках 16 остальных прямоугольников (назовем эти прямоугольники *новыми*).

Теперь покажем, что далее Дима сможет ответить на сделанный Колей $(16 + k)$-й ход $(1 \leqslant k \leqslant 16)$, покрывая некоторый новый прямоугольник. Коля поставил к этому моменту $16 + k$ крестиков, и все эти крестики находятся в 16 новых прямоугольниках. Значит, Коля уже заполнил целиком крестиками хотя бы k новых прямоугольников, а Дима покрыл к этому моменту не более $k - 1$ нового прямоугольника. Значит, перед $(16 + k)$-м ходом Димы есть хотя бы один новый прямоугольник с двумя крестиками, ещё не покрытый доминошкой, и его можно покрыть этим ходом, что и требовалось доказать.

После 32-го хода Димы вся доска будет покрыта доминошками, и Коля проиграет, ибо ходить ему некуда.

Второе решение. Приведём стратегию за Диму. Разобьём доску на квадраты 2×2 до начала игры. Пусть Дима будет отвечать на крестик, поставленный впервые в каком-то квадрате, доминошкой на две пустые клетки того же квадрата. Когда Коля будет ставить второй крестик в квадрате, Дима ответным ходом накроет этот крестик и первый поставленный в этом квадрате крестик доминошкой, в результате чего квадрат окажется покрытым двумя доминошками. Таким образом, на любой ход Коли у Димы есть ответный ход.

56. Совпадает с задачей **46**.

57. Совпадает с задачей **47**.

58. *Ответ: да, можно.*

Первым действием дописываем $\cos^2 x$, вторым действием — $\cos^2 x + \cos x$. Поскольку $\cos \pi = -1$, значение последнего выражения при $x = \pi$ равно 0.

59. Пусть $ABXY$ — один из данных прямоугольников, а O — центр окружности, на которой лежат восемь вершин из условия задачи (см. рис. 28). Тогда O лежит на серединном перпендикуляре l к отрезку XY. Но l совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку AB. Поскольку O лежит на l, имеем $OA = OB$.

Аналогично доказываем, что $OB = OC$ и $OC = OD$. Тогда O равноудалена от всех вершин четырехугольника $ABCD$, значит, $ABCD$ вписан в окружность с центром O, что и требовалось доказать.

60. *Ответ: нет, нельзя.*

Решение будет состоять из трёх шагов (A, B, C).

A) Докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть при некоторых натуральных a, b, c квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет целые корни. Тогда b и c делятся на a.*

Доказательство. По теореме Виета для квадратного трёхчлена $b/a = -(x_1 + x_2)$ и $c/a = x_1 x_2$ являются целыми числами. Лемма доказана.

B) Предположим, что натуральные числа $k + 1, k + 2, \ldots, k + 3n$ (при некотором целом неотрицательном k) нужным образом расставлены в качестве коэффициентов данных квадратных трёхчленов $a_i x^2 + b_i x + c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Для определённости пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Тогда $a_1 \geqslant k+1$, откуда $a_2 \geqslant k+2$, и так далее, $a_n \geqslant k+n$. Тогда из леммы следует, что минимальное из чисел b_n, c_n не меньше, чем $2a_n$, а максимальное (назовём его M) — не меньше, чем $3a_n$. Но M должно быть среди чисел $k+1$, $k+2, \ldots, k+3n$. Получаем $3(k+n) \leqslant 3a_n \leqslant M \leqslant k+3n$. Отсюда $k \leqslant 0$, и, значит, $k = 0$. Кроме того, $a_n = n$, откуда сразу следует, что $a_i = i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

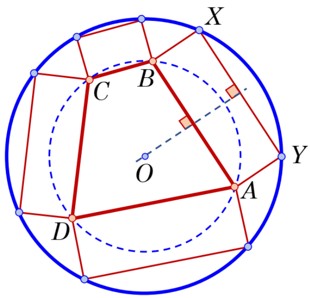


Рис. 28

С) Среди $3n$ подряд идущих чисел менее $3n/2+1$ чётных. С другой стороны, зная, что a_i пробегают числа $\{1, 2, \ldots, n\}$, получим оценку снизу на количество C чётных чисел среди всех коэффициентов. Заметим, что в каждой из n троек (a_i, b_i, c_i) хотя бы одно чётное число, иначе значение трёхчлена $a_i x^2 + b_i x + c_i$ в любой целой точке будет нечётно, в частности, такой трёхчлен не может иметь целых корней. Если же a_i чётно (количество соответствующих троек (a_i, b_i, c_i) равно $[n/2]$), то b_i и c_i, в силу леммы, тоже чётные, значит, в такой тройке (a_i, b_i, c_i) все три коэффициента чётные. Итого, $C \geqslant n + 2[n/2] \geqslant 2n-1$. Сравнивая верхнюю и нижнюю оценки, имеем $3n/2+1 > C \geqslant 2n-1$, откуда $n < 4$. Противоречие.

61. Совпадает с задачей **51**.

62. *Ответ: при* $n = 8$.

Мы будем называть многочлен вида ax^2+bx+c просто *многочленом*, а график такого многочлена — просто *графиком*. Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. *Через любые три точки* (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3)$ *с разными абсциссами проходит ровно один график.*

Доказательство. Один график, проходящий через эти точки, найдётся всегда — нетрудно проверить, что подходит многочлен

$$b_1\frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+b_2\frac{(x-a_3)(x-a_1)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)}+b_3\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$

С другой стороны, если через три точки проходят графики двух разных многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то разность $f(x)-g(x)$ имеет три корня a_1, a_2, a_3, что невозможно.

Из леммы следует, что через любые две точки с разными абсциссами проходит бесконечно много графиков, и любые два из них пересекаются только по этим двум точкам.

Перейдём к решению. Будем считать, что Петя задумал два графика, за ход Вася называет Пете число t, а Петя отмечает точку с абсциссой t на одном из графиков. Можно считать, что на разных ходах Вася называет разные t (иначе Петя повторит ответ).

Рассмотрим ситуацию после k ходов. Назовём пару графиков *подходящей*, если объединение этих графиков содержит все отмеченные Петей точки.

1) Покажем, что $k \geqslant 8$. Мы будем считать, что Петя изначально не рисует никаких графиков, а просто отмечает некоторые точки с данными абсциссами. Покажем, как ему действовать, чтобы после 7 ходов нашлись две подходящих пары графиков такие, что все 4 графика различны; это и будет означать, что Вася не смог добиться требуемого, ибо Петя мог нарисовать любую из этих пар.

Будем обозначать точку, появляющуюся после i-го хода, через $A_i=(a_i,b_i)$. На первых двух ходах Петя выбирает $b_1=b_2=0$. На следующих 4 ходах Петя отметит точки A_3 и A_4 на графике F_+ многочлена $f_+(x)=(x-a_1)(x-a_2)$ и точки A_5 и A_6 — на графике F_- многочлена $f_-(x)=-(x-a_1)(x-a_2)$.

Седьмым ходом Петя выбирает точку A_7, не лежащую ни на одном из графиков, проходящем через какие-то три точки из A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6. Тогда существуют графики G_+ и G_-, проходящие через тройки точек A_5, A_6, A_7 и A_3, A_4, A_7; согласно нашему выбору, эти графики различны и отличаются от F_+ и F_-. Значит, пары (F_+,G_+) и (F_-,G_-) — подходящие, и все эти четыре графика различны, то есть Вася не сможет добиться требуемого.

2) Покажем, как Васе добиться требуемого за 8 ходов. На первых 7 ходах он называет 7 произвольных различных чисел. Назовём график *подозрительным*, если он проходит хотя бы через три точки, отмеченных Петей на этих ходах. Назовём число a плохим, если два различных подозрительных графика имеют общую точку с абсциссой a. Существует лишь конечное количество подозрительных графиков и, следовательно, лишь конечное количество плохих чисел.

На восьмом ходу Вася называет любое неплохое число a_8. После того, как Петя отметит восьмую точку, возможны 2 случая.

Случай 1. Существует график G многочлена $f(x)$, содержащий пять из восьми отмеченных точек. Три из этих точек лежат на одном из петиных графиков; по лемме, этот график совпадает с G. Значит, Васе достаточно назвать многочлен $f(x)$.

Случай 2. Такого графика нет. Это значит, что на каждом из петиных графиков лежит ровно по 4 отмеченных точки; поэтому оба этих графика подозрительны. Докажем, что существует единственная пара подозрительных графиков, содержащих в совокупности все 8 отмеченных точек; тогда Васе достаточно назвать любой из соответствующих многочленов.

Пусть (G_1, H_1) и (G_2, H_2) — две таких пары, причём H_1 и H_2 содержат A_8. Согласно выбору числа a_8, это может произойти лишь при $H_1 = H_2$. Но тогда каждый из графиков G_1 и G_2 проходит через 4 отмеченных точки, не лежащих на H_1, и они совпадают согласно лемме. Значит, и наши пары совпадают.

Замечание 1. Если Петя за первые 6 ходов не отметит 4 точки, лежащие на одном графике, то Вася сможет найти один из многочленов седьмым ходом, действуя аналогично описанному выше.

Замечание 2. При описанной стратегии Васи *может* случиться, что существуют две различные пары подозрительных графиков, каждая из которых содержит в объединении все 8 отмеченных точек. Например, если точки A_3, $A_4, \ldots, A_8$ лежат на одном графике F, а тройки точек (A_1, A_2, A_3) и (A_1, A_2, A_4) задают графики G_1 и G_2, то пары (F, G_1) и (F, G_2) — подходят.

63. *Ответ: при* $n = 17$.

Числа -11, -7, $-6, -5, \ldots, 6, 7, 11$ дают пример при $n = 17$.

Допустим, что есть хотя бы 18 чисел с таким свойством. Тогда какие-то 9 из них будут одного знака (все положительны или все отрицательны). Среди этих 9 чисел модули двух наибольших будут не меньше 8 и 9 соответственно. Тогда их произведение не может быть равно 77.

64. Совпадает с задачей **54**.

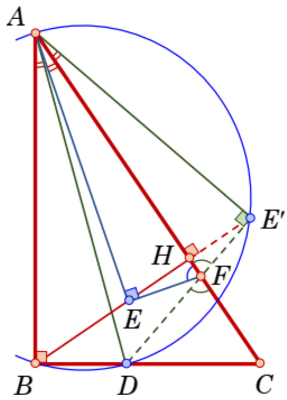


Рис. 29

65. (Рис. 29.) Построим точку E', симметричную точке E относительно стороны AC. Точка F лежит на прямой DE', ибо $\angle DFC = \angle EFA = \angle E'FA$ в силу симметрии. Из прямоугольных треугольников ABC и BCH получаем $\angle E'BC = 90^\circ - \angle ACB = \angle BAC$.

Заметим, что углы BAD, CAE и CAE' равны. Значит, $\angle DAE' = \angle CAE' + \angle DAC = \angle BAD + \angle DAC = \angle BAC = \angle E'BC$. Это означает, что четырехугольник $ABDE'$ — вписанный. Отсюда, поскольку $\angle ABD = 90^\circ$, то $\angle AE'D = 90^\circ$. Тогда в силу симметрии $\angle AEF = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

66. Совпадает с задачей **56**.

67. *Ответ:* $\frac{1}{6}N(N-1)(2N+5)$.

Заметим, что число N^2 большое, а 1 — малое, их разность равна $N^2 - 1$. Вычеркнем строку, содержащую N^2, и столбец, содержащий 1. Тогда, если A и B — наибольшее и наименьшее из оставшихся $(N-1)^2$ чисел, то $A - B \geqslant (N-1)^2 - 1$. При этом A не больше большого числа своей строки (в исходной таблице), а B — не меньше малого числа своего столбца, так что разность этих большого и малого числа также не меньше, чем $(N-1)^2 - 1$. Снова вычеркнем строку, содержащую A и столбец, содержащий B, и повторим рассуждения.

Продолжая так дальше, получим, что интересующая нас разность S не меньше, чем $N^2 - 1 + (N-1)^2 - 1 + \ldots + 1^2 - 1$. Используя формулу суммы квадратов первых N натуральных чисел, получим $S \geqslant \frac{1}{6}N(N-1)(2N+5)$.

Осталось доказать, что оценка достигается. Построим соответствующий пример индукцией по N. База при $N = 1$ очевидна. Для перехода рассмотрим (уже построенный) пример таблицы

$(N-1)\times(N-1)$ и увеличим все числа в нём на $N-1$ (получились числа от N до $N(N-1)$, а разность S не изменилась). Дополним эту таблицу новой строкой и новым столбцом; в новой строке расставим числа $N^2-N+1, N^2-N+2, \ldots, N^2$, а в оставшихся клетках нового столбца — числа $1, 2, \ldots, N-1$. Нетрудно видеть, что числа, бывшие большими и малыми в прежней таблице, такими и остались, и добавились большое число N^2 и малое число 1. Значит, S увеличилась на N^2-1, что и требовалось.

68. *Ответ: например,* $(x^4+1)(x+1)-(x^4+1)=x(x^4+1)$.

Замечание. Существуют и другие примеры.

69. *Ответ: можно.*

Первое решение. Покрасим числа $2^s(4k+1)$, где s, $k = 0, 1, \ldots$, в первый цвет, а $2^s(4k+3)$, $(s, k = 0, 1, \ldots)$ — во второй. Покажем, что никакие два числа первого цвета не дают в сумме степень двойки; рассуждения для чисел второго цвета аналогичны.

Пусть наши два числа — это $2^s(4k+1)$ и $2^t(4l+1)$, где $s \geqslant t$. Если $s > t$, то сумма $2^s(4k+1)+2^t(4l+1) = 2^t(2^{s-t}(4k+1)+4^l+1)$ содержит нечётный множитель $2^{s-t}(4k+1)+4l+1 \geqslant 3$, поэтому она не может быть степенью двойки. Если же $s = t$, то $k \neq l$, и сумма $2^s(4k+1)+2^s(4l+1) = 2^{s+1}(2(k+l)+1)$ тоже содержит нечётный множитель $2(k+l)+1 \geqslant 3$ и не может быть степенью двойки.

Второе решение. Назовём раскраску всех натуральных чисел в два цвета *правильной*, если никакие два числа одного цвета не дают в сумме степень двойки. Раскрасим правильно все натуральные числа в два цвета, пользуясь следующим «жадным алгоритмом»: сначала покрасим 1 в первый цвет. Далее, пусть все натуральные числа от 1 до n уже покрашены правильно в два цвета. Рассмотрим число $n+1$. Предположим, найдутся два различных натуральных числа $x < y \leqslant n$ такие, что $x+n+1 = 2^a$, $y+n+1 = 2^b$, $a < b$. Тогда $y+n+1 = 2^b \geqslant 2^{a+1} = 2(x+n+1)$, откуда $n+1 \leqslant y-2x < n$, что невозможно. Следовательно, существует не более одного числа, меньшего $n+1$ и дающего в сумме с ним степень двойки. Окрасив $n+1$ в цвет, противоположный цвету этого числа, если оно есть, или в первый цвет, если его нет, получим правильную раскраску всех натуральных чисел от 1 до $n+1$. Продолжая этот процесс, получим правильную раскраску всех натуральных чисел в два цвета.

Замечание. Несложно доказать, что полученная раскраска совпадает с раскраской из первого решения. Но, разумеется, это не единственная раскраска такого рода.

70. Пусть $\sin x + \cos y = a$ и $\sin y + \cos x = b$. Тогда $\cos y = a - \sin x$ и $\sin y = b - \cos x$. Возведём эти равенства в квадрат и сложим их. Тогда в силу основного тригонометрического тождества получим: $1 = a^2 + b^2 - 2a\sin x - 2b\cos x + 1$, то есть $2a\sin x + 2b\cos x = a^2 + b^2$. Пусть N — НОК знаменателей чисел a и b; тогда, умножив полученное равенство на N^2, получим требуемое.

71. Первое решение. Обозначим данные сферы через Ω_1, Ω_2 и Ω_3 так, чтобы они касались плоскости α в точках D, E и F соответственно. Пусть C — точка касания сфер Ω_1 и Ω_2. Обозначим через β плоскость, перпендикулярную α и содержащую прямую DE. Тогда центры сфер Ω_1 и Ω_2 и точка C лежат в плоскости β.

Пусть эта плоскость пересекает сферы Ω_1 и Ω_2 по окружностям ω_1 и ω_2 (см. рис. 30). Тогда прямая DE — общая внешняя касательная к этим двум окружностям, а они сами касаются в точке C. Пусть общая касательная к ним в точке C пересекает отрезок DE в точке M. Тогда $MD = MC = ME$.

Обозначим через O центр описанной окружности треугольника DEF, а через R — её радиус. Пусть $O \neq M$. Точка M — середина отрезка DE, поэтому $\angle OME = 90°$. Поскольку $\alpha \perp \beta$, то $\angle OMC = 90°$. Значит, прямоугольные треугольники OMC и OME равны по двум катетам, поэтому $OC = OE = R$. В случае $O = M$ также имеем $OC = R$.

Таким образом, на сфере Ω с центром в точке O и радиусом R лежит точка C. Аналогично, на этой сфере лежат точки A и B. Следовательно, описанная окружность треугольника ABC также лежит на сфере Ω, поэтому её радиус не превосходит R.

Наконец, точки A, B, C лежат в одном полупространстве относительно плоскости α, поэтому точка O не лежит в плоскости ABC. Это означает, что верно строгое неравенство.

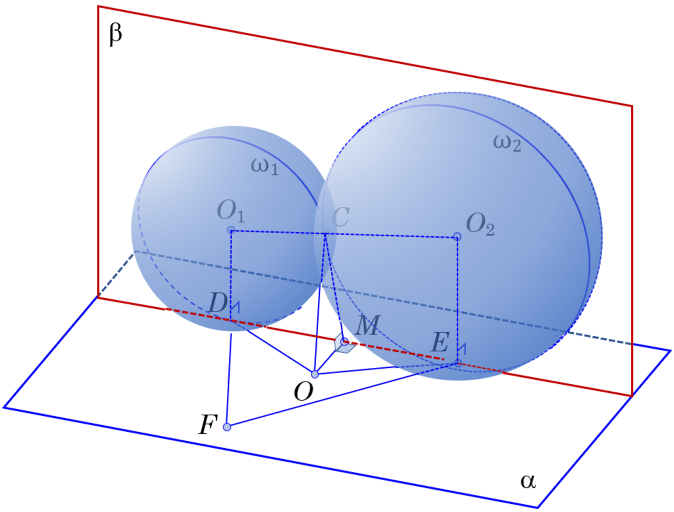


Рис. 30

Замечание. Конструкция со сферой является обобщением плоского факта. Если две окружности касаются внешним образом в точке X, а общая внешняя касательная касается их в точках Y и Z, то окружность, построенная на отрезке YZ как на диаметре, проходит через точку X. Отметим, что эта конструкция возникает в плоскости β.

Второе решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры сфер Ω_1, Ω_2, Ω_3 соответственно, причём A, B, C — точки касания сфер Ω_2 и Ω_3, Ω_3 и Ω_1, Ω_1 и Ω_2 соответственно. Точки A, B, C лежат на отрезках O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 соответственно, причём $O_1B = O_1C$, $O_2C = O_2A$, $O_3A = O_3B$. Тогда эти точки являются точками касания окружности γ, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$, с его сторонами. Заметим, что γ и является описанной окружностью треугольника ABC (см. рис. 31).

Заметим, что точки D, E, F — это проекции точек O_1, O_2, O_3 на плоскость α. При этой проекции окружность γ переходит в кривую, лежащую внутри треугольника DEF.

Пусть d — диаметр γ, параллельный плоскости α; тогда при проекции он переходит в отрезок d' той же длины, лежащий в треугольнике DEF (и тем более — внутри его описанной окружности ω). Из этого следует, что диаметр ω больше, чем d, что и требовалось доказать.

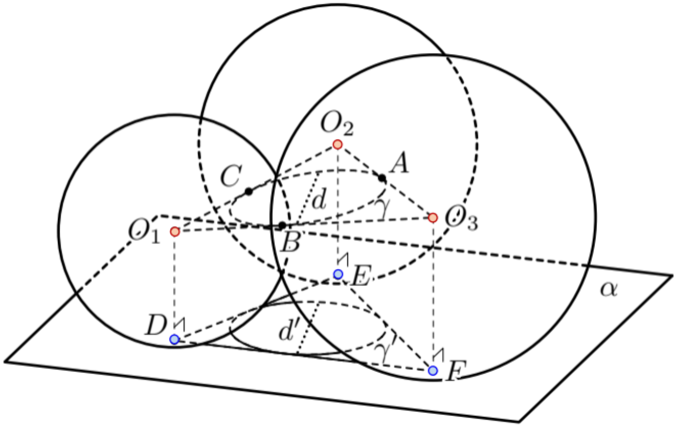


Рис. 31

72. Совпадает с задачей **62**.

73. *Ответ:* 12 345 *и* 1 234.

Обозначим искомые числа через a и b. Тогда правильный ответ $a+b=13\,579$, а ответ Пети $a+10b+c=24\,689$, где через c обозначена приписанная цифра. Вычтем первое равенство из второго, получим $9b+c=11\,110$. Ясно, что c — остаток от деления числа 11 110 на 9, $c=4$. Теперь можно найти b и a.

74. *Ответ: не существует.*

Подставим в равенство $x=2$ и $x=1/2$, тогда получим, что $f(2)+f(1/2)=4$ и $f(1/2)+f(2)=1/4$. Противоречие.

75. *Ответ: ортоцентр (точка пересечения высот).*

Пусть искомая точка есть O, рассмотрим сумму расстояний от неё до вершины A и противоположной стороны BC. Ясно, что эта сумма будет наименьшей, если O лежит на высоте треугольника. То же верно для двух других пар расстояний. Значит, точка O лежит на всех высотах треугольника.

76. *Ответ:* 2020 *и* 120.

Сумма всех указанных чисел равна $101\cdot 70=7070$. Наибольшее значение слагаемого получим, если все остальные — это наименьшие из возможных натуральных чисел, то есть $1, 2, \ldots, 100$. Их сумма равна 5050, поэтому искомое наибольшее слагаемое равно $7070 - 5050 = 2020$.

Наименьшее значение бóльшего слагаемого получим, если все остальные слагаемые сделаем как можно больше, то есть n, $n-1$, $n-2, \ldots, n-100$. Их среднее арифметическое равно

$$\frac{101 \cdot (2n-100)}{2 \cdot 101} = n - 50 = 70,$$

откуда $n = 120$.

77. *Ответ: можно.*

Введем обозначение $n = 2019$, тогда число мышек равно

$$(n+1)n(n-1)(n-2)+1 = (n+1)(n-2) \cdot n(n-1)+1 = \\ = (n^2-n-2)(n^2-n)+1.$$

В этом выражении положим $n^2 - n = m$, тогда оно примет вид $m(m-2)+1 = m^2-2m+1 = (m-1)^2$, то есть число мышек является квадратом целого числа, и значит, требуемая рассадка осуществима.

78. *Ответ:* $\left(\frac{5}{3}; 2\right] \cup [3; +\infty)$.

Оба корня квадратного трёхчлена положительны, когда его вершина находится в четвёртой четверти, и значение в нуле положительно. Вершина параболы имеет координаты $(p-1; -p^2 + 5p - 6)$. Значит, искомые значения параметра являются решением системы неравенств $p-1 > 0$, $(p-2)(p-3) \geqslant 0$ и $3p-5 > 0$.

У задачи есть и другие способы решения.

79. *Ответ:* $-x^2 + 4x + 4$.

Запишем заданный многочлен в виде $P(x) = (x^3-x)Q(x) + ax^2 + bx + c$, тогда $ax^2 + bx + c$ и будет остатком. Это равенство верно при любом x, например, при 0, -1, 1. Подставляя эти значения, получаем систему уравнений $c = 4$, $a + b = 3$, $a - b = -5$, из которой и находим коэффициенты.

80. *Ответ:* OA.

Найдем абсциссы точек пересечения заданных прямых, они равны $x_1 = \frac{c-b}{a-b}$, $x_2 = \frac{a-c}{b-c}$, $x_3 = \frac{b-a}{c-a}$. Условие вида

$$\frac{c-b}{a-b} < 0$$

означает, что b лежит между a и c, поэтому из трех чисел x_1, x_2, x_3 ровно одно отрицательно, а два — положительны. Значит точки пересечения должны лежать по разные стороны от оси Oy, причем две — с положительной стороны.

Заметим, что все точки пересечения прямых лежат с одной стороны от оси AC. Значит, осью Ox может быть только AC. Причем положительным будет направление OA, так как слева от BD лежат две точки пересечения прямых.

81. *Ответ: рис. 32, сплошная линия.*

Рассмотрим два случая — искомые углы откладываются по одну сторону от CM или по разные от CM. В первом случае точки A, B и M лежат на одной прямой. Для точек, лежащих на отрезке AB, искомые углы являются дополнительными, так что условию удовлетворяет только его середина. Два «внешних луча» входят в искомое геометрическое место точек.

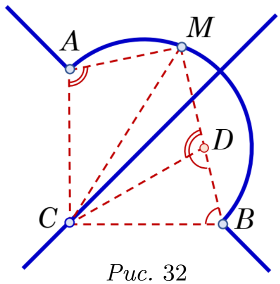


Рис. 32

Второй случай — углы откладываются по разные стороны от CM. При этом расстояния AM и BM могут быть равны. Тогда в силу равенства треугольников ACM и BCM точка M лежит на прямой, делящей угол ACB пополам.

Пусть теперь $AM < BM$ (противоположный случай исследуется аналогично). Поставим на отрезке BM точку D так, что $MD = MA$, тогда треугольники CMD и CMA равны. Значит, $\angle CDM = \angle CAM$ и $\angle BDC = \angle DBC$, но тогда сумма углов $\angle CAM$ и $\angle CBM$ равна $180°$, а угол AMB составляет $90°$. Значит, точка M лежит на окружности с диаметром AB, точнее, на той её полуокружности, которая не содержит C.

82. *Ответ: а) рис. 33; б)* $\frac{7\sqrt{17}}{24}$.

а) Построить сечение — значит провести на чертеже все отрезки, по которым секущая плоскость пересекает грани куба. Для этого на каждой грани нужно знать две точки, принадлежащие секущей плоскости. Например, точки P и Q лежат в нижней грани, поэтому отрезок PQ и будет следом секущей плоскости на этой грани. Остальные недостающие точки строятся последовательно, как это указано на рисунке. Например, точка (1) получается как пересечение прямых PQ и AD и лежит в левой боковой грани. Точка (3) возникает как пересечение прямых $(1)D_1$ и AA_1 и так далее

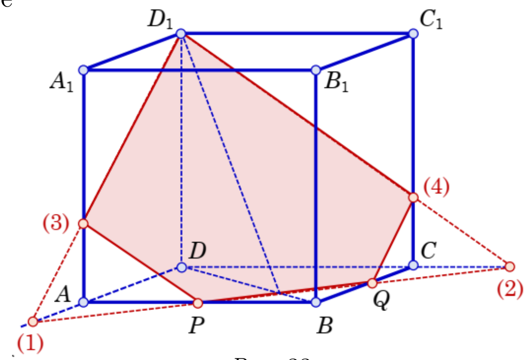


Рис. 33

б) Искомое сечение можно представить как разность треугольника $(1)D_1(2)$ и двух равных треугольников $(1)(3)P$ и $Q(4)(2)$, каждый из которых подобен ему с коэффициентом $1/3$.

Имеем $PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, длина отрезка $(1)(2)$ равна $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, высота D_1O находится из треугольника DD_1O по теореме Пифагора и равна

$$\sqrt{1+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{4}\,.$$

Площадь треугольника $(1)D_1(2)$ равна $S = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{34}}{4} = \frac{3\sqrt{17}}{8}$. Искомая площадь равна $S - \frac{2}{9}S = \frac{7}{9}\cdot\frac{3\sqrt{17}}{8} = \frac{7\sqrt{17}}{24}$. Можно также достроить сечение до ромба, продолжив стороны $(3)P$ и $(4)Q$.

83. *Ответ:* 8 *пачек или* 16 *пачек.*

Пусть x, y — количество 30- и 50-рублёвых пачек мороженого соответственно. По условию $30x = 50y$ и $x + y \leqslant 20$. Из равенства $3x = 5y$ видно, что x делится на 5. Поскольку $x \leqslant 20$, значение x равно 5, 10, 15 или 20, при этом $y = 3$, 6, 9 или 12. В первых двух случаях величина $x + y$ равна 8 или 16; в двух последних $x + y$ равно 24 или 32, что больше 20.

84. *Ответ:* $n = 23$.

Из трёх последовательных натуральных чисел на 5 может делиться только одно. Поэтому в произведении $n(n+1)(n+2)$ один из трёх сомножителей должен делиться на 25. Значит, наибольший сомножитель $n + 2$ не меньше 25, то есть $n \geqslant 23$. Легко проверить, что если $n = 23$, то произведение делится и на 25, и на 4, то есть кратно 100.

85. *Ответ:* 66 *рыцарей.*

Рассмотрим сидящего за столом рыцаря. Поскольку его утверждение правдиво, рядом с ним один сосед — рыцарь, а второй — лжец. Предположим, что сидящий справа от него — рыцарь, тогда следующим будет лжец, то есть имеем последовательность РРЛ. С другой стороны от лжеца сидит рыцарь, и следующий за ним — тоже рыцарь, то есть получим РРЛРР. Но тогда следующим за рыцарем должен быть снова лжец, и так далее. В итоге получим расстановку всех рыцарей и лжецов РРЛ РРЛ РРЛ ... РРЛ, в которой всего 66 рыцарей.

86. *Ответ:* 7 *уголков. Например, как на рисунке* 34.

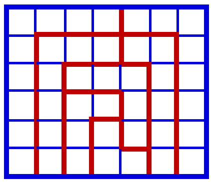


Рис. 34

Площадь прямоугольника — 42 клетки, а самого маленького «уголка» — 3 клетки. Представим число 42 в виде суммы *наибольшего* числа различных слагаемых, начиная с трёх: $42 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$. Значит, при разрезании исходного прямоугольника может получиться не более семи уголков (*оценка*). На рисунке 34 приведён один из возможных способов разрезания прямоугольника 6×7 на семь «уголков» с указанными количествами клеток (*пример*).

87. *Ответ:* 4 *гирьки.*

Исходный суммарный вес всех гирь больше 1000 граммов и должен делиться на $11+12+13 = 36$. Вот несколько первых чисел, больших 1000 и кратных 36: $1008 = 36 \cdot 28$, $1044 = 36 \cdot 29, \ldots$.

Ясно, что исходный набор не мог весить 1008 граммов, поскольку вес потерянных гирь тогда составлял бы 8 граммов, что невозможно.

Если вначале набор весил 1044 грамма, то вес потерянных гирь составлял бы 44 грамма. Но три самые тяжёлые 13-граммовые гири весят всего 39 граммов, значит, было потеряно *не менее* четырёх гирь. Вес в 44 грамма можно набрать с помощью четырёх 11-граммовых гирь. Значит, наименьшее количество потерянных гирь — 4, при этом вначале было по 29 гирек каждого вида.

88. *Ответ:* $n = 22$.

Из трёх последовательных натуральных чисел на 5 может делиться только одно. Поэтому в произведении $(n+1)(n+2)(n+3)$ один из трёх сомножителей должен делиться на 25. Значит, наибольший сомножитель $n+3$ не меньше 25, то есть $n \geqslant 22$. Легко проверить, что если $n = 22$, то произведение делится и на 25, и на 4, то есть кратно 100.

89. *Ответ: а) да, могли; б) нет, не могли.*

а) За столом могли сидеть девять рыцарей (или девять лжецов), и тогда каждый из них на вопрос в задаче ответил «рыцарь».

б) Предположим, что все девять ответили «лжец». Лжец мог так ответить только в том случае, если справа от него сидит рыцарь. А рыцарь мог так ответить только в том случае, если справа от него сидит лжец. Значит, сидящие за столом лжецы и рыцари *чередуются*. Но девять — нечетное число, поэтому лжецы и рыцари не могут чередоваться.

90. *Ответ:* 7.

Обозначим сумму троек чисел на каждом «отрезке» через s. Сумма этих сумм по трём «отрезкам», выходящим из верхнего кружочка, равна $3s$, при этом каждое из чисел в кружочках входит в эту сумму по одному разу, кроме числа x, которое входит в три раза. Поэтому

$$3s = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 2x,$$

то есть $3s = 49 + 2x$. Если мы сложим числа лишь по двум горизонтальным «отрезкам», то получим сумму шести чисел из семи, то есть $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 - x$. Следовательно,

$$2s = 49 - x,$$

откуда $x = 49 - 2s$. Подставив это значение в первое уравнение, получим $3s = 49 + 2(49 - 2s)$, откуда $s = 21$, $x = 49 - 2s = 7$.

Пример расстановки чисел, когда $x = 7$: $\begin{smallmatrix} & & \mathbf{7} & & \\ & 5 & 3 & 13 & \\ 9 & & 11 & & 1 \end{smallmatrix}$.

91. *Ответ: хватит* 6 *выстрелов.*

Пример. Сделаем 6 выстрелов, как показано на рисунке 35. Тогда видно, что корабль гарантированно будет ранен.

Оценка. Покажем, что если сделано только 5 выстрелов, то можно не ранить корабль. Пусть, например, вдоль строк сделано не более одного выстрела. Тогда в любом столбце, в который не сделано выстрела, прострелено не более одной клетки, и поэтому в этом столбце может стоять корабль, который не будет ранен. Значит, количество «горизонтальных» выстрелов не меньше двух.

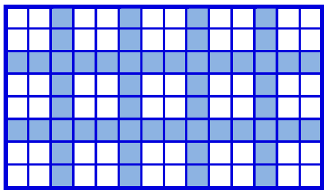


Рис. 35

Аналогично доказывается, что число «вертикальных» выстрелов не меньше четырёх, и значит, общее число выстрелов не меньше шести. Действительно, если сделано не более трёх «вертикальных» выстрелов, то между любыми «соседними» столбцами, по которым произведены выстрелы, должно быть не более двух столбцов, иначе в строке, в которую не сделан выстрел, можно поставить корабль, который не будет ранен. Тогда один из промежутков от края доски до столбца, по которому произведён «вертикальный» выстрел, будет содержать не менее 5 столбцов, и значит, в одну из строк снова можно поставить неуязвимый корабль.

92. *Ответ:* 7 *гирек.*

Исходный суммарный вес всех гирь больше 1000 граммов и должен делиться на $13 + 14 + 15 = 42$. Вот несколько первых чисел, больших 1000 и кратных 42: $1008 = 42 \cdot 24$, $1050 = 42 \cdot 25$, $1092 = 42 \cdot 26, \ldots$.

Ясно, что исходный набор не мог весить 1008 граммов, поскольку вес потерянных гирь тогда составлял бы 8 граммов, что невозможно.

Если вначале набор весил 1050 граммов, то вес потерянных гирь составлял бы 50 граммов. Три самые тяжёлые 15-граммовые гири весят меньше 50 граммов, поэтому было потеряно не менее четырёх гирь. Однако вес любых четырёх гирь не меньше $4 \cdot 13 = 52$, и значит, этот случай невозможен.

Если вес всех гирь был 1092 грамма, то потерянные гири весили 92 грамма. Поскольку шести самых тяжёлых гирь недостаточно для этого веса ($6 \cdot 15 < 92$), значит, было потеряно *не менее* семи гирь. Вес в 92 грамма можно набрать с помощью шести 13-граммовых гирь и одной 14-граммовой. Значит, наименьшее количество потерянных гирь — 7, при этом вначале было по 26 гирек каждого вида.

93. *Ответ:* 9 *детей.*

Если за столом сидят n детей, то на втором круге каждый возьмет на n конфет больше, чем на первом. Значит, всего на втором круге будет взято на $n \cdot n = n^2$ конфет больше, чем на первом. Отсюда $n^2 = 81$, то есть $n = 9$.

94. *Ответ: да, это возможно.*

Рассадим рыцарей и лжецов за круглым столом, например, так:

РРЛЛ РРЛЛ РРЛЛ,

где буквы Р и Л обозначают рыцаря и лжеца соответственно. Их ответы на вопрос из условия задачи образуют последовательность РЛРЛ РЛРЛ РЛРЛ, в которой слова «рыцарь» и «лжец» встречаются поровну (по шесть раз).

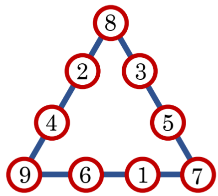


Рис. 36

95. *Ответ:* 23.

Оценка. Пусть s — сумма чисел вдоль одной стороны треугольника (рис. 36). Сумма этих трёх сумм чисел вдоль каждой стороны треугольника равна $3s$, при этом каждое из чисел в кружочках входит в эту сумму по одному разу, кроме чисел A, B и C в «вершинах» треугольника, которые входят два раза. Поэтому

$$3s = 1 + 2 + \ldots + 9 + (A + B + C),$$

то есть $3s = 45 + (A + B + C)$. Наибольшее значение $A + B + C$ не превосходит суммы трёх наибольших чисел набора, то есть $A + B + C \leqslant 9 + 8 + 7$, и поэтому $3s \leqslant 45 + 24$, то есть $s \leqslant 23$.

Пример. На рисунке 36 сумма чисел вдоль каждой стороны треугольника равна $s = 23$.

96. *Ответ:* $12, 13, 14, 15, 16, 17$ *или* $23, 24, 25, 26, 27, 28$.

Пусть x — наименьшее из написанных чисел, тогда сумма всех чисел равна

$$x + (x+1) + \ldots + (x+10) = 11x + 55.$$

Обозначим через $x + y$ — наименьшее вычеркнутое число ($0 \leqslant y \leqslant 5$), тогда сумма шести стёртых чисел составляет

$$(x+y) + (x+y+1) + \ldots + (x+y+5) = 6x + 6y + 15.$$

Сумма оставшихся чисел равна $(11x+55) - (6x+6y+15)$, поэтому $5x - 6y + 40 = 100$, или $5(x-12) = 6y$. Из этого равенства следует, что y делится на 5. Это возможно только при $y = 0$ и $y = 5$; соответствующие значения $x = 12$ и $x = 18$. В первом случае исходный набор состоит из чисел $12, 13, \ldots, 22$, стёрли — $12, 13, \ldots, 17$. Во втором случае исходный набор — это $18, 19, \ldots, 28$, стёртые числа — $23, 24, \ldots, 28$.

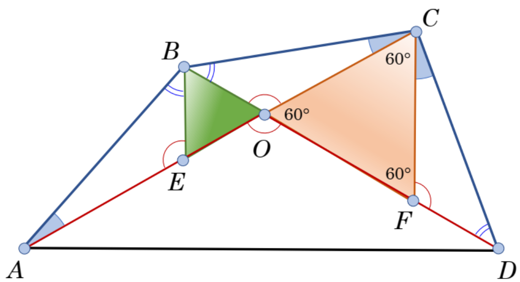


Рис. 37

97. *Ответ:* $DO = 8$.

Отметим на прямой AC такую точку E, что треугольник BOE — равносторонний (рис. 37). Докажем равенство треугольников BAE и BCO. Действительно, поскольку $AB = BC$, треугольник ABC — равнобедренный, и значит, $\angle BAC = \angle BCA$.

Кроме того, отметим ещё одну пару равных углов $\angle AEB = \angle BOC = 120°$. Таким образом, треугольники BAE и BCO равны по стороне и двум углам, отсюда $AE = CO$ и $AO = AE + EO = CO + BO$.

Если отметить на прямой BD такую точку F, что треугольник COF — равносторонний, то аналогичными рассуждениями получим $DO = BO + CO$. Отсюда следует, что $DO = AO = 8$.

98. *Ответ:* 125 *конфет.*

Пока Фрёкен Бок ест $3 \cdot 3 = 9$ конфет, Малыш успеет съесть $5 \cdot 3 = 15$ конфет, а Карлсон — $5 \cdot 5 = 25$ конфет. Таким образом, Фрёкен Бок и Малыш вместе за это время съедают $9 + 15 = 24$ конфеты. А когда они съедят в 5 раз больше, то есть $24 \cdot 5 = 120$ конфет, Карлсон съест тоже в 5 раз больше, то есть $25 \cdot 5 = 125$ конфет.

99. Так как искомое число делится на 4, 5 и 6, оно делится и на их наименьшее общее кратное, равное 60. Запишем в порядке убывания несколько трёхзначных чисел, кратных 60: 960, 900, 840, 780, ... Первые три числа 960, 900, 840 делятся на 8, 9, 7 соответственно, и значит, не удовлетворяют условию. Четвёртое по величине число 780 не делится ни на одно из чисел 7, 8, 9. Оно и будет наибольшим трёхзначным числом.

100. *Ответ:* 8 *фишек.*

Разобьем доску как показано на рисунке 38 на 8 фигурок, в каждой фигурке есть хотя бы одна фишка, иначе у центральной клетки в фигуре не будет соседней клетки с фишкой. Значит, фишек на доске хотя бы 8. Приведем пример для восьми фишек, для этого поставим в каждую из центральных клеток по одной фишке.

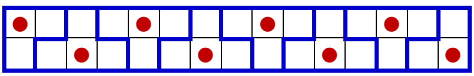


Рис. 38

101. *Ответ: а) не может; б)* 6 *чисел.*

а) Пусть M — наибольшее число набора. Если оно отрицательно или равно 0, то остальные числа в наборе отрицательны, и сумма любых двух из них меньше M, противоречие. Значит, наибольшее число M набора положительно. Очевидно, числа x и y, которые в сумме дают M, тоже положительны, так что в наборе не менее трёх положительных чисел. Аналогично, рассматривая наименьшее число m набора, доказывается, что в нём не менее трёх отрицательных чисел. Таким образом, в наборе не меньше шести чисел.

б) В пункте *а*) доказано, что в наборе не менее шести чисел. Приведём набор ровно из шести чисел, удовлетворяющий условию: $-3, -2, -1, 1, 2, 3$.

102. *Ответ: в случае $KN \parallel AC$, при этом также $LM \parallel AC$.*

Первое решение. Рассмотрим для определенности конфигурацию, изображенную на рис. 39. Пусть точка X такова, что $AKNX$ — параллелограмм. Тогда отрезок NX параллелен и равен AK, а значит, и BL. Отсюда следует, что углы LBM и XNC равны, и поэтому треугольники LBM и XNC равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $LM = XC$, и значит, $KN + LM = AX + XC \geqslant AC$.

Знак равенства будет в случае, когда точка X лежит на стороне AC, то есть при условии $KN \parallel AC$.

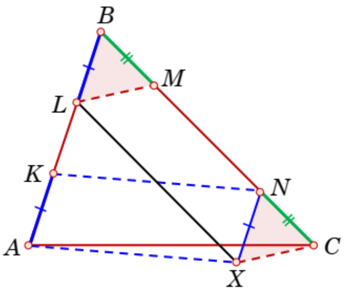


Рис. 39

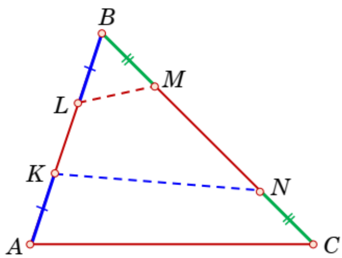


Рис. 40

Второе решение. Рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис. 40. Тогда

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}, \tag{2}$$

$$\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BK}, \tag{3}$$

$$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BL}. \tag{4}$$

Поскольку $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{NC}$, а $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{KA}$, то, сложив равенства (3) и (4), получим:

$$\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{LM} = (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BM}) - (\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BL}) = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}.$$

Следовательно, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{LM}| \leqslant |\overrightarrow{KN}| + |\overrightarrow{LM}|$. Знак равенства только при условии $KN \parallel LM$, а тогда и $AC \parallel KN$. Заметим, что в приведённом решении не существенно, как расположены точки K, L, M и N.

103. *Ответ:* 9780.

Так как искомое число делится на 4, 5 и 6, оно делится и на их наименьшее общее кратное, равное 60. Запишем в порядке убывания несколько четырёхзначных чисел, кратных 60: 9960, 9900, 9840, 9780, $\ldots$. Первые три числа 9960, 9900, 9840 делятся на 8, 9, 8 соответственно, и значит, не удовлетворяют условию. Четвёртое по величине число 9780 не делится ни на одно из чисел 7, 8, 9. Оно и будет наибольшим четырёхзначным числом.

104. *Ответ:* 10 *сыновей.*

Первый сын получит $\frac{100}{n}$ бриллиантов, а второй

$$\left(100-\frac{100}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}+1=\frac{100}{n}-\frac{100}{n^2}+1.$$

Эти величины равны, поэтому $\dfrac{100}{n}=\dfrac{100}{n}-\dfrac{100}{n^2}+1$. Отсюда $n^2 = 100$, и значит, $n=10$.

105. *Ответ: выигрывает второй.*

Можно считать, что $a<b<c<d$. Разобьём числа на пары $\{a,\,b\}$ и $\{c,\,d\}$. После хода первого игрока второй ставит второе число той же пары в ту же (левую или правую) сторону уравнения. В результате коэффициенты с одной стороны (скажем, с левой) будут меньше, чем с другой. Поэтому при любом x левая часть будет строго меньше, чем правая, так что ни одно положительное число не будет корнем уравнения.

106. *Ответ: первая дробь больше.*

Составим разность между дробями:

$$\frac{2}{x+y}-\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}=\frac{x^3+y^3-x^2y-xy^2}{(x+y)(x^3+y^3)}\,.$$

Числитель полученной разности раскладывается на множители: $x^2(x-y)-y^2(x-y)=(x^2-y^2)(x-y)=(x+y)(x-y)^2$. Поскольку $x\neq y$, числитель положительный, и значит, первая дробь больше.

107. *Ответ: в случае $KM\parallel AC$, при этом также $LN\parallel AC$.*

Первое решение. Рассмотрим для определенности конфигурацию, изображенную на рис. 41. Пусть точка X такова, что

$AKMX$ — параллелограмм. Тогда отрезок MX параллелен и равен AK, а значит, и BL. Отсюда следует, что углы LBN и XMC равны, и поэтому треугольники LBN и XMC равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $LN = XC$, и значит, $KM + LN = AX + XC \geqslant AC$.

Знак равенства будет в случае, когда точка X лежит на стороне AC, то есть при условии $KM \parallel AC$.

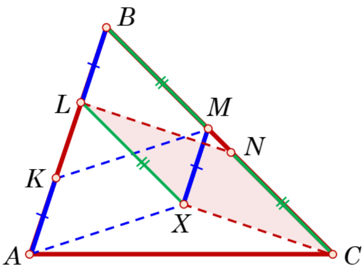


Рис. 41

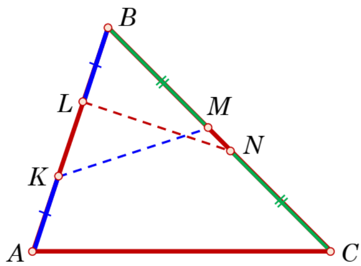


Рис. 42

Второе решение. Рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис. 42. Тогда

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}, \tag{5}$$

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BK}, \tag{6}$$

$$\overrightarrow{LN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BL}. \tag{7}$$

Поскольку $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{NC}$, а $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{KA}$, то, сложив равенства (6) и (7), получим:

$$\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{LN} = (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN}) - (\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BL}) = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}.$$

Следовательно, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{LN}| \leqslant |\overrightarrow{KM}| + |\overrightarrow{LN}|$. Знак равенства только при условии $KM \parallel LN$, а тогда и $AC \parallel KM$. Заметим, что в приведённом решении не существенно, как расположены точки K, L, M и N.

108. *Ответ: а) не существует;*
б) существует; например, $n = 5$.

а) По признаку делимости *число* n *и сумма его цифр* $S(n)$ *при делении на* 9 *имеют равные остатки.* Другими словами, числа $A = n - S(n)$ и $B = (n + 2019) - S(n + 2019)$ делятся на 9. По условию $S(n) = S(n + 2019)$, поэтому разность $A - B$ равна 2019 и должна делиться на 9, как разность чисел, кратных 9. Но 2019 не делится на 9, противоречие.

б) Подходит, например, $n = 5$. Тогда суммы цифр чисел n и $n + 2025$ равны 5.

109. *Ответ: первая дробь больше.*

Составим разность между дробями:

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4} = \frac{x^4y+xy^4-x^3y^2-x^2y^3}{(x^2+y^2)(x^4+y^4)}\,.$$

Числитель полученной разности раскладывается на множители: $x^3y(x-y) - xy^3(x-y) = xy(x^2-y^2)(x-y) = xy(x+y)(x-y)^2$. Поскольку $x \neq y$, числитель положительный, и значит, первая дробь больше.

110. *Ответ: а) могут; б) не могут.*

а) Паша берёт числа 6 и 7, и тогда сумма оставшихся восьми чисел будет равна $(1+2+\ldots+10)-6-7 = 42$, то есть совпадает с произведением Пашиных чисел 6 и 7.

б) Сумма исходных чисел равна $s = 1+2+\ldots+15 = 120$. Пусть Паша забрал числа a и b ($a < b$), и тогда, если числа мальчиков равны: $s - a - b = a \cdot b$, или $120 = a + b + ab$. Добавив 1 к обеим частям, получим: $121 = (a+1)(b+1)$. Левая часть равенства делится на 121, значит, и правая кратна 121. Поскольку $a < b$, вариант $a + 1 = b + 1 = 11$ невозможен. Значит, $a + 1 = 1$, $b + 1 = 121$, но числа должны быть больше 0 и меньше 15, поэтому и этот вариант невозможен. Значит, результаты совпасть не могли.

111. *Ответ:* $1 : 1$.

(Рис. 43.) Прямые CH и FD перпендикулярны сторонам BF и BC треугольника FBC, поэтому D — точка пересечения высот этого треугольника. По теореме о высотах прямая BD будет также высотой треугольника FBC, то есть $BD \perp FC$. Пусть K — точка пересечения FC с прямой BD.

Вписанные углы $\angle BAC$ и $\angle BFC$ опираются на одну и ту же дугу окружности, и значит, равны. Пусть $\angle BAC = \angle BFC = \alpha$. Так как $FK \perp BK$, то $\angle FBK = 90^\circ - \alpha$, и значит, в прямоугольном треугольнике BHD угол BDH равен $90° - \angle HBD = \alpha$. Таким образом, $\angle BAD = \angle BDA = \alpha$, то есть треугольник ABD — равнобедренный. Но тогда H — середина AD, и значит, $AH : HD = 1$.

Замечание. Решение не зависит от типа треугольника ABC. Для тупоугольного ΔABC см. рис. 44.

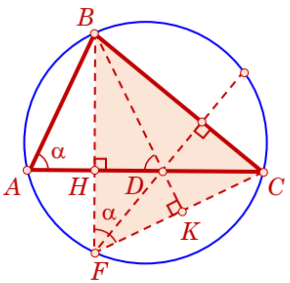


Рис. 43

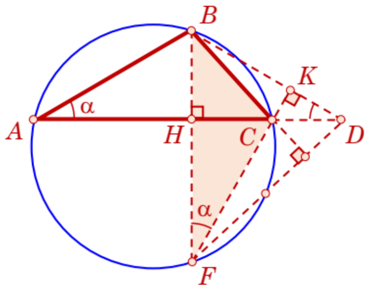


Рис. 44

112. *Ответ:* $\frac{1}{4}$.

Сгруппируем слагаемые попарно и представим S в виде $(a + c)(b + d)$. Используем неравенство о средних $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$, взяв в качестве x и y неотрицательные числа $a + c$ и $b + d$:

$$2\sqrt{(a+c)(b+d)} \leqslant (a+c) + (b+d) \quad \Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{s} \leqslant 1,$$

то есть $s \leqslant \frac{1}{4}$, и значит, наибольшее значение s равно $\frac{1}{4}$. Оно достигается, например, в случае $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

113. *Ответ:* а) *не существует;*
б) *существует; например,* $n = 5$.

а) По признаку делимости *число* n *и сумма его цифр* $S(n)$ *при делении на* 3 *имеют равные остатки.* Другими словами, числа $A = n - S(n)$ и $B = (n + 2020) - S(n + 2020)$ делятся на 3. По условию $S(n) = S(n + 2020)$, поэтому разность $A - B$ равна 2020 и должна делиться на 3, как разность чисел, кратных 3. Но 2020 не делится на 3, противоречие.

б) Подходит, например, $n = 5$. Тогда суммы цифр чисел n и $n + 2025$ равны 5.

114. *Ответ:* $p = -2$, $q = -2019$.

Подставляя в уравнение корень $x = 1 + \sqrt{2020}$, приходим к равенству

$$(2021 + p + q) + (p + 2)\sqrt{2020} = 0.$$

Так как $\sqrt{2020}$ — иррациональное число, такое равенство возможно только, когда $2021 + p + q = 0$ и $p + 2 = 0$. Отсюда находим значения p и q.

115. *Ответ: первая дробь больше.*

Составим разность между дробями:

$$\frac{x^3 + y^3}{x^4 + y^4} - \frac{x^5 + y^5}{x^6 + y^6} = \frac{x^6y^3 + x^3y^6 - x^5y^4 - x^4y^5}{(x^4 + y^4)(x^6 + y^6)}\,.$$

Числитель полученной разности раскладывается на множители: $x^5y^3(x-y) - x^3y^5(x-y) = x^3y^3(x^2-y^2)(x-y) = x^3y^3(x+y)(x-y)^2$. Поскольку $x \neq y$, числитель положительный, и значит, первая дробь больше.

116. *Ответ:* 1 : 1.

(Рис. 43.) Прямые CH и FD перпендикулярны сторонам BF и BC треугольника FBC, поэтому D — точка пересечения высот этого треугольника. По теореме о высотах прямая BD будет также высотой треугольника FBC, то есть $BD \perp FC$. Пусть K — точка пересечения FC с прямой BD.

Вписанные углы $\angle BAC$ и $\angle BFC$ опираются на одну и ту же дугу окружности, и значит, равны. Пусть $\angle BAC = \angle BFC = \alpha$. Так как $FK \perp BK$, то $\angle FBK = 90° - \alpha$, и значит, в прямоугольном треугольнике BHD угол BDH равен $90° - \angle HBD = \alpha$. Таким образом, $\angle BAD = \angle BDA = \alpha$, то есть треугольник ABD — равнобедренный, и значит, $AB : BD = 1$.

Замечание. Решение не зависит от типа треугольника ABC. Для тупоугольного ΔABC см. рис. 44.

117. Первое решение. Возведём в квадрат данное неравенство и запишем полученное в виде:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - (a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 2(ab + bc + ca) - \left(\frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca}\right).$$

Поскольку $abc = 1$, перепишем левую часть неравенства так:

$$2\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - c - a - b\right).$$

Последнее выражение неотрицательно по условию, отсюда следует требуемое.

Второе решение. Исходное неравенство в силу условия $abc = 1$ можно переписать в виде

$$bc + ca + ab \geqslant a + b + c \quad \Longleftrightarrow \quad (a-1)(b-1)(c-1) \leqslant 0.$$

Кроме того, числа $t-1$ и t^2-1 имеют при $0 < t \leqslant 1$ одинаковый знак, поэтому неравенство $(a-1)(b-1)(c-1) \leqslant 0$ равносильно $(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1) \leqslant 0$. После раскрытия скобок:

$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

118. *Ответ: можно.*

Требуемое выражение можно получить, например, так:

$$-(a^6-1)\cdot(a^6-1) - (a^6-1) + a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^6.$$

119. *Ответ: можно.*

На рисунке 45 отмечены клетки, которые нужно удалить, и два вертикальных разреза.

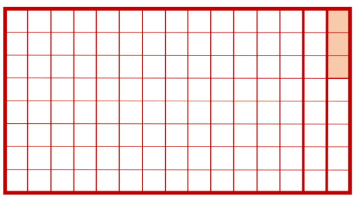


Рис. 45

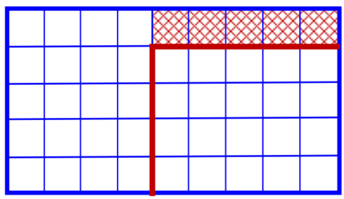


Рис. 46

120. *Ответ: выиграет Петя.*

Петя достаточно сделать первый разрез так, как показано на рисунке 46. После этого фигура распадается на две части, причем одна из них имеет несущественный для игры заштрихованный прирост. Дальше Петя применяет симметричную стратегию — на всякий ход второго в одном из прямоугольников он отвечает таким же ходом в другом.

121. *Ответ:* 135°.

(Рис. 47.) Отметим точку E на стороне BC так, что $BE : EC = 2 : 3$. Пусть M — середина KE. Тогда треугольники NKM

и MNF — равнобедренные, поскольку $KN = KM$ и $NM = NF$, а треугольник NKM — ещё и прямоугольный. Следовательно,

$$\angle KNF = \angle KNM + \angle MNF = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ.$$

122. *Ответ: нельзя.*

Предположим, что шашки можно расставить требуемым образом. На каждой вертикали доски стоит нечётное количество шашек, и поскольку вертикалей восемь (чётное число), значит, и общее число шашек на доске — чётное.

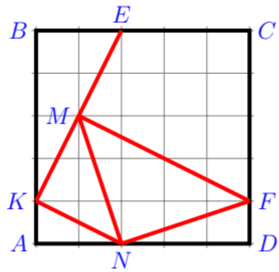


Рис. 47

С другой стороны, на каждой диагонали тоже нечётное число шашек, при этом диагоналей, параллельных друг другу, пятнадцать, значит, всего шашек — нечётное количество.

123. *Ответ: может.*

Будем называть первые две операции *сложением* и *вычитанием*, а последнюю — операцией «деления». Сначала с помощью вычитания и двух операций «деления» получим числа

$$a - 1, \quad \frac{1}{(a-1)+1} = \frac{1}{a} \quad \text{и} \quad \frac{1}{a+1}.$$

Затем дважды воспользуемся операцией вычитания:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a^2+a}, \quad \frac{1}{a^2+a} - 1.$$

После операции «деления» получим

$$\frac{1}{\dfrac{1}{a^2+a} - 1 + 1} = a^2 + a.$$

Наконец, используем операцию «вычитания»: $(a^2 + a) - a = a^2$.

124. *Ответ: выиграет Петя.*

Первый ход начинающего показан на рисунке 48 (жирная пунктирная линия). Красная пунктирная прямая делит закрашенную фигуру на две одинаковые части. Разрез по правилам игры не может затронуть сразу обе части, в любой части можно делать разрезы независимо от того, что происходит в другой.

На любой ход Васи в закрашенной фигуре Петя отвечает симметричным разрезом относительно красной линии.

Когда Вася решит разрезать квадрат 3×3, у него будет три варианта это сделать (см. рисунок 49). И на каждый такой вариант у Пети найдётся ответный ход. Значит, у Васи ходы закончатся раньше.

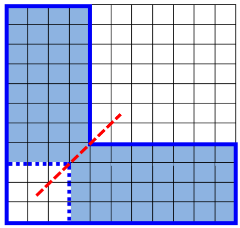


Рис. 48

125. *Ответ:* $\frac{2}{15}$.

(Рис. 50.) Биссектрисы внутренних углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник. Разделим параллелограмм на ромбы со стороной 1 прямыми, параллельными сторонам параллелограмма. Ясно, что площадь красного прямоугольника в два раза больше площади ромба со стороной 1. А всего ромбов в этом параллелограмме — 15. Значит, отношение площадей равно $\frac{2}{15}$.

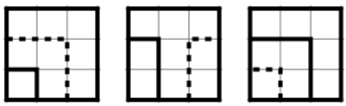


Рис. 49

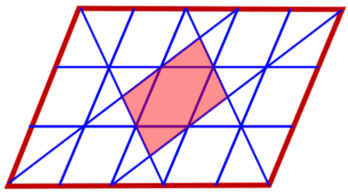


Рис. 50

126. *Ответ:* 972.

Из условия следует, что найдутся такие натуральные a, b, что $30 = 3a$, НОД$(x, 15) = 3b$, причём НОД$(a, b) = 1$.

Из равенства НОД$(x, 15) = 3b$ получаем, что найдутся такие натуральные c и d, что $x = 3bc$ и $15 = 3bd$, причём НОД$(c, d) = 1$.

Из последнего равенства $15 = 3bd$ следует, что $bd = 5$, то есть $b = 1$, $d = 5$ или $b = 5$, $d = 1$.

Пусть $b = 1$, $d = 5$, тогда $x = 3c$. Учитывая, что x — чётное, имеем $c = 2m$. Поскольку НОД$(c, d) = 1$ и $d = 5$, отсюда следует, что $2m$ не делится на 5, а это значит, что число $x = 6m = 6(5q+r)$ может быть равно любому из следующих чисел: $30q+6$, $30q+12$, $30q+18$, $30q+24$, где q — любое натуральное число. Учитывая, что

x при делении на 5 дает остаток 2, нам подходит только $30q+12$.

Пусть $b=5$, $d=1$. Тогда $x=15c$, то есть $x=30m$, но тогда НОД$(x,15)=15$ и НОД(30, НОД$(x,15))=15$ — противоречие.

Следовательно, задача свелась к поиску наибольшего трёхзначного числа вида $30q+12<1000$. Это 972.

127. *Ответ:* 377.

Обозначим через F_n — число способов покрытия доски размером $2\times n$ плитками размера 1×2. Левый конец доски можно покрыть одним из двух способов (рис. 51).

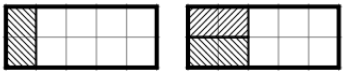


Рис. 51

В первом случае остаётся покрыть часть доски размером $2\times(n-1)$, количество таких способов — F_{n-1}, а во втором случае оставшуюся часть доски размером $2\times(n-2)$ можно покрыть F_{n-2} способами.

Итак, для доски $2\times n$ имеется $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ способов покрытия. Очевидно, что $F_1=1$ и $F_2=2$. Тогда $F_3=F_1+F_2=3$, $F_4=F_2+F_3=5,\ \ldots,\ F_{13}=F_{12}+F_{11}=144+233=377$.

128. *Ответ: можно.*

С помощью циркуля и линейки сначала построим отрезки $AB=1$ и $BC=6\cdot AB=6$ так, что $AC=AB+BC$. На AC как на диаметре строим полуокружность (рис. 52). В точке B проведём перпендикуляр к AC и отметим точку D его пересечения с окружностью. Тогда из подобия прямоугольных треугольников ABD и DBC имеем $CD=\sqrt{AB\cdot BC}=\sqrt{6}$.

Замечание. Как следует из решения задачи, для построения отрезка $\sqrt{6}$ достаточно иметь только отрезок длиной 1.

129. *Ответ:* 18.

Покрасим доску 7×6 так, как показано на рисунке 53. Тогда каждый нёд будет занимать одну закрашенную и одну незакрашенную клетку. Значит, количество нёдов, которые можно уместить на эту доску, не больше 18. Пример расположения 18 нёдов приведён на том же рисунке.

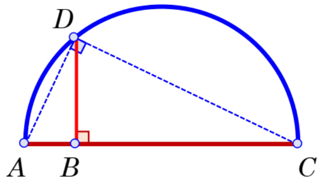


Рис. 52

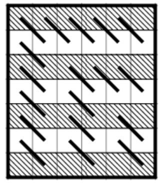


Рис. 53

130. Обозначим площади четырехугольников $CHIE$, $GHFA$ и $DGIB$ через a, b и c соответственно (рис. 6). Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{S_{ABE}}{S} = \frac{BE}{BC} \quad &\Rightarrow \quad \frac{S_1 + c + S_2}{S} = \frac{BE}{BC}\,,\\
\frac{S_{FCB}}{S} = \frac{CF}{AC} \quad &\Rightarrow \quad \frac{a + S_2 + S_3}{S} = \frac{CF}{BC}\,,\\
\frac{S_{ACD}}{S} = \frac{AD}{AB} \quad &\Rightarrow \quad \frac{S_3 + b + S_1}{S} = \frac{AD}{BC}\,.
\end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получим

$$\frac{2S_1 + 2S_2 + 2s_3 + a + b + c}{S} = \frac{BE + CF + AD}{BC} \Rightarrow$$
$$1 = \frac{BE + CF + AD}{BC}\,,$$

отсюда следует требуемое равенство.

131. *Ответ:* 1957.

Подставим в исходное равенство $f(x+1) - f(x) = x+1$ вместо x значения 61, 60, …, 1, 0:

$$\begin{aligned}
f(62) - f(61) &= 61 + 1,\\
f(61) - f(60) &= 60 + 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(2) - f(1) &= 1 + 1,\\
f(1) - f(0) &= 0 + 1.
\end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получим

$$f(62) - f(0) = (61 + 60 + \ldots + 1 + 0) + 62 = 1953.$$

Отсюда $f(62) = 1957$.

132. *Ответ: нельзя.*

Пусть $P(x) = 2020x^4 + x + 1$ и $Q(x) = x^4 + 2020x + 1$. Заметим, что $P(-1) = 2020 > 0$ и $Q(-1) = -2020 < 0$. С помощью первой операции прибор изменяет значение трёхчлена $P(x)$ в точке -1 на ± 1, поэтому один из промежуточных трёхчленов будет иметь корень -1. С помощью второй операции прибор или не меняет значение в точке -1, или изменяет его на ± 2, поэтому один из промежуточных трёхчленов будет иметь корень -1, так как $P(-1)$ и $Q(-1)$ — чётные числа.

Значит, с помощью указанных операций из трёхчлена $P(x)$ получить трёхчлен $Q(x)$ невозможно.

133. *Ответ:* 2021.

Заметим, что n-ая группа состоит из n чисел и первое равно $\frac{1}{2}n(n-1)+1$. Последний член в этой группы равен

$$\frac{1}{2}n(n-1) + 1 + (n-1) = \frac{1}{2}(n^2+n).$$

Значит, сумма чисел в n-ой группе равна

$$S_n = \left(\frac{n(n-1)}{2} + 1 + \frac{n(n+1)}{2}\right) \cdot \frac{n}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Следовательно, $S_{16} - S_4 - S_1 = 2056 - 34 - 1 = 2021$.

134. Перепишем исходное равенство в виде

$$f(x+c) = \frac{2}{1+f(x)} - 1 = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}.$$

Значит,

$$f(x+2c) = f((x+c)+c) = \frac{1-f(x+c)}{1+f(x+c)} =$$

$$= \frac{1-\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\frac{1-f(x)}{1+f(x)}} = \frac{1+f(x)-1+f(x)}{1+f(x)+1-f(x)} = f(x),$$

то есть число $T = 2c$ — один из периодов функции $f(x)$.

135. Пусть продолжение CO пересекает окружность в точке E. Тогда по теореме о двух секущих $CA \cdot CB = CE \cdot CD$. Так как

$AB = BC = R\sqrt{2}$, а $CE = 2R + CD$, то

$$2R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{2} = (2R + CD) \cdot CD,$$
$$CD^2 + 2R \cdot CD - 4R^2 = 0.$$

Отсюда находим $CD = R(\sqrt{5} - 1)$.

Вычислим значение $\sin 18^\circ$; для этого составим уравнение, корнем которого будет это число. Прежде всего, заметим, что

$$\sin 72^\circ = 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ = 4\sin 18^\circ \cos 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ).$$

После сокращения на $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ$, приходим к равенству $8\sin^3 18^\circ - 4\sin 18^\circ + 1 = 0$, то есть $\sin 18^\circ$ — корень кубического уравнения $8x^3 - 4x + 1 = 0$. Кроме этого, уравнение имеет ещё и корень $\frac{1}{2}$, поэтому

$$8x^3 - 4x + 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x - 1).$$

Но $\sin 18^\circ \neq \frac{1}{2}$, поэтому $\sin 18^\circ$ – корень квадратного уравнения $4x^2 + 2x - 1 = 0$, его единственный положительный корень равен

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Значит, $CD = 4R\sin 18^\circ$, что и требовалось.

136. *Ответ:* 2, $2\sqrt{19}$, $2\sqrt{22}$ *и* 10.

Пусть $[x] = a$, тогда $a \leqslant x < a + 1$, и значит,

$$a^2 + 20 \leqslant x^2 + 20 < (a + 1)^2 + 20.$$

Так как $x^2 + 20 = 12[x] = 12a$, то $a^2 + 20 \leqslant 12a < a^2 + 2a + 21$. Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} a^2 - 12a + 20 \leqslant 0, \\ a^2 - 10a + 21 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - 10)(a - 2) \leqslant 0, \\ (a - 3)(a - 7) > 0. \end{cases}$$

Поскольку a — целое, отсюда получаем $a \in \{2, 8, 9, 10\}$. Подставив найденные значения a в уравнение $x^2 + 20 = 12a$, находим соответствующие значения x: 2, $2\sqrt{19}$, $2\sqrt{22}$ и 10.

137. *Ответ:* 2^{25}.

Заполним таблицу 5×5 числами $+1$ и -1 произвольно. Числа в последнем столбце выберем так, чтобы по первым 5 строкам произведение было положительным; аналогично числа в последней строке по первым 5 столбцам выберем так, чтобы произведение было положительным. Осталось выбрать последнее число.

Обозначим числа, стоящие в последнем столбце, кроме клетки с координатами $(6,6)$ через a_1, a_2, $\ldots$, a_5, числа в последней строке, кроме клетки с координатами $(6,6)$— через b_1, b_2, $\ldots$, b_5, наконец, число в клетке с координатами $(6,6)$ — через c.

Перемножим первые 5 строк и первые 5 столбцов, получим положительное число A в силу выбора последней строки и последнего столбца. С другой стороны, это произведение равно

$$A = a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_5\cdot b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_5.$$

Поскольку $A>0$, числа $a_1a_2\ldots a_5$ и $b_1b_2\ldots b_5$ одного знака. Если $a_1a_2\ldots a_5>0$, то $c=1$; если $a_1a_2\ldots a_5<0$, то $c=-1$. Таким образом, если таблица 5×5 уже заполнена, то таблица 6×6 определяется также однозначно. В то же время заполнить таблицу 5×5 числами $+1$ и -1 можно, очевидно, 2^{25} способами.

138. *Ответ: не сможет.*

Рассмотрим слой размером $8\times8\times1$, примыкающий к грани параллелепипеда размером 8×8. В этом слое 64 кубика $1\times1\times1$ и должен быть заполнен слоями толщины 1, прилегающими к граням блоков. Но грани блоков имеют размеры 2×3 или 3×3, поэтому каждый блок заполняет 6 или 9 кубиков из этого слоя. Однако число 64 невозможно представить в виде суммы $6a+9b$, поскольку 64 не делится на 3, а 6 и 9 делятся.

139. *Ответ:* 2021.

Пусть x_1 и x_2 — корни первого трёхчлена, а x_3 и x_4 — корни второго трёхчлена. По условию все эти числа не равны нулю, и $x_3=87x_1$, $x_4=95x_2$. По теореме Виета

$$x_1+x_2=-a, \qquad x_3+x_4=-a,$$

откуда $x_1+x_2=x_3+x_4=87x_1+95x_2$. После преобразований получим $86x_1+94x_2=0$, или $47x_2=-43x_1$. Так как числа x_1

и x_2 — целые, а числа 43 и 47 — взаимно простые (они вообще простые), отсюда следует, что x_2 делится на 43, то есть, $x_2 = 43k$. Подставив это в предыдущее уравнение и поделив на 43, получим, что $x_1 = -47k$, где k — целое число, не равное нулю.

По теореме Виета, $b = x_1 x_2 = (-47k) \cdot 43k = -2021k^2$, откуда

$$|\, b\,| = 2021k^2 \geqslant 2021,$$

так как $k^2 \geqslant 1$ для целых чисел, не равных нулю. Легко видеть, что при $k = 1$ (или при $k = -1$) неравенство обращается в равенство, поэтому минимальное значение $|\, b\,|$ равно 2021 и достигается, например, когда $x_1 = -47$, $x_2 = 43$. Тогда $a = 4$, $b = -2021$, $c = 87 \cdot 95 \cdot (-2021) = -16703565$.

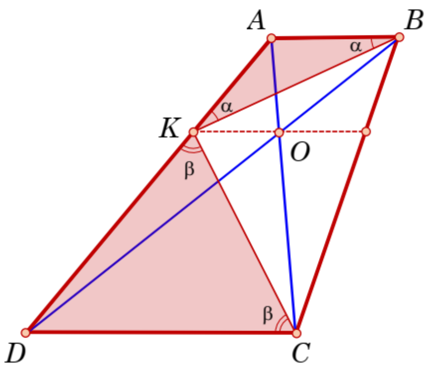


Рис. 54

140. (Рис. 54.) Отметим на отрезке AD точку K' такую, что $DK' = DC$, $AK' = AB$; она существует, так как $AB + DC = AD$. Из этого равенства следует, что

$$\frac{AK'}{DK'} = \frac{AB}{CD}.$$

Заметим, что $\frac{AO}{CO}$ также равно $\frac{AB}{CD}$ — в силу подобия треугольников AOB и COD. Из равенства $\frac{AK'}{DK'} = \frac{AO}{CO}$ следует параллельность прямых OK' и CD (например, по обратной теореме Фалеса, или из подобия треугольников $AK'O$ и ADC по углу и двум сторонам). Таким образом, точка K' совпадает с точкой K.

Отсюда следует, что треугольники AKB и CKD — равнобедренные. Поэтому $\angle ABK = \angle AKB = \alpha$, $\angle DCK = \angle DKC = \beta$. Кроме того, из параллельности прямых AB, OK и CD следует, что $\angle BKO = \angle ABK = \alpha$, $\angle OKC = \angle KCD = \beta$. Отсюда следует, что развернутый угол AKD равен $2\alpha + 2\beta$. Поэтому $\angle BKC = = \alpha + \beta = 90^\circ$.

141. Первое решение. Сначала докажем, что для положительных чисел a, b, c, d справедливо неравенство

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+c)(b+d)}. \tag{8}$$

Действительно, обе части неравенства положительны. После возведения его в квадрат получим

$$ab + cd + 2\sqrt{abcd} \leqslant ab + bc + ad + cd,$$

или $2\sqrt{ad \cdot bc} \leqslant ad + bc$. Последнее неравенство есть неравенство о средних для чисел ad и bc.

Из неравенства (8) следует, что

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-4} + \sqrt{y^2-9} = \sqrt{(x-2)(x+2)} + \sqrt{(y-3)(y+3)} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{(x-2+y-3)(x+2+y+3)} = \\ = \sqrt{(x+y-5)(x+y+5)}.\end{aligned}$$

Обозначим $t = x + y > 5$. Тогда

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-4} + \sqrt{y^2-9}} \geqslant \frac{(x+y)^2}{\sqrt{(x+y-5)(x+y+5)}} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2-25}}.$$

Осталось доказать, что

$$\frac{t^2}{\sqrt{t^2-25}} \geqslant 10 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{t^4}{t^2-25} \geqslant 100,$$

или $t^4 - 100(t^2 - 25) \geqslant 0$, то есть $t^4 - 100t^2 + 2500 = (t^2 - 50)^2 \geqslant 0$. Неравенство доказано.

Отметим, что минимальное значение 10 достигается, когда $x + y = t = \sqrt{50}$. Кроме того, необходимо, чтобы достигалось равенство в неравенстве (8). Для этого должно выполняться соотношение $ad = bc$, то есть, $(x-2)(y+3) = (x+2)(y-3)$. Раскрыв скобки, получим: $6x = 4y$. Система уравнений

$$x + y = 5\sqrt{2}, \qquad 3x = 2y,$$

имеет единственное решение $x = 2\sqrt{2}$, $y = 3\sqrt{2}$.

Второе решение. Обозначим $a = \sqrt{x^2-4}$, $b = \sqrt{y^2-9}$, тогда $a, b > 0$ и $x = \sqrt{a^2+4}$, $y = \sqrt{b^2+9}$. Имеем

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-9}} = \frac{\left(\sqrt{a^2+4}+\sqrt{b^2+9}\right)^2}{a+b} \geqslant \frac{2\left(\frac{a+2}{2}+\frac{b+3}{2}\right)^2}{a+b} =$$

$$= \frac{2(a+b+5)^2}{4(a+b)} = \frac{1}{2}\left(a+b+10+\frac{25}{a+b}\right) \geqslant 10,$$

так как

$$u + \frac{25}{u} \geqslant 10 \iff \frac{(u-5)^2}{u} \geqslant 0.$$

В решении использовано неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим

$$\sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}} \geqslant \frac{u+v}{2}.$$

142. *Ответ:* 0 *или* 1.

Из условия следует, что сумма «новых» чисел совпадает с суммой $s = a + b + c$ исходных чисел, то есть

$$a^2 + 2bc + b^2 + 2ca + c^2 + 2ab = s.$$

Выражение в левой части совпадает с числом $(a+b+c)^2 = s^2$, поэтому это равенство равносильно такому: $s^2 = s$, откуда $s = 0$ или $s = 1$.

Осталось привести примеры чисел a, b и c, при которых получаются указанные значения s. Для $s = 1$ подойдёт, например, набор $a = b = c = \frac{1}{3}$. Для $s = 0$ можно взять набор $a = b = -c = \frac{1}{3}$.

143. *Ответ:* 2500.

Воспользуемся известным неравенством $|a| + |b| \geqslant |a-b|$, тогда $|x+k| + |x+m| \geqslant |k-m|$. Сгруппировав в исходной сумме равноудаленные от концов слагаемые, получим

$$f(x) = (|\,x+1| + |x+100|) + \ldots + (|x+50| + |x+51|) \geqslant \\ \geqslant (100-1) + (99-2) + \ldots + (51-50).$$

Последняя сумма из 50 слагаемых — это арифметическая прогрессия, она равна $\frac{1}{2}100 \cdot 50 = 2500$. Это значение является наименьшим для $f(x)$, оно достигается, например, при $x = -50$.

144. *Ответ:* $c = \frac{1}{4}$.

Запишем неравенство в виде $a - b > \sqrt{a+c} - \sqrt{b+c}$. Умножив и поделив правую часть на сопряженную величину, представим неравенство в виде

$$a - b > \frac{a-b}{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}} \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{a+c}+\sqrt{b+c} > 1.$$

Это неравенство должно выполняться при любых $a > b > 0$. С увеличением значений a и b левая часть только увеличивается, поэтому достаточно, чтобы неравенство выполнялось только для наименьшего значения выражения $\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$, которое, очевидно, больше, чем $\sqrt{0+c}+\sqrt{0+c} = 2\sqrt{c}$. Значит, $2\sqrt{c} = 1$, то есть $c = \frac{1}{4}$.

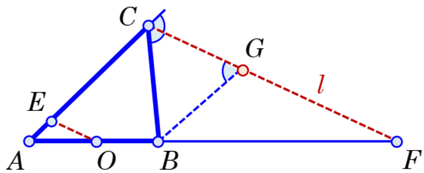


Рис. 55

145. *Ответ:* $\frac{11}{2}$.

(Рис. 55.) Пусть F — точка пересечения прямой l и прямой AB. Поскольку $AC > AB$, точка E лежит на отрезке AC, точка F — на луче AB. Через точку B проведём параллель к AC до пересечения с CF в точке G. Тогда $\angle BGC = \angle BCG$, и значит, треугольник CBG — равнобедренный, $BG = BC$. Из подобия треугольников AFC и BFG имеем:

$$\frac{FA}{FB} = \frac{AC}{BG} = \frac{AC}{BC} = \frac{7}{4} \iff \frac{AB}{AF} = \frac{3}{7} \iff \frac{AO}{AF} = \frac{AB/2}{AF} = \frac{3}{14}\,.$$

Так как треугольники ACF и AEO также подобны, то

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AO}{AF} = \frac{3}{14},$$

поэтому $AE = \frac{3}{14} \cdot AC = \frac{3}{2}$ и $EC = AC - AE = \frac{11}{2}$.

146. *Ответ: а) могут; б) не могут.*

а) Например, подходят числа 10, 8, 5. Тогда соответствующие разности равны $10 - 8 = 2$, $8 - 5 = 3$, $5 - 1 = 4$.

б) Пусть a, b, c — исходные числа. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n. По признаку делимости на 9 числа n и $S(n)$ имеют равные остатки при делении на 9, и значит, разность $n-S(n)$ кратна 9. По условию, разности $a-S(b)$, $b-S(c)$, $c-S(a)$ равны числам 3, 4, 5 соответственно. Тогда их сумма

$$(a-S(b))+(b-S(c))+(c-S(a)) = (a-S(a))+(b-S(b))+(c-S(c))$$

должна делиться на 9. С другой стороны, эта сумма равна $3+4+$ $+5 = 15$ и на 9 не делится, противоречие.

147. *Ответ: а) существует; б) не существует.*

а) Например, подходит функция $f(t) = t^2$, так как $f(\sin x)+$ $f(\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

б) Пусть такая функция существует. Тогда при $x = 0$ и $x =$ $= \frac{\pi}{2}$ имеем равенства

$$\begin{aligned} f(\sin 0) &= f(\cos 0) + 1, \\ f\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) &= f\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) + 1. \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} f(0) &= f(1) + 1, \\ f(1) &= f(0) + 1. \end{aligned}$$

Отсюда $f(1) = (f(1) + 1) + 1$, противоречие.

148. *Ответ:* 55 *и* 56.

Пусть число n — удачное, то есть $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$, где $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$ — натуральные числа. Если предположить, что $a_1 > 1$, то n можно разбить в сумму различных натуральных слагаемых еще одним способом: $n = (a_1 - 1) + a_2 + \ldots + (a_{10} + 1)$. Таким образом, $a_1 = 1$.

Далее, если предположить, что $a_2 > 2$, то для n опять можно привести другое разбиение: $n = a_1 + (a_2 - 1) + a_3 + \ldots + (a_{10} + 1)$. Значит, $a_2 = 2$. Продолжая так далее, получаем $a_3 = 3$, $a_4 = 4$,

$\ldots, a_9 = 9$. Если $a_{10} > 11$, то $a_9 + 1 < a_{10} - 1$, и снова можно сконструировать другое разбиение.

Наконец, нетрудно видеть, что при $a_{10} = 10$ или $a_{10} = 11$ получающиеся числа 55 и 56 являются удачными.

149. *Ответ:* 1 : 1.

Первое решение. (Рис. 56.) Пусть O — центр окружности, M — точка пересечения CX и DE. Докажем, что $OM \perp DE$, и значит, $DM = ME$.

Прежде всего, угол DMC равен полусумме дуг CD и EX. Так как дуги между параллельными хордами BX и DE равны, то $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{EX}$, поэтому

$$\angle CMD = \frac{\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EX}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DB}}{2} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CB} = \frac{1}{2}\angle COB = \angle COA.$$

(Последнее следует, например, из равенства прямоугольных треугольников AOB и AOC.) Из равенства углов COA и CMA следует, что точки A, C, M, O лежат на одной окружности. Поскольку радиус OC перпендикулярен касательной AC, диаметр этой окружности совпадает с отрезком AO. Значит, $\angle AMO = 90°$, то есть $OM \perp DE$.

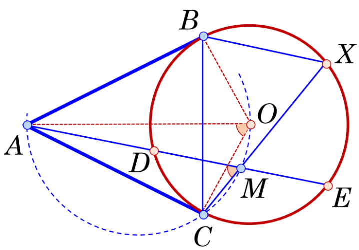


Рис. 56

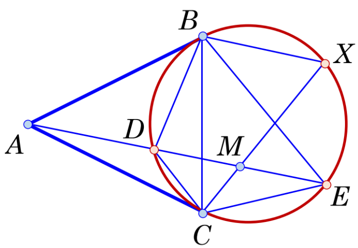


Рис. 57

Второе решение. (Рис. 57.) Отметим, что $\angle BCD = \angle ECX$, так как соответствующие дуги заключены между параллельными хордами. Кроме того, из равенства углов ABD и AEB следует подобие треугольников ABD и AEB, и значит, равенство $BD/BE = AD/AB$. Аналогично получаем, что $CD/CE = AD/AB$, то есть

$BD \cdot CE = CD \cdot BE = \frac{1}{2} BC \cdot DE$ (последнее равенство следует из теоремы Птолемея.)

Пусть теперь CX пересекает DE в точке M. Тогда треугольники CBD и CME подобны, следовательно, $BD \cdot CE = CB \cdot EM$. Отсюда и из предыдущего равенства получаем, что $EM = ED/2$.

150. *Ответ: цифра* 0.

Пусть n — данное число, t — его остаток от деления на 40 и от деления на 125. Тогда число $n - t$ делится на $40 = 5 \cdot 8$ и на 125, то есть делится на 1000. Значит, разность $n - t$ оканчивается тремя нулями. А остаток $t < 40$. Поэтому в разряде сотен стоит 0.

151. *Ответ: знак плюс.*

Первое решение. Сложив данные неравенства, получим: $x + y < 0$. Перемножив их (это можно делать, так как правые части неотрицательны) получим: $xy(1 - x - y + xy) > x^2y^2$. Стало быть, $xy(1-x-y) > 0$. Выражение в скобках положительно в силу неравенства $x + y < 0$, поэтому и произведение xy положительно.

Второе решение. Пусть одно из чисел (для определенности x) положительно. Тогда из первого неравенства в условии получаем $x^2 > x^2 - x > y^2 \geqslant 0$ и, значит, $x > |y|$. Следовательно, по второму неравенству из условия $y^2 + x > y^2 + |y| \geqslant y^2 - y > x^2$, поэтому $y^2 > x^2 - x$, что противоречит первому неравенству. Таким образом, наше предположение неверно и среди чисел x и y нет положительных. А значит, они оба отрицательны и $xy > 0$.

152. *Ответ: не может.*

Предположим противное. Пусть в группе x мальчиков и каждый знает y девочек. Тогда всего в группе будет xy знакомств. У всех девочек должно быть поровну из всех этих знакомств, значит xy делится на $79 - x$. Можно считать, что $x \leqslant 39$ (иначе поменяем мальчиков и девочек ролями). Так как x взаимно просто с $79 - x$, на $79 - x$ должно делиться число y. Но $79 - x \geqslant 40$, а y по условию не больше 39. Противоречие.

153. *Ответ:* 74.

Покажем, как Петя может обеспечить 74 «решки». Разобьем все монеты на пары идущих подряд. На k–ом шаге $(1 \leqslant k \leqslant 74)$ Петя смотрит на монеты в паре $(2k - 1, 2k)$. Если среди них есть хотя бы одна решка, то переходит к следующему шагу. Если среди них нет решки, то Петя указывает на тройку $(2k-1, 2k, 2k+1)$, после чего в этой паре появляется хотя бы одна решка. Таким образом, через 74 шага в каждой паре монет, кроме последней, будет хотя бы одна решка, то есть решек будет не менее 74.

Покажем, как Вася может помешать положить больше 74 «решек». Вначале он кладет орлом вверх все монеты с нечётными номерами, а также монету 150, а все остальные монеты — решкой. Далее он разбивает монеты с номерами 2-149 на пары подряд идущих. Среди любых трёх монет, на которые может указать Петя, две монеты обязательно будут из одной пары. Именно их Вася и переворачивает. При такой игре Васи монеты 1 и 150 всегда будут лежать орлом вверх, а в каждой его паре будет ровно один орёл и одна решка.

154. Первое решение. Обозначим через T точку пересечения диагоналей параллелограмма $CLBK$. В силу свойства биссектрисы и теоремы Фалеса

$$\frac{BC}{KL} = \frac{CT}{TL} = \frac{CP}{PL} = \frac{KP}{PA} = \frac{BL}{LA} = \frac{BC}{CA},$$

откуда $AC = KL$. Но тогда $ACKL$ либо параллелограмм, либо равнобедренная трапеция. Во втором случае $AK = CL$. В первом случае $LB = CK = AL$, поэтому $AC = CB$ и CL — общий перпендикуляр к параллельным прямым CK и AB, а тогда он короче наклонной AK.

Второе решение. Из условия следует, что точка P равноудалена от прямых KL, BC и AC. Если прямые AC и KL пересекаются (в точке X), то прямая XP — биссектриса угла AXL. По свойству трапеции $ACKL$ эта прямая проходит через середины оснований AL и KC. Поэтому $AX = XL$, трапеция равнобокая и $AK = CL$. Если же $AC \parallel KL$, то $ACKL$ — параллелограмм, $AL = KC = BL$, и биссектриса CL треугольника ABC является медианой. Поэтому она же — и высота, то есть $CL \perp AB$, и расстояние между параллельными прямыми AB и CK равно CL. Следовательно, отрезок AK, соединяющий точки на этих прямых, не короче CL.

155. *Ответ: существует.*

Вырежем у квадрата 4×4 угловые клетки. Легко проверить, что получившуюся фигуру можно разбить на уголки ровно тремя способами, и условие задачи для них выполняется.

156. *Ответ:* 60°.

Пусть отрезки AR и BM пересекаются в точке Q. Треугольники ABP и BAR равны по первому признаку, поэтому $\angle BAR = \angle ABP = \alpha$. Тогда

$$\angle ARM + \angle BMR = 180^\circ - \angle AQB = 2\alpha + \angle PBM.$$

(Здесь первое равенство — теорема о внешнем угле для треугольника MQR, а второе — теорема о сумме углов для треугольника AQB.) Отсюда получаем $\angle ARM + \angle BMR + \angle PBM = 2(\alpha + \angle PBM) = 2\angle ABM = 60^\circ$.

157. Впишем в квадрат круг радиуса 1 и проведём первый разрез. Если он не заденет вписанный круг, вырежем любой круг из части квадрата, не содержащей исходного круга. В противном случае разрез делит исходный круг на два сегмента. Заменим исходный круг двумя вписанными в эти сегменты кругами. Точки их касания с границей исходного круга — концы его диаметра, содержащего середину общей хорды сегментов, где вписанные в сегменты круги касаются друг друга. Теперь проведём второй разрез, рассмотрим пересечённые им части квадрата, получившиеся после первого разреза, и применим к каждой из них указанный алгоритм. Затем проделаем то же самое для третьего разреза и так далее. Очевидно, сумма радиусов выбранных кругов при этом не убывает, и после 2020-го разреза она будет не меньше 1.

158. Как известно, $n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1)$. Оба сомножителя в правой части тут меньше, чем $(n+1)^2$; если один из них — составное число, то у него есть делитель d, больший 1, но не больший n. Но тогда и число $n! + n^3 + 1$ делится на d, что противоречит его простоте. Значит, числа $n^2 - n + 1$ и $n + 1$ — простые, а в сумме они как раз дают $n^2 + 2$.

159. *Ответ: можно.*

Докажем, что можно сделать первые k столбцов одинаковыми индукцией по k.

База. При $k = 1$ — очевидно.

Переход. Пусть первые k столбцов одинаковы. Будем прибавлять к $(k+1)$-ому столбцу 1 до тех пор, пока каждое число в нём не станет больше, чем соседнее число в k-ом столбце. Теперь рассмотрим m-ую строку. Пусть на пересечении её с k-ым столбцом стоит a, а на пересечении с $(k+1)$-ым столбцом — $b > a$. Пусть a при делении на $b-a$ даёт остаток r. Прибавим к m-ой строке $b-a-r$ единиц. Теперь первые $k+1$ чисел в ней делятся на $b-a$. Далее прибавим к каждому из столбцов, начиная с $(k+2)$-го, по нескольку единиц так, чтобы все оставшиеся числа m-ой строки тоже стали делиться на $b-a$, после чего разделим m-ую строку на $b-a$. Заметим, что в итоге первые k чисел m-ой строки остались равными, а $(k+1)$-ое её число стало на единицу больше каждого из них. Проделаем такую операцию с каждой строкой таблицы. Поскольку к первым $k+1$ столбцам на каждом этапе 1 добавляется одинаковое количество раз, окажется, что первые k столбцов, по-прежнему равны, а $(k+1)$-ый — на 1 больше. Прибавив по 1 к первым k столбцам, завершим переход индукции. Когда все столбцы таблицы равны и в каждой строке все элементы одинаковы, завершаем решение делением каждой строки на её элемент.

160. *Ответ: нет, не обязательно.*

Если, например, у Иа-Иа были два равных треугольника со сторонами 1, 2, 2, то в первой кучке окажутся палочки с длинами 1, 1, 2, из которых треугольник составить нельзя.

Замечание. Существует много других примеров. Отметим, что из трёх зелёных палочек треугольник сложить всегда можно — см. задачу **170**.

161. Совпадает с задачей **151**.

162. *Ответ: три делителя.*

Первое решение. Поскольку число $a+b$ больше единицы, оно имеет хотя бы два различных делителя. Докажем, что их не может быть ровно два, то есть что число $a+b$ не может быть простым. Домножив равенство из условия на знаменатель, получим $ab+c^2 = ka+kb$ или, что то же самое, $ab-ka-kb+k^2 = k^2-c^2$. Разложив обе части на множители, придем к соотношению

$$(a-k)(b-k) = (k-c)(k+c).$$

Поскольку $k < a$ и $k < b$, обе скобки в левой части положительны и, значит, $c < k$. Тогда существуют такие натуральные числа x, y, z и t, что $a-k=xy$, $b-k=zt$, $k-c=xz$ и $k+c=yt$. Например, можно положить $x = \text{НОД}(a-k, k-c)$, $t = \text{НОД}(b-k, k+c)$, $y=(a-k)/x$ и $z=(b-k)/t$. Тогда первые два равенства будут выполнены по определению; с другой стороны, $k-c$ делит xz, а $k+c$ делит yt, поэтому из равенства произведений вытекают написанные равенства.

Следовательно,

$$a+b=(a-k)+(b-k)+(k-c)+(k+c)=$$
$$=xy+zt+xz+yt=(x+t)(y+z).$$

Таким образом, число $a+b$ представляется в виде произведения двух натуральных чисел, больших 1, и, значит, не является простым.

Наконец, несложно увидеть, что $a+b$ может имеет ровно три различных делителя. Например, если $a=10$, $b=15$, $c=5$, то $k=\frac{10\cdot15+52}{10+15}=7$, и $a+b=25=5^2$ имеет три делителя.

Замечание. Ни при каких a и b сумма $a+b$ не может равняться 2^2 и 3^2. Но для любого простого числа $p \geqslant 5$ существуют удовлетворяющие условию задачи такие числа a, b и c, что $a+b=p^2$. Для случая $a \leqslant b$ все подходящие a, b, c и k имеют вид $a=np$, $b=(p-n)p$, $c=mp$ и $k=np-n^2+m^2$, где $2 \leqslant n \leqslant \frac{p-1}{2}$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$. В частности, для $p=5$ пример единственный с точностью до перестановки местами чисел a и b.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что число $p=a+b$ не может быть простым. Предположим противное.

Будем считать, что $a \leqslant b$. Тогда число $kp=ab+c^2=a(p-a)+c^2=ap+c^2-a^2$ делится на p и меньше, чем ap. Следовательно, число $a^2-c^2=(a-c)(a+c)$ положительно и кратно p. Тогда первая скобка положительна и $a-c<a+b=p$, поэтому она не делится на p. Вторая скобка также положительна и $a+c<2a \leqslant a+b=p$, поэтому она также не делится на p. Мы пришли к противоречию, поэтому предположение неверно. Таким образом, $a+b$ — составное число и, значит, оно имеет хотя бы три делителя.

163. (Рис. 58.) Обозначим через O центр окружности ω. Проведем через точку A общую касательную к нашим окружностям;

пусть она пересекает прямую CD в точке P. Поскольку $PA = PB$, точка P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, который также проходит через точки M и O.

Поскольку AM — высота в прямоугольном треугольнике PAO, имеем $PM \cdot PO = PA^2$. С другой стороны, по свойству касательной и секущей имеем $PA^2 = PC \cdot PD$. Значит, $PM \cdot PO = PC \cdot PD$. Это и означает, что точки C, D, O и M лежат на одной окружности.

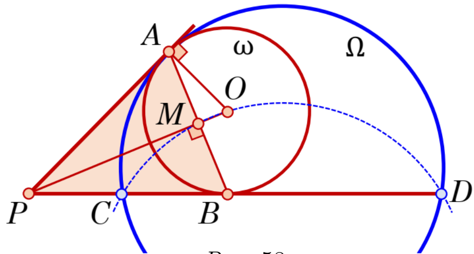


Рис. 58

Второе решение. (Рис. 59.) Пусть O — центр ω. Гомотетия с центром A, переводящая ω в Ω, переводит точку B в точку K окружности Ω, касательная в которой параллельна CD; иначе говоря, K — середина дуги CD.

Пусть L — точка, симметричная B относительно K. Поскольку точки A, C, K и D лежат на одной окружности, имеем

$$BC \cdot BD = BA \cdot BK = \frac{BA}{2} \cdot 2BK = BM \cdot BL,$$

так что точка L лежит на окружности Γ, описанной около треугольника CMD.

Пусть точка L' диаметрально противоположна L на этой окружности. Тогда проекции точек L и L' на хорду CD симметричны относительно середины CD. Но проекции точек L и B также симметричны относительно неё, поскольку точка K — середина LB — лежит на серединном перпендикуляре к CD. Отсюда $L'B \perp CD$, то есть L' лежит на прямой OB. Кроме того, прямые $L'M$ и OM перпендикулярны ML и потому совпадают. Значит, $O = L'$, и O лежит на Γ.

164. *Ответ: выигрывает Петя.*

Приведём одну из возможных выигрышных стратегий для Пети. Он всё время будет делать ходы, параллельные одной из диагоналей доски (назовём её *главной*).

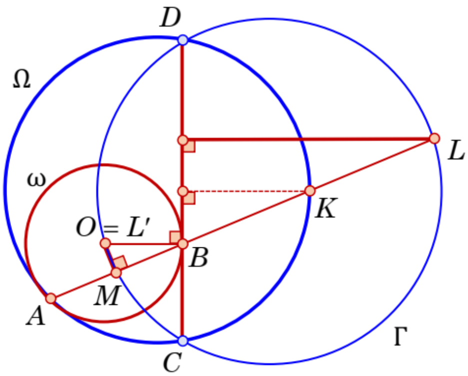


Рис. 59

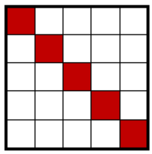


Рис. 60

Первым ходом Петя закрасит все клетки главной диагонали. После этого доска разбивается на две одинаковых «лесенки» (рис. 60). Мысленно сделаем каждую лесенку симметричной относительно вертикальной прямой, сдвинув в ней каждый горизонтальный ряд, кроме первого, на пол-клетки относительно предыдущего ряда (см. рис. 61).

В результате сдвигов и бывшие вертикали, и бывшие диагонали, параллельные главной, стали наклонными рядами. При этом «вертикали» одной лесенки симметричны «диагоналям» другой. Это значит, что на каждый ход Васи Петя может ответить симметричным ходом в другую лесенку (два таких ответа показаны на рис. 61). Тогда после каждого Петиного хода ситуация на «сдвинутой» картинке будет оставаться симметричной, а значит, Петя всегда сможет сходит согласно описанной стратегии. Так как игра закончится (не более чем за 10^4 ходов), в некоторый момент Васе будет некуда ходить, и Петя выиграет.

165. *Ответ:* 29.

Заметим, что если $a + b = c$, то все три числа a, b, c не могут оказаться одновременно нечётными. Следовательно, среди них есть как минимум одно чётное число, и последняя цифра этого числа также будет чётной. Таким образом, среди 30 цифр есть как минимум одна чётная, а нечётных — не более 29.

Пример $1\,999\,999\,999 + 1\,111\,111\,111 = 3\,111\,111\,110$, показывает, что среди 30 цифр могут оказаться ровно 29 нечётных.

Замечание. Примеров с 29 нечётными цифрами можно построить много — например, $3\,999\,999\,999 + 3\,999\,999\,999 = 7\,999\,999\,998$.

166. *Ответ: верно.*

Рассмотрим остатки от деления чисел, расположенных в четырёх угловых клетках, на 3. По принципу Дирихле, как минимум у двух из этих чисел, x и y, эти остатки совпадут, то есть разность $y-x$ делится на 3. Не умаляя общности, положим $x < y$.

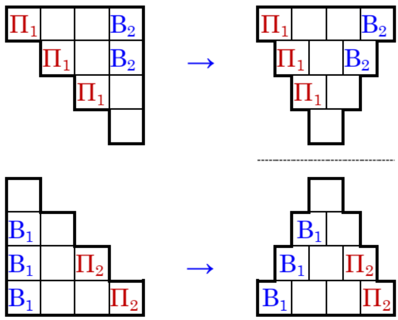


Рис. 61

Раскрасим клетки нашей таблицы в шахматном порядке в чёрный и белый цвета так, чтобы угловые клетки были чёрными. Рассмотрим клетки с числами x, $x+3$, $x+6$, $\ldots$, $y-3$, y. Любые два из них стоят в клетках с общей стороной — то есть в клетках разного цвета. Значит, все числа в нашей последовательности, имеющие ту же чётность, что и x, стоят в чёрных клетках, а все остальные — в белых. Так как число y стоит в чёрной клетке, оно имеет ту же чётность, что и x, то есть $y - x$ чётно. Значит, $y - x$ делится на 6.

167. Первое решение. Пусть P и Q — точки пересечения медиан треугольников ABD и ABC соответственно, а K — середина AB.

Достроим треугольник ABD до параллелограмма $ALBD$ (рис. 62); тогда $CL = CB + BL = BC + AD$. Диагонали этого параллелограмма пересекаются в точке K, поэтому $DK = KL$. Поскольку $DP = \frac{2}{3}PK$, получаем $DP = \frac{1}{3}DL$, то есть $PL = 2DP$. Значит, по свойству биссектрисы в треугольнике CDL точка P лежит на биссектрисе угла BCD тогда и только тогда, когда

$$\frac{CL}{CD} = \frac{PL}{PD} = 2,$$

то есть когда $AD + BC = 2CD$.

Аналогично, точка Q лежит на биссектрисе угла ADC при том же самом условии. Отсюда и следует утверждение задачи.

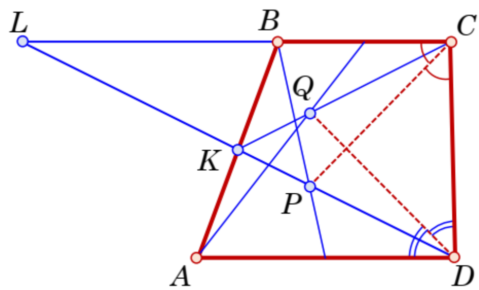


Рис. 62

Второе решение. Введём точки P и Q, как в предыдущем решении. Пусть M и N — середины AD и BC соответственно. Наконец, пусть биссектрисы углов BCD и ADC пересекают прямые AD и BC в точках X и Y соответственно (см. рис. 63). Поскольку $\angle CXD = \angle XCB = \angle XCD$, имеем $CD = DX$. Аналогично, $CY = CD$.

Поскольку CX проходит через P, треугольники CPB и XPM подобны, причём

$$\frac{BC}{MX} = \frac{BP}{PM} = 2,$$

то есть $BC = 2MX$, поэтому

$$2CD = 2(XM + MD) = 2MX + 2MD = BC + AD,$$

а значит, $2CY = 2CD = AD + BC$, откуда $NY = CY - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$.

Пусть биссектриса DY пересекает медиану AN в точке Q'. Тогда треугольники $AQ'D$ и $NQ'Y$ подобны с коэффициентом $AD/NY = 2$, откуда $AQ'/Q'N = 2$. Значит, Q' совпадает с Q, что и требовалось доказать.

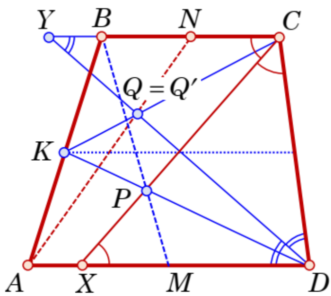


Рис. 63

Замечание. Существуют и другие решения; в частности, можно решить задачу, не приходя к соотношению $AD + BC = 2CD$. Наметим один из таких путей.

Введём точки X и Y, как во втором решении. Равенства $CY = CD = DX$ означают, что $CDXY$ — ромб. Тогда точка S пересечения его диагоналей равноудалена от CY и DX, то есть лежит на средней линии трапеции $ABCD$.

Пусть K — середина AB; тогда $KP : PD = KQ : QC = 1 : 2$. Отсюда несложно вывести, что CP и DQ пересекаются на медиане треугольника KCD из вершины K — то есть опять же на средней линии трапеции $ABCD$. Это значит. что DQ проходит через S, что и требовалось.

Заметим также, что точка S является серединой средней линии.

168. *Ответ:* $2n + 1$.

Первое решение. Назовём *длиной* слова количество букв в нём. Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_n — буквы алфавита. Тогда нетрудно проверить, что хорошим является слово

$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_2 a_1 a_2 a_3 \ldots a_n.$$

Осталось показать, что нет хороших слов бóльшей длины.

Предположим, что в n-буквенном алфавите существует хорошее слово длины $2n + 2$. Тогда какая-то буква (скажем, a_1) встречается в нём хотя бы три раза. Отметим её второе (V) и предпоследнее (P) вхождение в слово (тогда V стоит не правее, чем P).

Любая другая буква встречается не более одного раза перед P, а также не более одного раза после V, иначе вычёркиванием можно получить запрещённую последовательность. Значит, каждая из букв $a_2, \ldots, a_n$ встречается не более двух раз. Более того, если такая буква и встречается дважды, то одно из её вхождений стоит до V, а другое — после P.

Пусть a_1 встречается $k \geqslant 3$ раз. Тогда между V и P стоят хотя бы $k - 3$ буквы, отличных от a_1 (по одной между соседними вхождениями a_1), и все такие буквы встречаются ровно по разу. Выделим $k - 3$ таких буквы. Остальные $n - k + 2$ букв могут встречаться максимум по два раза. Поэтому длина слова не превосходит

$$k + (k - 3) \cdot 1 + (n - k + 2) \cdot 2 = 2n + 1,$$

что противоречит нашему предположению.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что длина хорошего слова не превосходит $2n + 1$. Индукция по $n \geqslant 2$. В базовом случае $n = 2$ буквы в слове чередуются, и слово длины хотя бы 6 содержит фрагмент вида $ababab$, из которого вычёркиванием букв можно получить $aabb$.

Для перехода предположим, что в n-буквенном алфавите есть хорошее слово длины, не меньшей $2n + 2$. Тогда какая-то буква a встречается в этом слове хотя бы три раза. Предположим, что букв, встречающихся хотя бы 3 раза, две — a и b. Пусть, без ограничения общности, второе вхождение a стоит раньше второго вхождения b; тогда вычёркиванием букв можно получить слово $aabb$, что невозможно.

Значит, буква a встречается в слове $k \geqslant 3$ раз, а все остальные — максимум по два раза. Тогда длина слова не меньше, чем $2n + 2$, и не больше, чем $k + 2(n - 1)$, откуда $k \geqslant 4$.

Между вторым и третьим вхождением буквы a есть какая-то буква c. Эта буква не может встречаться в других местах: если она встречается после второго вхождения a, то вычёркиванием букв можно получить *aacc*, а если до него — то *ccaa* (поскольку $k \geqslant 4$).

Пусть соседи буквы c различны. Тогда, удалив её из слова, мы получим хорошее слово в $(n-1)$-буквенном алфавите (без буквы c). Длина этого слова будет не меньше $2n+1 = 2(n-1)+3$, что противоречит индукционному предположению.

Если же соседи буквы c одинаковы, удалим из слова c и букву перед ней; тогда на этом «стыке» останутся различные буквы. Поэтому мы опять получим хорошее слово в $(n-1)$-буквенном алфавите, длина которого не меньше, чем $2(n-1)+2$; это опять же невозможно по индукционному предположению.

169. *Ответ: не могло.*

Первое решение. Назовём набор из n чисел в тетради *красивым*, если из него получается требуемый набор наименьших общих кратных. Предположим, что красивый набор из $n > 100$ чисел существует. Выберем из всех таких наборов набор с наименьшей суммой чисел.

Заметим, что если разность полученной прогрессии $d > 0$ имеет общий простой делитель p с каким-нибудь её членом, то все члены этой прогрессии делятся на p, а тогда и все числа красивого набора, за исключением, быть может, одного, также делятся на p. Разделим все эти числа на p (кроме, возможно, того, которое не делится); все выписанные на доску числа тоже разделятся на p и по-прежнему будут последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии, то есть также получится красивый набор. Это противоречит минимальности суммы чисел выбранного набора. Следовательно, d взаимно просто со всеми выписанными на доску числами.

Пусть a — максимальное число нашего красивого набора; тогда $a \geqslant n$. В прогрессии на доске будет не менее $n-1$ членов, кратных a. У каких-то двух из них номера отличаются не более, чем на $\frac{1}{2}n(n-1) : (n-2) < n$, то есть разность этих членов (также делящаяся на a) равна kd при некотором $k \leqslant n-1 < a$. Но d взаимно просто с a, поэтому kd не может делиться на a — противоречие.

Второе решение. Как и в первом решении, выберем красивый набор с наименьшей суммой и докажем, что разность прогрессии d взаимно проста с любым числом из набора. Далее нам понадобится следующий стандартный факт.

Лемма. *Пусть разность d арифметической прогрессии натуральных чисел x_1, x_2, ..., взаимно проста с числом k. Тогда числа, кратные k, идут в этой прогрессии с шагом k (то есть существует такое $i \leqslant k$, что члены, кратные k — это в точности x_i, x_{i+k}, x_{i+2k}, ...).*

Доказательство. Разности членов x_1, x_2, ..., x_k имеют вид sd при $s < k$, и они не делятся на k. Поэтому все эти члены дают разные остатки при делении на k; значит, они дают все возможные остатки, и один из наших членов делится на k — пусть это x_i. Тогда член x_{i+t} будет делиться на k тогда и только тогда, когда $dt \vdots k$, то есть когда $t \vdots k$.

Пусть теперь p — простой делитель какого-то числа из нашего набора, а p^s — наибольшая степень p, делящая число набора. Пусть a — число из набора, делящееся на p^s. Хотя бы $n-1$ член прогрессии делится на a (и, как следствие, на p^s). Но разность прогрессии не делится на p; значит, лишь каждый p^s-й её член делится на p^s. Значит, в прогрессии хотя бы $p^s(n-2)+1$ членов, то есть $p^s(n-2)+1 \leqslant \frac{1}{2}n(n-1)$, откуда $p^s < n$.

С другой стороны, ни один из как минимум $n-1$ членов прогрессии, делящихся на p^s, не делится на p^{s+1}. Это значит, что количество таких членов меньше p, то есть $n-1 \leqslant p-1$, или $n \leqslant p$. Это противоречит неравенству выше.

170. *Ответ:* а) *да, обязательно;* б) *нет, не обязательно.*

а) Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5 \geqslant a_6$ — данные длины палочек. Так как a_1 входила в треугольник с некоторыми двумя другими палочками, то a_1 меньше их суммы, а следовательно, меньше чем сумма двух самых длинных из оставшихся палочек: $a_1 < a_2 + a_3$. Так как $a_1 \geqslant a_2$ и $a_1 \geqslant a_3$, выполнение неравенства $a_1 < a_2 + a_3$ достаточно для того, чтобы из палочек a_1, a_2, a_3 можно было составить треугольник.

б) Пусть изначально были два равных треугольника со сторонами 1, 3, 3 и 1, 3, 3. Тогда в группе самых коротких палочек окажутся палочки 1, 1, 3, из которых треугольник составить нельзя.

Замечание. В пункте *б*) существует много других примеров.

171. *Ответ: не может.*

Первое решение. Докажем, что $xy > 0$. Предположим противное: $xy < 0$ ($xy \neq 0$ по условию). Не умаляя общности, $x > 0$, $y < 0$. Сложив данные в условии задачи неравенства, получим $x + y < 0$, то есть $0 < x < -y$. Следовательно, $x^4 < y^4$. Но тогда $x < x^4 - y^4 < 0$ — противоречие.

Второе решение. Сложив данные в условии задачи неравенства, мы получим: $x+y < 0$. Преобразуем данные неравенства: $x^4 - x > y^4$ и $y^4 - y > x^4$ и перемножим (это можно делать, так как их правые части положительны). Тогда $xy(1 - x^3 - y^3) > 0$. Так как $x < -y$, то $x^3 < -y^3$, то есть $x^3 + y^3 < 0$. Поэтому $1 - x^3 - y^3 > 1 > 0$. Значит, xy — положительно.

172. Предположим противное, и множество S конечно. Тогда среди всех чисел множества S выберем число a, которое делится на максимальную степень тройки, пусть скажем, a делится на 3^m, но не делится на 3^{m+1}. Если условие выполняется, то $15a = b(3c - 5)$ для некоторых b, $c \in S$. Левая часть этого равенства делится на 3^{m+1}. Но тогда, поскольку $3c - 5$ не делится на 3, число b должно делится на 3^{m+1}, что противоречит выбору a.

173. (Рис. 64.) Пусть m пересекает BC в точке X, а P и Q — середины A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Для определенности, пусть X и C лежат по одну сторону от A_1. Для решения задачи достаточно доказать, что $XB \cdot XC = XK^2$.

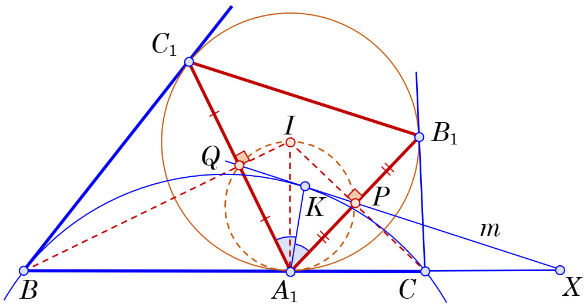


Рис. 64

Окружность (A_1PQ) получается из окружности $(A_1B_1C_1)$ гомотетией с центром A_1 и коэффициентом $1/2$. Поэтому окружность (A_1PQ) также, как и окружность $(A_1B_1C_1)$, касается BC. Используя это касание, имеем $\angle KA_1X = \angle KA_1P + \angle PA_1X = \angle KA_1Q + \angle PQA_1 = \angle A_1KX$. Следовательно, треугольник KXA_1 — равнобедренный, в нем $XA_1 = XK$. Также из касания следует равенство $XP \cdot XQ = XA_1^2$.

Далее, пусть I — центр окружности $(A_1B_1C_1)$. Точки A_1 и B_1 симметричны относительно IC, значит, A_1P — высота в прямоугольном треугольнике IA_1C, откуда $IC \cdot IP = IA_1^2$. Аналогично $IB \cdot IQ = IA_1^2$, откуда $IC \cdot IP = IB \cdot IQ$, следовательно, $BQPC$ — вписанный.

Окончательно, получаем $XB \cdot XC = XP \cdot XQ = XA_1^2 = XK^2$, что и требовалось.

174. Совпадает с задачей **164**.

175. Совпадает с задачей **165**.

176. Совпадает с задачей **166**.

177. (Рис. 65.) Проведем биссектрису m угла BCD. По построению точки B и D, а также точки M и K симметричны относительно m.

Из симметрии, BM и DK пересекаются в точке X, лежащей на m. Так как $XM \perp CM$, то $XK \perp CK$, значит, X лежит на окружности (CMK), причём CX — диаметр этой окружности. Далее, $\angle BXD = \angle MXK = 180° - \angle MCK = \angle BCA = \angle BAC = \angle BAD$, поэтому X лежит на окружности (ABD).

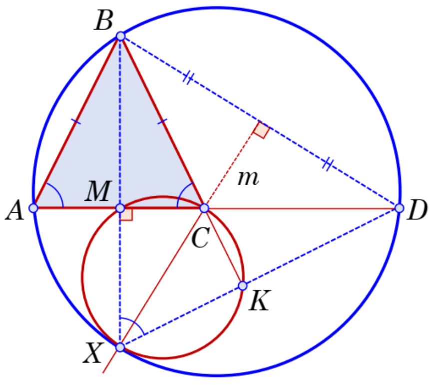


Рис. 65

Так как m — серединный перпендикуляр к BD, то центр окружности (ABD) лежит на m. Но тогда X лежит на каждой из окружностей (CMK), (ABD) и на их линии центров, следовательно, эти окружности касаются друг друга в точке X.

178. *Ответ: при всех n.*

Приведём одну из возможных договорённостей фокусника и помощника. Отметим самое левое место знаком $*$ (карточку на нём перевернёт фокусник). Пронумеруем все остальные места числами от 1 до $n-1$; фокусник и помощник будут считать, что эти места расположены по циклу, то есть место 1 следует за местом $n-1$.

Если на месте $*$ лежит карточка 1 или 2 (пусть для определённости это карточка 1), то помощник выкладывает все свои карточки по возрастанию по циклу за картой 2. Тогда фокусник, увидев карту на месте $*$, восстанавливает циклический порядок всех остальных карт (то есть их порядок с точностью до сдвига по циклу), и по любой карте, открытой зрителем, фокусник сможет определить расположения всех карт.

Пусть теперь карты 1 и 2 лежат в цикле. Тогда помощник считает количество мест i, на которое надо сдвинуться по циклу, чтобы от карточки 1 добраться до карточки 2; тогда $1 \leqslant i \leqslant n-2$. Далее помощник кладёт на место $*$ карточку $i+2$. Остальные же карточки он выкладывает по возрастанию по циклу за карточкой 1, пропуская место карточки 2. Увидев карточку на месте $*$, фокусник узнаёт число i. По нему он опять же восстанавливает циклический порядок карт на остальных местах, и по любой открытой зрителем карточке он может определить места всех остальных.

Замечание. Существуют и другие стратегии. Однако все работающие стратегии должны обладать следующими свойствами.

Как и в решении выше, обозначим через $*$ место, карточку на котором перевернёт фокусник. Существует $n(n-1)$ возможных расположений карточек 1 и 2; значит, есть столько же возможных расположений всех карт, которые получаются после действий помощника. При этом для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ карточка i должна оказаться на месте $*$ ровно в $n-1$ из этих расположений. Более того, в этих $n-1$ расположениях любая карточка $j \neq i$ должна располагаться на различных $n-1$ местах (отличных от $*$).

(Выполнения последнего свойства легче всего добиться, сделав так, чтобы эти расположения отличались циклическими сдвигами карточек на местах, отличных от $*$, как в решении выше; можно этого, однако, добиться и другими методами.)

179. Совпадает с задачей **169**.

180. *Ответ:* 0 *или* 5.

Пусть n — данное число, t — его остаток от деления на 40 и от деления на 625. Тогда число $n-t$ делится на 40 и на 625, то есть делится на $\text{НОК}(40, 625) = 5000$. Значит, разность $n-t$ оканчивается либо на 5000, либо на 0000. А остаток $t < 40$. Поэтому цифра в разряде тысяч может быть 0 или 5. Обе ситуации возможны, такие цифры имеют, например числа 20 210 000 и 20 215 000 (оба этих числа имеют остатки 0 при делении на 40 и на 625).

181. *Ответ: знак плюс.*

Первое решение. Сложив данные неравенства, мы получим: $x + y < 0$. Преобразуем данные неравенства: $x^4 - x > y^4$ и $y^4 - y > x^4$ и перемножим (это можно делать, так как их правые части положительны). Тогда $xy(1 - x^3 - y^3) > 0$. Так как $x < -y$, то $x^3 < -y^3$, то есть $x^3 + y^3 < 0$. Поэтому $1 - x^3 - y^3 > 1 > 0$. Значит, xy — положительно.

Второе решение. Докажем, что $xy > 0$. Предположим противное: $xy < 0$ ($xy \neq 0$ по условию). Не умаляя общности, $x > 0$, $y < 0$. Сложив данные в условии задачи неравенства, получим $x + y < 0$, то есть $0 < x < -y$. Следовательно, $x^4 < y^4$. Но тогда $x < x^4 - y^4 < 0$ — противоречие.

182. *Ответ: не мог.*

Каждому из наших 200 многочленов соответствует две целых точки a и b на оси Ox. Не умаляя общности будем считать, что $a < b$. Назовём *шириной* многочлена f натуральное число $b - a$, а *осью* многочлена — $\frac{1}{2}(a + b)$.

Пусть многочлен f имеет ширину $w > 0$ и ось c, тогда он записывается в виде $f(x) = \frac{4}{w^2}(x - c)^2 - 1$.

Покажем, что графики двух разных многочленов такого вида имеют ровно две общих точки, когда у них разные ширины и оси. Если же у них совпадает ширина или ось, то у них ровно одна общая точка.

Действительно, $\frac{4}{w_1^2}(x - c_1)^2 - 1 = \frac{4}{w_2^2}(x - c_2)^2 - 1$ равносильно $(x - c_1)w_2 = \pm(x - c_2)w_1$. Если $w_1 \neq w_2$, то каждое из двух линейных уравнений имеет корни, и они совпадают только если $c_1 = c_2$. Если же $w_1 = w_2$, то $c_1 \neq c_2$ (трёхчлены разные), и одно из двух линейных уравнений корней не имеет, а второе имеет.

Заметим, что ширина многочлена может принимать значение от 1 до 100, при этом найдется не более одного многочлена с шириной 100. Обозначим x_i — количество многочленов с шириной i. Оценим количество пар многочленов с одинаковой шириной:

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{x_i(x_i-1)}{2} = \sum_{i=1}^{100} \frac{(x_i^2 - 4x_i + 4) + 3x_i - 4}{2} = \\ = \sum_{i=1}^{100} \frac{(x_i-2)^2}{2} + \frac{3 \cdot 200 - 4 \cdot 100}{2} \geqslant 1 + 100.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались следующим соображением: так как сумма ста чисел x_i равна 200 и $x_{100} \neq 2$, то найдется ещё хотя бы одно $x_i \neq 2$, значит, $\sum_{i=1}^{100}(x_i - 2)^2 \geqslant 2$.

Осью многочлена может быть любое целое или полуцелое число от $\frac{1}{2}$ до $99\frac{1}{2}$, таких чисел 199, следовательно, найдется как минимум одна пара многочленов с общей осью. Это будет ранее не учтённая пара, так как трёхчлены с общими шириной и осью совпадают.

Чтобы найти количество точек пересечения графиков надо из удвоенного количества пар многочленов вычесть количество пар с одинаковой шириной или осью. Таким образом, точек пересечения не более, чем $2 \cdot \frac{200 \cdot 199}{2} - 101 - 1 = 39\,698$, что меньше, чем $39\,699$.

183. Первое решение. Обозначим через R радиус описанной сферы Ω тетраэдра $SABC$, через O — её центр (рис. 66). Отметим точку O', симметричную точке O относительно плоскости (ABC), и точку P такую, что $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OS}$ (в случае, когда точки S, O и O' не лежат на одной прямой, мы достроили треугольник SOO' до параллелограмма $SOO'P$). Поскольку $O'P = OS = R$, то точка P лежит на сфере, симметричной Ω относительно плоскости (ABC). Покажем, что P лежит на сфере Ω_a, симметричной Ω относительно прямой SA. Рассуждение для двух других сфер аналогично.

Обозначим через O_a центр сферы Ω_a, эта точка симметричина точке O относительно прямой SA. Тогда четырехугольник $SOAO_a$ — ромб (или точки O и O_a совпадают с серединой отрезка SA). В любом случае $\overrightarrow{AO_a} = \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{O'P}$. Значит, AO_aPO' — параллелограмм, в котором $PO' = R = O'A$, поэтому он ещё и ромб. Следовательно, $O_aP = R$, откуда и следует, что P лежит на сфере Ω_a.

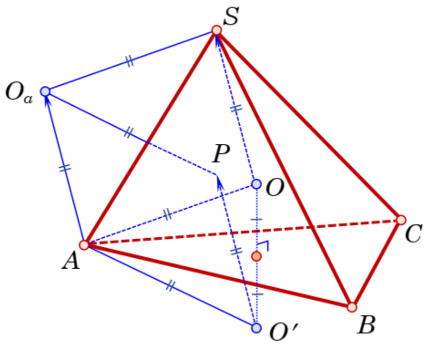


Рис. 66

Второе решение. Введем обозначения как в первом решении. Пусть также O_b и O_c — центры сфер, симметричных Ω относительно прямых SB и SC соответственно (рис. 67). Покажем, что радиус сферы γ_1, описанной около тетраэдра $O'O_aO_bO_c$, равен R. Тогда центр этой сферы окажется искомой точкой.

При гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $1/2$ указанная сфера перейдет в сферу γ_2, проходящую через середины ребер SA, SB, SC и центр O_1 описанной окружности треугольника ABC. А при гомотетии с центром S и коэффициентом 2 сфера γ_2 перейдет в сферу γ_3, которая проходит через точки A, B, C и точку S', симметричную S относительно O_1. Заметим, что радиусы сфер γ_1 и γ_3 вдвое больше радиуса сферы γ_2, а потому они равны. Наконец, $O'S' = OS = R = O'A = O'B = O'C$, поскольку точки O' и O, а также S и S' симметричны относительно точки O_1. Таким образом, точка O' — центр сферы γ_3, а R — её радиус. Тогда и радиус сферы γ_2 равен R, что и требовалось.

184. *Ответ:* 75.

Пример. Покажем, что если $k = 74$, то мы не сможем гарантированно найти дом Знайки. Разместим Знайку и лжеца Незнайку в дома с номерами $(50;49)$ и $(49;50)$ соответственно. Покажем, что может оказаться так, что по ответам жителей нельзя однозначно определить, в каком из этих двух домов живёт Знайка.

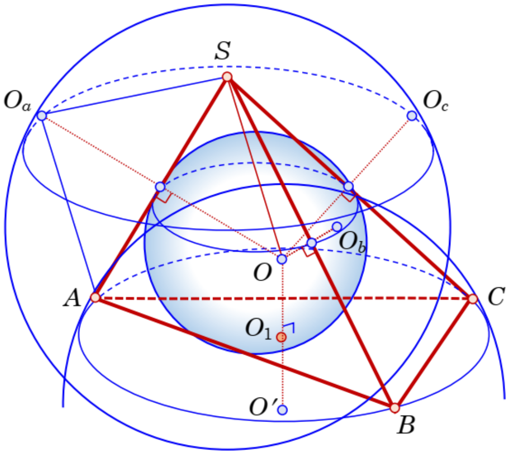


Рис. 67

В нижний левый квадрат 49×49 поселим рыцарей. Их расстояния до Знайки и Незнайки одинаковые. В верхний правый квадрат 50×50 тоже поселим рыцарей, их расстояния тоже одинаковы. В нижний правый прямоугольник (из 49 строк и 50 столбцов) поселим рыцарей так, чтобы в каждой строке было ровно 25 рыцарей и 25 лжецов, а в каждом столбце хотя бы 24 рыцаря и 24 лжеца. В верхний левый прямоугольник поселим коротышек диагонально-симметрично правому верхнему, причём рыцарей и лжецов поменяем местами. В нём в каждом столбце будет по 25 рыцарей и 25 лжецов, а в каждой строке хотя бы 24 рыцаря и 24 лжеца. Для каждого коротышки из этих прямоугольников расстояния до Знайки и Незнайки разные. Пусть все лжецы в них говорят расстояние не до Знайки, а до Незнайки. Тогда при замене местами рыцарей и лжецов в этих прямоугольниках (в частности, при замене местами Знайки и Незнайки) все будут говорить то же самое, но Знайка будет жить в другом доме.

Оценка. Покажем, что если $k \geqslant 75$, то мы сможем гарантированно найти дом Знайки. Предположим, что, задав вопросы всем коротышкам, мы не можем понять, где находится Знайка, т.е. есть хотя бы два дома, где он может быть. Пусть у одного номер $(x; y)$, а у другого $(u; v)$. Можно считать, что $x \leqslant u$, $y \leqslant v$, так как можно повернуть квадрат требуемым образом. Так как оба неравенства одновременно не могут быть равенствами, без ограничения общности будем считать, что $y < v$. Рассмотрим столбцы $(x; \ldots)$ и $(u; \ldots)$ (возможно, это один и тот же столбец).

Если $u - x > v - y$ или $(u - x) + (v - y)$ — нечётно, то в этих столбцах нет ни одного коротышки, расстояния от которого до двух выделенных домов одинаковы.

Если $x = u$, а $v - y$ чётно, то в столбце $(x; \ldots)$ находится один коротышка, расстояния от которого до двух домов одинаковы.

Если $u - x < v - y$, а $(u - x) + (v - y)$ чётно, то в столбцах $(x; \ldots)$ и $(u; \ldots)$ находятся по одному коротышке, расстояния от которого до двух домов одинаковы.

Если же $u - x = v - y$, то в столбце $(x; \ldots)$ места, от которых расстояния до $(x; y)$ и $(u; v)$ одинаковы, имеют вид $(x; V)$, где $V \geqslant v$, и таких мест ровно $100 - v$. Аналогично, в столбце $(u; \ldots)$ места, от которых расстояния до $(x; y)$ и $(u; v)$ одинаковы, имеют вид $(u; Y)$, где $Y \leqslant y$, и таких мест ровно y.

Заметим, что $y + (100 - v) \leqslant 99$. Значит, какое-то из чисел y, $100 - v$ не больше 49.

Таким образом, во всех случаях найдется столбец, в котором не более 49 рыцарей указывают на оба места, при этом на неправильное место указывают не более, чем эти рыцари и все лжецы (их не больше $99 - 75 = 24$), то есть не более, чем $49 + 24 = 73$ коротышек. В то же время, на правильное место в любом столбце указывают хотя бы все рыцари, то есть не менее 75 коротышек. Таким образом, из двух подозрительных мест всегда можно исключить одно (так как строка или столбец, на который мы ориентируемся зависит только от положения мест, а не от расположения рыцарей/лжецов). Значит, всегда можно найти единственное правильное место.

185. Совпадает с задачей **166**.

186. (Рис. 68.) Пусть углы BAC и BCA треугольника ABC равны, соответственно 2α и 2γ. Углы API и AMI — прямые, поэтому точки A, P, M, I лежат на одной окружности с диаметром AI. Тогда $\angle AMP = \angle AIP =$ (в силу параллельности) $=$ $= \angle IAC = \alpha$. Аналогично $\angle QNC = \gamma$. Из равнобедренного треугольника MBN находим: $\angle BMN = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MBN) = \alpha + \gamma$. Тогда $\angle PMN = \angle PMA + (180^\circ - \angle BMN) = 180^\circ - \gamma$. Но $\angle PQN =$ $= \angle ICN = \gamma$, значит, сумма углов PMN и PQN равна 180°, то есть точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

Замечание. Центр окружности, описанной около $PMNQ$, совпадает с серединой дуги AC окружности, описанной около треугольника ABC.

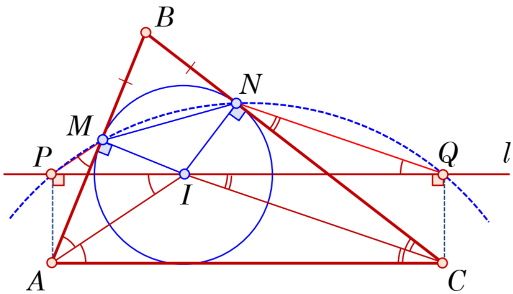


Рис. 68

187. Совпадает с задачей **168**.

188. *Ответ:* $99 \cdot 10^6$.

Первое решение. Обозначим $n = 1000$, $k = 100$, то есть степени рассматриваемых многочленов P равны nk.

Лемма. *Существует единственный многочлен P степени nk (со старшим коэффициентом 1) такой, что степень полученного многочлена R будет меньше, чем $nk(n-1)$.*

Доказательство. Запишем наш многочлен как

$$P(x) = x^{nk} + p_1 x^{nk-1} + p_2 x^{nk-2} + \ldots + p_{nk}.$$

Обозначим $F(x) = P(x^n + 1)$ и $G(x) = P(x)^n$; это многочлены степени n^2k со старшим коэффициентом 1.

В многочлене $F(x)$ коэффициент p_j участвует лишь в членах степени, не большей $n(nk-j)$. Значит, для любого $i = 1, 2, \ldots,$ nk коэффициент при x^{n^2k-i} в многочлене $F(x)$ зависит лишь от коэффициентов p_j при $j \leqslant i/n < i$. С другой стороны, коэффициент при этой же степени в $G(x)$ есть $np_i + A$, где A зависит лишь от коэффициентов p_j при $j < i$. Если мы хотим, чтобы степень R была меньше, чем $nk(n-1)$, то эти коэффициенты должны быть равны; это равенство даёт однозначное выражение p_i через $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$ (в частности, p_1 находится единственным образом). Значит, из этих равенств по очереди находятся все коэффициенты многочлена $P(x)$.

Теперь достаточно предъявить многочлен $P(x)$ такой, что степень R окажется меньше, чем $nk(n-1)$ — по лемме он единственный, и он и даст минимальную степень R. Положим $P(x) = (x^n+1)^k$. Тогда многочлен

$$R(x) = ((x^n+1)^n+1)^k - (x^n+1)^{nk} = \\ = k \cdot (x^n+1)^{n(k-1)} + C_k^2 (x^n+1)^{n(k-2)} + \ldots$$

имеет степень всего лишь $n^2(k-1) < nk(n-1)$. Значит, наименьшая возможная степень R и есть $n^2(k-1) = 99 \cdot 10^6$.

Замечание. В решении выше искомый многочлен «угадан». Это можно сделать, рассмотрев достаточно «маленький» случай (например, $k = 2$). Другой способ найти требуемый многочлен виден в следующем решении.

Второе решение. Используем те же обозначение n и k, что и в первом решении. Мы будем считать, что

$$\deg R < n^2k - nk \qquad (*)$$

(впоследствии мы увидим, что это возможно; поэтому для многочлена R минимальной степени так считать можно).

Предположим, что в многочлене $P(x)$ есть одночлен степени, не кратной n; пусть $a_s x^s$ — такой одночлен наибольшей степени. Тогда коэффициент многочлена R при $x^{nk(n-1)+s}$ равен $-na_s$, что противоречит $(*)$.

Таким образом, в предположении $(*)$, степени всех одночленов в $P(x)$ кратны n; иначе говоря, существует такой многочлен Q, что $P(x) = Q(x^n)$. Тогда

$$R(x) = P(x^n+1) - P(x)^n = Q((x^n+1)^n) - Q(x^n)^n,$$

то есть $R(x) = R_1(x^n)$, где

$$R_1(y) = Q((y+1)^n) - Q(y)^n;$$

при этом $\deg Q = k < n$, а предположение $(*)$ означает, что $\deg R_1 < nk - k$.

Рассмотрим многочлен $R_2(x) = R_1(x-1) = Q(x^n) - Q(x-1)^n$ (тогда $\deg R_2 = \deg R_1$). Аналогично рассуждению выше, предположим, что $Q(x-1) \neq x^k$, то есть в многочлене $Q(x-1)$ есть одночлены, кроме x^k; пусть $b_t x^t$ — такой одночлен наибольшей степени. Тогда в многочлене $R_2(x)$ есть одночлен $-nb_t x^{nk-k+t}$, что противоречит неравенству $\deg R_2 < nk - k$.

Таким образом, $Q(x-1) = x^k$, а тогда $Q(x) = (x+1)^k$ и $P(x) = (x^n+1)^k$. Мы приходим к тому же примеру, что и в первом решении (и видим, что в этом случае степень R действительно удовлетворяет $(*)$).

189. Первое решение. Заметим сразу, что все числа, появляющиеся на доске, положительны и рациональны. Пусть x_n, y_n, z_n — числа на доске после n минут, а $a = x_0$, $b = y_0$, $c = z_0$ — исходные числа.

Положим $F_n = 1 + 1/(x_n y_n z_n)$. Тогда $x_{n+1} = x_n F_n$, $y_{n+1} = y_n F_n$ и $z_{n+1} = z_n F_n$. В частности,

$$\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{y_n}{x_n} = \ldots = \frac{b}{a},$$

и, аналогично, $z_{n+1}/x_{n+1} = c/a$. Положим $\Pi_n = x_n y_n z_n$, и пусть $\Pi_n = p_n/q_n$ — представление этого числа в виде несократимой дроби. Тогда $F_n = \frac{p_n+q_n}{p_n q_n}$, и потому

$$\Pi_{n+1} = \Pi_n F_n^3 = \frac{(p_n+q_n)^3}{p_n^2 q_n},$$

где последняя дробь также несократима (ибо p_n и q_n взаимно просты). Итак, $p_{n+1} = (p_n+q_n)^3$ и $q_{n+1} = p_n^2 q_n$. В частности, $p^n = (p_{n-1} + q_{n-1})^3 \geqslant (1+1)^3 = 8$ при $n \geqslant 1$, и потому $q_n \geqslant 8^2 q_{n-1} > q_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Иными словами, последовательность $q_1, q_2, q_3, \ldots$ строго возрастает.

Обозначим через D произведение всех числителей и знаменателей чисел a, b и c. Тогда при некотором N имеем $q_N > D^2$. Докажем, что с N-й минуты все числа на доске нецелые. Действительно, пусть, скажем, x_n — целое при $n > N$. Тогда $y_n = x_n \cdot \frac{b}{a}$,

$z_n = x_n \cdot \frac{c}{a}$, и потому
$$\Pi_n = x_n^3 \cdot \frac{bc}{a^2}\,.$$
Знаменатель этого числа в несократимой записи делит D^2; но это невозможно, ибо $q_n \geqslant q_N > D^2$. Противоречие.

Замечание. Поскольку на $(n+1)$-й минуте знаменатель произведения $\Pi = xyz$ увеличивается в p_n^2 раз, а знаменатель каждого из чисел x, y, z (в несократимой записи) увеличивается не более чем в p_n раз (ибо $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{p_n+q_n}{p_n}$), может возникнуть иллюзия, что знаменатель каждого из чисел x, y, z не уменьшается. Это не так: например, при $x_n = \frac{4}{3}$, $y_n = \frac{3}{2}$, $z_n = \frac{1}{7}$ получаем $\Pi_n = \frac{2}{7}$, и потому $x_{n+1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{2} = 6$ имеет меньший знаменатель, чем x_n (и является целым, хотя на предыдущем шаге целых чисел не было).

Объяснение «парадокса» простое: знаменатель числа Π может быть существенно меньше, нежели произведение знаменателей чисел x, y и z.

Второе решение. Мы используем те же обозначения x_n, y_n, z_n, $\Pi_n = \frac{p_n}{q_n}$ и $F_n = 1 + \frac{1}{\Pi_n}$, что и в первом решении, вместе с формулами
$$x_{n+1} = x_n F_n, \quad y_{n+1} = y_n F_n, \quad z_{n+1} = z_n F_n,$$
$$p_{n+1} = (p_n + q_n)^3, \quad q_{n+1} = p_n^2 q_n. \qquad (**)$$
Обозначим $r_n = p_n + q_n$; тогда $p_{n+1} = r_n^3$.

Из соотношения $q_{n+1} \,\vdots\, p_n q_n$ получаем, что $q_n \,\vdots\, p_k$ при $n > k$. Поскольку q_n взаимно просто с p_n, получаем, что все числа p_1, p_2, p_3, … попарно взаимно просты и больше 1. Поэтому какое-то из них (назовём его p_s) делится на некоторое простое число p, большее всех числителей и знаменателей чисел a, b и c.

Число p не делит ни одно из чисел p_0, $p_1 = r_0^3$, …, $p_{s-1} = r_{s-2}^3$; также оно не делит числители и знаменатели чисел a, b и c. Из формул $(**)$ получаем теперь, что p не делит также числа q_0, q_1, q_2, …, q_s, а также числители и знаменатели чисел F_0, F_1, …, F_{s-2}; поэтому числители и знаменатели чисел x_i, y_i, z_i при $i < s$ также не делятся на p.

Пусть p^t — максимальная степень p, делящая r_{s-1}. Тогда числители чисел $x_s = x_{s-1}F_s$, $y_s = y_{s-1}F_s$ и $z_s = z_{s-1}F_s$ также делятся ровно на p^t. С другой стороны, $p^s \,\vdots\, p^{3t}$, так что *знаменатели* чисел x_{s+1}, y_{s+1} и z_{s+1} делятся на p^{2t}. Наконец, при $n > s$ числитель r_n числа F_n делит p_{n+1} и потому взаимно прост с p;

значит, знаменатели всех чисел x_i при $i \geqslant s+1$ делятся на p^{2t}, а значит — нецелые.

190. *Ответ: например, «Тебя зовут Борис?»*

На вопрос «Тебя зовут Борис?» Антон соврёт «да», Борис соврёт «нет», Виктор скажет правду «нет». Так что «да» может ответить только Антон.

191. *Ответ:* 90 *метров.*

Пусть у верхнего яруса площадь боковых стен равна S, объем — V. У второго снизу яруса длина и ширина боковых граней в 2 раза больше, поэтому площадь больше в 4 раза, чем у верхнего, а объем — в 8 раз. Аналогичными рассуждениями получаем, что площадь всех боковых стен башни равна $S+4S+9S+16S = 5400$, объём всей башни — $V + 8V + 27V + 64V = 22\,500$, и значит, $S = 5400/30 = 180$, $V = 22500/100 = 225$.

Площадь одной боковой грани верхнего яруса равна $\frac{1}{4} \cdot S = 45 = ah$, причём $a^2 h = 225$. Отсюда $a = 225/45 = 5$, и значит, $h = 45/a = 9$. Таким образом, высота башни составляет $h + 2h + 3h + 4h = 10h = 90$.

192. *Ответ:* $3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 = 2025$.

Разберём несколько случаев.

а) В левой части равенства нет изменений. Но $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 1575$, так что в левой части равенства пришлось бы менять четыре цифры.

б) В правой части равенства нет изменений. Поскольку правая часть не делится ни на 3, ни на 5, ни на 7, в левой части пришлось бы поменять все цифры.

Значит, и слева и справа поменяли по одной цифре. Но тогда слева осталась хотя бы одна пятёрка, и значит, последняя цифра произведения 0 или 5. Поэтому в правой части вместо единицы была цифра 0 или 5. Проверим оба этих случая.

Если справа число $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, то в левой части должен быть простой множитель 101, противоречие.

Значит, справа было число $2025 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, и оно получилось после замены цифры 7 в левой части на цифру 9.

193. *Ответ: а*) 60 *чисел; б*) *кто-то явно ошибся.*

Маша увеличила квадрат каждого числа x на $(x+1)^2 - x^2 =$

$= 2x+1$, а Иннокентий — на $(x-1)^2 - x^2 = -2x+1$. Значит, сумма изменений петиных чисел равна $(2x+1)+(-2x+1) = 2$. Тогда сумма изменений по всем n числам равна $2n$.

а) По условию суммы чисел Маши и Иннокентия отличаются от суммы чисел Пети на 120, то есть сумма всех изменений равна $2n = 120$, так что $n = 60$. Покажем, что этот случай возможен. Сумма чисел Маши отличается от суммы чисел Пети на величину

$$\sum_{i=1}^{60}(2x_i+1) = 0 \iff 2S+60 = 0 \iff S = -30,$$

где S — сумма всех выписанных чисел. Например, в качестве исходных чисел Пети можно взять набор из 30 нулей и 30 чисел -1.

б) По условию сумма изменений равна $-1000+1000 = 0$, и совпадает с $2n$, то есть $2n = 0$ — противоречие.

194. *Ответ:* 9.

Площадь нижнего треугольника в 4 раза больше, чем верхнего. Нижний треугольник подобен верхнему с коэффициентом подобия $\sqrt{4} = 2$. Значит, высота нижнего треугольника составляет $2/3$ от высоты прямоугольника, а площадь, соответственно, $1/3$ от площади прямоугольника. Получаем, что площадь всего прямоугольника равна $8 \cdot 3 = 24$. Теперь легко найти площадь оставшейся части: $24-5-2-8 = 9$.

195. *Ответ: существует, например,* $P(x) = x^4 - 16x^2 + 4$.

Пусть $x = \sqrt{3}+\sqrt{5}$, тогда $x^2 = 3+2\sqrt{15}+5 = 8+2\sqrt{15}$. Преобразуем это равенство, уединив радикал: $2\sqrt{15} = x^2-8$. Возводя в квадрат, получим равенство $60 = x^4 - 16x^2 + 64$, из которого следует, что число x — корень многочлена $P(x) = x^4 - 16x^2 + 4$.

196. *Ответ: нет, неверно.*

Время движения Алисы можно разбить на три части. Часть I — движение со скоростью 4 *км/час*, часть II – движение со скоростью 5 *км/час*, часть III — весь остальной путь. Части II и III вместе составляют половину пути, так что длина части II не более половины пути, то есть она не длиннее первой части. Аналогично, части I и III заняли у Алисы половину времени, то есть часть I она прошла не более, чем за половину времени.

Итак, часть I Алиса прошла за меньшее (не большее) время, чем часть II, но она длиннее (не короче), чем часть II. Значит, скорость в первой части должна быть не меньше, чем во второй.

Заметим, что при выполнении этого условия возможно организовать движение указанным образом. Например, Алиса прошла 100 *км* км за 22 часа, причем половину пути (50 *км*) со скоростью 5 *км/час* (за 10 часов), половину времени (11 часов) со скоростью 4 *км/час*, всего 44 *км*. Остается ещё 1 час и 6 *км*, которые Алиса прошла со средней скоростью 6 *км/час*.

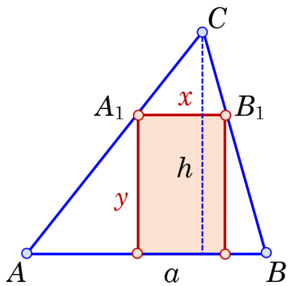


Рис. 69

197. *Ответ: может, только при условии, что высота треугольника равна его основанию, а его площадь равна* 50.

(Рис. 69.) Треугольники A_1B_1C и ABC подобны, так что

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h} = 1 - \frac{y}{h} = k.$$

Отсюда периметр прямоугольника равен

$$P = 2(x+y) = 2(ka + (1-k)h) = 2(h + k(a-h)).$$

Эта величина не зависит от k только при условии $a = h$. Если это соотношение выполняется, то $P = 2h = 20$, $h = a = 10$, и площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}ah = 50$.

198. *Ответ:* $x_{2021} = 1\,262,75$.

Сложим все уравнения системы. Заметим, что каждая переменная входит в четыре уравнения, поэтому слева мы получим учетверенную сумму всех переменных. Сумма слагаемых в правой части (арифметическая прогрессия) равна $\frac{1}{2} \cdot 2022 \cdot 2021 = 2\,043\,231$. Значит, сумма всех x_i равна $\frac{1}{4} \cdot 2\,043\,231 = 510\,807,75$. Разобьем ее на четвёрки:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \ldots +$$

$$+ (x_{2017} + x_{2018} + x_{2019} + x_{2020}) + x_{2021} =$$

$$= (1 + 5 + 9 + 13 + \ldots + 2017) + x_{2021} =$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot 2018 \cdot 505 + x_{2021} = 509\,545 + x_{2021}\,.$$

Отсюда находим $x_{2021} = 510\,807,75 - 509\,545 = 1\,262,75$.

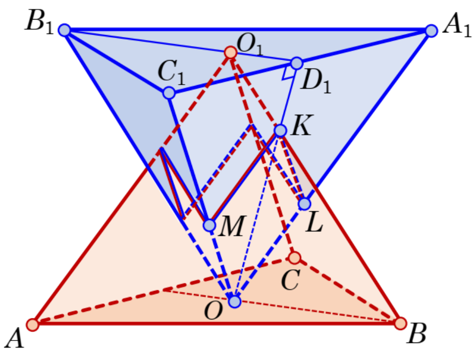


Рис. 70

199. *Ответ:* $a^2\sqrt{3}/3$.

(Рис. 70.) В силу симметрии ребро O_1B пересекает грань OA_1C_1 на высоте OD_1. Обозначим точку пересечения K. Ясно, что треугольники O_1KD_1 и BKO подобны с коэффициентом 2. Значит, K — центр грани OA_1C_1. Аналогично

$$\frac{MC_1}{MO} = \frac{LA_1}{LO} = \frac{KD_1}{KO} = \frac{1}{2}.$$

Грань искомого пересечения тетраэдров — это параллелограмм $OMKL$. Легко показать (рис. 71), что его площадь равна $2/9$ площади треугольника OA_1C_1.

Таким образом, площадь поверхности пересечения равна

$$6 \cdot \frac{2}{9} \cdot S_{OA_1C_1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}\,.$$

200. Докажем, что утверждение верно для всех нечётных n. Каждое число от 1 до n встречается в таблице n раз, причём в силу симметрии вне диагонали оно встречается чётное число раз. Поскольку n — нечётное, каждое число от 1 до n должно оказаться на диагонали по крайней мере один раз. Отсюда следует, что все числа на диагонали различны.

201. *Ответ: все целые числа из промежутка* $[210; 231]$.

Один из вариантов раскраски — шахматная. В этом случае закрашены будут 220 или 221 клетка, и в любом квадрате 2×2 есть ровно две закрашенных клетки.

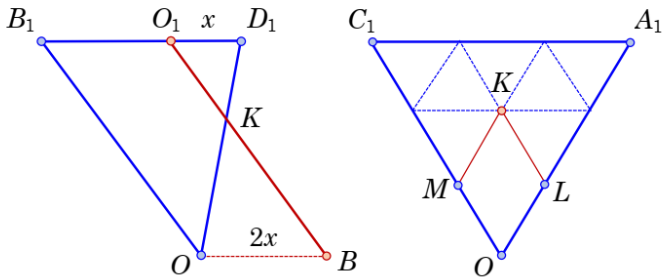


Рис. 71

Если Петя выбрал не шахматную раскраску, то в каком-то месте доски будут закрашены две клетки, имеющие общую сторону. Предположим, что эти клетки расположены на какой-то вертикали. Тогда, рассматривая квадраты 2×2, расположенные на горизонталях, содержащих эти клетки, устанавливаем, что по горизонталям цвета чередуются. Далее, переходя к соседним горизонталям, устанавливаем, что цвета чередуются на всех горизонталях. На каждой горизонтали может быть закрашено 10 или 11 клеток, поэтому минимально возможное значение n будет $10 \cdot 21 = 210$, а максимальное $11 \cdot 21 = 231$.

Попробуем теперь найти примеры раскрасок для различных n. Назовем два способа чередующейся раскраски горизонтали как «раскраска 10» и «раскраска 11». Число n может равняться $210 + k$, если нижние k горизонталей закрашены «раскраской 11», а оставшиеся $21 - k$ верхних — «раскраской 10». Минимальное число $n = 210$ получится при $k = 0$, а максимальное — при $k = 21$. Реализуются также и все промежуточные значения.

202. *Ответ: а) например,* 20 *и* 1; *б)* 21.

Пусть x и y — искомые числа, тогда $6x + (y - 100) = x + y$, то есть $5x = 100$, и значит, $x = 20$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет любая пара чисел вида $(20; y)$, где y — произвольное натуральное число. Поскольку $y \geqslant 1$, наименьшее значение суммы $x + y = 20 + y$ равно 21. Это значение получается при $x = 20$, $y = 1$.

203. *Ответ:* 120 *оценок.*

Количество пятёрок, четвёрок и троек — целое число, поэтому общее число оценок делится на 5, 4 и 3. Значит, общее число оценок делится на наименьшее общее кратное этих чисел, то есть на 60. Пусть число оценок $60 \cdot x$, тогда троек, четвёрок и пятерок у Васи — $20x$, $15x$ и $12x$ соответственно, и значит, число двоек равно $60x - 20x - 15x - 12x = 13x$. По условию $20x - 13x = 14$, $x = 2$, и поэтому оценок было $60x = 120$.

204. *Ответ:* 501 *лжец.*

Пусть x — количество лжецов, а y — количество жителей, говорящих правду, тогда $x + y = 1001$. Из условия задачи ясно, что среди опрошенных не могут быть только лжецы. Тогда в соответствии с высказыванием жителя, который всегда говорит правду: $y - 1 < 500$, то есть $y < 501$, и значит, $x \geqslant 501$. По утверждению жителя-лжеца: $x - 1 \leqslant 500$, то есть $x \leqslant 501$. Из этих двух неравенств получаем $x = 501$, то есть на острове живёт 501 лжец.

205. *Ответ: у Тима.*

У первого игрока есть выигрышная стратегия. Первым ходом он бросает 50 монет в копилку, вмещающую 250 монет. Теперь во второй копилке столько же свободного места, сколько и в первой. После этого первый игрок отражает ходы второго: бросает столько же монет, сколько и второй игрок, но в другую копилку. После каждого хода первого игрока в обеих копилках остаётся один и тот же объём свободного места. Поэтому если второй игрок может сделать ход, то первый игрок всегда сможет сделать следующий ход.

206. *Ответ:* 150.

Назовём груши и яблоки садовыми фруктами. По условию задачи каждый день вырастают два садовых фрукта (либо $2 + 0$, либо $0 + 2$, либо $1 + 1$). Всего на берёзе выросло $200 + 100 = 300$ садовых фруктов, и значит, всего прошло $300/2 = 150$ дней. Но каждый день появляется ровно один банан, поэтому бананов будет всего 150.

207. *Ответ:* $n = 1010$.

Представим исходное число в виде

$$2019n + 2020 = 2021(n + 1) - (2n + 1).$$

Для делимости на 2021 необходимо, чтобы число $2n+1$ делилось на 2021. Наименьшее натуральное n, при котором это условие выполняется, найдём из уравнения $2n+1 = 2021$, откуда $n = 1010$.

208. *Ответ: 9 плюсов.*

Первый способ. Так как цифр двадцать, то слагаемых может быть от 1 до 20. Поделим сумму и все слагаемые на 4. Теперь слагаемые имеют вид 1, 11, 111 и так далее, а сумма равна 200. Для того, чтобы сумма оканчивалась цифрой 0, число слагаемых должно делиться на 10. Значит, слагаемых либо 10, либо 20. Если слагаемых 20, то все слагаемые состоят из одной цифры, и сумма получается слишком маленькая. Значит, слагаемых ровно 10, а плюсов между ними — 9.

Равенство с девятью плюсами: $444 + 44 \cdot 8 + 4 = 800$.

Второй способ. Можно явно найти, сколько и каких слагаемых в сумме. Сначала исключаем слагаемые из четырёх и более цифр (они больше 800). Остаются слагаемые 444, 44 и 4. Если нет ни одного слагаемого 444, то максимальная сумма — $44 \cdot 10 = 440$. Если слагаемых 444 два или больше, то их сумма не меньше $444 + 444 = 888$. Значит, в сумме будет ровно одно слагаемое 444. Из остальных 17 четвёрок нужно составить сумму 356. Так как $44 > 4 + 4$, то чем больше будет слагаемых 44, тем больше будет сумма. Если использовать 8 слагаемых 44 и одно слагаемое 4, то сумма равна $8 \cdot 44 + 4 = 356$. Если же заменить одно или несколько слагаемых 44 на $4 + 4$, сумма станет меньше. Значит, единственный способ получить 800 — это использовать сумму $444+44\cdot 8+4$. И в каком бы порядке ни стояли эти 10 слагаемых, плюсов всегда 9.

209. *Ответ: не могло.*

Предположим, что среди прямоугольников нет ни одного квадрата. Пусть a и b — стороны произвольного прямоугольника, причём $a > b$. Так как целое число b больше 1, то $b \geqslant 2$, и значит, $a \geqslant 3$. Следовательно, площадь каждого такого прямоугольника

$a \times b$ не менее $2 \cdot 3 = 6$ клеток. Но тогда 11 прямоугольников должны занимать не менее $11 \cdot 6 = 66$ клеток, в то же время исходный квадрат 8×8 имеет всего 64 клеток.

На рисунке 72 приведён пример разрезания квадрата 8×8 на 11 прямоугольников.

210. *Ответ: лжецов было* 6 *или* 12.

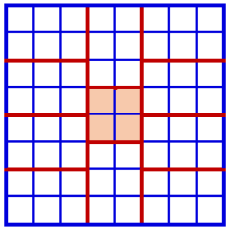


Рис. 72

Если бы среди первых двух был хотя бы один рыцарь, то лжецов было бы ровно два, и среди следующих четверых хотя бы два сказали правду, то есть что лжецов двое. Поскольку этого не произошло, то *первые двое — лжецы.*

Если бы среди второй четвёрки был хотя бы один рыцарь, то лжецов было бы ровно четыре, и среди следующих шести хотя бы два сказали бы правду, то есть что лжецов четверо. Поскольку этого не произошло, то *во второй четвёрке все — лжецы.* Поскольку последние 6 жителей сказали одно и то же, то либо все они рыцари, либо все лжецы. Обе ситуации возможны.

211. *Ответ:* 28 *конфет.*

Будем перекладывать конфеты из первого пакета. Так как в остальных пакетах разное число конфет, то и добавить к ним нужно разное число конфет, то есть не менее, чем $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Итак, в самом маленьком пакете не менее 21 конфеты, а значит, в самом большом не менее $21 + 7 = 28$ конфет. Набор 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 удовлетворяет условию задачи.

Действительно, возьмём, например, пакет с 25 конфетами. Перекладываем из него 4 конфеты в первый пакет с 21 конфетой. Теперь в «раскладываемом» пакете 21 конфета, а в остальных — от 22 до 28. Докладываем в них 6, 5, 4, …, 1, 0 конфет, теперь во всех пакетах поровну конфет.

212. *Ответ:* 9 666 567 899.

Вычеркнем из числа 9 последних цифр, останется только первая. Она делится на 9, значит, равна 9. Припишем к ней вторую цифру, получится число от 90 до 99. По условию оно должно делиться на 8, а такое число только одно, 96. Припишем третью цифру, получится число от 960 до 969. Только одно из них, 966, делится на 7. Следующая цифра — 6, так как среди чисел от 9660 до 9669 только 9666 делится на 6. Продолжая рассуждать таким же образом, приходим к искомому числу 9 666 567 899.

213. *Ответ:* 20 *лжецов.*

Пусть x — число лжецов, а y — число рыцарей (то есть тех, кто всегда говорит правду), по условию $y = 100 - x$. При ответе на вопросы каждый лжец дважды сказал «да», а каждый рыцарь — только один раз, и значит, общее число утвердительных ответов равно $2x + y = 2x + (100 - x) = 100 + x$. С другой стороны, это число равно $30 + 40 + 50 = 120$. Отсюда $x = 20$, то есть в конгрессе 20 лжецов.

214. *Ответ:* $8, 5, 5$ *монет или* $16, 10, 10$ *монет.*

Будем решать задачу «с конца». Пусть перед третьей игрой у третьего пирата было $4x$ монет, тогда после проигрыша первому монет у него осталось $4x - x = 3x$. Столько же осталось у других пиратов, и значит, общее число монет у пиратов было $3x + 3x + 3x = 9x$.

Поскольку у второго пирата осталось $3x$ монет, перед второй игрой у него было $4,5x$ монет. После того, как второй пират передал третьему $1/3$ своих монет, то есть $1,5x$ монет, у третьего стало $4x$ монет, и значит, вначале у него было $4x - 1,5x = 2,5x$ монет.

Выясним, сколько первоначально было монет у первого пирата. Как уже отмечалось, первый пират получил от третьего x монет, после чего монет у него стало $3x$, а значит, перед третьей игрой у первого пирата было $3x - x = 2x$ монет. Такое число монет было у первого пирата после первой игры, и значит, до неё монет было вдвое больше, то есть $4x$.

Итак, первоначальное число монет у пиратов $4x$, $2,5x$ и $2,5x$. По условию $4x \leqslant 20$, поэтому $x \leqslant 4$, и так как x — чётное, то $x = 2$ или $x = 4$. Отсюда получаются два возможных варианта.

215. *Ответ:* 9.

Предположим, что из 2021 можно получить число $r < 9$. Ясно, что только перестановками цифр получить наименьшее из числа 2021 невозможно. Значит, на некотором шаге из имеющегося числа n придётся вычесть сумму его цифр. Полученное число $n - S(n)$, где $S(n)$ — сумма цифр числа n, по признаку делимости будет делиться на 9; сумма цифр числа $n - S(n)$ будет тоже делиться на 9. Дальнейшие операции перестановки цифр и вычитания суммы цифр, очевидно, не меняют остатка от деления на 9. Поэтому все последующие числа — и наименьшее тоже — будут также делиться на 9. Значит, $r \geqslant 9$.

Число 9 можно получить, например, так. Из 2021 перестановкой цифр сначала образуем $0122 = 122$, затем из 122 вычтем сумму его цифр: $122 - 5 = 117$. Вычитая сумму цифр, равную 9, приходим к числу 108. Переставив цифры, получим $018 = 18$. Наконец, вычитая ещё раз сумму цифр, приходим к числу 9.

216. *Ответ:* $CE = 5$.

(Рис. 73.) Через точку D проведем параллельно AB прямую до пересечения с BC в точке F. Треугольник DCF — равносторонний, поскольку все его углы равны $60°$. Треугольники BCD и EFD равны по двум сторонам $BD = DE$, $CD = DF$, и углу между ними: $\angle BCD = \angle EFB = 120°$, $\angle DBC = \angle DEF$, поэтому $\angle BDC = \angle EDF$. Отсюда $EF = BC = AC$, и значит, $CE = EF + CF = BC + CF = AC + CD = AD$.

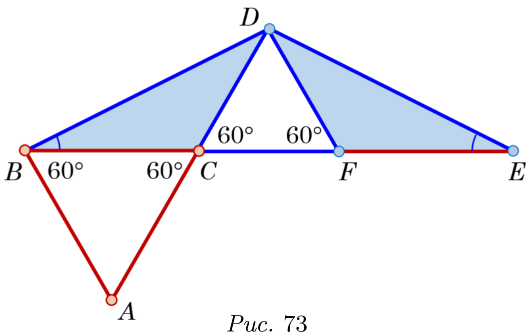


Рис. 73

217. *Ответ:* $n = 124$.

Выражение $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ состоит из трёх последовательных натуральных множителей, из которых на 5 может делиться только один. Поэтому в произведении только одно из трёх чисел $n-1$, n, $n+1$ должно делиться на 125. Значит, наибольший сомножитель $n+1$ не меньше 125, то есть $n+1 \geqslant 125$. Легко проверить, что при $n = 124$ число $n^3 - n$ делится и на 125, и на 4, то есть кратно 500.

218. *Ответ: можно.*

Так как число яблок не кратно 10, их не получится разбить на группы по 10 яблок. Определим сначала вес группы из каких-то 11 яблок. Первым взвешиванием найдём вес этой группы без первого яблока группы, вторым — вес этой же группы без второго яблока группы, третьим — вес группы без третьего яблока, и так далее, наконец, 11-ым взвешиванием — вес группы без 11-го яблока. Сложим полученные веса и разделим на 10, ведь каждое из этих яблок мы взвешивали 10 раз. Таким образом, за 11 взвешиваний узнали вес группы из 11 яблок. Оставшиеся $2021 - 11 = 2010$ яблок разбиваем на группы по 10 и узнаём вес каждой такой группы одним взвешиванием, это ещё $2010 : 10 = 201$ взвешивание. Всего $11 + 201 = 212$ взвешиваний.

219. *Ответ:* $\frac{404}{1617}$.

Обозначим искомую дробь через $\frac{m}{n}$. По условию $m + n \leqslant \leqslant 2021$ и $\frac{m}{n} < \frac{1}{4}$, откуда $4m < n$, или, в силу целочисленности, $4m + 1 \leqslant n$. Значит, $4m + 1 \leqslant n \leqslant 2021 - m$, откуда $5m \leqslant 2020$, то есть $m \leqslant 404$. Если $m = 404$, то $n = 1617$.

Покажем, что дробь $\frac{404}{1617}$ — наибольшая. Действительно, пусть $\frac{1}{4} > \frac{x}{y} > \frac{404}{1617}$. Тогда

$$0 < \frac{1}{4} - \frac{x}{y} < \frac{1}{4} - \frac{404}{1617} = \frac{1}{6468}\,.$$

Значит, $0 < y - 4x < \frac{4y}{6468} = \frac{y}{1617}$. В силу целочисленности, $1 \leqslant y - 4x < \frac{y}{1617}$. Значит, $y > 1617$, $x < 2021 - 1617 = 404$. Поэтому $\frac{x}{y} < \frac{404}{1617}$.

220. *Ответ:* 5 *рыцарей.*

Пусть в комнате n рыцарей. Из условия следует, что среди чисел от 1 до 28 ровно n делятся на число n. Выпишем первые n чисел, кратных n:

$$n, 2n, 3n, \ldots, n^2.$$

Тогда $n^2 \leqslant 28 < n^2 + n$, откуда $n = 5$. Действительно, количество рыцарей (пять) будет делителем ровно пяти чисел 5, 10, 15, 20 и 25.

221. *Ответ:* 90°.

(Рис. 74.) Пусть N и M — середины отрезков KC и AC соответственно. Тогда MN — средняя линия в треугольнике AKC, поэтому $\angle BAC = \angle NMC$. Кроме того, $\angle BAC = \angle BDC$, так как четырёхугольник $ABCD$ — вписанный.

Предположим, что точки M и N лежат с одной стороны от прямой BD. Точка M лежит внутри треугольника BCD, и тогда она лежит внутри треугольника BND, а значит, и внутри его описанной окружности. Но тогда точки B, N, D и M не могут лежать на одной окружности.

Значит, N и M лежат по разные стороны от BD, и $\angle BDC = \angle BMN$. Из параллельности MN и AK вытекает, что $\angle BMN = \angle ABM$, откуда $\angle BAC = \angle BDC = \angle ABM$. Отсюда получаем $AM = MB$, то есть в треугольнике ABC медиана BM равна половине стороны AC, и значит, $\angle ABC = 90°$.

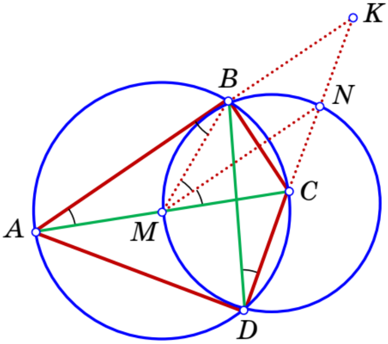


Рис. 74

222. *Ответ:* $n = 121$.

Из четырёх последовательных натуральных чисел на 5 может делиться только одно. Поэтому в произведении $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ только один из четырёх сомножителей должен делиться на 125. Значит, наибольший сомножитель $n+4$ не меньше 125, то есть $n \geqslant 121$. Легко проверить, что если $n = 121$, то произведение делится и на 125, и на 8, то есть кратно 1000.

223. *Ответ:* 3.

Пусть a и b — корни уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$, то есть

$$\begin{cases} a^3 - 3a + 1 = 0, \\ b^3 - 3b + 1 = 0. \end{cases}$$

Вычитая равенства одно из другого, получим $(a^3 - b^3) - 3(a - b) = 0$, то есть $(a - b)(a^2 + ab + b^2 - 3) = 0$. Поскольку $a \neq b$, имеем $a^2 + ab + b^2 = 3$.

Замечание. Возможно решение с помощью формул Виета для корней кубического уравнения.

224. *Ответ: верно.*

Допустим противное, и каждую из оценок $5, 6, 7, 8, 9, 10$ ученик получил не меньше трёх раз. Возьмём по три оценки каждого вида — сумма 18 взятых оценок равна $3 \cdot (5 + 6 + \ldots + 10) = 135$. Каждая из оставшихся четырёх оценок не меньше 5 и не больше 10, поэтому сумма всех 22 оценок не меньше $135 + 4 \cdot 5 = 155$ и не больше $135 + 4 \cdot 10 = 175$. Но ни одно из чисел от 155 до 175 не делится на 22, поскольку $22 \cdot 7 = 154$ и $22 \cdot 8 = 176$. Значит, среднее арифметическое всех оценок — нецелое. Противоречие.

225. *Ответ: нет, неверно.*

Подберём натуральные числа x, y и простые p, q, r, удовлетворяющие исходному уравнению. Не ограничивая общности будем считать, что простые числа упорядочены по возрастанию, то есть $p < q < r$.

Пусть $x = 2$ и $p = 3$. В качестве y возьмём число вида $2 \cdot p \cdot q \cdot r = 6qr$; осталось найти простые q и r такие, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6qr} = \frac{1}{3} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad qr + 1 = 6q + 6r. \qquad \text{(A)}$$

Это уравнение можно записать в виде $(q-6)(r-6) = 35$. Число 35 раскладывается в произведение двух натуральных множителей $q-6$ и $r-6$ только двумя способами: $1 \cdot 35$ и $5 \cdot 7$. Отсюда получаем два решения уравнения (A): $q = 7$, $r = 41$ и $q = 11$, $r = 13$.

Таким образом, исходное уравнение имеет по крайней мере два набора решений: $x = 2$, $y = 6 \cdot 7 \cdot 41 = 1722$, $p = 3$, $q = 7$, $r = 41$ и $x = 2$, $y = 6 \cdot 11 \cdot 13 = 858$, $p = 3$, $q = 11$, $r = 13$.

226. *Ответ:* 75°*.*

(Рис. 75.) Пусть $\angle BAL = \alpha$. Так как $ABKL$ — вписанный четырёхугольник, то $\angle BKL = 180^\circ - \alpha$ и $\angle LKC = \alpha$. Поскольку $LK \parallel DB$ и $AB \parallel DC$, имеем $\angle DBC = \alpha$ и $\angle ADB = \alpha$. Пусть BD и AL пересекаются в точке P. Треугольники ABP и DBA

подобны, так как они имеют два равных угла. Поэтому

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BP}{AB}\,. \tag{B}$$

Аналогично, подобными будут также треугольники ABP и LDP с коэффициентом подобия $2:1$. Значит, $BP = \frac{2}{3}DB$. Подставляя в (B), получим

$$AB = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot DB.$$

По теореме синусов для треугольника ABD (напомним, что угол DAB равен $60°$) имеем

$$\sin\alpha = \frac{AB}{BD} \cdot \sin 60° = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45°.$$

Отсюда $\angle ABD = 180° - 60° - 45° = 75°$.

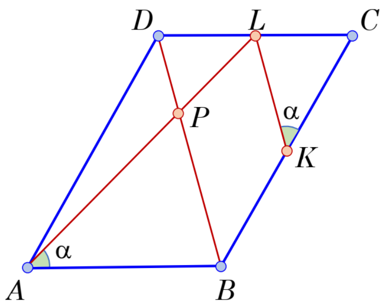


Рис. 75

227. *Ответ: а) да; б) нет.*

а) При $d = 30$ одна из трёх частей будет иметь длину не меньше 10 *м*. Вырежем из неё кусок длиной 7 *м*. Теперь суммарная длина оставшихся частей будет $30 - 7 = 23$ *м*, одна из трёх частей длины не меньше $23/3 > 6$ *м*, из неё вырежем кусок 6 *м*. Тогда длина оставшихся частей $23 - 6 = 17$ *м*, поэтому одна из трёх частей будет не меньше $17/3 > 5$ *м*, из неё вырезаем кусок 5 *м*. Остались три части суммарной длины $17 - 5 = 12$ *м*. Одна из них длиной не меньше 4 *м*, из неё вырезаем 4 *м*.

б) Разрежем на части длиной $3,996$ *м*, $3,996$ *м* и $21,998$ *м*. Из первых двух невозможно вырезать ни одного куска, а из последней нельзя вырезать все требуемые куски, так как их суммарная длина $4+5+6+7=22$ больше $21,998$ *м*.

228. *Ответ: а) существуют; б) не существуют.*

а) Например, подходят числа $1, 2, \ldots, 9, 15$. Их сумма равна 60, среднее арифметическое — 6, а наибольший общий делитель равен 1.

б) Расположим 10 различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ в порядке возрастания: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$, и пусть их наибольший общий делитель равен d. Тогда каждое a_i кратно d, и значит, $a_1 \geqslant d$, $a_2 \geqslant 2d, \ldots, a_{10} \geqslant 10d$. Поэтому сумма этих чисел не меньше $d+2d+\ldots+10d=55d$, а среднее арифметическое не меньше $5,5d$. Противоречие.

229. *Ответ:* $(1;3)$ *и* $(4;6)$.

Так как $0,xxx\ldots = \frac{x}{9}$, то исходное уравнение имеет вид

$$10x + x + \frac{x}{9} = \left(y + \frac{y}{9}\right)^2,$$

то есть $\frac{100x}{9} = \frac{100y^2}{81}$, или $9x = y^2$. Отсюда получается ответ.

230. *Ответ:* 256 *кв. метра.*

Пусть a и b — размеры прямоугольного пола, $h=4$ — высота склада. Площадь всех вертикальных стен склада $2h(a+b)$ по условию не превосходит площади ab пола, поэтому $ab \geqslant 8(a+b)$. Воспользуемся неравенством о средних $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, тогда

$$a \cdot b \geqslant 8 \cdot 2\sqrt{ab} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{ab} \geqslant 16,$$

и значит, $ab \geqslant 16^2$, то есть площадь пола не меньше, чем 256 *м*^{2}. Это значение достигается только в случае, когда пол склада имеет форму квадрата со стороной 16 метров.

231. *Ответ: верно.*

(Рис. 76.) Обозначим через P — точку пересечения прямых AE и FC. Нам известно, что

$$\angle ECD = 36^\circ \Longrightarrow \angle ECP = 54^\circ, \quad \angle AEC = 72^\circ \Longrightarrow \angle EPC = 54^\circ.$$

Откуда треугольник EPC — равнобедренный и $CE = PE$. С другой стороны, мы знаем, что $\angle ECB = \angle EBC = 72^\circ$. Поэтому $BE = CE = PE$. Также $\angle EAB = 108^\circ$, откуда $\angle AFP = \angle APF = 54^\circ$. Это значит, что $AF = AP$. Окончательно, имеем следующую цепочку равенств:

$$AE + AF = AE + AP = PE = CE = BE.$$

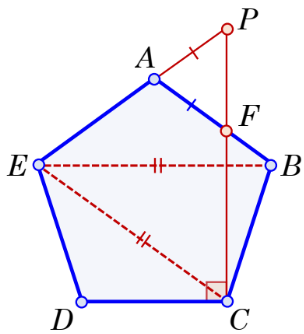


Рис. 76

Оглавление