

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра математического моделирования и прикладной математики

# **Метод роя частиц в задачах оптимальной ориентации спутников**

Выпускная квалификационная работа  
(магистерская диссертация)

Направление подготовки: 03.04.01 Прикладные математика и физика  
Магистерская программа: Управление динамическими системами

Выполнила:

студентка 172 группы \_\_\_\_\_ Пичужкина Алена Викторовна

Научный руководитель:

к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Ролдугин Дмитрий Сергеевич

Москва 2017

## Содержание

Введение .....	3
1. Метод роя частиц .....	6
2. Постановка задачи.....	13
3. Использование метода роя частиц.....	15
4. Использование метода параллельной пристрелки.....	22
5. Учет гравитационного момента .....	29
Заключение.....	32
Библиография.....	33

## **Введение**

Оптимальные подходы для управления угловым движением спутников, хотя и рассматриваются с начала космической эры, имеют намного меньшее распространение, нежели оптимальное управление орбитальным маневрированием и межпланетными перелетами. Этому факту можно найти несколько объяснений. Так, если ориентация обеспечивается не с помощью двигательной установки, нет необходимости в экономии топлива (интеграла управляющего воздействия). Оптимальные по быстродействию развороты можно отнести к экзотическим случаям, например, быстрые повороты орбитальных телескопов для наблюдения кратковременных астрофизических явлений [1]. В большинстве же случаев достаточно добиться асимптотической устойчивости требуемой ориентации и приемлемой точности. Характерные времена угловых маневров незначительны по сравнению со временем активного существования аппарата, потери энергии восполняются за счет солнечных панелей.

Другие – помимо оптимальных по быстродействию и затратам топлива – задачи могут представлять интерес в некоторых специфических случаях. В качестве примера можно привести работу полностью магнитной системы ориентации. В этом случае управляющий момент перпендикулярен вектору геомагнитной индукции и система оказывается неуправляемой. За счет вращения вектора геомагнитной индукции, однако, можно построить траекторию, приводящую спутник к требуемому положению, и реализуемую магнитным управлением [2]. Вопрос поддержания требуемой ориентации оказывается более сложным. Компоненту возмущающего момента, направленную вдоль вектора индукции, компенсировать невозможно. Можно попытаться построить управление, которое в среднем за виток по орбите доставляет требуемую точность ориентации, хотя в какие-то моменты точность и окажется хуже. Такая уступка может быть приемлемой с точки зрения полезной нагрузки, и позволит установить на спутник самую простую, дешевую и неприхотливую систему ориентации.

Приведенный пример связан с построением неочевидного функционала. Фактически, его невозможно построить в виде простой функции углового положения спутника и времени. Значение функционала можно выяснить только после проведения моделирования на требуемом интервале времени. Это значительно затрудняет применение непрямых методов оптимизации и основного аппарата оптимального управления – принципа максимума

Понтрягина. Впрочем, даже при использовании «классических» функционалов принцип максимума использовать непросто. Фактически задача в этом случае делится на два этапа. Первый – приведение задачи поиска оптимального управления к краевой задаче. Вторым этапом – решение краевой задачи, сопряженное со значительными трудностями. Большинство работ, посвященных построению оптимального управления, в основном описывают способы подбора хорошего предположения о структуре решения, которое позволило бы затем точно решить краевую задачу.

В качестве примера можно рассмотреть угловое движение спутника, подверженное воздействию управления, без учета возмущающих факторов. Даже для такой простой на первый взгляд задачи поиск оптимального по быстродействию или затратам топлива поворота привел к появлению целого ряда работ. Так, в одной из первых работ на эту тему [3] оптимальный по затратам топлива поворот ищется на основе простых частных решений. Для поворотов вокруг главных центральных осей инерции аппарата удается найти явные выражения для оптимального управления. Эти выражения затем изменяются в итерационной процедуре, чтобы получить подходящее первое приближение для произвольного маневра. Продолжая тему минимизации затрат топлива, авторы рассматривают переориентацию спутника, стабилизируемого вращением, под управлением магнитной системы ориентации [4]. Предложенный подход, фактически, требует многократных попыток решения краевой задачи квалифицированным исследователем, способным выделить из получаемых решений глобально оптимальное. В работе [5] для обеспечения быстрой переориентации аппарата используются два приема. Решается задача оптимального по затратам топлива маневра, что позволяет, варьируя время маневра, подобрать оптимальный по быстродействию перелет. Для нахождения же оптимального по затратам топлива маневра используется начальное приближение, соответствующее повороту по теореме Эйлера. В [6] показано, что такой поворот не является оптимальным и найдено более удачное кусочно-линейное управление для сферически-симметричного спутника. При этом для учета ограничений на величину управления его структура была значительно усложнена. Методы, позволяющие аппроксимировать разрывное или недифференцируемое управление непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями, а также учесть ограничения на величину управления, собраны в [7].

Альтернативой принципу максимума являются прямые методы оптимизации, связанные с вычислением функционала и подбором управления,

доставляющего его экстремальное значение. Один из распространенных подходов к решению задачи оптимизации – представление управления и вектора состояния с помощью аппроксимирующих функций. Это могут быть простые полиномы или многочлены Чебышева, заданные на всем временном интервале решения задачи. Однако чаще интервал делится на несколько частей, внутри которых применяются полиномы или сплайны, что приводит к менее строгому ограничению на форму управления и вектора состояния. Далее задача дискретизируется в выбранных точках временного интервала и параметризуется значениями аппроксимирующих функций в этих точках. Оптимальная задача сводится к решению задачи нелинейного программирования – поиску параметров, удовлетворяющим нелинейным ограничениям в выбранных точках. Этот подход показывает высокую надежность, а иногда и точность, ценой сложного построения метода и длительных вычислений [8]. В частности, таким образом в [9] было построено оптимальное по быстрдействию управление с помощью магнитных катушек, которое для рассмотренного аппарата (около 100 кг на низкой орбите, дипольный момент катушек около  $30 \text{ A}\cdot\text{м}^2$ ) позволяет совершить поворот на большой угол менее чем за один виток по орбите. Общие соображения касательно приведения задачи оптимального управления к задаче оптимизации параметров с помощью методов нелинейного программирования (параметры управления и/или вектора состояния) подытожены в работе [10]. Современный обзор [11] содержит описание основных подходов и коммерческого программного обеспечения в прямой оптимизации. Основные преимущества указанного подхода – простой учет ограничений и высокая надежность. Тем не менее, такой метод требует начального приближения и может сойтись к локальному экстремуму около приближения, а также в целом имеет невысокую точность.

Чтобы полностью отказаться от принципа максимума, если функционал задачи не поддается простому выражению, или упростить решение краевой задачи, получив предварительно приближенное решение, в работе будет применен относительно новый метод роя частиц, предложенный в 1995 году [12]. Для задач оптимальных перелетов космических аппаратов этот подход был предложен и развит спустя десять лет в работах [1,13–17]. Этот метод – один из многих [18], использующих модель поведения биологической системы. По сравнению с эволюционными алгоритмами, в которых моделируются процессы естественного отбора, задача системы заключается в оптимизации состояния текущей стаи или роя. Задача стаи птиц, колонии муравьев или

бактерий – найти наилучшие условия существования, которые задаются функционалом задачи. При этом вид функционала может быть произвольным, так как эти прямые методы связаны с его расчетом в ходе работы алгоритма. Методы роевого интеллекта разделяют с классическими прямыми методами недостаток длительных вычислений, обладая двумя преимуществами – большей надежностью в поиске глобального максимума, простотой программной реализации и большей точностью (ценой еще более длительных вычислений). При этом роевые алгоритмы требуют длительного подбора параметров алгоритмов квалифицированным специалистом. Можно сказать, что плохо настроенный алгоритм не работает вообще (найденное им решение может не иметь никакого отношения к оптимальному), тогда как аккуратно настроенный обладает высокой надежностью.

Таким образом, можно выделить два недостатка непрямого метода оптимизации – необходимость предположения о структуре решения и усложнение динамической системы при учете ограничений на вектор состояния, управление или его структуру. Роевые алгоритмы характеризуются длительными вычислениями и невысокой точностью. Поэтому большой интерес представляет совместное использование обоих подходов. В частности, с помощью метода роя частиц можно найти примерный вид глобально оптимального решения, учитывающий сложные ограничения на величину и структуру управления. Это первое приближение может быть использовано для быстрого, точного и надежного решения краевой задачи принципа максимума. Требуемый длительных вычислений роевой алгоритм может использоваться реже, скажем, один раз за виток спутника по орбите, полученное же с его помощью приближение решения можно использовать для быстрого решения краевой при непосредственном расчете управляющих воздействий.

### **1. Метод роя частиц**

Роевой интеллект поначалу был предложен в [12] для описания движения стаи птиц с целью выяснить законы, управляющие синхронным движением и быстрой сменой его направления всей стаей. Модель, описывающая принятие решений частицами в стае оказалась простым и эффективным способом оптимизации. Положение каждой частицы в рое задает возможное решение оптимизационной задачи. Решение о перемещении частица принимает на основе трех факторов: ее текущей скорости, которая тянет частицу продолжить движение и исследовать новые регионы в области поиска; знания о

собственном лучшем состоянии и о лучшем состоянии всего роя или ближайшей окрестности частицы.

Для того, чтобы формализовать понятие о лучшем положении частицы, необходимо ввести некоторый функционал и поставить задачу его оптимизации. Таким образом, задача роя – обеспечить

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{U}} J(\mathbf{x}).$$

Здесь  $J(\mathbf{x}): \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$  – функционал (возможно, разрывный), позволяющий на основании  $D$  параметров характеризовать качество положения частицы роя.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$  – вектор параметров, который мы и будем считать частицей роя. Компоненты этого вектора задают положение частицы в пространстве поиска  $\mathbb{U}$ , а функционал  $J$  на основании этого положения характеризует состояние частицы. Состояние всего роя характеризуется наилучшим состоянием его частиц: достаточно найти наилучшее положение, попадание всех частиц в него – лишь вопрос времени. На параметры наложены простые ограничения  $\mathbf{x} \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^D$ , задающие максимальное и минимальное значение для каждого из них,

$$\mathbb{U} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^D \mid b_{low}^j \leq x^j \leq b_{up}^j, j = 1, \dots, D \}$$

или

$$\mathbf{b}_{low} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{up}.$$

Предположим, что в рое собрано  $N$  частиц. Для нахождения наилучшего положения рою отводится некоторый отрезок дискретного времени, разбитый на  $N_{iter}$  моментов. Пусть  $\mathbf{x}_i(k)$  – положение  $i$ -й частицы роя ( $i = 1, \dots, N$ ) в  $k$ -й момент времени ( $k = 1, \dots, N_{iter}$ ). Решение о том, какое положение занять, частица принимает на основе своего положения в прошлый момент времени и текущей скорости,

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{v}_i(k+1). \quad (1)$$

Основа метода роя частиц – выражение для скорости частицы. Она задается как

$$\mathbf{v}_i(k+1) = c_{in} \mathbf{v}_i(k) + c_{cog} U(0,1) [\mathbf{r}_i(k) - \mathbf{x}_i(k)] + c_{soc} U(0,1) [\mathbf{p}_i(k) - \mathbf{x}_i(k)]. \quad (2)$$

Три слагаемых в (2) – инерционная (частица стремится продолжить движение в том же направлении), когнитивная (стремление в собственному лучшему положению) и социальная (стремление к лучшему положению, найденному окружением частицы) компоненты.

Первое слагаемое в (2) – инерционная компонента, показывающая влияние скорости частицы на прошлом шаге и увлекающая ее в том же направлении. Инерционный коэффициент  $c_{in}$  позволяет настроить вклад этой компоненты. Большая величина  $c_{in}$  ускоряет исследование окрестностей частицей на предмет оптимального положения. Хотя скорость изменяется из-за стремления частицы к своему или общему лучшему положению, большое значение  $c_{in}$  не позволяет ей прекратить поиски нового оптимального положения и перейти к улучшению уже найденного в его окрестностях. Для каждой задачи коэффициент  $c_{in}$  следует подбирать индивидуально. Тем не менее, существуют два основных подхода к вычислению  $c_{in}$  (помимо постоянного значения). Так, инерционный коэффициент может падать с увеличением числа итераций  $k$ , причем наиболее распространена линейная зависимость,

$$c_{in}(k) = (c_{in}^{low} - c_{in}^{up}) \frac{k}{N} + c_{in}^{up}. \quad (3)$$

В этом случае вначале инерционный коэффициент равен  $c_{in}^{up}$  – большему числу, обычно принимаемому равным примерно 0.9. К концу поиска инерционный коэффициент приближается к меньшему значению  $c_{in}^{low}$ , обычно равному примерно 0.4. За счет такого изменения инерционного коэффициента рой поначалу активно ищет оптимальное положение. С течением времени акцент смещается на более подробное изучение окрестностей уже найденных лучших личных/общих положений. Другой вариант выбора инерционного коэффициента – случайный,

$$c_{in} = \frac{1 + U(0,1)}{2}, \quad (4)$$

или

$$c_{in} = N(0.72, \sigma), \quad (5)$$

где  $U(0,1)$  – равномерное распределение от 0 до 1,  $N$  – нормальное распределение. Вид (4)/(5) и параметры в (3) связаны с другими компонентами скорости соотношением [19]

$$c_{in} > \frac{1}{2}(c_{soc} + c_{cog}) - 1,$$

обеспечивающим сходимость частиц роя к некоторому, хотя, возможно, и не оптимальному, решению. Заметим, что при  $c_{in} > 1$  скорость частицы неограниченно возрастает и она оказывается неспособной достичь оптимального положения. При  $c_{in} < 0$ , напротив, скорость уменьшается и поиск



останавливается (переходит в исследование уже найденного лучшего решения) раньше, чем удастся найти оптимальное положение.

Второе слагаемое в (2) – когнитивная компонента, отвечающая памяти частицы о собственном лучшем к моменту времени  $k+1$  положению  $\mathbf{r}_i(k)$ . Аналогично третье слагаемое – социальная компонента, отвечающая стремлению частицы к лучшему найденному его окружением положению  $\mathbf{p}_i(k)$ . Коэффициенты  $c_{cog}$  и  $c_{soc}$  обычно принимаются постоянными и равными 1.49445 [20]. В настоящей работе, однако, будет использоваться закон [21]

$$c_{cog} = \left( c_{cog}^{low} - c_{cog}^{up} \right) \frac{k}{N} + c_{cog}^{up},$$

$$c_{soc} = \left( c_{soc}^{up} - c_{soc}^{low} \right) \frac{k}{N} + c_{soc}^{low},$$

где  $c_{cog}^{low} = c_{soc}^{low} = 0.49445$ ,  $c_{cog}^{up} = c_{soc}^{up} = 1.49445$ . Такой выбор вкладов социальной и когнитивной компонент позволяет поначалу искать лучшее положение каждой частицей, со временем смещая акцент на улучшение уже найденного соседями частицы положений. Оба коэффициента в любом случае желательно выбирать близкими, так как именно такой выбор позволяет соблюсти баланс между собственными знаниями частицы и знаниями всего роя. Впрочем, в некоторых задачах оказываются эффективными модификации метода роя частиц, использующие сильно отличающиеся когнитивный и социальный коэффициенты. Более того, возможно использование только одной – социальной или когнитивной – компонент скорости в (2).

Описанный подход к выбору инерционного, когнитивного и социального параметров приводит к следующему. В начале поиска частицы активно перемещаются по допустимому пространству  $\mathbb{U}$  за счет превалирования инерционной компоненты. При этом на нее практически не оказывают влияние сведения о лучшем положении, найденном соседями, тогда как собственное лучшее положение имеет некоторое значение. Фактически, поначалу частицы роя исследуют  $\mathbb{U}$  практически независимо. Со временем они начинают все больше принимать во внимание полученный соседями результат, все меньше исследуя новые области в  $\mathbb{U}$  и все больше изучая окрестности собственного и соседних лучших положений. Наконец, к концу времени поиска все частицы переходят к изучению окрестностей общего лучшего положения.

Социальная компонента скорости использует информацию о лучшем положении, найденном соседями частицы. Существует два подхода к определению соседства. Окружением частицы можно считать весь рой. В этом

случае имеет место глобальный метод роя частиц. Его преимущество – быстрая сходимость за счет использования более полного объема информации. Ценой этого является опасность попадания в локальный минимум. Большее разнообразие, предоставляемое локальным методом роя частиц, изменяет ситуацию на противоположную. Для определения окружения частицы есть несколько подходов, но в подавляющем большинстве случаев соседями  $i$ -й частицы считаются частицы с номерами  $i \pm N_{neigh}$ . При этом размер окрестности частицы  $N_{neigh}$  может увеличиваться с ростом числа пройденных итераций (скажем, раз в  $n_{neigh}$  итераций). За счет этого после того, как удалось выделить лучшие варианты положений, рой переходит к все более детальному их исследованию. Все меньше частиц вместе со своим окружением активно ищет новые положения, все больше частиц, причем с увеличенным окружением, переходит к улучшению найденных вариантов.

При определении положения частицы  $\mathbf{x}_i(k+1)$  с помощью формулы (2) на каждом шаге необходимо проверить, находится ли она в допустимой области  $\mathbb{U}$ . Если  $j$ -я компонента вектора  $x_i^j(k+1)$  выходит за допустимые рамки, ее значение принимается равным граничному, а компонента скорости  $v_i^j(k+1)$  обнуляется. Аналогично при расчете скорости (2) проверяется, не превышает ли какая-либо ее  $j$ -я компонента по величине  $b_{up}^j - b_{low}^j$ . В этом случае положение частицы заведомо выйдет за пределы  $\mathbb{U}$  и скорость поэтому принимается максимально допустимой  $b_{up}^j - b_{low}^j$ . На первом шаге частицы  $\mathbf{x}_i(1)$  равномерно распределяются по области  $\mathbb{U}$  с нулевыми скоростями, что позволяет начать изучение всего доступного пространства. В работе используется два критерия остановки поиска. Первый – малая величина производной функционала (отношение разницы текущего и предыдущего лучших значений к текущему), то есть при переходе роя к медленному улучшению уже найденного лучшего положения. Если метод роя применяется для нахождения первого приближения оптимального решения, производную можно увеличить. Второй критерий – попадание всех частиц в некоторую окрестность найденного лучшего положения. В этом случае также возможно лишь дальнейшее улучшение уже найденного решения. Однако если производная лучшего решения мала, но еще не все частицы находятся в его окрестности, сохраняется возможность нахождения лучшего положения.

Сведем основные параметры метода роя частиц в Таблицу 1.

Таблица 1. Основные параметры метода роя частиц

$D$	Число параметров в задаче оптимизации
$\mathbf{b}_{low}$ и $\mathbf{b}_{up}$	Ограничения на величины параметров
$N$	Число частиц в рое
$N_{iter}$	Число итераций поиска решения
$N_{neigh}$	Размер окрестности, сведения о которой имеет частица
$n_{neigh}$	Число итераций, после которого увеличивается размер окрестности частицы
$c_{in}^{up}$ и $c_{in}^{low}$	Максимальное и минимальное значения инерционного коэффициента
$c_{cog}^{low}, c_{soc}^{low}$ и $c_{cog}^{up}, c_{soc}^{up}$	Максимальное и минимальное значения социального и когнитивного коэффициентов
$J_{stagn}$ , $N_{stagn}$	Производная функционала, при которой констатируется его стагнация, и число шагов стагнации, после которого алгоритм прерывается
$S_{stagn}$	Относительный размер стаи по сравнению с начальным, при котором она считается собравшейся около оптимального решения

Алгоритм метода роя частиц приведен ниже.

Инициализация:

- Задаются параметры, приведенные в Таблице 1.
- Начальные положения частиц  $\mathbf{x}_i(1)$  равномерно распределяются в  $\mathcal{U}$ .
- Начальные скорости  $\mathbf{v}_i(1)$  принимаются нулевыми.
- Задается матрица размера  $D \times N$  лучших когда-либо найденных положений для каждой частицы  $\mathbf{r}$ . Элементы матрицы инициализируются начальными положениями  $\mathbf{x}(1)$ .
- Задается матрица размера  $D \times N$  лучших когда-либо найденных положений для окрестности какой-либо частицы  $\mathbf{p}$ . Элементы матрицы инициализируются начальными положениями  $\mathbf{x}(1)$ .
- Задается вектор лучших значений, когда-либо найденных каждой частицей  $\mathbf{J}^{best}$ , его элементы принимаются заведомо большими.
- Задается заведомо большое лучшее значение функционала, найденное всем роем  $J^{best}$ .

- Задается заведомо большое лучшее значение функционала, найденное окрестностью некоторой частицы  $J_i^{local\ best}$ .
- Задается соответствующее ему лучшее положение  $\mathbf{x}^{best}$ .

Алгоритм:

For  $k = 1: N_{iter}$

For  $i = 1: N$

Вычисление величины функционала для текущей частицы  $\mathbf{x}_i$ .

Обновление лучшего значения функционала и соответствующего положения для  $i$ -й частицы:

If  $J < J^{best}$

$$J^{best} = J,$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{x}_i$$

End if

Обновление лучшего значения функционала и соответствующего положения для всего роя:

If  $J < \mathbf{J}_i^{best}$

$$\mathbf{J}_i^{best} = J,$$

$$\mathbf{x}^{best} = \mathbf{x}_i$$

End if

Увеличение окрестности частицы

If  $\text{mod}(k, n_{neigh}) = 0$

$$N_{neigh} ++$$

End if

Сброс значений лучшего значения функционала и соответствующих положений в окрестности  $i$ -й частицы:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{x}_i,$$

$$J_i^{local\ best} = \mathbf{J}_i^{best},$$

Обновление лучшего значения функционала, найденного в окрестности частицы:

For  $j = (i - N_{neigh}) : (i + N_{neigh})$

If  $\mathbf{J}_j^{best} < \mathbf{J}^{local\ best}$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{x}_j,$$

$$\mathbf{J}_i^{local\ best} = \mathbf{J}_j^{best},$$

End if

End for

Определение скорости согласно (2).

Проверка компонент скорости на превышение  $b_{up}^j - b_{low}^j$ .

Обновление положения частицы согласно (1).

Проверка на принадлежность положения области  $\mathbb{U}$ .

End for

Проверка условий прекращения поиска (стагнация функционала и стаи).

End for

## 2. Постановка задачи

Для описания углового движения спутника в инерциальном пространстве введем некоторую инерциальную систему координат  $O_a X_1 X_2 X_3$  с центром в центре масс Земли и систему, связанную с главными центральными осями инерции спутника  $O x_1 x_2 x_3$ . Ориентацию связанной системы относительно орбитальной будем описывать с помощью кватерниона  $(q_1, \mathbf{q})$ , ее движение в инерциальном пространстве будем характеризовать с помощью угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ . Также будем использовать самолетные углы (последовательность поворотов 2-3-1) для более удобной интерпретации ориентации. Динамические уравнения и кинематические соотношения для спутника с тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$  имеют вид

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} + (C - B)\omega_2\omega_3 &= M_1, & \frac{dq_1}{dt} &= -\frac{1}{2}(\omega_1 q_2 + \omega_2 q_3 + \omega_3 q_4), \\ B \frac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\omega_1\omega_3 &= M_2, & \frac{dq_2}{dt} &= \frac{1}{2}(\omega_1 q_1 + \omega_3 q_3 - \omega_2 q_4), \\ C \frac{d\omega_3}{dt} + (B - A)\omega_1\omega_2 &= M_3, & \frac{dq_3}{dt} &= \frac{1}{2}(\omega_2 q_1 - \omega_3 q_2 + \omega_1 q_4), \\ & & \frac{dq_4}{dt} &= \frac{1}{2}(\omega_3 q_1 + \omega_2 q_2 - \omega_1 q_3). \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу оптимальной по затратам топлива переориентации. Функционал имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) dt, \quad (6)$$

где  $T$  – время совершения маневра. При решении этой задачи с помощью принципа максимума потребуется гамильтониан

$$H = -\frac{1}{2} \lambda_0 (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + \lambda^T \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

где  $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\omega}, q_1, \mathbf{q})$ . Из необходимых условий оптимальности  $\frac{\partial H}{\partial M_i} = 0$ , откуда

$\lambda_1 = A\lambda_0 M_1$ ,  $\lambda_2 = B\lambda_0 M_2$ ,  $\lambda_3 = C\lambda_0 M_3$ . С учетом этих соотношений для решения оптимизационной задачи получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= -\frac{(C-B)}{A} \omega_2 \omega_3 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0 A^2}, & \frac{dq_1}{dt} &= -\frac{1}{2} (\omega_1 q_2 + \omega_2 q_3 + \omega_3 q_4), \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= -\frac{(A-C)}{B} \omega_1 \omega_3 + \frac{\lambda_2}{\lambda_0 B^2}, & \frac{dq_2}{dt} &= \frac{1}{2} (\omega_1 q_1 + \omega_3 q_3 - \omega_2 q_4), \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= -\frac{(B-A)}{C} \omega_1 \omega_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_0 C^2}, & \frac{dq_3}{dt} &= \frac{1}{2} (\omega_2 q_1 - \omega_3 q_2 + \omega_1 q_4), \\ & & \frac{dq_4}{dt} &= \frac{1}{2} (\omega_3 q_1 + \omega_2 q_2 - \omega_1 q_3), \\ \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{1}{2} \left( -\lambda_4 q_2 + \lambda_5 q_1 + \lambda_6 q_4 - \lambda_7 q_3 - 2 \frac{(A-C)}{B} \lambda_2 \omega_3 - 2 \frac{(B-A)}{C} \lambda_3 \omega_2 \right), \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{1}{2} \left( -\lambda_4 q_3 - \lambda_5 q_4 + \lambda_6 q_1 + \lambda_7 q_2 - 2 \frac{(C-B)}{A} \lambda_1 \omega_3 - 2 \frac{(B-A)}{C} \lambda_3 \omega_1 \right), \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{1}{2} \left( -\lambda_4 q_4 + \lambda_5 q_3 - \lambda_6 q_2 + \lambda_7 q_1 - 2 \frac{(C-B)}{A} \lambda_1 \omega_2 - 2 \frac{(A-C)}{B} \lambda_2 \omega_1 \right), \\ \frac{d\lambda_4}{dt} &= -\frac{1}{2} (\lambda_5 \omega_1 + \lambda_6 \omega_2 + \lambda_7 \omega_3), & \frac{d\lambda_5}{dt} &= -\frac{1}{2} (-\lambda_4 \omega_1 - \lambda_6 \omega_3 + \lambda_7 \omega_2), \\ \frac{d\lambda_6}{dt} &= -\frac{1}{2} (-\lambda_4 \omega_2 + \lambda_5 \omega_3 - \lambda_7 \omega_1), & \frac{d\lambda_7}{dt} &= -\frac{1}{2} (-\lambda_4 \omega_3 - \lambda_5 \omega_2 + \lambda_6 \omega_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (7) дополняются краевыми условиями – начальными и конечными положениями и скоростями спутника и условиями трансверсальности и нормировки, принимающими вид

$$\lambda_0 + \|\boldsymbol{\lambda}(T)\| = 1, \quad \lambda_0 \geq 0$$

для задачи с двумя закрепленными концами. Заметим, что уравнения для кватерниона и его сопряженных переменных совпадают. Закон изменения сопряженных к кватерниону переменных, таким образом, совпадает с законом изменения кватерниона с множителем  $1 - \lambda_0$ .

### 3. Использование метода роя частиц

Рассмотрим сначала применение принципа максимума. Будем считать, что в начальный момент скорость спутника нулевая, зададим только поворот вокруг второй оси величиной 1.1 радиана. Спутник необходимо привести к совпадению связанной системы координат с инерциальной с нулевой скоростью. Таким образом, решается задача поворота на большой угол вокруг одной оси. На это отводится 100 секунд. В качестве примера особенно удобно рассмотреть движение динамически-симметричного спутника, что упрощает уравнения (7) и интерпретацию результата.

Таблица 2. Численный пример 1

$\mathbf{J} = \text{diag}(1.1, 1.1, 1.1) \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$\boldsymbol{\omega}, \text{ с}^{-1}$	$\alpha, \beta, \gamma, \text{ рад}$
$t_0 = 0$	(0,0,0)	1.1,0,0
$t_f = 100 \text{ с}$	(0,0,0)	0,0,0

В этом случае, очевидно, стоит ожидать поворота вокруг второй оси, причем управление должно иметь линейный вид [3]. Решение краевой задачи осуществляется с помощью метода пристрелки. При этом сначала делается предположение о начальных значениях сопряженных переменных, сшивание происходит на конце интервала маневрирования. На рис. 1 и рис. 2 представлены скорость и управление в предположении, что начальные значения переменных, сопряженных скоростям, равны 0.001, кватернионам – 0.

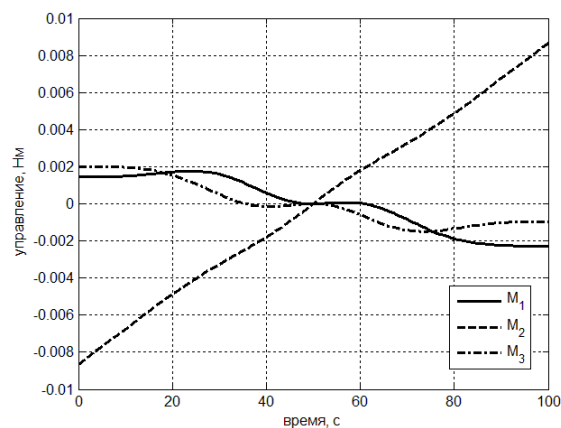
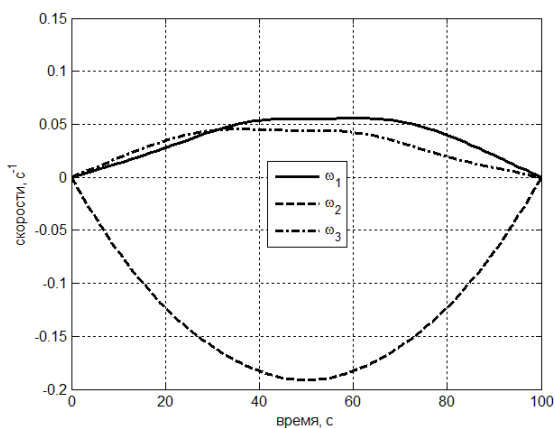


Рис. 1. Решение краевой задачи, угловая скорость

Рис. 2. Решение краевой задачи, управление

Величина функционала составляет  $1.4 \cdot 10^{-3}$ . На рис. 1 и рис. 2 видно, что решение «напоминает» оптимальное – поворот вокруг одной оси. При этом управление по второму каналу должно изменяться по линейному закону, по первому и третьему каналам – отсутствовать. При нулевых начальных предположениях о всех сопряженных переменных это решение удастся найти с высокой точностью, величина функционала составляет  $8.7864 \cdot 10^{-6}$ . Сравнение функционалов показывает, насколько низка точность полученного на рис. 1 и рис. 2 решения. Более того, его использование для дальнейшего улучшения результата методом пристрелки оказывается невозможным, характер решения практически не изменяется. Это показывает важность получения хорошего первого приближения для решения краевой задачи. Такое приближение позволяет найти практически идеальный ожидаемый результат – поворот спутника вокруг одной оси.

В качестве первого приближения удобно использовать результат, полученный прямым методом, например, с помощью роя частиц. Если полученное роем решение близко к оптимальному, с помощью метода пристрелки удастся быстро и точно получить оптимальное решение. Отметим также, что решение, найденное с помощью роя частиц, может не иметь никакого отношения к оптимальному. При последующем решении краевой задачи эта ситуация оказывается неопасна – скорее всего, в этом случае не удастся найти решение вовсе. Поэтому проверить и одновременно улучшить полученный с помощью роя результат в любом случае желательно. Кроме того, и при решении краевой задачи удастся лишь установить решение, удовлетворяющее необходимому, но не достаточному условию оптимальности. Если же близкое решение было сперва независимо найдено методом роя, его с большим основанием можно считать оптимальным.

Для применения метода роя частиц к решению задач оптимальных угловых маневров необходимо определить «координаты» частиц роя – те параметры, подбором которых будет решаться задача. Также требуется задать процедуру расчета функционала (6) и задать способ учета ограничений, имеющихся в задаче.

Для задания «координат» частиц роя необходимо сделать предположение о структуре решения. Это – неотъемлемая часть данного подхода, связанная с методом расчета функционала. Метод роя частиц – прямой, и функционал строится на основе интегрирования уравнений движения. Для этого необходимо задать управление, каким-то образом параметризовав его. Эти параметры и будут «координатами» частиц роя. Рассмотрим сначала



простейший вариант параметризации управления. Поскольку для Примера 1 известно, что управление представляет собой линейную функцию для каждого канала, будем предполагать, что

$$M_1 = p_1 t + p_2, M_2 = p_3 t + p_4, M_3 = p_5 t + p_6.$$

Каждая частица роя, таким образом, помещается в 6-мерное пространство. Напомним, что на эти координаты при инициализации метода накладываются ограничения. Для удобства вычисления ограничений, применения других подходов к параметризации управления и, наконец, возможности рассмотрения задачи на нефиксированном интервале времени, интервал расчета желательно привести к  $(0,1)$ . После этого можно задать метод расчета функционала.

Для этого напрямую вычисляется выражение (6), к которому добавляются функции, зависящие от выполнения ограничений задачи, в данном случае – конечные значения скорости и кватерниона. Метод штрафных функций – наиболее распространенный подход к учету ограничений. Функционал принимает вид

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) dt + k_\omega \max(0, |\omega(T) - \omega_f| - \delta\omega) + k_q \max(0, |q(T) - q_f| - \delta q). \quad (8)$$

Весовые коэффициенты в (8) подбираются так, чтобы все части функционала имели один порядок. Это – один из недостатков метода роя частиц, так как для каждой решаемой задачи необходимо вмешательство оператора для предварительной оценки весов. В выражении (8) вклад граничных условий оказывается нулевым, если они выполнены с заданной точностью. Заданную точность можно не использовать, однако в этом случае возникает опасность попадания роя в ситуацию длительного улучшения неоптимального решения за счет все лучшего выполнения граничных условий. Наконец, отметим, что граничные условия получаются на основе полученных частицей роя на данном этапе параметров  $\mathbf{p}$  и интегрирования уравнений движения методом Рунге-Кутты 4 порядка.

Исследуем Пример 1 с помощью метода роя частиц. Для этого зададим следующие параметры:

$D$	6	$k_\omega$	$10^{-2}$
$\mathbf{b}_{up}$	(10,1,10,1,10,1)	$k_q$	$10^{-2}$
$N$	30	$n_{neigh}$	Не изменяется
$N_{iter}$	500	$c_{in}^{up}$ и $c_{in}^{low}$	0.9 и 0.4

$N_{neigh}$	3	$\delta\omega, \delta q$	$10^{-4}$
$c_{cog}^{low}, c_{soc}^{low}$ $c_{cog}^{up}, c_{soc}^{up}$	и 1.49445 и 0.49445	Размерный шаг интегрирования	10с
$J_{stagn}, N_{stagn}$	0.05, 10	$S_{stagn}$	0.05

Отметим некоторые особенности. Так, не изменяется размер окрестности, информацию о которой имеет частица роя. За счет значительного числа итераций информация о лучшем положении в любом случае успевает распространиться по всей стае, так что нет необходимости усложнять алгоритм. Шаг интегрирования – 10 секунд – не позволил бы добиться результата высокой точности при численном моделировании динамики спутника. Однако в рассматриваемой задаче поиска примерного оптимального управления не требуется получения решения высокой точности, тогда как уменьшение времени моделирования крайне необходимо. На Рис. 3 и Рис. 4 представлены угловая скорость и кватернион, найденные с помощью метода роя частиц.

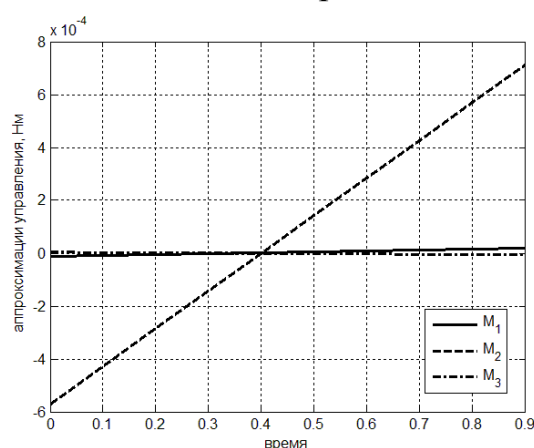
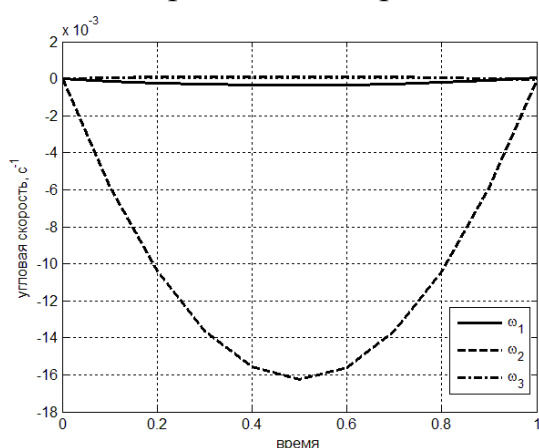


Рис. 3. Метод роя частиц, линейная аппроксимация, угловая скорость

Рис. 4. Метод роя частиц, линейная аппроксимация, управление

Величина функционала (6) –  $6.563 \cdot 10^{-6}$  и совпадает с величиной функционала (8), так как граничные условия выполнены с заданной точностью. Данный результат можно назвать типичным среди найденных методом роя за несколько попыток. При этом можно получить как более точный результат, так и довольно далекий от оптимального. В целом же метод роя дает удовлетворительное решение, которое даже превосходит точное в части оптимизации функционала за счет смягчения граничных условий.

Очевидно, что линейная аппроксимация управления приемлема только для рассматриваемого примера. Предположим теперь, что управление аппроксимируется полиномами второй степени. В методе роя изменим только число параметров и ограничения на (1,10,1,1,10,1,1,10,1). Заметим, что для

установления приемлемых ограничений на новые параметры также необходимо несколько попыток поиска решения. Результаты работы метода роя представлены на рис. 5 и рис. 6.

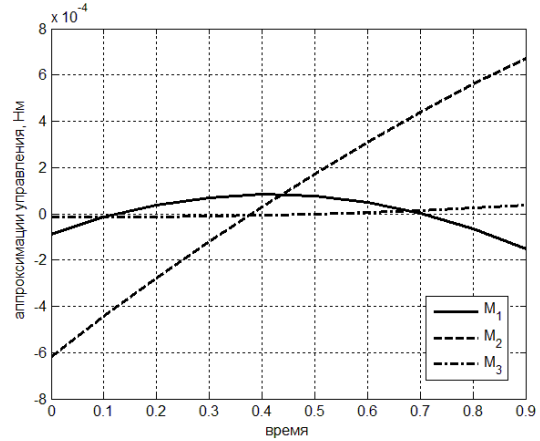
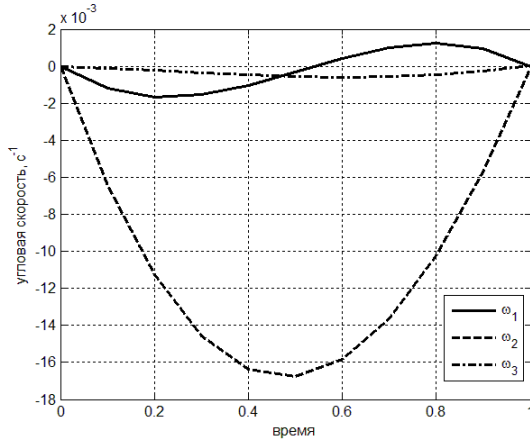


Рис. 5. Метод роя частиц, квадратичная аппроксимация, угловая скорость  
Рис. 6. Метод роя частиц, квадратичная аппроксимация, управление

Величина функционалов (6) и (8) –  $6.9219 \cdot 10^{-6}$ , однако при использовании квадратичного приближения граничные условия зачастую оказываются не выполнены с заданной точностью. Полученное решение было использовано для оценки начальных значений сопряженных переменных метода пристрелки, что позволило быстро найти более точное решение задачи и величину функционала  $8.7864 \cdot 10^{-6}$ .

Перейдем к следующему способу задания структуры управления – сплайнам Эрмита, подходящим для представления управления, структура которого заранее неизвестна. В этом случае отрезок, на котором необходимо аппроксимировать функцию, делится на несколько интервалов. На каждом интервале  $(t_k, t_{k+1})$  функция  $f$  (в нашем случае – компоненты механического момента  $M_i$ ) аппроксимируется с помощью кубического полинома вида

$$f = h_{00}(x)p_k + h_{10}(x)(t_{k+1} - t_k)m_k + h_{01}(x)p_{k+1} + h_{11}(x)(t_{k+1} - t_k)m_{k+1}, \quad (9)$$

где

$$x = \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \text{ (временной интервал приводится к единичному отрезку),}$$

$$h_{00}(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1,$$

$$h_{10}(x) = x^3 - 2x^2 + x,$$

$$h_{01}(x) = -2x^3 + 3x^2,$$

$$h_{11}(x) = x^3 - x^2.$$

Таким образом, сплайн задается с помощью базисных функций  $h_{ij}$ , значений на концах интервала  $p_i$  и производных на концах интервала  $m_i$ . Значения функции и ее производной на конце интервала совпадают со значениями на начале следующего. Правильный выбор производных позволяет добиться аппроксимации с помощью непрерывно дифференцируемой функции, что представляется достаточным для рассматриваемой задачи. Производную будем выбирать в виде

$$m_k = (1 - c) \frac{p_{k+1} - p_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}}, \quad (10)$$

имея таким образом кардинальный сплайн. При этом на каждом отрезке аппроксимации нет необходимости вычислять производные в обоих концах. Например, производную в начале отрезка можно брать равной производной в конце предыдущего отрезка.

Определим, сколько необходимо параметров для аппроксимации одного канала управления с помощью сплайна Эрмита. Предположим, отрезок интегрирования разбит на  $n$  участков и, соответственно, значения функции и ее производной необходимо определить в  $m = n + 1$  узлах. В каждом внутреннем узле необходимо лишь задать одно значение функции, которое используется в формуле (9) для интервалов слева и справа от узла. Производная при этом вычисляется с помощью соотношения (10). На концах интервала интегрирования необходимо задать как значения функции, так и величины ее производных из-за невозможности применить (10). С точки зрения построения алгоритма аппроксимации сплайном Эрмита удобнее, впрочем, задать дополнительные величины функции  $p_0$  и  $p_{m+1}$ , чтобы можно было использовать (10) на каждом интервале аппроксимации. В этом случае для одного канала управления необходимо задать  $n + 3$  значений  $p_k$ . Для аппроксимации управления по всем каналам необходимо задать  $3(n + 3) + 1$  параметров. Дополнительный параметр необходим для использования (10).

Рассмотрим в качестве примера применения сплайна Эрмита разбиение отрезка интегрирования на три участка. В этом случае для аппроксимации управления понадобится 19 параметров – существенно больше, чем при использовании глобальных полиномов второй степени, что увеличивает время вычисления. Однако упрощается выбор ограничений параметры, так как все базисные функции  $h_{ij}$  должны иметь равный вес. Отметим, что выбор ограничений на параметры удобно проводить, сперва задав заведомо малые параметры, при которых управление не способно развернуть спутник за требуемое время. Увеличивая ограничения, можно определить их подходящие значения. Ниже приведены параметры, отличные от использованных ранее.

$D$	19	$k_w$	$5 \cdot 10^{-3}$
-----	----	-------	-------------------

$\mathbf{b}_{up}, \mathbf{b}_{low}$	$\pm 5 \cdot 10^{-4}, (0,1)$ для $c$	$k_q$	$5 \cdot 10^{-3}$
-------------------------------------	--------------------------------------	-------	-------------------

На рис. 7 и рис. 8 представлен результат работы метода роя частиц.

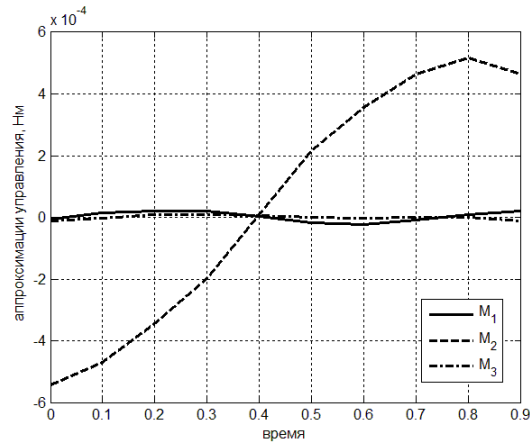
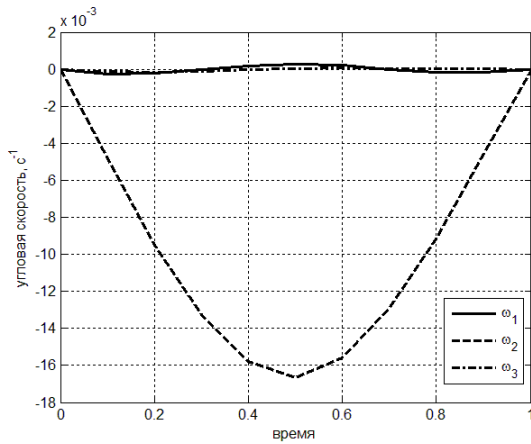


Рис. 7. Метод роя, аппроксимация сплайном, угловая скорость

Рис. 8. Метод роя частиц, аппроксимация сплайном, управление

Значения функционалов (6) и (8) –  $6.4698 \cdot 10^{-6}$ ,  $6.9546 \cdot 10^{-6}$  (ограничение для кватерниона не выполнено с заданной точностью).

Рассмотрим теперь более общий случай переориентации трехосного спутника.

Таблица 3. Численный пример 2

$\mathbf{J} = \text{diag}(1.1, 1.4, 1.9)$ кг·м <sup>2</sup>	$\boldsymbol{\omega}, \text{с}^{-1}$	$\alpha, \beta, \gamma, \text{рад}$
$t_0 = 0$	(0.001, 0.002, 0.003)	1.1, 2.3, 0.7
$t_f = 100 \text{ с}$	(0, 0, 0)	0, 0, 0

Метод роя частиц использует следующие отличные от предыдущих параметры:

$D$	19	$k_w$	$5 \cdot 10^{-3}$
$\mathbf{b}_{up}, \mathbf{b}_{low}$	$\pm 10^{-3}, (0,1)$ для $c$	$k_q$	$5 \cdot 10^{-3}$

Результат bvr4c – 1.1108e-4

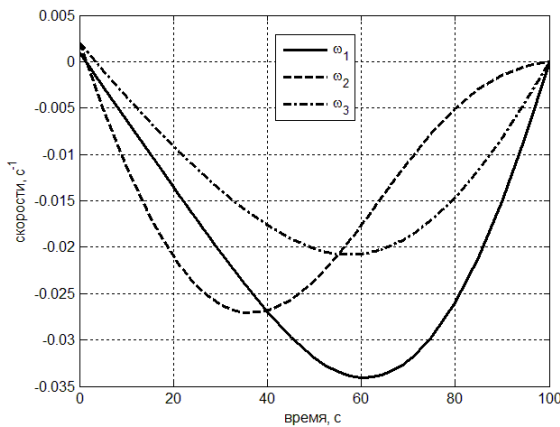


Рис. 9. Метод роя, аппроксимация сплайном, угловая скорость

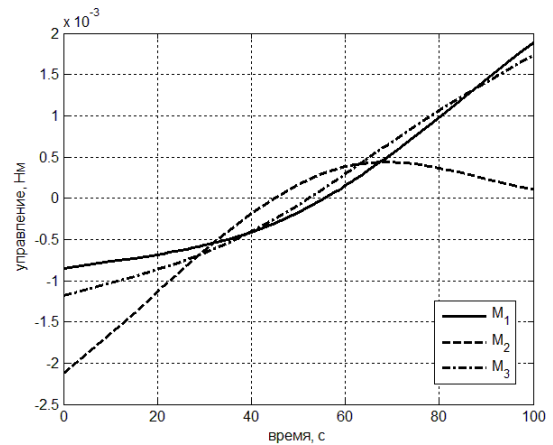


Рис. 10. Метод роя частиц, аппроксимация сплайном, управление

Из рисунка 9 видно, что краевые условия угловой скорости выполнены.

#### 4. Использование метода параллельной пристрелки

Уточнение результата, полученного методом роя. Для этого решаем краевую задачу принципа максимума как систему нелинейных уравнений с помощью встроенной в Matlab функции `fsolve`, при этом используем алгоритм Левенберга-Марквардта. В качестве начального приближения используем решение, полученное прямым методом роя.

В качестве примера снова рассмотрим движение симметричного спутника.

Таблица 4. Численный пример 3

$\mathbf{J} = \text{diag}(1,1,1)$	$\boldsymbol{\omega}, \text{c}^{-1}$	$\alpha, \beta, \gamma, \text{рад}$
$t_0 = 0$	(0,0,0)	1,0,1
$t_f = 100 \text{ с}$	(0,0,0)	0,0,0

При использовании следующих параметров для метода роя частиц:

$D$	19	$k_w$	$5 \cdot 10^{-3}$
$\mathbf{b}_{up}, \mathbf{b}_{low}$	$\pm 5 \cdot 10^{-4}, (0,1)$ для $c$	$k_q$	$5 \cdot 10^{-3}$

На рисунках 11, 12 и 13 представлены кватернионы, угловые скорости и компоненты управления в предположении, что начальные значения переменных, сопряженных скоростям, равны 0.001, кватернионам – 0.

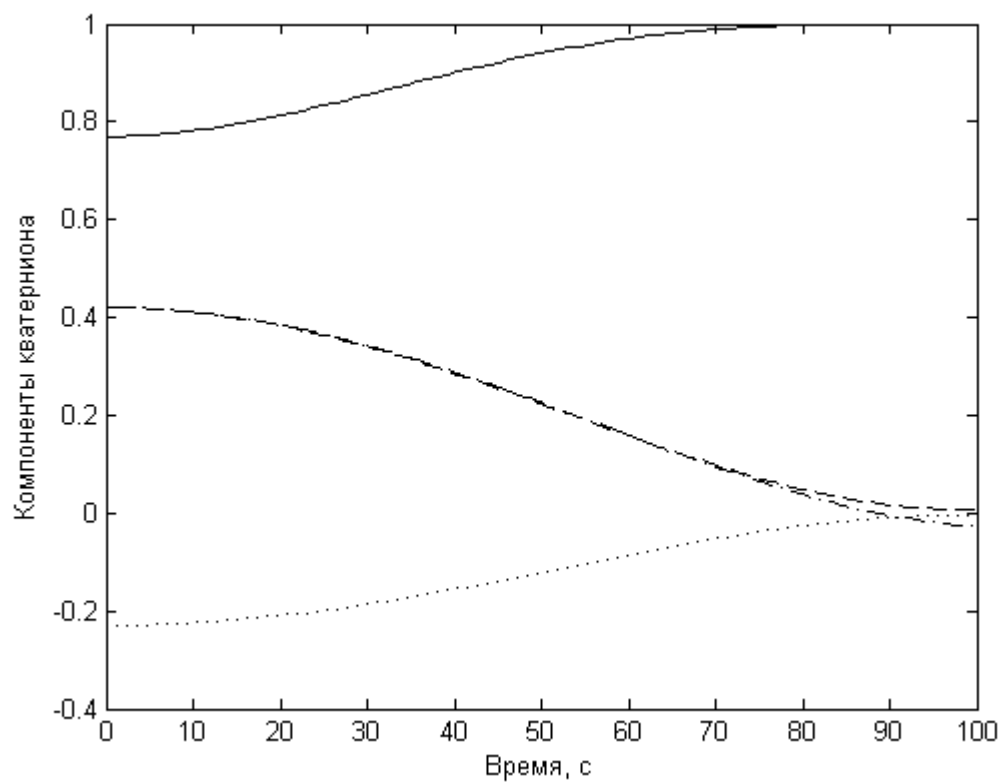


Рис. 11. Компоненты кватерниона

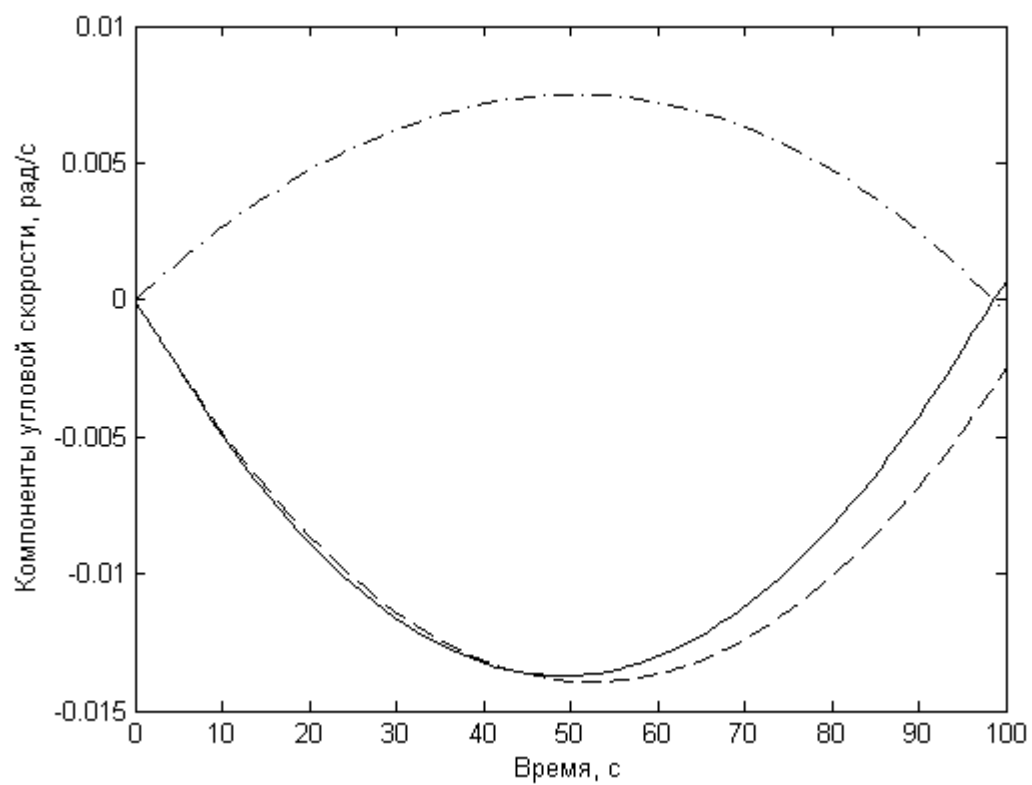


Рис. 12. Компоненты угловой скорости

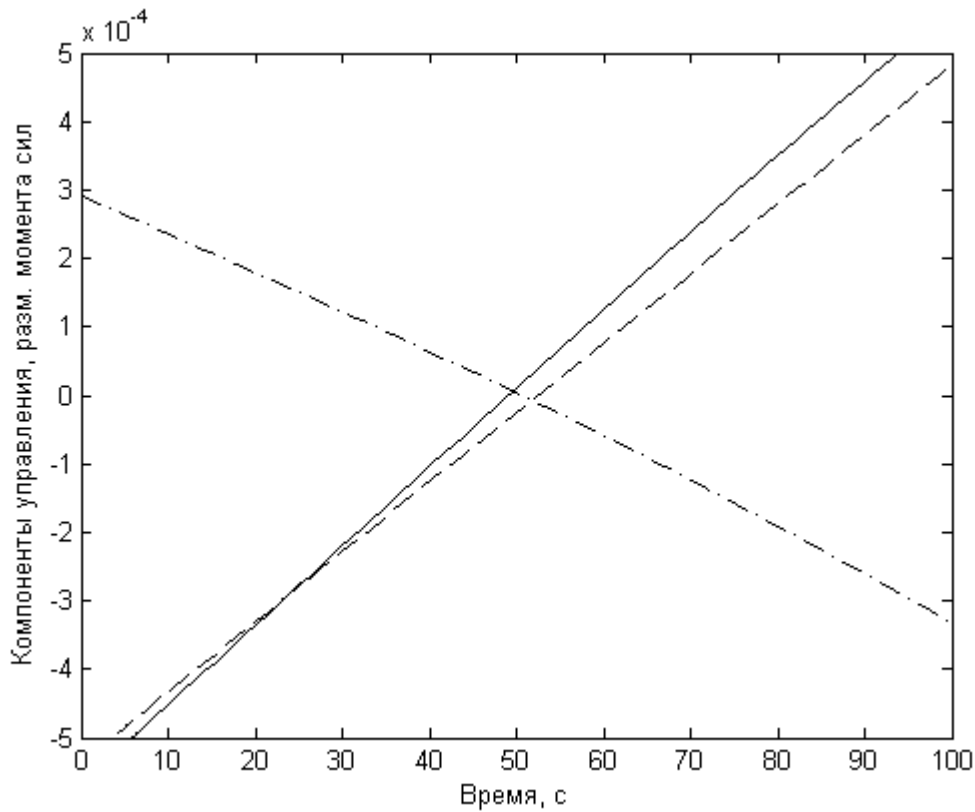


Рис. 13. Компоненты управления

Угловые скорости и кватернионы в данных условиях задачи не сходятся, т.е. не удовлетворяют заданной точности, как видно из рисунков 11 и 12.

Однако, при использовании тех же параметров для метода роя частиц, но при смещенных на 0.1 радиан начальных углах  $\alpha$  и  $\gamma$ , метод параллельной пристрелки сходится с заданной точностью  $10^{-6}$ .

Таблица 5. Численный пример 4

$\mathbf{J} = \text{diag}(1.1, 1.1, 1.1)$	$\boldsymbol{\omega}, \text{с}^{-1}$	$\alpha, \beta, \gamma, \text{рад}$
$t_0 = 0$	(0,0,0)	1.1, 0, 1.1
$t_f = 100 \text{ с}$	(0,0,0)	0, 0, 0

Результаты представлены на рисунках 14, 15 и 16: кватернионы, угловые скорости и компоненты управления.



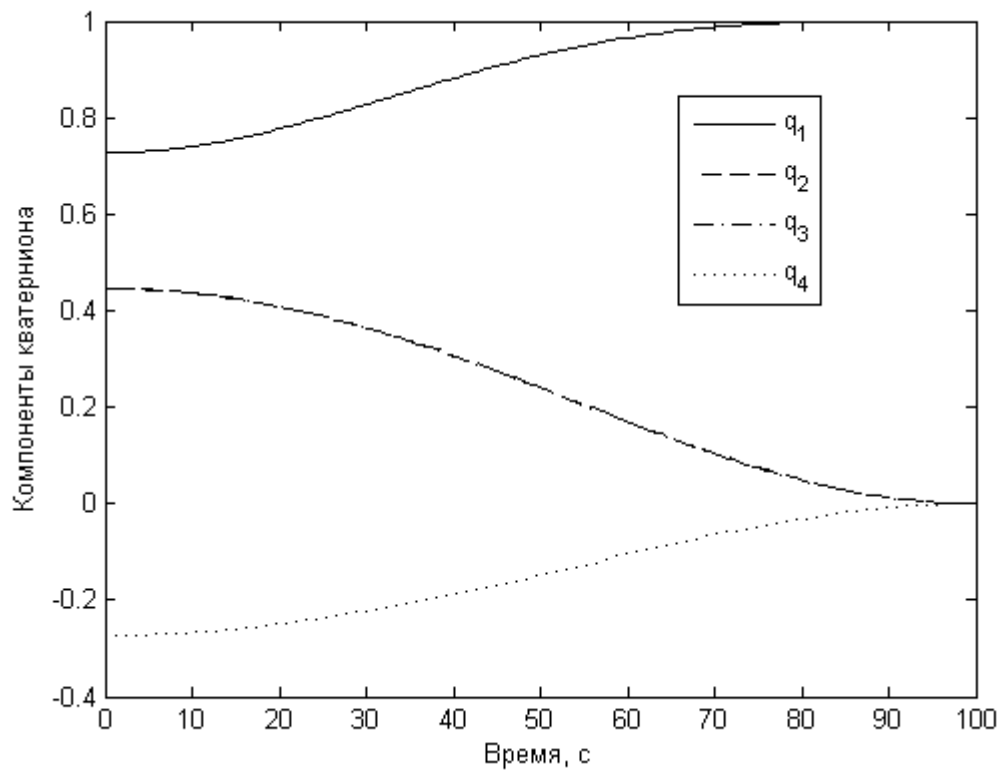


Рис. 14. Компоненты кватерниона

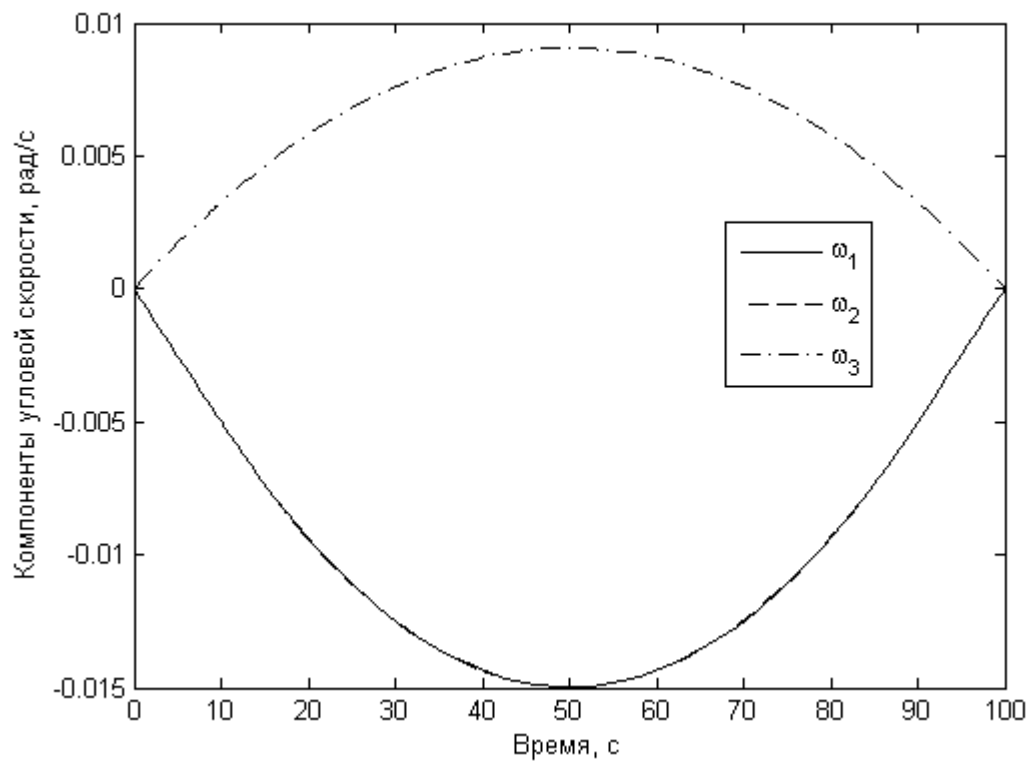


Рис. 15. Компоненты угловой скорости

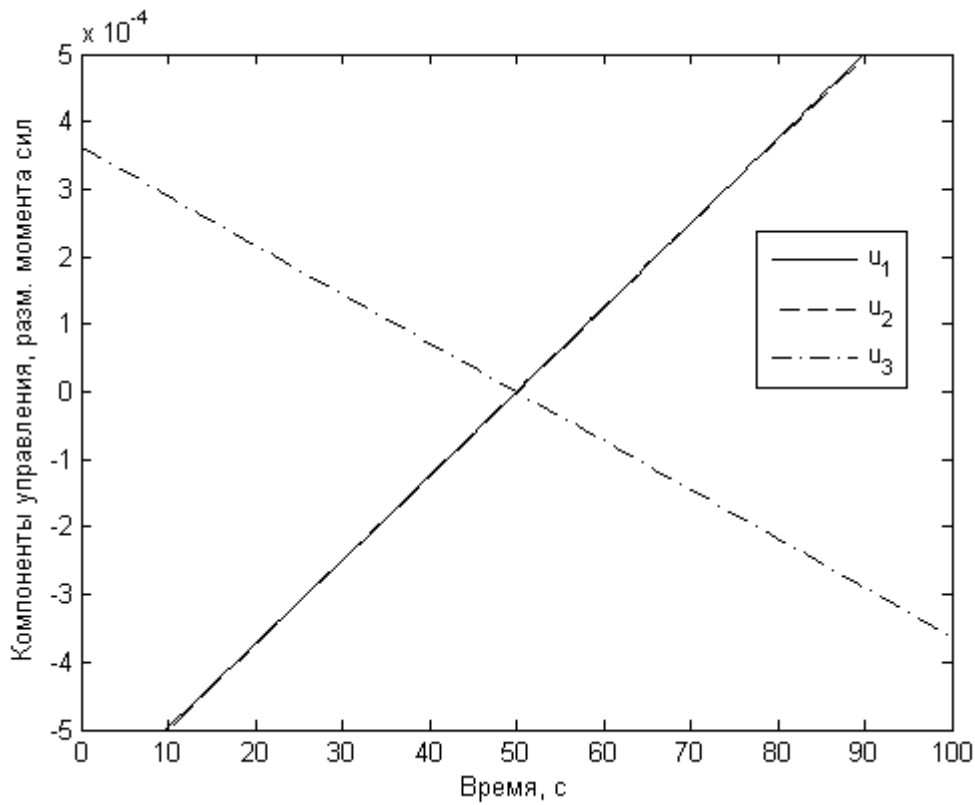


Рис. 16. Компоненты управления

Для сравнения результатов с теми, что были получены в первом численном примере, см. Таблица 2, воспользуемся теми же граничными условиями:

Таблица 6. Численный пример 5

$\mathbf{J} = \text{diag}(1.1, 1.1, 1.1)$ кг·м <sup>2</sup>	$\boldsymbol{\omega}$ , с <sup>-1</sup>	$\alpha, \beta, \gamma$ , рад
$t_0 = 0$	(0,0,0)	1.1,0,0
$t_f = 100$ с	(0,0,0)	0,0,0

Результаты работы метода параллельной пристрелки с начальным приближением, полученным методом роя, представлены на рисунках 17, 18 и 19.

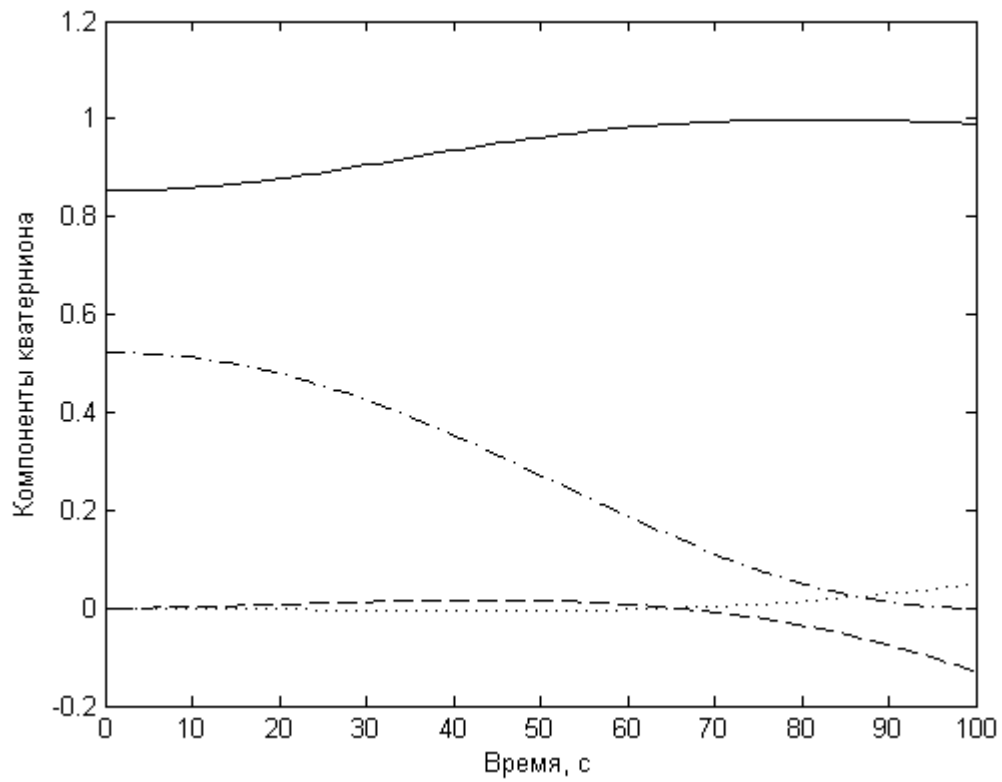


Рис. 17. Компоненты кватерниона

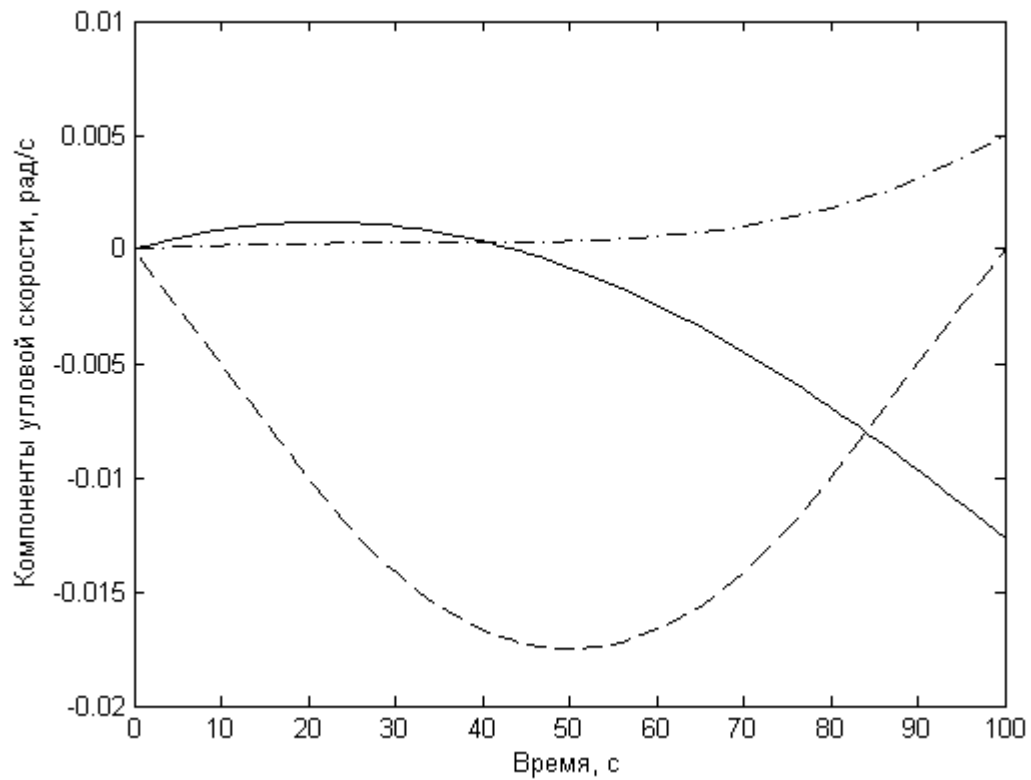


Рис. 18. Компоненты угловой скорости

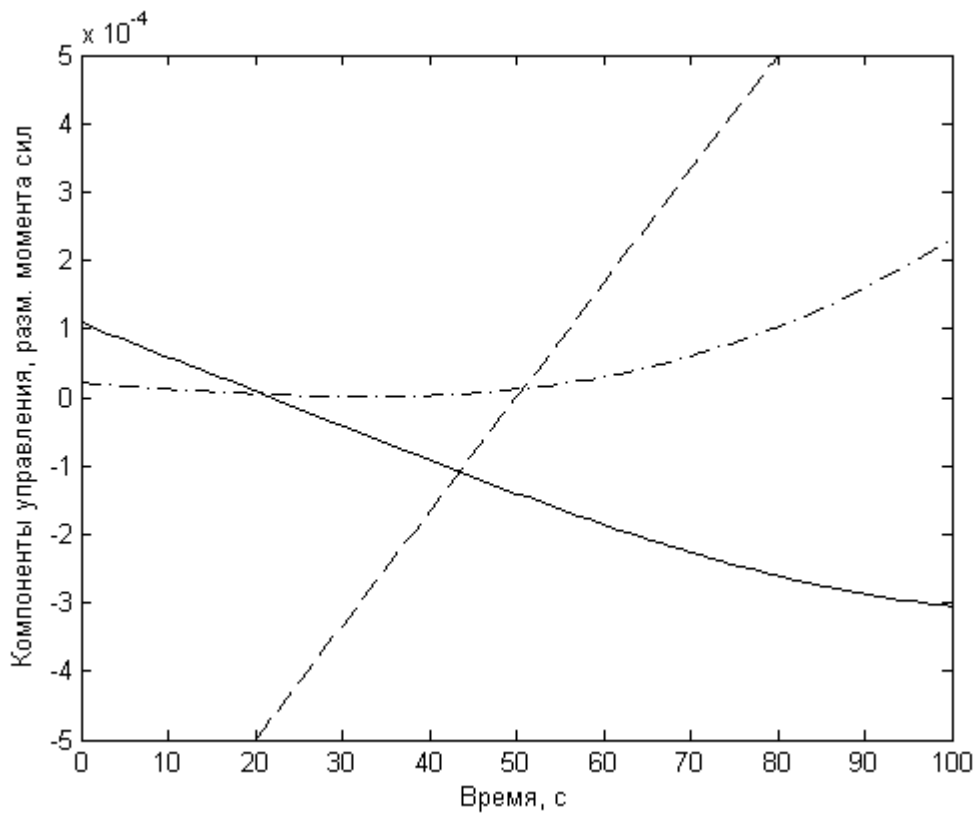


Рис. 19. Компоненты управления

Как видно из 18 рисунка, задача не сходится с требуемой нами точностью: угловые скорости в конце заданного промежутка времени не приходят к нулю. Причиной такого поведения может быть то, что при аппроксимации сплайнами управление выходит за пределы ограничения, как показано на рисунке 20. Для решения этой проблемы можно, например, увеличить границы управления, в пределах которых аппроксимировали сплайны Эрмита.

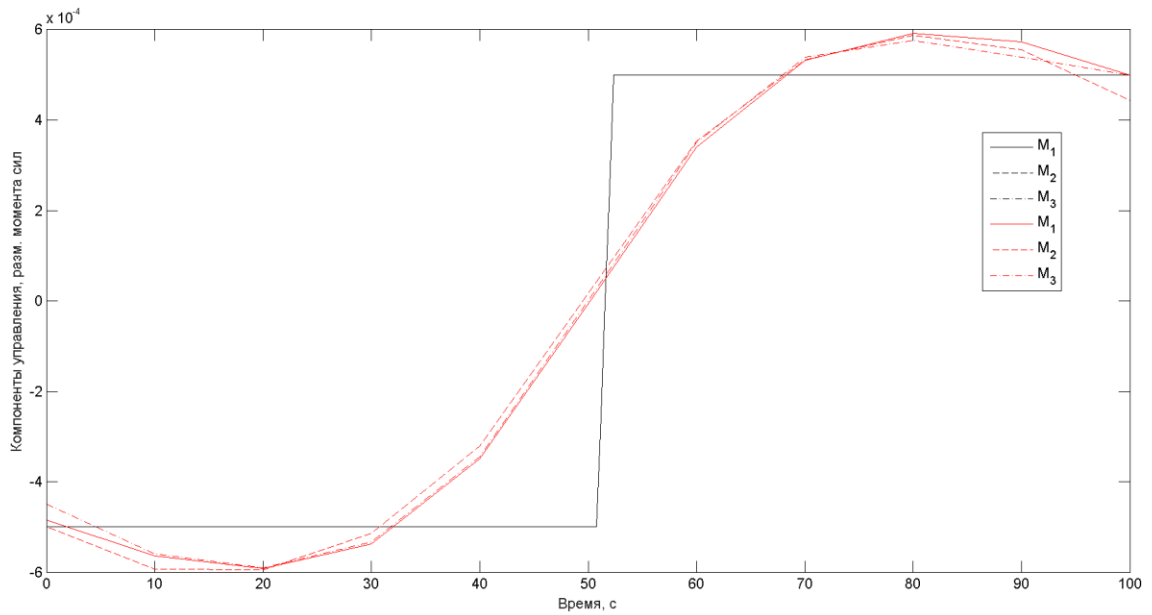


Рис. 20. Ограничение управления

### 5. Учет гравитационного момента

Добавим гравитационный момент, который имеет следующий вид

$$\mathbf{M}_{\text{gr}} = \begin{pmatrix} 3\omega_0^2 \frac{(C-B)}{A} \mathbf{E}_{32} \mathbf{E}_{33} \\ 3\omega_0^2 \frac{(A-C)}{B} \mathbf{E}_{31} \mathbf{E}_{33} \\ 3\omega_0^2 \frac{(B-A)}{C} \mathbf{E}_{32} \mathbf{E}_{31} \end{pmatrix},$$

$$\text{где } \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 2(q_2 q_4 - q_1 q_3) \\ 2(q_3 q_4 - q_1 q_2) \\ (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \end{pmatrix}.$$

Тогда дифференциальные уравнения сопряженных элементов примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{1}{2} \left( -\lambda_4 q_2 + \lambda_5 q_1 + \lambda_6 q_4 - \lambda_7 q_3 - 2 \frac{(A-C)}{B} \lambda_2 \omega_3 - 2 \frac{(B-A)}{C} \lambda_3 \omega_2 \right), \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{1}{2} \left( -\lambda_4 q_3 - \lambda_5 q_4 + \lambda_6 q_1 + \lambda_7 q_2 - 2 \frac{(C-B)}{A} \lambda_1 \omega_3 - 2 \frac{(B-A)}{C} \lambda_3 \omega_1 \right), \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{1}{2} \left( -\lambda_4 q_4 + \lambda_5 q_3 - \lambda_6 q_2 + \lambda_7 q_1 - 2 \frac{(C-B)}{A} \lambda_1 \omega_2 - 2 \frac{(A-C)}{B} \lambda_2 \omega_1 \right), \\ \frac{d\lambda_4}{dt} &= -\frac{1}{2} \left( \lambda_5 \omega_1 + \lambda_6 \omega_2 + \lambda_7 \omega_3 + 12 \omega_0^2 \frac{(C-B)}{A} (q_2 E_{33} + 2q_1 E_{32}) \lambda_1 + 12 \omega_0^2 \frac{(A-C)}{B} (-q_3 E_{33} + 2q_1 E_{31}) \lambda_2 \right) - \\ &\quad - 12 \omega_0^2 \frac{(B-A)}{C} (-q_3 E_{32} + q_2 E_{31}) \lambda_3, \\ \frac{d\lambda_5}{dt} &= -\frac{1}{2} \left( -\lambda_4 \omega_1 - \lambda_6 \omega_3 + \lambda_7 \omega_2 + 12 \omega_0^2 \frac{(C-B)}{A} (q_1 E_{33} - 2q_2 E_{32}) \lambda_1 + 12 \omega_0^2 \frac{(A-C)}{B} (q_4 E_{33} - 2q_2 E_{31}) \lambda_2 \right) - \\ &\quad - 12 \omega_0^2 \frac{(B-A)}{C} (q_4 E_{32} + q_1 E_{31}) \lambda_3, \\ \frac{d\lambda_6}{dt} &= -\frac{1}{2} \left( -\lambda_4 \omega_2 + \lambda_5 \omega_3 - \lambda_7 \omega_1 + 12 \omega_0^2 \frac{(C-B)}{A} (q_4 E_{33} - 2q_3 E_{32}) \lambda_1 + 12 \omega_0^2 \frac{(A-C)}{B} (-q_1 E_{33} - 2q_3 E_{31}) \lambda_2 \right) - \\ &\quad - 12 \omega_0^2 \frac{(B-A)}{C} (-q_1 E_{32} + q_4 E_{31}) \lambda_3, \\ \frac{d\lambda_7}{dt} &= -\frac{1}{2} \left( -\lambda_4 \omega_3 - \lambda_5 \omega_2 + \lambda_6 \omega_1 + 12 \omega_0^2 \frac{(C-B)}{A} (q_3 E_{33} + 2q_4 E_{32}) \lambda_1 + 12 \omega_0^2 \frac{(A-C)}{B} (q_2 E_{33} + 2q_4 E_{31}) \lambda_2 \right) - \\ &\quad - 12 \omega_0^2 \frac{(B-A)}{C} (q_2 E_{32} + q_3 E_{31}) \lambda_3. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую задачу:

$\mathbf{J} = \text{diag}(1,1,2,1,5)$ кг·м <sup>2</sup>	$\boldsymbol{\omega}$ , с <sup>-1</sup>	$\alpha, \beta, \gamma$ , рад
$t_0 = 0$	(0,0,0)	0.1,0,0
$t_f = 200$ с	(0,0,0)	0,0,0

Число итераций метода роя – 1500, а ограничение управления  $u_{\max} = 5 \cdot 10^{-5}$ , т.е. мы увеличили граничные значения управления. В этом случае, очевидно, стоит ожидать поворота вокруг второй оси, причем управление должно иметь линейный вид, что мы и видим на рисунках 22 и 23.

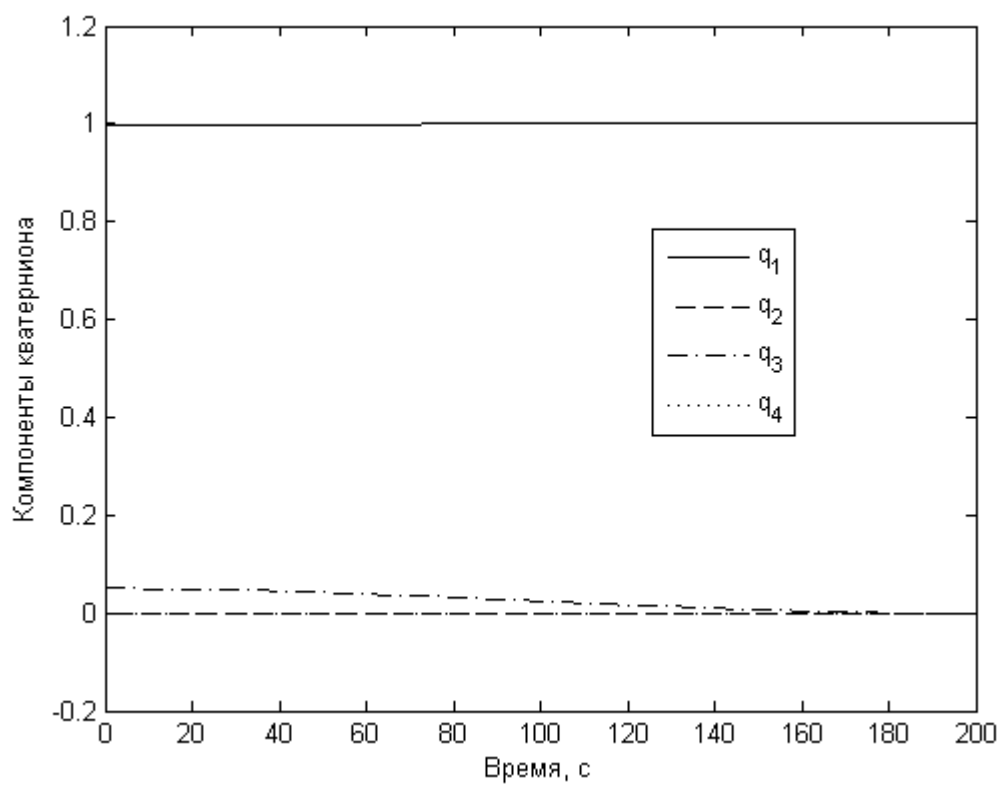


Рис. 21. Компоненты кватерниона

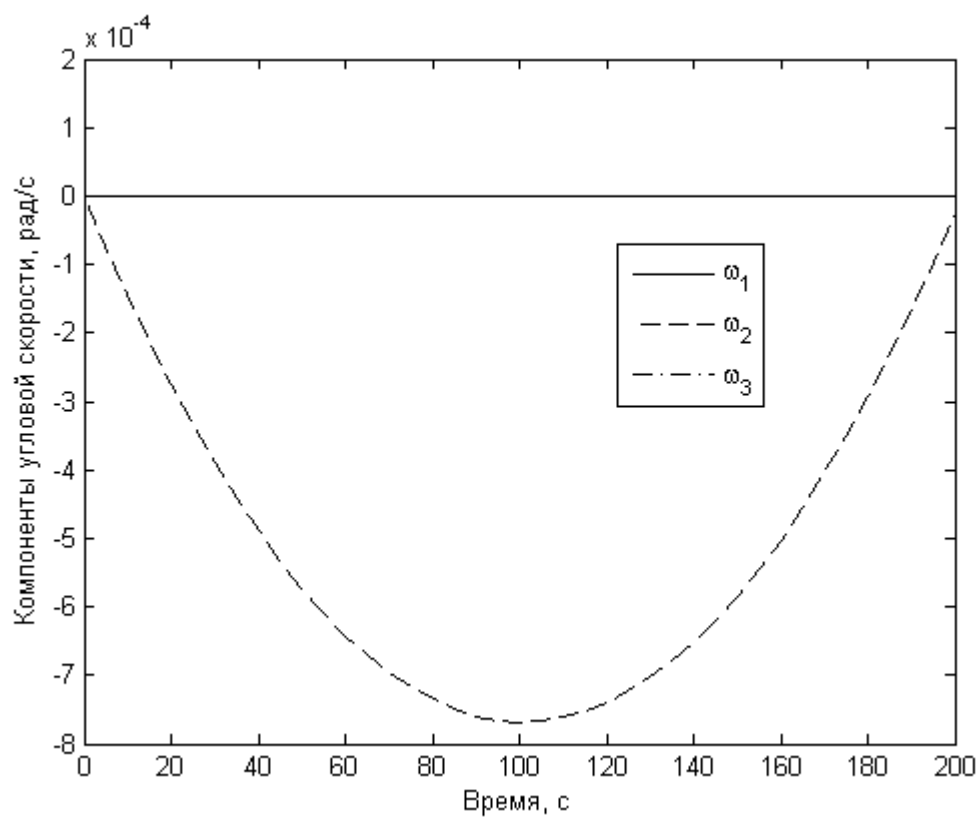


Рис. 22. Компоненты угловой скорости

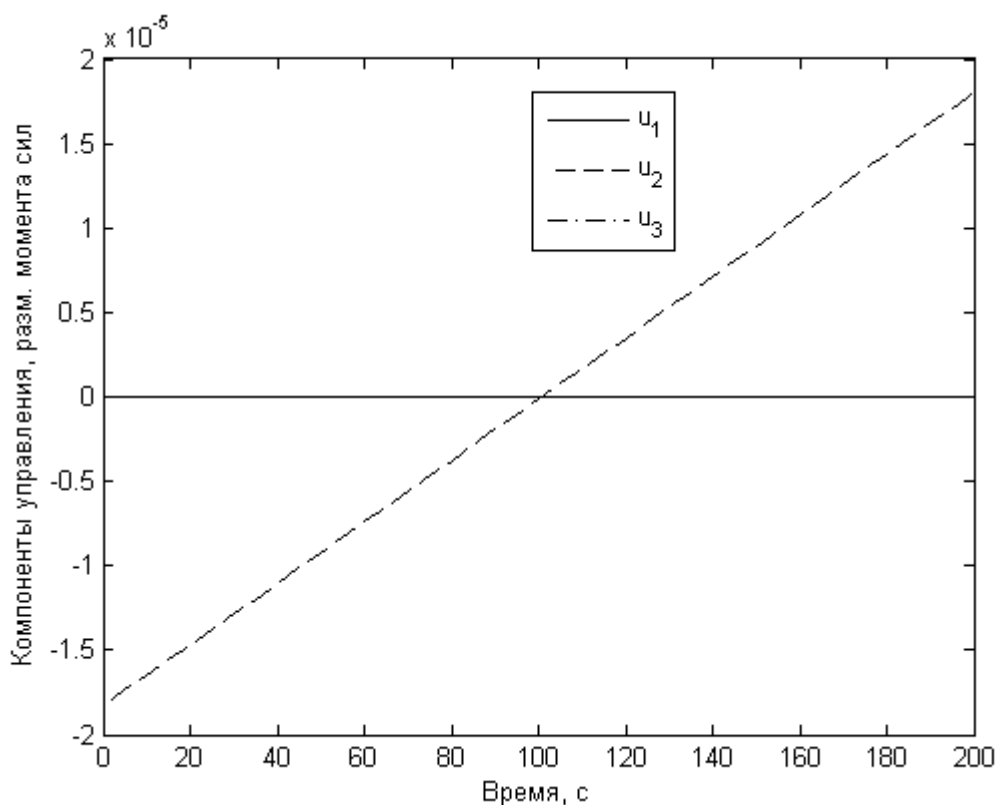


Рис. 23. Компоненты управления

В этом случае, очевидно, стоит ожидать поворота вокруг второй оси, причем управление должно иметь линейный вид, что мы и видим на рисунках 22 и 23.

Решение краевой задачи сходится не во всех случаях, но в тех случаях, в которых удалось получить удовлетворяющее требуемой точности решение, можно сказать, что метод параллельной пристрелки позволяет уточнить решение, полученное методом роя.

### Заключение

В данной работе применяется метод роя частиц для решения задач оптимальной переориентации спутников. Метод роя — это относительно новый метод численной оптимизации, предложенный в 1995 году для описания движения стаи птиц с целью выяснить законы, управляющие синхронным движением и быстрой сменой его направления всей стаей. Модель, описывающая принятие решений частицами в стае, является простым и эффективным способом оптимизации, для которой не требуется знание точного градиента оптимизируемой функции.

Положение каждой частицы в рое задает возможное решение оптимизационной задачи. Решение о перемещении частица принимает на основе трех факторов: ее текущей скорости, которая тянет частицу продолжить движение и исследовать новые регионы в области поиска; знания о собственном лучшем положении и о лучшем состоянии всего роя или



ближайшей окрестности частицы. В данном случае лучшее состояние – это оптимальное значение функционала задачи оптимального управления угловым движением спутника. Управление аппроксимируется с помощью глобальных полиномов и сплайнов Эрмита.

Также в данной работе рассмотрены особенности метода, его основные модификации, актуальные при рассмотрении углового движения космического аппарата.

Чтобы уточнить решение, полученное методом роя, применяется принцип максимума Понтрягина. Задача оптимального управления приводится к краевой задаче, а в качестве начального приближения используется решение, полученное методом роя. Затем краевая задача решается с помощью метода параллельной пристрелки.

Совместное использование метода роя частиц и принципа максимума Понтрягина позволяет получить хорошее предположение о структуре оптимального решения и затем найти его с высокой точностью, решая краевую задачу.

Решение краевой задачи, как показано в данной работе, сходится не во всех случаях, но в тех случаях, в которых получено удовлетворяющее требуемой точности решение, можно сказать, что метод параллельной пристрелки позволяет уточнить решение, полученное методом роя.

## Библиография

1. Melton R.G. Hybrid methods for determining time-optimal, constrained spacecraft reorientation maneuvers // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 94, № 1. P. 294–301.
2. Овчинников М.Ю. et al. Скользящее управление для трехосной магнитной ориентации спутника // *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.* 2014. № 56. P. 14.
3. Junkins J.L., Turner J.D. Optimal Continuous Torque Attitude Maneuvers // *J. Guid. Control. Dyn.* 1980. Vol. 3, № 3. P. 210–217.
4. Junkins J.L., Carrington C.K., Williams C.E. Time-Optimal Magnetic Attitude Maneuvers // *J. Guid. Control. Dyn.* 1981. Vol. 4, № 4. P. 363–368.
5. Li F., Bainum P.M. Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers // *J. Guid. Control. Dyn.* 1990. Vol. 13, № 1. P. 38–45.
6. Bilimoria K.D., Wie B. Time-optimal three-axis reorientation of a rigid spacecraft // *J. Guid. Control. Dyn.* 1993. Vol. 16, № 3. P. 446–452.

7. Avvakumov S.N., Kiselev Y.N. Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with Applications to Optimal Control // Proc. Tenth Crime. Autumn Math. Sch. Symp. "Spectral Evol. Probl. 2000. P. 147–155.
8. HARGRAVES C.R., PARIS S.W. Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation // J. Guid. Control. Dyn. 1987. Vol. 10, № 4. P. 338–342.
9. Roh K.-M. et al. Minimum-Time Attitude Reorientations of Three-Axis Stabilized Spacecraft Using Only // Int. J. Aeronaut. Sp. Sci. 2007. Vol. 8, № 2. P. 17–27.
10. Hull D.G. Conversion of Optimal Control Problems into Parameter Optimization Problems // J. Guid. Control. Dyn. 1997. Vol. 20, № 1. P. 57–60.
11. Conway B.A. A Survey of Methods Available for the Numerical Optimization of Continuous Dynamic Systems // J. Optim. Theory Appl. 2012. Vol. 152, № 2. P. 271–306.
12. Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization // Proc. Int. Conf. Neural Networks. IEEE, 1995. Vol. 4. P. 1942–1948.
13. Sentinella M.R., Casalino L. Cooperative evolutionary algorithm for space trajectory optimization // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2009. Vol. 105, № 1-3. P. 211–227.
14. Bessette C.R., Spencer D.B. Optimal Space Trajectory Design: A Heuristic-Based Approach // Adv. Astronaut. Sci. 206AD. Vol. 124. P. 1611–1628.
15. Pontani M., Conway B.A. Particle Swarm Optimization Applied to Space Trajectories // J. Guid. Control. Dyn. 2010. Vol. 33, № 5. P. 1429–1441.
16. Pontani M., Ghosh P., Conway B.A. Particle Swarm Optimization of Multiple-Burn Rendezvous Trajectories // J. Guid. Control. Dyn. 2012. Vol. 35, № 4. P. 1192–1207.
17. Ghosh P., Conway B.A. Numerical Trajectory Optimization with Swarm Intelligence and Dynamic Assignment of Solution Structure // J. Guid. Control. Dyn. 2012. Vol. 35, № 4. P. 1178–1192.
18. Engelbrecht A. Computational intelligence: An introduction // Stud. Comput. Intell. Chichester: John Wiley & Sons, 2007. Vol. 115. P. 597.

19. Vanderbergh F., Engelbrecht A. A study of particle swarm optimization particle trajectories // *Inf. Sci. (Ny)*. 2006. Vol. 176, № 8. P. 937–971.
20. Hu X., Eberhart R. Solving Constrained Nonlinear Optimization Problems with Particle Swarm Optimization // *6th World Multiconference Syst. Cybern. Informatics*. Orlando, Florida, USA, 2002. P. 203–206.
21. Wang G., Han D. Particle Swarm Optimization Based on Self-adaptive Acceleration Factors // *3rd Int. Conf. Genet. Evol. Comput. IEEE*, 2009. P. 637–640.
22. Shampine L.F., Gladwell I., Thompson S. *Solving ODEs with MATLAB*. New York: Cambridge University Press, 2003. 272 p.