КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

НАУЧНО–ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.Г. ЧЕБОТАРЕВА

КАЗАНСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

УДК 517.958 : 535.4

Е. К. Липачёв

Задача сопряжения для уравнения Гельмгольца на неровной границе раздела сред

Препринт ПМФ–03–01

Казань — 2003

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского математического общества

Научный редактор — Н.Б. Плещинский

Методом граничных интегральных уравнений с использованием теории обобщенных потенциалов исследована классическая разрешимость краевых задач, возникающих при моделировании дифракции волн на границе раздела сред с различными характеристиками. Предложены алгоритмы приближенного решения задачи сопряжения, основанные на сплайновых методах решения интегральных уравнений. Проведено теоретическое обоснование вычислительной схемы, включающее доказательство сходимости и вывод оценок скорости сходимости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03–01–96184) и Фонда НИОКР РТ (грант 05–5.1–217/2003).

1. Постановка задачи

Пусть плоскость $\mathbb{R}^2$ разделена кривой Γ на области S_1 и S_2. Будем считать, что $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, где $f(x) \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$, $0 < \alpha \leq 1$ и $\operatorname{supp} f \subseteq [-d, d]$ для некоторого положительного вещественного числа d, кроме того, $f(\pm d) = 0$ (т.е. за исключением конечного неровного участка кривая Γ совпадает с прямой). Если обозначить через Γ^* неровный участок кривой Γ, то

$$\Gamma = \Gamma^* \cup \{(x, 0) : x \notin [-d, d]\}, \quad \Gamma^* = \{(x, f(x)) : x \in [-d, d]\},$$

$$S_1 = \{(x, z) : z > f(x), x \in \mathbb{R}\}, S_2 = \{(x, z) : z < f(x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Обозначим через $\nu = \nu(M)$ единичный вектор нормали к кривой Γ в точке M, направленный в область S_1, а через $\partial_\nu = \partial_{\nu(M)}$ — правильную нормальную производную в точке M (см., напр., [2, 10]). С помощью индексов "$-$" и "$+$" будем отличать предельные значения функций на границе Γ, вычисленные из областей S_1 и S_2 соответственно.

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Найти пару функций $u_1(x, z)$, $u_2(x, z)$, определенных в областях S_1 и S_2 соответственно, таких что*

$$\begin{aligned} \triangle u_1(x, z) + k_1^2 u_1(x, z) = 0, \quad (x, z) \in S_1, \\ \triangle u_2(x, z) + k_2^2 u_2(x, z) = 0, \quad (x, z) \in S_2; \end{aligned} \tag{1.1}$$

на границе раздела областей предельные значения функций $u_j(x, z)$ и $\partial_\nu u_j(x, z)$ $(j = 1, 2)$ удовлетворяют условиям сопряжения

$$\left.\begin{aligned} u_1^-(x, z) - u_2^+(x, z) = g(x, z), \\ p_1 \partial_\nu u_1^-(x, z) - p_2 \partial_\nu u_2^+(x, z) = h(x, z), \end{aligned}\right. \quad (x, z) \in \Gamma, \tag{1.2}$$

где $g(x, z) \in C^{1,\beta}(\Gamma)$, $h(x, z) \in C^{0,\beta}(\Gamma)$ $(0 < \beta \leq 1)$ — заданные функции; в концевых точках $M_1 = (-d, 0)$ и $M_2 = (d, 0)$ неровного участка Γ^* выполнены условия на ребре

$$\lim_{\delta \to 0} \left\{ \int_{C_1(\delta) \cup C_2(\delta)} \left(|u_j(M)| + \left| \frac{\partial u_j(M)}{\partial \delta} \right| \right) ds_M \right\} = 0, \tag{1.3}$$

где $C_j(\delta) = \{M = (x, z) : |M - M_j| = \delta\} \backslash \Gamma$ и $\dfrac{\partial}{\partial \delta}$ направлена вдоль радиуса окружности $C_j(\delta)$, $j = 1, 2$;

кроме того, выполнены условия излучения

$$u_j{}^* = e^{ik_j r} O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial u_j{}^*}{\partial r} - ik_j u_j{}^* = e^{ik_j r} o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \to \infty, \quad (1.4)$$

где $r = \sqrt{x^2 + z^2}$, $(x, z) \in S_j$, *и* $u_j{}^*(x, z) = u_j(x, z) - \widetilde{u}_j(x, z)$, $j = 1, 2$.

Здесь через $\widetilde{u}_1(x, z)$, $\widetilde{u}_2(x, z)$ обозначено решение вспомогательной задачи об отражении волны от полуплоскости.

Эта краевая задача возникает при исследовании волновых процессов в реальных средах (например, в окрестности диэлектрических решеток, вблизи морского дна или поверхности воды). В задаче дифракции плоской электромагнитной волны $e^{ik_1(\sin\theta x - \cos\theta z)} \cdot e^{-i\omega t}$, падающей из S_1 под углом θ к оси $0z$ на границу раздела диэлектрических сред S_1 и S_2, параметры задачи сопряжения будут следующими: $k_j = \omega\sqrt{\varepsilon_j\,\mu_j}$, где ω — частота изменения поля, ε_j — диэлектрическая проницаемость, а μ_j — магнитная проницаемость среды S_j $(j = 1, 2)$. Функция $g(x, z)$ в условии (1.2) имеет вид $-e^{ik_1(\sin\theta x - \cos\theta z)}$, а функция $h(x, z)$ — $\partial_{\nu(x,z)} g(x, z)$. В случае TE – поляризации поля имеем $p_j = \mu_0/\mu_j$, а в случае TH – поляризации $p_j = \varepsilon_0/\varepsilon_j$ $(j = 1, 2)$; здесь ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные. Подробности см., напр., [6, 9, 12, 14].

2. Вспомогательная задача

Задача рассеяния на полуплоскости используется как вспомогательная при решении исходной краевой задачи. В этом случае

$$S_1 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_z^+, \quad S_2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_z^-,$$

где

$$\mathbb{R}_x = \{x : x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R}_z^+ = \{z \in \mathbb{R} : z > 0\}, \quad \mathbb{R}_z^- = \{z \in \mathbb{R} : z < 0\}.$$

Граница раздела Γ совпадает с $\mathbb{R}_x$, а производная по нормали ∂_ν совпадает с $\partial/\partial z$.

Решение этой задачи получено в работах [11, 18] в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\pm a(\xi)\gamma^{\mp}(\xi) - ib(\xi)}{\gamma^+(\xi) + \gamma^-(\xi)} e^{\pm i\gamma^{\pm}(\xi)z - i\xi x}\, d\xi,$$

где $a(\xi) = g\left(\xi, f(\xi)\right)$, $b(\xi) = h(\xi, f(\xi))$, $\gamma^{\pm}(\xi) = \sqrt{k_{1,2}^2 - \xi^2}$ с подходящим выбором ветви корня, индекс "+" соответствует решению в верхней полуплоскости, а индекс "−" — в нижней полуплоскости. Решение вспомогательной задачи имеет наиболее простой вид в случае, когда исходная волна плоская, этот случай интересен и с точки зрения приложений.

Будем считать, что волна падает на границу раздела сред из области S_1 и задается выражением $u_0(x,z)\cdot e^{-i\omega t}$, где

$$u_0(x,z) = e^{ik_1(x\sin\theta - z\cos\theta)} = e^{ik_1(x\alpha_1 - z\beta_1)}, \tag{2.1}$$

здесь $\theta_1 = \theta$ — угол падения волны.

Через θ_2 обозначим угол преломления волны, а через θ_3 — угол отражения. Введем величины

$$\alpha_1 = \sin\theta_1, \alpha_2 = \sin\theta_2, \beta_1 = \cos\theta_1 = \sqrt{1-\alpha_1}, \beta_2 = \cos\theta_2 = \sqrt{1-\alpha_2}.$$

Решение задачи состоит из функций $u_1(x,z)$, $u_2(x,z)$, определенных в областях S_1 и S_2 соответственно и удовлетворяющих условию сопряжения на границе. Функцию u_1 можем рассматривать как рассеянную (отраженную) волну, а функцию u_2 как преломленную волну. При этом

$$\begin{aligned} u_1(x,z) &= B\cdot e^{ik_1(x\sin\theta_3 + z\cos\theta_3)}, \qquad (x,z)\in S_1, \\ u_2(x,z) &= C\cdot e^{ik_2(x\sin\theta_2 - z\cos\theta_2)}, \qquad (x,z)\in S_2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Для нахождения углов θ_2, θ_3 и коэффициентов B, C воспользуемся граничными условиями (1.2). Из первого граничного условия получаем

$$B\cdot e^{ik_1 x\sin\theta_3} - C\cdot e^{ik_2 x\sin\theta_2} = -e^{ik_1 x\sin\theta_1}. \tag{2.3}$$

Во втором граничном условии учтем, что $\partial_\nu = \partial_z$. Имеем

$$Bp_1k_1(\cos\theta_3)e^{ik_1x\sin\theta_3} + Cp_2k_2(\cos\theta_2)e^{ik_2x\sin\theta_2} = p_1k_1(\cos\theta_1)e^{ik_1x\sin\theta_1}$$

или

$$B\cdot e^{ik_1x\alpha_3} - C\cdot e^{ik_2x\alpha_2} = -e^{ik_1x\alpha_1}, \tag{2.4}$$

$$Bp_1k_1\beta_3e^{ik_1x\alpha_3} + Cp_2k_2\beta_2e^{ik_2x\alpha_2} = p_1k_1\beta_1e^{ik_1x\alpha_1}. \tag{2.5}$$

Из этих уравнений получаем, прежде всего, что

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_3, \quad \text{откуда} \quad \theta_3 = \theta_1, \tag{2.6}$$

т.е. *угол отражения равен углу падения.* Кроме того,

$$k_1\sin\theta_1 = k_2\sin\theta_2 \quad \text{или} \quad k_1\alpha_1 = k_2\alpha_2, \tag{2.7}$$

что известно как *второй закон Снеллиуса.*

Тогда формулы (2.4) и (2.5) упрощаются:

$$B + 1 = C, \tag{2.8}$$

$$Bp_1k_1\beta_1 + Cp_2k_2\beta_2 = p_1k_1\beta_1. \tag{2.9}$$

Из этой системы уравнений найдем выражения коэффициентов B и C через p_1, p_2, k_1, k_2, β_1, β_2:

$$B = \frac{p_1k_1\beta_1 - p_2k_2\beta_2}{p_1k_1\beta_1 + p_2k_2\beta_2}, \tag{2.10}$$

$$C = \frac{2p_1k_1\beta_1}{p_1k_1\beta_1 + p_2k_2\beta_2}. \tag{2.11}$$

Коэффициент B называют *коэффициентом отражения*, а коэффициент C — *коэффициентом прозрачности*. Формулы (2.10), (2.11) называют формулами Френеля (см., напр., [1, 14]).

Если ввести величины $m = \dfrac{p_1}{p_2}$ и $n = \dfrac{k_2}{k_1}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ (*показатель преломления границы*), то

$$B = \frac{m\beta_1 - n\beta_2}{m\beta_1 + n\beta_2}, \tag{2.12}$$

$$C = \frac{2m\beta_1}{m\beta_1 + n\beta_2}. \tag{2.13}$$

Поскольку

$$\beta_2 = \sqrt{1-\alpha_2^2} = \sqrt{1-\alpha_1^2\frac{k_1^2}{k_2^2}},$$

то в формулах (2.12) и (2.13) можем оставить только величины, зависящие от угла θ:

$$B = \frac{m\beta_1 - \sqrt{n^2-\alpha_1^2}}{m\beta_1 + \sqrt{n^2-\alpha_1^2}} \equiv \frac{m\cos\theta - \sqrt{n^2-\sin^2\theta}}{m\cos\theta + \sqrt{n^2-\sin^2\theta}}, \tag{2.14}$$

$$C = \frac{2m\beta_1}{m\beta_1 + \sqrt{n^2-\alpha_1^2}} \equiv \frac{2m\cos\theta}{m\cos\theta + \sqrt{n^2-\sin^2\theta}}. \tag{2.15}$$

Если использовать показатели преломления диэлектрических сред $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$, $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$, то можно получить еще один вариант формул (2.10), (2.11):

$$B = \frac{n_1\frac{\mu_2}{\mu_1}\cos\theta - \sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta}}{n_1\frac{\mu_2}{\mu_1}\cos\theta + \sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta}},$$

$$C = \frac{2n_1\frac{\mu_2}{\mu_1}\cos\theta}{n_1\frac{\mu_2}{\mu_1}\cos\theta + \sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta}}$$

— в случае TE–поляризации и

$$B = \frac{n_2^2 \cos\theta - n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta}}{n_2^2 \cos\theta + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta}},$$

$$C = \frac{2n_2 \cos\theta}{n_2^2 \cos\theta + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta}}$$

— в TH–случае.

Если $n_2 < n_1$, то определим так называемый, ***критический угол*** θ_c :

$$\sin\theta_c = n \quad \text{или} \quad \sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}.$$

Как только угол падения θ превзойдет критическое значение θ_c (т.е. $\theta > \theta_c$ или $\sin\theta > \sin\theta_c$, что, в свою очередь, равносильно $n^2 - \sin^2\theta < 0$), для коэффициента отражения будем иметь

$$B = \frac{m\cos\theta - i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{m\cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} = \frac{z}{\bar{z}}. \tag{2.16}$$

В этом случае модуль коэффициента отражения $|B| = 1$, и можно говорить о полном отражении.

Замечание. Как показывает формула (2.7), в задачах распространения волн можем ограничиться случаем, когда волновые числа удовлетворяют условию

$$\text{sign}\ (\text{Re}\ k_1)\ =\ \text{sign}\ (\text{Re}\ k_2). \tag{2.17}$$

Действительно, согласно (2.7), имеем $k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2$. Следовательно,

$$(\text{Re}\, k_1)\ \sin\theta_1 = (\text{Re}\, k_2)\ \sin\theta_2.$$

Последнее равенство приводит к соотношению

$$\frac{\text{Re}\, k_1}{\text{Re}\, k_2}\ =\ \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}. \tag{2.18}$$

Поскольку $0 \le \theta_1 < \frac{\pi}{2}$, то $\sin\theta_1 > 0$. Из соотношения (2.18) можем сделать естественное с физической точки зрения предположение, что угол преломления также лежит в интервале $0 \le \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, что влечёт за собой неравенство $\sin\theta_2 > 0$. Таким образом, справедливо неравенство $\dfrac{\text{Re}\, k_1}{\text{Re}\, k_2} > 0$ и, следовательно, волновые числа k_1 и k_2 удовлетворяют условию (2.17).

3. Единственность решения

Классическим решением задачи сопряжения (1.1) — (1.4) *назовем пару функций* $\{u_1, u_2\}$, *удовлетворяющих условиям* (1.1) — (1.4) *и* $u_j \in C^2(S_j) \cap C\left(\overline{S_j \setminus \Omega_\delta}\right)$ $(j = 1,2)$. *Здесь через* Ω_δ *обозначено объединение произвольно малых* δ*–окрестностей концевых точек* $(-d, 0)$ *и* $(d, 0)$ *неровного участка.*

Теорема 3.1. *Если* $\mathrm{Im}\ k_1 \geq 0$, $\mathrm{Im}\ k_2 \geq 0$, $\mathrm{sign}\ (\mathrm{Re}\ k_1) = \mathrm{sign}\ (\mathrm{Re}\ k_2)$, $p_1\bar{p}_2 \in \mathbb{R}$ *и знак* $p_1\bar{p}_2$ *совпадает со знаком* $(\mathrm{Re}\ k_1)(\mathrm{Re}\ k_2)$, *то задача* (1.1) — (1.4) *имеет не более одного классического решения* .

Доказательство. От противного. Предположим, что существуют два классических решения $u = \{u_1, u_2\}$, $v = \{v_1, v_2\}$ задачи сопряжения. Рассмотрим функцию $w = \{w_1, w_2\}$, где $w_1(P) = u_1(P) - v_1(P)$, $P = (x, z) \in S_1$ и $w_2(P) = u_2(P) - v_2(P)$, $P = (x, z) \in S_2$.

Пусть $R > d$ — произвольное вещественное число. Применим в каждой из областей $S_{j,R} = \{(x, z) \in S_j\ :\ x^2 + z^2 < R^2\}$ $(j = 1,2)$ вторую формулу Грина к функциям w_j и $\bar{w}_j$ при $j = 1,2$:

$$\int\limits_{S_{j,R}}\int (w_j \triangle \overline{w}_j - \overline{w}_j \triangle w_j) d\sigma = \int\limits_{\partial S_{j,R}} \left(w_j \partial_{\nu(P)} \overline{w}_j - \overline{w}_j \partial_{\nu(P)} w_j\right) ds_P. \quad (3.1)$$

Рассмотрим левую часть соотношения (3.1). Поскольку

$$\triangle w_j(P) + {k_j}^2\, w_j(P) = 0, \quad \triangle \overline{w}_j(P) + {\overline{k}_j}^2\, \overline{w}_j(P) = 0,$$

имеем $\triangle w_j(P) = -{k_j}^2\, w_j(P)$, $\triangle \overline{w}_j(P) = -{\overline{k}_j}^2\, \overline{w}_j(P)$ $(j = 1,2)$. Обозначим $\nu_j = \mathrm{Re}\, k_j$, $\rho_j = \mathrm{Im}\, k_j$, $j = 1,2$. Тогда

$$\begin{aligned} &\int\limits_{S_{j,R}}\int (w_j \triangle \bar{w}_j - \bar{w}_j \triangle w_j)\, d\sigma\ = \\ &\qquad = (4i\nu_j\rho_j) \int\limits_{S_{j,R}}\int w_j\, \overline{w}_j\, d\sigma, \quad j = 1,2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Рассмотрим правую часть соотношения (3.1). Границы областей S_j $(j = 1,2)$ можно представить в виде

$$\partial S_{1,R}\ =\ \gamma_R^+ \cup \Sigma_R^+, \quad \partial S_{2,R}\ =\ \gamma_R^- \cup \Sigma_R^-,$$

где $\gamma_R^+ = \gamma_R^- = \gamma_R = \{(x, f(x)) : x \in [-R, R]\}$,

$\Sigma_R^+ = \{(x, z) : x^2 + z^2 = R^2, z > 0\}$, $\quad \Sigma_R^- = \{(x, z) : x^2 + z^2 = R^2, z < 0\}$, при этом γ_R^+ и γ_R^- отличаются направлением нормали:

$$\partial_{\nu(P)}\big|_{\gamma_R^+} = -\,\partial_{\nu(P)}\big|_{\gamma_R^-} = \partial_{\nu(P)}\big|_{\gamma_R}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\partial S_{1,R}} \left(w_1\,\partial_{\nu(P)}\overline{w}_1 - \overline{w}_1\,\partial_{\nu(P)}w_1\right) ds_P =$$

$$= \int\limits_{\gamma_R} \left(w_1\partial_{\nu(P)}\overline{w}_1 - \overline{w}_1\partial_{\nu(P)}w_1\right) ds_P + \int\limits_{\Sigma_R^+} \left(w_1\partial_{\nu(P)}\overline{w}_1 - \overline{w}_1\partial_{\nu(P)}w_1\right) ds_P,$$

$$\int\limits_{\partial S_{2,R}} \left(w_2\,\partial_{\nu(P)}\overline{w}_2 - \overline{w}_2\,\partial_{\nu(P)}w_2\right) ds_P =$$

$$= -\int\limits_{\gamma_R} \left(w_2\partial_{\nu(P)}\overline{w}_2 - \overline{w}_2\partial_{\nu(P)}w_2\right) ds_P + \int\limits_{\Sigma_R^-} \left(w_2\partial_{\nu(P)}\overline{w}_2 - \overline{w}_2\partial_{\nu(P)}w_2\right) ds_P.$$

Из условий сопряжения на γ_R получаем следующие равенства

$$[w_1 - w_2]\big|_{\gamma_R} = [(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2)]\big|_{\gamma_R} = [-u_0 + u_0]\big|_{\gamma_R} = 0,$$

$$\begin{aligned} &\left[p_1\,\partial_{\nu(P)}w_1 - p_2\,\partial_{\nu(P)}w_2\right]\big|_{\gamma_R} = \\ &= \left[p_1\,\partial_{\nu(P)}u_1 - p_2\,\partial_{\nu(P)}u_2\right]\big|_{\gamma_R} - \left[p_1\,\partial_{\nu(P)}v_1 - p_2\,\partial_{\nu(P)}v_2\right]\big|_{\gamma_R} = \\ &= \left[-\partial_{\nu(P)}u_0 + \partial_{\nu(P)}u_0\right]\big|_{\gamma_R} = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Если умножить (3.1) на $|p_1|^2$ и $|p_2|^2$ и сложить, то, с учетом формулы (3.2), получим в левой части

$$(4i\nu_1\rho_1)|p_1|^2 \int\limits_{S_{1,R}}\int |w_1|^2\,d\sigma + (4i\nu_2\rho_2)|p_2|^2 \int\limits_{S_{2,R}}\int |w_2|^2\,d\sigma.$$

Соответственно, в правой части получим

$$\int\limits_{\gamma_R} \left\{w_1\left(|p_1|^2\partial_\nu\overline{w}_1 - |p_2|^2\partial_\nu\overline{w}_2\right) - \overline{w}_1\left(|p_1|^2\partial_\nu w_1 - |p_2|^2\partial_\nu w_2\right)\right\} ds +$$

$$+|p_1|^2 \int\limits_{\Sigma_R^+} \left(w_1\partial_\nu\overline{w}_1 - \overline{w}_1\partial_\nu w_1\right) ds_P + |p_2|^2 \int\limits_{\Sigma_R^-} \left(w_2\,\partial_\nu\overline{w}_2 - \overline{w}_2\partial_\nu w_2\right) ds_P.$$

Здесь подразумевается, что $\nu = \nu(P)$. Обозначим через I_1 интеграл по γ_R, а через I_2 — сумму интегралов по границам Σ_R^+ и Σ_R^-.

Из (3.3) следует, что на границе γ_R выполнены соотношения

$$\overline{p}_1\,\partial_{\nu(P)}\overline{w}_1 \;=\; \overline{p}_2\,\partial_{\nu(P)}\overline{w}_2, \quad p_1\,\partial_{\nu(P)}w_1 \;=\; p_2\,\partial_{\nu(P)}w_2,$$

из которых получаем

$$\begin{aligned} I_1 \;=\; \int\limits_{\gamma_R} \left\{\bar{p}_1(p_1-p_2)w_1\,\partial_{\nu(P)}\overline{w}_1 - p_1(\bar{p}_1-\bar{p}_2)\overline{w}_1\,\partial_{\nu(P)}w_1\right\}\,ds_P = \\ = \int\limits_{\gamma_R}\left\{h(P)-\overline{h}(P)\right\}\,ds_P, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $h(P) \;=\; \bar{p}_1(p_1-p_2)\,w_1(P)\,\partial_{\nu(P)}\overline{w}_1(P), \quad P=(x,z)\in\gamma_R.$

Обозначим через w^* пару $\{w_1^*,\, w_2^*\}$, где $w_j^*(P)=u_j^*(P)-v_j^*(P)=(u_j(P)-\tilde{u}_j(P))-(v_j(P)-\tilde{v}_j(P))$. Поскольку решение задачи сопряжения на границе раздела двух полуплоскостей единственно, то $\tilde{u}_1(P)=\tilde{v}_1(P)$, $\tilde{u}_2(P)=\tilde{v}_2(P)$, откуда получаем, что $w_j^*(P)=u_j(P)-v_j(P)=w_j(P)$. Следовательно, функции $w_j(P)$ $(j=1,2)$ удовлетворяют условиям излучения

$$w_j = e^{i\,k_j\,r}\,O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial w_j}{\partial r} - ik_j\,w_j \;=\; e^{i\,k_j\,r}\,o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right). \tag{3.5}$$

Из второго условия (3.5) получаем для $j=1,2$:

$$\frac{\partial\overline{w}_j}{\partial r} = -i\overline{k}_j\overline{w}_j + e^{-i\,\overline{k}_j\,r}\,o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial w_j}{\partial r} = ik_jw_j + e^{i\,k_j\,r}\,o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right). \tag{3.6}$$

После подстановки этих выражений в I_2 приходим к соотношению

$$\begin{aligned} &|p_1|^2\int\limits_{\Sigma_R^+}\left\{w_1\left(-i\overline{k}_1\overline{w}_1+e^{-i\overline{k}_1r}o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\right)-\overline{w}_1\left(ik_1w_1+e^{ik_1r}o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\right)\right\}ds_P+ \\ &+|p_2|^2\int\limits_{\Sigma_R^-}\left\{w_2\left(-i\overline{k}_2\overline{w}_2+e^{-i\overline{k}_2r}o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\right)-\overline{w}_2\left(ik_2w_2+e^{ik_2r}o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\right)\right\}ds_P = \\ &= \;-(\overline{k}_1+k_1)i|p_1|^2\int\limits_{\Sigma_R^+}|w_1|^2\,ds_P \;-\; (\overline{k}_2+k_2)i|p_2|^2\int\limits_{\Sigma_R^-}|w_2|^2\,ds_P\,+ \end{aligned}$$

$$+\, o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\, |p_1|^2 \int\limits_{\Sigma_R^+} \left(w_1 e^{-i\,\overline{k}_1\,R} - \overline{w}_1 e^{i\,k_1\,R}\right)\, ds_P +$$

$$+\, o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\, |p_2|^2 \int\limits_{\Sigma_R^-} \left(w_2 e^{-i\,\overline{k}_2\,R} - \overline{w}_2 e^{i\,k_2\,R}\right)\, ds_P.$$

Заменив в этом соотношении функции w_j и $\overline{w}_j$ $(j = 1, 2)$ на асимптотические оценки из (3.10), получим тождество

$$-2\,i\,\nu_1\,|p_1|^2 \int\limits_{\Sigma_R^+} |w_1|^2\, ds_P \;-\; 2\,i\,\nu_2\,|p_2|^2 \int\limits_{\Sigma_R^-} |w_2|^2\, ds_P \,+$$

$$+\, o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\, |p_1|^2 \int\limits_{\Sigma_R^+} \left(O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \,-\, O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right)\, ds_P \,+$$

$$+\, o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\, |p_2|^2 \int\limits_{\Sigma_R^-} \left(O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \,-\, O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right)\, ds_P \;=$$

$$-2\,i\,\nu_1\,|p_1|^2 \int\limits_{\Sigma_R^+} |w_1|^2\, ds_P - 2\,i\,\nu_2\,|p_2|^2 \int\limits_{\Sigma_R^-} |w_2|^2\, ds_P \,+$$

$$+\, o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\, O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \left\{|p_1|^2 \int\limits_{\Sigma_R^+} ds_P \;+\; |p_2|^2 \int\limits_{\Sigma_R^-} ds_P\right\}.$$

Отсюда

$$-2\,i\,\nu_1\,|p_1|^2 \int\limits_{\Sigma_R^+} |w_1|^2\, ds_P \;-\; 2\,i\,\nu_2\,|p_2|^2 \int\limits_{\Sigma_R^-} |w_2|^2\, ds_P \;+\; o\left(\frac{1}{R}\right) R.$$

Таким образом, приходим к равенству

$$(4\,i\,\nu_1\,\rho_1)\,|p_1|^2 \int\limits_{S_{1,R}}\int |w_1|^2\, d\sigma \;+\; (4\,i\,\nu_2\,\rho_2)\,|p_2|^2 \int\limits_{S_{2,R}}\int |w_2|^2\, d\sigma \;=$$

$$= \int\limits_{\gamma_R} \left\{h(P) - \overline{h}(P)\right\}\, ds_P \;-\; 2\,i\,\nu_1\,|p_1|^2 \int\limits_{\Sigma_R^+} |w_1|^2\, ds_P \,- \qquad (3.6)$$

$$- 2\, i\, \nu_2\, |p_2|^2 \int\limits_{\Sigma_R^-} |w_2|^2\, ds_P \;+\; o\left(\frac{1}{R}\right) R.$$

Отделим действительную и мнимую части в соотношении (3.6) и перейдем к пределу при $R \to \infty$. В мнимой части получим

$$(4\,\nu_1\,\rho_1)\;|p_1|^2 \int\limits_{S_{1,R}}\!\!\int |w_1|^2\, d\sigma \;+\; (4\,\nu_2\,\rho_2)\;|p_2|^2 \int\limits_{S_{2,R}}\!\!\int |w_2|^2\, d\sigma \;+$$

$$+\, 2\nu_1 |p_1|^2 \int\limits_{\Sigma_R^+} |w_1|^2\, ds_P \;+\; 2\nu_2 |p_2|^2 \int\limits_{\Sigma_R^-} |w_2|^2\, ds_P \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

В левой части последнего соотношения все члены положительны, поэтому они стремятся к 0 в пределе при $R \to \infty$. Из

$$\int\limits_{S_{j,R}}\!\!\int |w_j|^2\, d\sigma \;\to\; 0 \quad \text{при} \quad R \;\to\; \infty$$

следует

$$\int\limits_{S_j}\!\!\int |w_j|^2\, d\sigma \;=\; 0,$$

откуда получаем, что при $\mathrm{Im}\; k_1 \;\geq\; 0$, $\mathrm{Im}\; k_2 \;\geq\; 0$ и $\mathrm{sign}\; (\mathrm{Re}\; k_1) \;=\; \mathrm{sign}\; (\mathrm{Re}\; k_2)$, в областях S_j имеет место тождество $w_j(x,z) \equiv 0$, $j = 1, 2$. Единственность классических решений рассмотренной задачи сопряжения доказана.

4. Представление решения

Рассмотрим функции

$$G_m(k; M, P) = \frac{\pi i}{2} \left\{ H_0^{(1)}(kr) + (-1)^m H_0^{(1)}(kr^*) \right\}, \quad m = 1, 2, \tag{4.1}$$

где $H_0^{(1)}(\cdot)$ — функция Ганкеля первого рода нулевого порядка (см., напр., [2, 4]), $M = (x,z)$, $P = (\tau, \xi)$,

$$r = \sqrt{(x-\tau)^2 + (z-\xi)^2}, \quad r^* = \sqrt{(x-\tau)^2 + (z+\xi)^2}.$$

Непосредственно из определения следует, что функция $G_m(k; M, P)$ имеет логарифмическую особенность при $M = P$.

Введем обобщенные потенциалы простого и двойного слоя

$$(\mathcal{V}_m(k)\varphi)\,(M) = \int\limits_{\Gamma^*} G_m(k; M, P)\varphi(\tau)\, ds_P, \quad M \notin \Gamma, \tag{4.2}$$

$$(\mathcal{W}_m(k)\psi)(M) = \int\limits_{\Gamma^*} \partial_{\nu(P)} G_m(k;M,P)\psi(\tau)\,ds_P, \quad M \notin \Gamma \tag{4.3}$$

с плотностями $\varphi, \psi \in \dot{C}^{(1)}[-d,d]$ (т.е. supp $\varphi \subseteq [-d,d]$, supp $\psi \subseteq [-d,d]$).

Эти выражения называют (см., напр., [5, 8, 13]) обобщенными потенциалами по той причине, что, в отличие от классических потенциалов, они рассматриваются на незамкнутой кривой.

Введем также интегральные операторы на Γ

$$(V_m(k)\varphi)(M) = \int\limits_{\Gamma^*} G_m(k;M,P)\varphi(\tau)\,ds_P, \quad M \in \Gamma, \tag{4.4}$$

$$(W_m(k)\psi)(M) = \int\limits_{\Gamma^*} \partial_{\nu(P)} G_m(k;M,P)\psi(\tau)\,ds_P, \quad M \in \Gamma. \tag{4.5}$$

Интегралы в соотношениях (4.4) и (4.5) понимаются в смысле главного значения.

Для обобщенных потенциалов выполнены те же предельные соотношения, что и для классических потенциалов простого и двойного слоя (см., напр., [2, 7, 10]), а именно,

$$(\mathcal{V}_m(k)\varphi)^{\pm} = V_m(k)\varphi, \tag{4.6}$$

$$(\partial_\nu \mathcal{V}_m(k)\varphi)^{\pm} = \mp\pi\varphi + W_m^T(k)\varphi, \tag{4.7}$$

$$(\mathcal{W}_m(k)\psi)^{\pm} = \pm\pi\psi + W_m(k)\psi, \tag{4.8}$$

$$(\partial_\nu \mathcal{W}_m(k)\psi)^{+} = (\partial_\nu \mathcal{W}_m(k)\psi)^{-}, \quad m = 1,2, \tag{4.9}$$

где через $W_m^T(k)$ обозначили интегральный оператор на Γ^* с ядром $\partial_{\nu(M)} G_m(k;M,P)$ $(m = 1,2)$.

Обозначим через $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$ решение вспомогательной задачи.

Будем искать решение задачи сопряжения (1.1) — (1.4) в виде

$$u_1(M) = v_1(M) + \widetilde{u}_1(M), \quad u_2(M) = v_2(M) + \widetilde{u}_2(M), \tag{4.10}$$

где $M \in S_j$, $j = 1,2$ и

$$v_j(M) = \frac{1}{p_j}\left\{(\mathcal{W}_1(k_j)\varphi)(M) + (\mathcal{V}_2(k_j)\psi)(M)\right\}. \tag{4.11}$$

Из первого условия сопряжения

$$-u_0|_\Gamma = [u_1 - u_2]|_\Gamma = [\widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2]|_\Gamma + [v_1 - v_2]|_\Gamma. \tag{4.12}$$

Поскольку $\Gamma\backslash\Gamma^* \subset \mathbb{R}$, то для $M \in \Gamma\backslash\Gamma^*$ имеем $r = r^*$, откуда следует равенство $G_2(M,P) = 0$. Из этого равенства получаем

$$[v_1 \;-\; v_2]|_{\Gamma\backslash\Gamma^*} \;=\; 0. \tag{4.13}$$

Соотношение

$$-u_0|_{\Gamma\backslash\Gamma^*} \;=\; [\widetilde{u}_1 \;-\; \widetilde{u}_2]|_{\Gamma\backslash\Gamma^*} \tag{4.14}$$

выполнено в силу того, что функции $\widetilde{u}_1(M)$ и $\widetilde{u}_2(M)$ являются решением вспомогательной задачи.

Для точки $M^* = (x^*, z^*) \in \Gamma^*$ справедливы следующие предельные соотношения

$$\lim_{\substack{M\to M^* \\ M\in S_j}} \int\limits_{\Gamma^*} \partial_{\nu(P)} G_1(k_j; M, P)\varphi(\tau)\, ds_P = \tag{4.15}$$

$$= \int\limits_{\Gamma^*} \partial_{\nu(P)} G_1(k_j; M, P)\varphi(\tau)\, ds_P \mp \pi\varphi(x^*), \quad j = 1, 2.$$

С помощью формул (4.12) — (4.15) приходим к интегральному уравнению

$$-\pi\,\frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2}\,\varphi(x) + \int\limits_{\Gamma^*} \{t_{11}(x,\tau)\varphi(\tau) + t_{12}(x,\tau)\psi(\tau)\}\; ds_P = q_1(x), \tag{4.16}$$

где $x \in [-d,\, d]$ и

$$t_{11}(x,\tau) = \frac{1}{p_1}\partial_{\nu(P)} G_1(k_1; M, P) - \frac{1}{p_2}\partial_{\nu(P)} G_1(k_2; M, P), \tag{4.17}$$

$$t_{12}(x,\tau) = \frac{1}{p_1}\, G_2(k_2; M, P) - \frac{1}{p_2}\, G_2(k_2; M, P), \tag{4.18}$$

$$q_1(x) = -u_0(M) - (\widetilde{u}_1(M) - \widetilde{u}_2(M))\,, \quad M = (x, f(x)),\ x \in [-d, d]. \tag{4.19}$$

Из второго условия сопряжения

$$\begin{gathered} -\partial_{\nu(M)} u_0(M)\big|_{\Gamma} = \big[p_1\, \partial_{\nu(M)} u_1(M) \;-\; p_2\, \partial_{\nu(M)} u_2(M)\big]\big|_{\Gamma} = \\ \big[p_1 \partial_{\nu(M)} \widetilde{u}_1(M) - p_2 \partial_{\nu(M)} \widetilde{u}_2(M)\big]\big|_{\Gamma} + \big[p_1 \partial_{\nu(M)} v_1(M) - p_2 \partial_{\nu(M)} v_2(M)\big]\big|_{\Gamma}. \end{gathered} \tag{4.20}$$

На участке границы $\Gamma \setminus \Gamma^*$ получаем

$$\partial_{\nu(M)} v_1(M)\big|_{\Gamma\backslash\Gamma^*} = \partial_{\nu(M)} v_2(M)\big|_{\Gamma\backslash\Gamma^*} = 0,$$

$$- \partial_{\nu(M)} u_0(M)\big|_{\Gamma\setminus\Gamma^*} = \partial_{\nu(M)} \left[\widetilde{u}_1(M) - \widetilde{u}_2(M)\right]\big|_{\Gamma\setminus\Gamma^*} .$$

Согласно свойствам правильной нормальной производной потенциала простого слоя (см., напр., [7, 10]) имеем для точки $M^* = (x^*, z^*) \in \Gamma^*$ при $j = 1, 2$:

$$\begin{gathered} \lim_{\substack{M\to M^* \\ M\in S_j}} \quad \partial_{\nu(M)} \int\limits_{\Gamma^*} G_2(k_j; M, P)\, \psi(\tau)\, ds_P \; = \\ = \int\limits_{\Gamma^*} \partial_{\nu(M)} G_2(k_j; M^*, P) \psi(\tau)\, ds_P \mp \pi\, \psi(x^*). \end{gathered} \tag{4.21}$$

С помощью этих соотношений приходим к уравнению

$$2\pi\psi(x) + \int\limits_{\gamma^*} \left\{ t_{21}(x,\tau)\varphi(\tau) + t_{22}(x,\tau)\psi(\tau) \right\}\, ds_P = q_2(x), \tag{4.22}$$

где $x \in [-a, a]$, $M = (x, f(x))$, $P = (\tau, f(\tau))$ и

$$t_{21}(x,\tau) = \partial^2_{\nu(M)\nu(P)} G_1\left(k_1; M, P\right) - \partial^2_{\nu(M)\nu(P)} G_1\left(k_2; M, P\right), \tag{4.23}$$

$$t_{22}(x,\tau) \; = \; \partial^2_{\nu(M)\nu(P)} G_2\left(k_1; M, P\right) - \partial^2_{\nu(M)\nu(P)} G_2\left(k_2; M, P\right), \tag{4.24}$$

$$q_2(x) \; = \; \partial_{\nu(M)} u_0(M) \; - \; \left[p_1 \partial_{\nu(M)} \widetilde{u}_1(M) \; - \; p_2 \partial_{\nu(M)} \widetilde{u}_2(M) \right]. \tag{4.25}$$

Таким образом, если предполагать, что решение задачи сопряжения представимо в виде (4.10), то плотности $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ обобщённых потенциалов, входящих в выражение (4.10), будут удовлетворять системе интегральных уравнений (4.16), (4.22). Полученную систему уравнений удобно записать в операторной форме

$$U\Psi \equiv \left(E - T\right)\Psi = F, \tag{4.26}$$

где

$$\begin{gathered} \Psi = (\varphi, \psi)^t, \quad F \equiv (F_1, F_2)^t = (q_1, q_2)^t, \\ E = \begin{pmatrix} -\pi\left(1/p_1 + 1/p_2\right) I & 0 \\ 0 & 2\pi I \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4.27}$$

Здесь через $(\cdot)^t$ обозначена операция транспонирования, через I обозначен единичный оператор, а обозначения T_{ij} (при $i, j = 1, 2$) используются для интегральных операторов на Γ^* с ядрами t_{ij}, определяемыми соотношениями (4.17), (4.18), (4.23) и (4.24).

Получим явные выражения для ядер интегральных уравнений (4.16) и (4.22). По определению функций $G_m\,(k_j; M, P)$

$$\partial_{\nu(P)}\, G_1\,(k_j; M, P) = \frac{\pi\, i}{2}\left[\partial_{\nu(P)}\, H_0^{(1)}\,(k_j\, r_{MP}) - \partial_{\nu(P)} H_0^{(1)}\,(k_j\, r_{MP}^*)\right] =$$
$$= \frac{\pi\, i}{2}\left[\frac{\partial\, H_0^{(1)}\,(\tau)}{\partial\, \tau}\, \partial_{\nu(P)} r_{MP} - \frac{\partial\, H_0^{(1)}\,(\tau^*)}{\partial\, \tau^*}\, \partial_{\nu(M)} r_{MP}^*\right].$$

Из соотношений для производных по нормали функций Ганкеля следует, что

$$\partial_{\nu(P)} G_1\,(k_j; M, P) =$$
$$= \frac{i\pi k_j}{2}\left[\frac{1}{r_{MP}} H_1^{(1)}(k_j r_{MP})\,\{(\tau - x) f'(\tau) + (f(x) - f(\tau))\} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r_{MP}^*} H_1^{(1)}(k_j r_{MP}^*)\,\{(x - \tau) f'(\tau) + (f(x) + f(\tau))\}\right], \quad j = 1, 2.$$

Отсюда и из выражения (4.18)

$$t_{11}(x, \tau) \ = \tag{4.28}$$
$$\frac{\pi i}{2}\left\{\left[\frac{k_1}{p_1 r} H_1^{(1)}(k_1 r) - \frac{k_2}{p_2 r} H_1^{(1)}(k_2 r)\right] \cdot [(\tau - x) f'(\tau) + (f(x) - f(\tau))] + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{k_1}{p_1 r^*} H_1^{(1)}(k_1\, r^*) - \frac{k_2}{p_2 r^*} H_1^{(1)}(k_2\, r^*)\right] \cdot [(x - \tau) f'(\tau) + (f(x) + f(\tau))]\right\},$$

где $r = \sqrt{(x-\tau)^2 + (f(x) - f(\tau))^2}$ и $r^* = \sqrt{(x-\tau)^2 + (f(x) + f(\tau))^2}$.

Функции $G_1\,(k_j; M, P)$, $(j = 1, 2)$ имеют логарифмическую особенность при $M = P$, согласно свойствам логарифмических потенциалов (см., напр., [2]) можно доопределить ядро $\partial_{\nu(P)} G_1\,(k_j; M, P)$ в точках совпадения аргументов, положив его значение равным половине кривизны граничной кривой в этой точке. Если обозначить кривизну в точке M через $\varkappa(M)$, то получаем

$$t_{11}(x, x) \ = \ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) \varkappa(M), \quad M = (x, f(x)) \in \Gamma^*. \tag{4.29}$$

Аналогично

$$t_{22}(x, \tau) = \frac{\pi i}{2} \sqrt{\frac{1 + (f'(\tau))^2}{1 + (f'(x))^2}} \times \tag{4.30}$$

$$\times \left\{ \left[k_1 H_1^{(1)}(k_1 r) - k_2 H_1^{(1)}(k_2 r) \right] \frac{(x-\tau)\, f'(x) + (f(\tau) - f(x))}{r} + \right.$$

$$\left. + \left[k_1 H_1^{(1)}(k_1 r^*) - k_2 H_1^{(1)}(k_2 r^*) \right] \frac{(x-\tau) f'(x) - (f(\tau) + f(x))}{r^*} \right\}.$$

Функции $G_2\,(k_j; M, P)$ $(j = 1, 2)$ имеют логарифмическую особенность при $M = P$ и $M = M^* = (x, -z)$. Как и в случае ядра $t_{11}(x, \tau)$, можно доопределить ядро $t_{22}(x, \tau)$ до непрерывной функции. Для этого будем считать, что значение функции $\partial_{\nu(M)} G_2\,(k_j; M, P)$ в точках $M = P$ и $M = M^*$ равно $\varkappa(M)/2$. Тогда

$$t_{22}\,(x, x) \;=\; 0, \quad t_{22}\,(x, x^*) \;=\; 0. \tag{4.31}$$

Приведем расчетные формулы для вычисления ядер $t_{12}\,(x, \tau)$ и $t_{21}\,(x, \tau)$. Имеем

$$\begin{aligned} t_{12}(x, \tau) \;=\; \frac{\pi i}{2} \Big\{ \frac{1}{p_1} \; \Big[H_0^{(1)}\,(k_1\, r_{MP}) \;-\; H_0^{(1)}\,(k_1\, r^*{}_{MP}) \Big] \;- \\ -\; \frac{1}{p_2} \; \Big[H_0^{(1)}\,(k_2\, r_{MP}) \;-\; H_0^{(1)}\,(k_2\, r^*{}_{MP}) \Big] \Big\}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned} t_{21}(x, \tau) = \frac{\pi\, i}{2}\, \partial^2_{\nu(M)\nu(P)} \Big\{ \Big[H_0^{(1)}\,(k_1\, r_{MP}) \;-\; H_0^{(1)}\,(k_2\, r_{MP}) \Big] + \\ +\; \Big[H_0^{(1)}\,(k_1\, r^*_{MP}) \;-\; H_0^{(1)}\,(k_2\, r^*_{MP}) \Big] \Big\}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Следовательно,

$$t_{21}(x, \tau) = -\frac{\pi i}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(k_1^2 H_0^{(1)}(k_1\, r^*_{MP}) - k_2^2 H_0^{(1)}(k_2\, r^*_{MP}) \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \left(k_1^2 H_2^{(1)}(k_1\, r^*_{MP}) - k_2^2 H_2^{(1)}(k_2\, r^*_{MP}) \right) \right] \partial_{\nu(M)} r^*_{MP} \partial_{\nu(P)} r^*_{MP} +$$

$$\left. + \left[k_1 H_1^{(1)}(k_1\, r^*_{MP}) - k_2 H_1^{(1)}(k_2\, r^*_{MP}) \right] \partial^2_{\nu(M)\nu(P)} r^*_{MP} \right\}.$$

Производные по нормали можно выразить через направляющие косинусы нормали:

$$\partial_{\nu(M)} r_{MP} = \frac{1}{r_{MP}} \left[(x-\tau) \cos \zeta^* + (z - \xi) \cos \eta^* \right],$$

$$\partial_{\nu(M)} r^*_{MP} = \frac{1}{r_{MP}} \left[(x-\tau) \cos \zeta^* + (z + \xi) \cos \eta^* \right],$$

$$\partial_{\nu(P)} r_{MP} = -\frac{1}{r_{MP}} \left[(x-\tau) \cos \hat{\zeta} + (z - \xi) \cos \hat{\eta} \right],$$

$$\partial_{\nu(P)} r^*_{MP} = -\frac{1}{r^*_{MP}} \left\{ (x-\tau)\cos\hat{\zeta} + (z+\xi)\cos\hat{\eta} \right\},$$

$$\partial^2_{\nu(M)\nu(P)} r_{MP} = \partial_{\nu(M)} \left(\partial_{\nu(P)} r_{MP} \right) =$$

$$= \frac{1}{\left(r^*_{MP}\right)^3} \left[(x-\tau)\cos\hat{\zeta} + (z+\xi)\cos\hat{\eta} \right] \left[(x-\tau)\cos\zeta^* + (z+\xi)\cos\eta^* \right] -$$

$$- \frac{1}{r^*_{MP}} \left[\cos\hat{\zeta}\,\cos\zeta^* - \cos\hat{\eta}\cos\eta^* \right],$$

где $\cos\zeta^*$, $\cos\eta^*$ — направляющие косинусы нормали в точке $M = (x, z)$, а $\cos\hat{\zeta}$, $\cos\hat{\eta}$ — направляющие косинусы нормали в точке $P = (\tau, \xi)$.

С помощью полученных соотношений, а также формул для направляющих косинусов, приходим к следующей расчётной формуле

$$\begin{aligned}
t_{21}(x,\tau) \; = \\
= -\frac{\pi i}{4} \left\{ \left[k_1^2 H_0^{(1)}(k_1 r) - k_2^2 H_0^{(1)}(k_2 r) \right] - \left[k_1^2 H_2^{(1)}(k_1 r) - k_2^2 H_2^{(1)}(k_2 r) \right] \right\} \cdot b - \\
-\frac{\pi i}{2} \left[k_1 H_1^{(1)}(k_1 r) - k_2 H_1^{(1)}(k_2 r) \right] \cdot c - \\
-\frac{\pi i}{4} \left\{ \left[k_1^2 H_0^{(1)}(k_1 r^*) - k_2^2 H_0^{(1)}(k_2 r^*) \right] - \left[k_1^2 H_2^{(1)}(k_1 r^*) - k_2^2 H_2^{(1)}(k_2 r^*) \right] \right\} \cdot b^* - \\
-\frac{\pi i}{2} \left[k_1 H_1^{(1)}(k_1 r^*) - k_2 H_1^{(1)}(k_2 r^*) \right] \cdot c^*.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Здесь

$$b = -\frac{\left[(x-\tau) f'(\tau) + (f(x) - f(\tau)) \right] \left[(x-\tau) f'(x) + (f(x) - f(\tau)) \right]}{r^2 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}},$$

$$c = \frac{\left[(\tau - x) f'(\tau) + (f(x) - f(\tau)) \right] \left[(\tau - x) f'(x) + (f(x) - f(\tau)) \right]}{r^3 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}} -$$

$$- \frac{f'(\tau) f'(x) + 1}{r \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}},$$

$$b^* = -\frac{\left[(x-\tau) f'(\tau) + (f(x) + f(\tau)) \right] \left[(x-\tau) f'(x) + (f(x) + f(\tau)) \right]}{r^{*2} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}},$$

$$c^* = \frac{[(\tau - x)f'(\tau) + (f(x) + f(\tau))]\,[(\tau - x)f'(x) + (f(x) + f(\tau))]}{(r^*)^3\sqrt{1 + (f'(x))^2}} -$$
$$- \frac{f'(\tau)f'(x) + 1}{r^*\sqrt{1 + (f'(x))^2}},$$
где $r = \sqrt{(x-\tau)^2 + (f(x) - f(\tau))^2}$ и $r^* = \sqrt{(x-\tau)^2 + (f(x) + f(\tau))^2}$.

5. Существование классического решения

Лемма 5.1. *В условиях теоремы 3.1 однородная система интегральных уравнений*
$$(E - T)\,\Psi = 0, \tag{5.1}$$
где E и T определены соотношением (4.27), имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Пусть $\Psi = (\varphi, \psi)^t$ — ненулевое классическое решение рассматриваемой однородной системы интегральных уравнений.

С помощью формулы (4.11) построим функции v_1 и v_2, используя функции φ и ψ как плотности потенциалов.

Поскольку функции v_1 и v_2 представляют собой сумму обобщённых потенциалов, то они удовлетворяют уравнению Гельмгольца, а также условиям излучения на бесконечности вида (1.4). Соотношения (4.6) и (4.8) позволяют вычислить значения этих функций в точках $M^* = (x^*, z^*)$, принадлежащих границе Γ:
$$(v_j)^{\pm}(M^*) \;=\; \lim_{M \to M^*\ S_j} v_j(M) = \mp\frac{\pi}{p_j}\varphi(x^*) + \tag{5.2}$$
$$+\frac{1}{p_j}\int\limits_{\Gamma^*}\left\{\partial_{\nu(P)}G_1\left(k_j; M^*, P\right)\varphi(\tau) + G_2\left(k_j; M^*, P\right)\psi(\tau)\right\}ds_P, j = 1, 2,$$

Из этих соотношений получаем, что на границе раздела сред выполнены равенства
$$\left((v_1)^+ \;-\; (v_2)^-\right)\,(P^*) \;=$$
$$= 2\pi\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right)\varphi(x^*) + \int\limits_{\Gamma^*}\left\{t_{11}(x^*,\tau)\varphi(\tau) + t_{12}(x^*,\tau)\psi(\tau)\right\}\,ds_P.$$

Правая часть этого соотношения является первым уравнением системы интегральных уравнений (5.1), а поскольку $\{\varphi,\, \psi\}$ является решением этой системы, приходим к выводу, что
$$[v_1 \;-\; v_2]|_{\Gamma} \;=\; 0. \tag{5.3}$$

Далее из соотношений (4.7) и (4.9) при $j = 1, 2$ получаем

$$\left(\partial_{\nu(M^*)} v_j\right)^{\pm}(M^*) = \lim_{M \to M^* \; S_j} \partial_{\nu(M)} v_j(P) = \mp \frac{\pi}{p_j}\,\psi(x^*) \; + \tag{5.4}$$

$$+\frac{1}{p_j}\int\limits_{\Gamma}\left\{\partial^2_{\nu(M^*)\nu(P)} G_1\left(k_j; M^*, P\right)\varphi(\tau) + \partial_{\nu(M^*)} G_2\left(k_j; M^*, P\right)\psi(\tau)\right\} ds_P.$$

Из этого соотношения получаем

$$\left[p_1\left(\partial_{\nu(M^*)} v_1\right)^+ - p_2\left(\partial_{\nu(M^*)} v_2\right)^-\right](M^*) = 2\pi\psi(x^*) +$$

$$+\int\limits_{\Gamma^*}\left\{t_{21}(x^*, \tau)\varphi(\tau) + t_{22}(x^*, \tau)\,\psi(\tau)\right\} ds_P, \quad M^* \in \Gamma.$$

Правая часть последнего соотношения совпадает со вторым уравнением рассматриваемой в лемме системы интегральных уравнений и, поэтому, равна 0. Следовательно, выполнено граничное условие

$$\left[p_1 \partial_{\nu(M)} v_1(M) - p_2 \partial_{\nu(M)} v_2(M)\right]\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{5.5}$$

Таким образом, $\{v_1, v_2\}$ является решением однородной задачи сопряжения. В силу теоремы о единственности классического решения задачи сопряжения получаем, что

$$v_1(M) = 0 \text{ для } M \in S_1, \quad v_2(M) = 0 \text{ для } M \in S_2. \tag{5.6}$$

Определим функции

$$w_1(M) = \int\limits_{\Gamma^*}\left\{\partial_{\nu(P)} G_1\left(k_2; M, P\right)\varphi(\tau) + \frac{1}{p_2} G_2\left(k_2; M, P\right)\psi(\tau)\right\} ds_P,$$

$$w_2(M) = -\int\limits_{\Gamma^*}\left\{\partial_{\nu(P)} G_1\left(k_1; M, P\right)\varphi(\tau) + \frac{1}{p_2} G_2\left(k_1; M, P\right)\psi(\tau)\right\} ds_P$$

при $M \in S_1$ и $M \in S_2$ соответственно.

С помощью формулы о скачке значений потенциала двойного слоя на границе получаем

$$\left(w_1\right)^+(M^*) = -\pi\varphi(x^*) + \tag{5.7}$$

$$+\int\limits_{\Gamma^*}\left\{\partial_{\nu(P)} G_1\left(k_2; M^*, P\right)\varphi(\tau) \; + \frac{1}{p_2} G_2\left(k_2; M^*, P\right)\psi(\tau)\right\} ds_P,$$

$$(w_2)^-(M^*) = -\pi\varphi(x^*) - \tag{5.8}$$
$$- \int\limits_{\Gamma^*} \left\{ \partial_{\nu(P)} G_1(k_1; M, P)\, \varphi(\tau) + \frac{1}{p_1} G_2(k_1; M^*, P)\, \psi(\tau) \right\} ds_P.$$

Из соотношений (5.2) и (5.7)

$$\Big((w_1)^+(M^*) - p_2\,(v_2)^-(M^*) \Big) = -2\,\varphi(x^*), \quad M^* \in \Gamma. \tag{5.9}$$

Из равенств (5.2), (5.7) приходим к соотношению

$$\Big(p_1\,(v_1)^+(M^*) + (w_2)^-(M^*) \Big) = -2\,\varphi(x^*), \quad M^* \in \Gamma. \tag{5.10}$$

Как следствие формул (5.9) и (5.10) получаем

$$\big((w_1)^+ - (w_2)^- \big)(M^*) = p_1\,(v_1)^+(M^*) + p_2\,(v_2)^-(M^*).$$

Из (5.6) следует, что правая часть последнего выражения равна нулю, поэтому выполнено следующее условие на границе

$$[w_1 - w_2]\big|_\Gamma = 0. \tag{5.11}$$

В свою очередь, формула о скачке значений правильной нормальной производной потенциала простого слоя приводит к соотношениям:

$$\big(\partial_{\nu(M^*)} w_1\big)^+(M^*) = \frac{\pi}{p_2}\,\psi(x^*) + \tag{5.12}$$
$$+ \int\limits_{\Gamma} \left\{ \partial^2_{\nu(M^*)\nu(P)} G_1(k_2; M^*, P)\, \varphi(\tau) + \frac{1}{p_2} \partial_{\nu(M^*)} G_2(k_2; M^*, P)\, \psi(\tau) \right\} ds_P,$$
$$\big(\partial_{\nu(M^*)} w_2\big)^-(M^*) = \frac{\pi}{p_1}\,\psi(x^*) -$$
$$- \int\limits_{\Gamma} \left\{ \partial^2_{\nu(M^*)\nu(P)} G_1(k_1; M^*, P)\, \varphi(\tau) + \frac{1}{p_1} \partial_{\nu(M^*)} G_2(k_1; M^*, P)\, \psi(\tau) \right\} ds_P.$$

Из соотношений (5.4) и (5.12) получаем

$$\big(\partial_{\nu(M^*)} w_1\big)^+(M^*) - \big(\partial_{\nu(M^*)} v_2\big)^-(M^*) = \frac{2\,\pi}{p_2}\,\psi(x^*), \tag{5.13}$$

$$\big(\partial_{\nu(M^*)} v_1\big)^+(M^*) + \big(\partial_{\nu(M^*)} w_2\big)^-(M^*) = \frac{2\,\pi}{p_1}\,\psi(x^*). \tag{5.14}$$

Из последних равенств находим

$$p_2 \left(\partial_{\nu(M^*)} w_1\right)^+ (M^*) - p_1 \left(\partial_{\nu(M^*)} w_2\right)^- (M^*) =$$
$$= p_1 \left(\partial_{\nu(M^*)} v_1\right)^+ (M^*) + p_2 \left(\partial_{\nu(M^*)} v_1\right)^- (M^*).$$

Правая часть последнего соотношения, как следует из (5.6), равна нулю, поэтому на границе выполнено условие

$$\left[p_2\, \partial_{\nu(M)} w_1 \;-\; p_1\, \partial_{\nu(M)} w_2\right]\Big|_\Gamma \;=\; 0. \tag{5.15}$$

Функции w_1, w_2, так же как и функции v_1, v_2, удовлетворяют уравнению Гельмгольца, и для них справедливы условия излучения на бесконечности. Следовательно, учитывая (5.11) и (5.15), приходим к выводу, что функции $\{w_1, w_2\}$ являются решением задачи сопряжения

$$\begin{gathered} \triangle w_1(M) \;+\; {k_2}^2\, v_1(M) \;=\; 0, \quad M \in S_1, \\ \triangle w_2(M) \;+\; {k_1}^2\, v_2(M) \;=\; 0, \quad M \in S_2, \\ \left[w_1 \;-\; w_2\right]\big|_\Gamma \;=\; 0, \quad \left[p_2\, \partial_{\nu(M)} w_1 \;-\; p_1\, \partial_{\nu(M)} w_2\right]\Big|_\Gamma \;=\; 0. \end{gathered} \tag{5.16}$$

В соответствии с теоремой единственности решения задачи сопряжения получаем, что справедливы равенства

$$w_1(M) \;=\; 0, \quad M \in S_1, \qquad w_2(M) \;=\; 0, \quad M \in S_2. \tag{5.17}$$

Учитывая соотношения (5.6) и (5.17), получаем из (5.9), (5.13), что на границе Γ выполнены тождества $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 5.2. *В условиях теоремы 3.1 существует нетривиальное решение системы интегральных уравнений*

$$U\Psi \equiv (E - T)\,\Psi = F,$$

где E, T и F определены соотношениями (4.27).

Доказательство. Покажем, что рассматриваемая система интегральных уравнений является фредгольмовой.

С помощью соотношений (4.28) и (4.30) ядра t_{11}, t_{22} доопределены до непрерывных функций. Особенность ядра t_{12} при $M = P$ и $M = M^*$ определяется поведением функции $H_0^{(1)}$, она имеет вид

$$\left(\frac{1}{p_1} \;-\; \frac{1}{p_2}\right) \ln \frac{1}{r_{MP}} \quad \text{при } M = P,$$

$$\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) \ln \frac{1}{r^*{}_{MP}} \quad \text{при}\, M = M^*.$$

Особенность ядра t_{21} при $M = P$ определяется разностями

$$k_1^2 H_0^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2^2 H_0^{(1)}(k_2 r_{MP}), \quad k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2 H_1^{(1)}(k_2 r_{MP}),$$

$$k_1^2 H_2^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2^2 H_2^{(1)}(k_2 r_{MP}). \tag{5.18}$$

Заметим, что

$$H_\nu^{(1)}(\tau) \,=\, J_\nu(\tau) \,+\, i\, Y_\nu(\tau), \quad \nu = 0, 1, \ldots \tag{5.19}$$

и при малых значениях аргумента имеют место соотношения

$$J_\nu(\tau) \,\sim\, \left(\frac{\tau}{2}\right)^\nu / \,\Gamma(\nu+1), \qquad \nu = 1, 2, \tag{5.20}$$

$$Y_0(\tau) \,\sim\, \frac{2}{\pi} \ln\tau, \quad Y_\nu(\tau) \,\sim\, -\frac{1}{\pi}\,\Gamma(\nu)\,\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-\nu}, \quad \nu = 1, 2. \tag{5.21}$$

Следовательно, в пределе при $M \to P$ имеем

$$k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2 H_1^{(1)}(k_2 r_{MP}) \sim$$

$$\sim -k_1 \left(\frac{k_1 r_{MP}}{2}\right)^{-1} + k_2 \left(\frac{k_2 r_{MP}}{2}\right)^{-1} = -\frac{2}{r_{MP}} + \frac{2}{r_{MP}} = 0,$$

$$k_1^2 H_2^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2^2 H_2^{(1)}(k_2 r_{MP}) \sim$$

$$\sim -k_1^2 \left(\frac{2}{k_1 r_{MP}}\right)^2 + k_2^2 \left(\frac{2}{k_2 r_{MP}}\right)^2 = 0.$$

Таким образом, особенность ядра t_{21} определяется только слагаемым $k_1^2 H_0^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2^2 H_0^{(1)}(k_2 r_{MP})$ и равна $\left(k_1^2 - k_2^2\right) \ln r_{MP}$.

Можем заключить, что ядра рассматриваемой системы интегральных уравнений либо непрерывны либо имеют логарифмическую особенность. Характер этой особенности таков, что для любой замкнутой области D имеет место неравенство (см., напр. [10])

$$\int\limits_D \int\limits_D |G_m\,(k_j; M, P)|^2 \; ds_M\, ds_P \,<\, \infty. \tag{5.22}$$

Поскольку плотности обобщённых потенциалов можно непрерывно продолжить нулем на замкнутый контур, содержащий Γ^*, то эти потенциалы можно рассматривать как определенные на замкнутом контуре и, следовательно, для них имеет место соотношение (5.22). Поскольку ядра $t_{12}(x,\tau)$, $t_{21}(x,\tau)$ являются комбинациями функций $G_m\,(k_j;M,P)$ и их нормальных производных, то интегральные операторы с ядрами $t_{12}(x,\tau)$ и $t_{21}(x,\tau)$ имеют интегрируемую особенность.

Таким образом, рассматриваемая в лемме система интегральных уравнений является фредгольмовой и существование нетривиального решения вытекает как следствие теории Фредгольма.

Теорема 5.1. *В условиях теоремы 3.1 существует классическое решение задачи сопряжения* (1.1) — (1.4).

Доказательство. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$-\pi\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)\varphi(x)+\int\limits_{\Gamma^*}\left\{t_{11}(x,\tau)\varphi(\tau)+t_{12}(x,\tau)\psi(\tau)\right\}\,ds_P=q_1(x),$$

$$2\pi\psi(x)+\int\limits_{\Gamma^*}\left\{t_{21}(x,\tau)\varphi(\tau)+t_{22}(x,\tau)\psi(\tau)\right\}\,ds_P\;=\;q_2(x),$$

где $t_{ij}(x,\tau)$ определены соотношениями (4.17), (4.18), (4.23) и (4.24), а $q_i(x)$ — соотношениями (4.19) и (4.25).

Как следует из леммы 5.2, существует нетривиальное классическое решение $\{\varphi,\psi\}$ этой системы интегральных уравнений.

Рассмотрим функции

$$u_1\,(M)\;=\;\widetilde{u}_1\,(M)\;+\;v_1(M),\quad M\in S_1,$$

$$u_2(M)\;=\;\widetilde{u}_2\,(M)\;+\;v_2(M),\quad M\in S_2,$$

где функции v_1 и v_2 построены по формуле (4.11), причем функции φ и ψ используются как плотности обобщенных потенциалов.

Поскольку функции $u_j(M)$ $(j=1,2)$ являются комбинациями функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца и условиям излучения на бесконечности, получаем, что $u_j(M)$ также удовлетворяют уравнению Гельмгольца и условиям излучения.

Проводя те же выкладки, что и ранее, приходим к системе интегральных уравнений (4.16), (4.22). Поскольку $\{\varphi,\psi\}$ — решение этой системы, приходим к выводу, что для функций u_1 и u_2 выполнены условия сопряжения на границе.

Следовательно, функции u_1,u_2 являются решением задачи сопряжения (1.1) — (1.4).

Теорема 5.2. *В условиях теоремы 3.1 справедливы следующие утверждения.*

Всякое решение $\{u_1, u_2\}$ задачи сопряжения (1.1) — (1.4) допускает интегральное представление

$$u_1(M) \,=\, \widetilde{u}_1(M) \,+\, v_1(M), \quad M \in S_1,$$
$$u_2(M) \,=\, \widetilde{u}_2(M) \,+\, v_2(M), \quad M \in S_2, \tag{5.23}$$

где $\{\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2\}$ — решение вспомогательной задачи, а v_1 и v_2 определены формулой (4.11) с плотностями φ и ψ, полученными как решение системы интегральных уравнений

$$(E - T)\,\Psi = F, \tag{5.24}$$

где E, T и $F = (\varphi, \psi)^t$ определены соотношениями (4.27).

С другой стороны, если $\{\varphi(x), \psi(x)\}$ — решение системы интегральных уравнений (5.24), то функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$, построенные с помощью соотношения (5.23) с плотностями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, являются решением задачи сопряжения (1.1) — (1.4).

Доказательство. Обозначим множество классических решений задачи сопряжения (1.1) — (1.4) через D. Рассмотрим также множество Q, состоящее из пар $(\widetilde{u}_1 + v_1, \widetilde{u}_2 + v_2)$, где $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$ — решение вспомогательной задачи, а функции v_1 и v_2 построены по формулам (4.11), причем в качестве плотностей потенциалов берутся решения φ, ψ системы уравнений (5.24). Из теоремы существования следует, что $Q \neq \{(0,0)\}$.

Как было показано, функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$, построенные по формулам (5.23) с плотностями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, полученными как решение системы интегральных уравнений (5.24), являются решением задачи сопряжения (1.1) — (1.4). Из свойств обобщённых потенциалов следует, что эти функции являются классическими решениями. Таким образом, имеет место включение $Q \subseteq D$. Далее, из теоремы о единственности решения задачи сопряжения получаем, что $|D| \leq 1$. Следовательно, $\{(0,0)\} \neq Q = D$ и $|D| = 1$. Последние равенства означают эквивалентность задачи сопряжения (1.1) — (1.4) и системы интегральных уравнений (5.24).

6. Алгоритм приближённого решения

На основании теоремы эквивалентности 5.2 заключаем, что для вычисления приближенного решения задачи сопряжения мы можем использовать методы приближенного решения интегральных уравнений, а для обоснования алгоритмов — применить разработанную для интегральных уравнений методику обоснования вычислительных схем (см., напр., [3]).

Приближенное решение задачи сопряжения строится по формуле (4.10), плотности φ и ψ при этом заменяются на функции φ^* и ψ^*, полученные в результате решения системы интегральных уравнений (4.26) одним из приближенных методов.

Для решения системы интегральных уравнений будем использовать метод сплайн–коллокации.

Задача сопряжения эквивалентна системе интегральных уравнений

$$K_1(\varphi,\psi) \equiv \varphi(x) + \int\limits_{-d}^{d} \{t_{11}(x,\tau)\varphi(\tau) + t_{12}(x,\tau)\psi(\tau)\}\, d\tau = q_1(x), \tag{6.1}$$

$$K_2(\varphi,\psi) \equiv \psi(x) + \int\limits_{-d}^{d} \{t_{21}(x,\tau)\varphi(\tau) + t_{22}(x,\tau)\psi(\tau)\}\, d\tau = q_2(x). \tag{6.2}$$

Ядра $t_{11}(x,\tau)$, $t_{22}(x,\tau)$ непрерывны, а $t_{12}(x,\tau)$, $t_{21}(x,\tau)$, согласно формулам (4.20), (4.21), можно представить в виде

$$t_{12}(x,\tau) \;=\; \ln|x-\tau|\,\mu_{12}(x,\tau) \;+\; \hat{t}_{12}(x,\tau),$$

$$t_{21}(x,\tau) = \ln|x-\tau|\,\mu_{21}(x,\tau) \;+\; \hat{t}_{21}(x,\tau),$$

где $\mu_{12}(x,\tau)$, $\mu_{12}(x,\tau)$, $\hat{t}_{12}(x,\tau)$, $\hat{t}_{21}(x,\tau)$ — гладкие функции.

Решение системы (5.25) — (5.26) ищем в виде сплайнов

$$\varphi_n^l(x) = \sum_{j=0^l}^{n} c_j^l s_j^l(x),\;\; \psi_n^m(x) = \sum_{j=0^m}^{n} d_j^m s_j^m(x),\;\; l,m = 0,1,\ldots;\;\, 0^0 = 1. \tag{6.3}$$

Через $s_j^l(x)$ обозначены фундаментальные сплайны порядка l на сетке

$$-d \;=\; x_0 \;<\; x_1 \;<\; \ldots \;<\; x_{n-1} \;< x_n \;=\; d \tag{6.4}$$

с условием

$$\delta_n \;=\; \max_{1\le j\le n}\,(x_j - x_{j-1}) \to 0, \quad n\to\infty.$$

Неизвестные коэффициенты c_j^l $(j=\overline{0^l,n})$, d_j^m $(j=\overline{0^m,n})$ определяем из условий

$$\begin{aligned} \big((K_1(\varphi_n^l,\psi_n^m)\big)\,(x_j) \;&=\; q_1(x_j), \quad j=\overline{0^l,n},\\ \big((K_2\varphi_n^l,\psi_n^m)\big)\,(x_j) \;&=\; q_2(x_j), \quad j=\overline{0^m,n}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

В случае ступенчатого метода сплайн–коллокации приближённое решение ищем в виде сплайнов нулевого порядка

$$\varphi_n^0(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} c_j^0\, s_j^0(x), \qquad \psi_n^0(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} d_j^0\, s_j^0(x), \tag{6.6}$$

где $s_j^0(x)$ — фундаментальные сплайны нулевого порядка.

Из (6.5) получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $\{c_j^0,\, d_j^0\}$:

$$\begin{aligned} c_j^0 \;+\; \sum_{k=1}^{n} \left(c_k^0\, \alpha_{jk}^0 \;+\; d_k^0\, \beta_{jk}^0\right) \;&=\; q_1(x_j), \\ d_j^0 \;+\; \sum_{k=1}^{n} \left(c_k^0\, \sigma_{jk}^0 \;+\; d_k^0\, \zeta_{jk}^0\right) \;&=\; q_2(x_j), \end{aligned} \qquad j = \overline{1, n}. \tag{6.7}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_{jk}^0 \;&=\; \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} t_{11}(x_j,\tau)\, s_k^0(\tau)\, d\tau, \quad & \beta_{jk}^0 \;&=\; \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} t_{12}(x_j,\tau)\, s_k^0(\tau)\, d\tau, \\ \sigma_{jk}^0 \;&=\; \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} t_{21}(x_j,\tau)\, s_k^0(\tau)\, d\tau, \quad & \zeta_{jk}^0 \;&=\; \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} t_{22}(x_j,\tau)\, s_k^0(\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Систему (6.7) можно записать в виде

$$A\, e \;=\; b, \tag{6.9}$$

где $A \;=\; [a_{jk}]_{2n,2n}$,

$$a_{jk} \;=\; \begin{cases} \alpha_{jk}^0 + \delta_{jk}, & j,\, k = \overline{1, n}, \\ \beta_{j\,k-n}^0, & j = \overline{1, n},\; k = \overline{n+1, 2n}, \\ \sigma_{j-n\,k}^0, & j = \overline{n+1, 2n},\; k = \overline{1, n}, \\ \zeta_{j-n\,k-n}^0 + \delta_{jk}, & j = \overline{n+1, 2n},\; k = \overline{n+1, 2n}, \end{cases} \tag{6.10}$$

здесь δ_{jk} — символ Кронекера,

$$e = (e_k)_1^{2n} = \left(c_1^0, \ldots, c_n^0, d_1^0, \ldots, d_n^0\right)^t, \tag{6.11}$$

$$b = (b_j)_1^{2n} = (q_1(x_1), \ldots, q_1(x_n), q_2(x_1), \ldots, q_2(x_n))^t\,. \qquad (6.12)$$

В полигональном методе сплайн–коллокации приближённое решение системы интегральных уравнений ищем в виде сплайнов первого порядка

$$\varphi_n^1(x) \;=\; \sum_{j=0}^{n} c_j^1\, s_j^1(x), \qquad \psi_n^1(x) \;=\; \sum_{j=0}^{n} d_j^1\, s_j^1(x), \qquad (6.13)$$

где $s_j^1(x)$ — фундаментальные сплайны первого порядка.

Неизвестные коэффициенты c_j^1, d_j^1 $(j = \overline{0,n})$ определяем по методу сплайн–коллокации из системы линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} c_j^1 \;+\; \sum_{k=0}^{n}\left(c_k^1\,\alpha_{jk}^1 \;+\; d_k^1\,\beta_{jk}^1\right) \quad &= \; q_1(x_j),\\ d_j^1 \;+\; \sum_{k=0}^{n}\left(c_k^1\,\sigma_{jk}^1 \;+\; d_k^1\,\zeta_{jk}^1\right) \quad &= \; q_2(x_j),\end{aligned}\right. \quad j \;=\; \overline{0,n}, \qquad (6.14)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{jk}^1 \;&=\; \int_{-d}^{d} t_{11}(x_j,\tau)\, s_k^1(\tau)\, d\tau, \quad \beta_{jk}^1 \;=\; \int_{-d}^{d} t_{12}(x_j,\tau)\, s_k^1(\tau)\, d\tau,\\ \sigma_{jk}^1 \;&=\; \int_{-d}^{d} t_{21}(x_j,\tau)\, s_k^1(\tau)\, d\tau, \quad \zeta_{jk}^1 \;=\; \int_{-d}^{d} t_{22}(x_j,\tau)\, s_k^1(\tau)\, d\tau.\end{aligned} \qquad (6.15)$$

Используя определение фундаментальных сплайнов первого порядка, можно переписать соотношения (6.15) в виде

$$\alpha_{jk}^1 = \tau_{jk}^{11}, \quad \beta_{jk}^1 = \tau_{jk}^{12}, \quad \sigma_{jk}^1 = \tau_{jk}^{21}, \quad \zeta_{jk}^1 = \tau_{jk}^{22}, \qquad (6.16)$$

где

$$\tau_{j0}^{im} \;=\; \frac{1}{x_1 - x_0}\int_{x_0}^{x_1} t_{im}(x_j,\tau)(x_1 - \tau)\, d\tau, \quad j = \overline{0,n}, \quad i,m = 1,2,$$

$$\begin{aligned}\tau_{jk}^{im} \;=\; &\frac{1}{x_k - x_{k-1}}\int_{x_{k-1}}^{x_k} t_{im}(x_j,\tau)\,(\tau - x_{k-1})\, d\tau \;+\\ &+\; \frac{1}{x_{k+1} - x_k}\int_{x_k}^{x_{k+1}} t_{im}(x_j,\tau)\,(x_{k+1} - \tau)\, d\tau,\end{aligned} \qquad (6.17)$$

$$\tau_{jn}^{im} = \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} t_{im}(x_j, \tau)(\tau - x_{n-1})\, d\tau,$$

$$j \;=\; \overline{0,\, n}, \quad k \;=\; \overline{1,\, n-1}, \quad i,\, m \;=\; 1,\, 2.$$

Заметим, что система (6.14) в матричной форме имеет вид

$$A\, e \;=\; b, \tag{6.18}$$

где $A = [a_{jk}]_{2n+2, 2n+2}$,

$$a_{jk} \;=\; \begin{cases} \alpha_{jk}^1 + \delta_{jk}, & j, k = \overline{0, n}, \\ \beta_{j\, k-n-1}^1, & j = \overline{0, n}, k = \overline{n+1, 2n+1}, \\ \sigma_{j-n-1\, k}^1, & j = \overline{n+1, 2n+1}, k = \overline{0, n}, \\ \zeta_{j-n-1\, k-n-1}^1 + \delta_{jk}, & j = \overline{n+1, 2n+1}, k = \overline{n+1, 2n+1}, \end{cases}$$

$$e = (e_k)_0^{2n+1} = \left(c_0^1, \ldots, c_n^1, d_0^1, \ldots, d_n^1\right)^t,$$

$$b = (b_j)_0^{2n+1} = \left(q_1(x_0), \ldots, q_1(x_n), q_2(x_0), \ldots, q_2(x_n)\right)^t.$$

7. Обоснование вычислительной схемы

При обосновании вычислительной схемы будем опираться на методику и результаты работы [3].

Пусть X и Y — произвольные нормированные пространства, а X_n и Y_n — их произвольные конечномерные подпространства одинаковой размерности, где $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим линейные операторные уравнения: точное —

$$K\, f \;=\; g \quad (f \in X,\; g \in Y) \tag{7.1}$$

и соответствующее ему приближённое —

$$K_n\, f_n \;=\; g_n \quad (f_n \in X_n,\; g_n \in Y_n)\,, \tag{7.2}$$

где K и K_n — аддитивные и однородные операторы, действующие из X в Y и из X_n в Y_n соответственно.

Согласно теореме 7 гл. I [3], если для уравнений (7.1) и (7.2) выполнены условия: i) оператор K ограниченно обратим; ii) $\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\| \to 0$ и $\delta_n \equiv \|g - g_n\| \to 0$, $n \to \infty$, то для всех $n \in \mathbb{N}$, таких, что $q_n \equiv \left\|K^{-1}\right\| \varepsilon_n < 1$, уравнения $K_n f_n = g_n$ однозначно разрешимы и $\left\|K_n^{-1}\right\| \leq \left\|K^{-1}\right\| / (1 - q_n)$, $\|f - f_n| = O\left(\varepsilon_n + \delta_n\right) \to 0$ при $n \to \infty$.

Обозначим через P_n^l оператор, который любой непрерывной функции φ ставит в соответствие её интерполяционный сплайн степени l:

$$P_n^l \varphi \;=\; \sum_{j=0^l}^{n} \varphi(x_j) s_j^l(x).$$

Относительно вычислительной схемы (6.6) — (6.8), (6.13) — (6.15) справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.1. *В условиях теоремы 3.1 при всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого, сплайн–функции $\varphi_n^l(x)$, $\psi_n^l(x)$ ($l = 0; 1$), определяемые методом сплайн–коллокации (6.1), (6.2), (6.6) — (6.8), (6.13) — (6.15), существуют и единственны. Функции $f_n^l = \left(\varphi_n^l, \psi_n^l\right)$ сходятся к точному решению $f^* = (\varphi^*, \psi^*)$ системы интегральных уравнений (6.1), (6.2) со скоростью*

$$\|f^* - f_n^l\| \;=\; O\left(\max\left\{\omega_x\left(t_{11}; \delta_n\right), \omega_x\left(t_{22}; \delta_n\right)\right\} \,+\, \delta_n |\ln \delta_n|\right). \tag{7.3}$$

Доказательство. Основное пространство X, в котором рассматривается система интегральных уравнений (6.1), (6.2), будем выбирать в зависимости от степени l сплайнов, используемых при построении вычислительной схемы. В случае $l = 0$ рассмотрим пространство $X = M\,[-d, d] \times M\,[-d, d]$ с нормой

$$\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_X \;=\; \max\left(\|\varphi\|_M, \; \|\psi\|_M\right),$$

где $M[-d, d]$ — пространство ограниченных на $[-d, d]$ функций с нормой $\|\varphi\|_M = \sup\limits_{x \in [-d,d]} |\varphi(x)|$. В случае $l = 1$ рассмотрим пространство $X = C\,[-d, d] \times C\,[-d, d]$ с нормой

$$\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_X \;=\; \max\left(\|\varphi\|_C, \; \|\psi\|_C\right).$$

Систему интегральных уравнений (6.1), (6.2) можно записать в виде операторного уравнения в пространстве X

$$Kf \;\equiv\; f \,+\, Tf \;=\; g, \tag{7.4}$$

где

$$f \;=\; \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}, \quad g \;=\; \begin{pmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \end{pmatrix}, \quad T \;=\; \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{11} & T_{22} \end{pmatrix},$$

$$T_{ij}\chi(x) \;=\; \int\limits_{-d}^{d} t_{ij}(x,\tau)\chi(\tau)\,d\tau, \quad i,j=1,2.$$

Пусть X_n^l — пространство функций вида $f_n^l(x) \;=\; \begin{pmatrix} \varphi_n^l(x) \\ \psi_n^l(x) \end{pmatrix}$ $(l = 0;1)$, где $\varphi_n^l(x)$, $\psi_n^l(x)$ определены соотношением (6.3). Вычислительная схема (6.6) — (6.8), (6.13) — (6.15) эквивалентна заданному в пространстве X_n^l операторному уравнению

$$K_n^l f_n^l \;\equiv\; f_n^l \;+\; \overline{P}_n^l(T f_n^l) \;=\; \overline{P}_n^l g, \quad \left(f_n^l \in X_n^l\right), \tag{7.5}$$

где
$$\overline{P}_n^l \begin{pmatrix} \varphi_n^l(x) \\ \psi_n^l(x) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} P_n^l \varphi_n^l\,(x) \\ P_n^l \psi_n^l(x) \end{pmatrix},$$

а через P_n^l обозначен оператор сплайн–интерполирования степени l $(l = 0;1)$ по узлам (6.4). Эквивалентность здесь понимается в следующем смысле: если система (6.7) при $l=0$ (или (6.14) при $l=1$) имеет единственное решение $\{c_j^*, d_j^*\}$, то вектор $f_n^* \;=\; \left(\sum\limits_{j=0^l}^{n} c_j^* s_j^l(x), \sum\limits_{j=0^l}^{n} d_j^* s_j^l(x)\right)^t$ является решением (7.5), и, наоборот, если (7.5) имеет решение f_n^* $(l = 0;1)$, то система (6.7) (соответственно (6.14)) также имеет решение $\{c_j^*, d_j^*\}$, причём $f_n^* = \left(\sum\limits_{j=0^l}^{n} c_j^* s_j^l(x), \sum\limits_{j=0^l}^{n} d_j^* s_j^l(x)\right)^t$.

В предыдущих разделах доказана однозначная разрешимость системы интегральных уравнений (6.1), (6.2). Таким образом, для доказательства однозначной разрешимости уравнения (7.5) достаточно показать близость операторов K и K_n^l на подпространстве X_n^l.

Пусть $f_n^l \in X_n^l$, тогда

$$\left\|K f_n^l \;-\; K_n^l f_n^l\right\| \;=\; \left\|T f_n^l \;-\; \overline{P}_n^l T f_n^l\right\| \;\le$$
$$\le\; \max\left\{\left\|T_{11}\varphi_n^l - P_n^l T_{11}\varphi_n^l\right\| + \left\|T_{12}\psi_n^l - P_n^l T_{12}\psi_n^l\right\|;\right.$$
$$\left.\left\|T_{21}\varphi_n^l - P_n^l T_{21}\varphi_n^l\right\| + \left\|T_{22}\psi_n^l - P_n^l T_{22}\psi_n^l\right\|\right\}.$$

Используя лемму 5.2, приходим к неравенству

$$\left\|K f_n^l \;-\; K_n^l f_n^l\right\| \;\le$$
$$\le \max\left\{\omega\left(T_{11}\varphi_n^l;\delta_n\right) + \omega\left(T_{12}\psi_n^l;\delta_n\right);\omega\left(T_{21}\varphi_n^l;\delta_n\right) + \omega\left(T_{22}\psi_n^l;\delta_n\right)\right\}.$$

Правую часть этого неравенства можно оценить следующим образом

$$\begin{gathered}\left\|Kf_n^l \;-\; K_n^l f_n^l\right\| \;\le \\ \le\; A_1 \cdot \max\left(\omega_x\left(t_{11};\delta_n\right)\|\varphi_n^l\| + \left(\omega_x\left(\hat{t}_{12};\delta_n\right) + \delta_n|\ln\delta_n|\right)\|\psi_n^l\|;\right. \\ \left.\omega_x\left(t_{22};\delta_n\right)\|\varphi_n^l\| + \left(\omega_x\left(\hat{t}_{21};\delta_n\right) + \delta_n|\ln\delta_n|\right)\|\psi_n^l\|\right\}.\end{gathered} \tag{7.6}$$

Поскольку функции $\hat{t}_{12}$, $\hat{t}_{21}$ гладкие, можно продолжить неравенства (7.6):

$$\begin{gathered}\left\|Kf_n^l \;-\; K_n^l f_n^l\right\| \;\le \\ \le\; A_2 \cdot \max\left(\omega_x\left(t_{11};\delta_n\right)\|\varphi_n^l\| + \left\{\delta_n + \delta_n|\ln\delta_n|\right\}\|\psi_n^l\|;\right. \\ \left.\omega_x\left(t_{22};\delta_n\right)\|\varphi_n^l\| + \left\{\delta_n + \delta_n|\ln\delta_n|\right\}\|\psi_n^l\|\right) \;\le \\ \le\; A_3 \cdot \left(\max\left\{\omega_x\left(t_{11};\delta_n\right), \omega_x\left(t_{22};\delta_n\right)\right\}\|\varphi_n^l\| + \delta_n|\ln\delta_n|\|\psi_n^l\|\right).\end{gathered}$$

Обозначив

$$\varepsilon_n \;=\; \max\left\{\omega_x\left(t_{11};\delta_n\right), \omega_x\left(t_{22};\delta_n\right)\right\} \;+\; \delta_n|\ln\delta_n|,$$

получим

$$\left\|Kf_n^l \;-\; K_n^l f_n^l\right\| \;\le\; A\,\varepsilon_n \max\left\{\|\varphi_n^l\|;\|\psi_n^l\|\right\} \;=\; A\,\varepsilon_n\,\|f_n^l\|. \tag{7.7}$$

Правая часть неравенства (7.7) при $n \to \infty$ стремится к нулю в силу условия $\delta_n \to 0$. Это означает, что выполнены условия теоремы 7 работы [3]. Следовательно, операторное уравнение (7.5) однозначно разрешимо хотя бы при $n > n_0$, где целое число n_0 выбрано из условия $\varepsilon_{n_0}\|K^{-1}\| < 1$. Сходимость приближённого решения к точному и оценка (7.3) следуют из указанной теоремы и неравенства (7.6).

Замечание. Без каких–либо существенных изменений доказательство теоремы переносится на случай более общей системы интегральных уравнений

$$K_i\overline{\varphi}\,(x) \;=\; \overline{\varphi}\,(x) + \sum_{j=1}^{k}\int_a^b \mu_j(|x-\tau|)\,t_{ij}\,\varphi_j(\tau)\,d\tau \;=\; g_i(x), \quad i=\overline{1,k}, \tag{7.8}$$

где $t_{ij}(x,\tau)$ — ограниченные функции, непрерывные по переменной x равномерно относительно τ, $g_i(x)$ — непрерывные функции и

$$\mu_j(|x-\tau|) = \frac{\ln^{m_j}|x-\tau|}{|x-\tau|^{\alpha_j}}, \quad m_j = 0,1,2,\ldots,N < \infty,\; 0 \le \alpha_j < 1,\; j=\overline{1,k}.$$

Через $\overline{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x))$ в (7.8) обозначен вектор неизвестных функций. Относительно системы (7.8) предполагаем, что при любой правой части $\overline{g}(x) = (g_1(x), \ldots, g_k(x))$ имеется единственное решение.

Погрешность приближённого решения оценивается так:

$$\left\|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_n^l\right\| = O\left(\max_{1\le i\le k}\left\{\omega(g_i;\delta_n) + \sum_{j=1}^{k}\omega_x(h_{ij};\delta_n) + \delta_n^{1-\alpha_i}|\delta_n|\right\}\right),$$

где $\overline{\varphi}^*(x) = (\varphi_1^*(x), \ldots, \varphi_k^*(x))$ — точное решение системы интегральных уравнений (7.8), а $\overline{\varphi}_n^l(x) = \left\{\left(\varphi_n^l\right)_1(x), \ldots, \left(\varphi_n^l\right)_k(x)\right\}$ — приближённое решение, найденное ступенчатым ($l = 0$) или полигональным ($l = 1$) методом сплайн–коллокации.

Список литературы

[1] Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. *Теоретические основы акустики океана.* — Л.: Гидрометеоиздат, 1982. — 264 с.

[2] Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* — М.: Наука, 1976. — 528 с.

[3] Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* — Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1980. — 232 с.

[4] Галишникова Т. Н., Ильинский А. С. *Численные методы в задачах дифракции.* — М.: Изд–во Московск.. ун–та, 1987. — 208 с.

[5] Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В. *Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн.* — М.: Изд–во Московск. ун–та, 1989. — 184 с.

[6] *Интегральная оптика* / Под ред. Т. Тамира. — М.: Мир, 1978. — 344 с.

[7] Колтон Д., Кресс Р. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* — М.: Мир, 1987. — 311 с.

[8] Липачёв Е. К. *К приближенному решению краевой задачи дифракции волн на областях с бесконечной границей* // Изв. Вузов. Матем. — 2001. — N 4. — С. 69 – 72.

[9] Липачёв Е. К. *О краевых задачах для уравнения Гельмгольца в областях с "неровной" границей* // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 17. — Казань: Казанск. матем. об–во., 2002. — С. 79 – 89.

[10] Мазья В. Г. *Граничные интегральные уравнения* // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундам. напр. Т. 27. — М.: ВИНИТИ, 1988. — С. 131 – 228.

[11] Плещинский Н. Б. *Метод преобразования Фурье в задачах сопряжения электромагнитных полей* // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 6. — Казань: Казанск. матем. об–во., 2000. — С. 153 – 185.

[12] Федоров Н. Н. *Основы электродинамики.* — М.: Высш. школа, 1980. — 399 с.

[13] Шестопалов Ю. В. *Применение метода обобщённых потенциалов для решения некоторых задач теории дифракции и распространения волн* // Ж. вычисл. матем. и мат. физ. — 1990. — 30, N 7. — С. 1081 – 1092.

[14] *Electromagnetic Theory of Gratings* / Ed. by R. Petit. — Berlin–Heidelberg–New York, 1980. — 284 p.

[15] Kleinman R.E., Martin P.A. *On Single Integral Equations for the Transmission Problem of Acoustics* // SIAM J. Appl. Math. — 1988. — V. 48. — P. 307 – 325.

[16] Kress R., Roach G. F. *Transmission problems for the Helmholtz equation.* // J. Math. Phys. — 1978. — Vol. 19. — P. 1433 – 1437.

[17] Lipachev E. K. *In Boundary Integral Equation Method in Scattering Problem for Unbounded Domains* // SIAM Proc. in Appl. Math. — 2000. — V. 102. — P. 509 – 512.

[18] Pleshchinskaya I. E., Pleshchinskii N. B. *On classification of eigen waves of planar, cylindrical and spherical dielectric waveguides*// Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Proc. VII Int. Conf. MMET*98. Kharkov, Ukraine, June 2–5, 1998. — V. 2. — P. 781 – 783.