Функции комплексного переменного

Литература. В дальнейшем будем использовать учебное пособие:

Дубровин В.Т. Теория функций комплексного переменного (теория и практика): Учебное пособие / В.Т. Дубровин. — Казань: Каз. гос. ун-т, 2010. — 102 с.

Это пособие есть на странице кафедры. Ссылку на это пособие в дальнейшем будем обозначать: [Ду].

Комплексные числа. Смотри [Ду, глава 1].

Через $\mathbb{C}$ обозначается множество комплексных чисел. Число $z \in \mathbb{C}$ представляется в виде $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$. $x = \operatorname{Re} z$ — действительная часть z, $y = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть.

В $\mathbb{C}$ рассматриваются операции сложения: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$; умножения $z_1 z_2$ (почленно, считая $i^2 = i\,i = -1$). Для $z \neq 0$ значение $1/z$ определяется как решение уравнения $z \cdot 1/z = 1$

Сопряженное: $\overline{z} = x - iy$.

Модуль: $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.

В двумерном пространстве (x, y) вводим полярную систему координат (ρ, φ) $(x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi)$. Для комплексного числа $z = x + iy$ угол φ называется аргументом z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Значение аргумента из $(-\pi, \pi]$ называют главным значением и обозначают $\arg z$ (альтернативно, считают $\arg z \in [0, 2\pi)$). Таким образом получаем $z = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi = |z|(\cos\operatorname{Arg} z + i\sin\operatorname{Arg} z)$ — тригонометрическую форму записи комплексного числа. Положив по определению $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, получаем $z = \rho e^{i\varphi}$ — экспоненциальную форму записи. В этой форме особенно просто записываются произведения и частные: для $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ имеем:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}\ (z_2 \neq 0).$$

Мы будем изучать функции $w = f(z)$, $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$.

Рассматривая $z = x + iy$, $w = u + iv$ $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$, получаем

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$. Таким образом, комплекснозначная функция комплексного переменного сводится к паре действительнозначных функций двух действительных переменных.

№ 56 [Ду].

$$w = z^2 + i = (x + iy)^2 + i = (x^2 - y^2) + 2ixy + i,$$

откуда $u = \operatorname{Re} w(z) = (x^2 - y^2)$, $v = \operatorname{Im} w(z) = 2xy + 1$.

№ 58 [Ду].
$$w = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{(x - iy)(x + iy)} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2},$$
откуда $u = \operatorname{Re} w(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $\quad v = \operatorname{Im} w(z) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

Для $z = x + iy$ положим по определению:
$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$
Из такого определения непосредственно вытекает, что
$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y, \quad |e^z| = e^x,$$
при действительных z (то есть при $y = 0$) функция e^z совпадает с обычной экспонентой как функцией действительного переменного. Так как функции $\cos y$ и $\sin y$ имеют период 2π, то функция e^z имеет период $2\pi i$.

Функция e^z принимает действительные значения $\Leftrightarrow \sin y = 0 \Leftrightarrow y = \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.

Функция e^z принимает чисто мнимые значения $\Leftrightarrow \cos y = 0 \Leftrightarrow y = \pi/2 + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.

Функция e^z ни в одной точке комплексной плоскости не принимает значения 0.

Отметим, наконец, характерную для экспоненты формулу $e^{z_1} e^{z_2} = e^{(z_1 + z_2)}$.

Определим:
$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Вычислим по введенной формуле значение $\sin z$ для действительных z, то есть при $y = 0$:
$$\sin z = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{\cos x + i \sin x - (\cos(-x) + i \sin(-x))}{2i} = \frac{2i \sin x}{2i} = \sin x.$$
Аналогично, $\cos(x + i0) = \cos x$.

Нетрудно видеть, что функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ имеют период $2\pi i$, а функции $\sin z$ и $\cos z$ имеют период 2π.