Дорогие студенты, вы зашли в так называемую "Виртуальную аудиторию," в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). Особенно следует оставлять большие пространства сверху и снизу фотографируемого листа. В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply'ем.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 53

Частные производные. Дифференциал функции.

Будем рассматривать, как и на прошлом занятии, функцию двух переменных $f(x,y)$, заданной на множестве $D \in \mathbb{R}^2$.

Производная функции $f(x,y)$ по переменной x при фиксированном y называется **частной производной** *f по x и обозначается как $\partial f/\partial x$ или f'_x.*

Аналогичным образом определяется частная производная f по y : $\partial f/\partial y$. Частные производные от частных производных определяют производные высших порядков и *смешанные производные:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \text{и т.д.}$$

Пример 1. *Найти все частные производные до второго порядка включительно у функции*

$$u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2(1+y^2/x^2)} = -\frac{y}{x^2+y^2)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x(1+y^2/x^2)} = -\frac{x}{x^2+y^2)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{x^2+y^2)^2} = -\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2)^2}.$$

Порядок взятия производных по разным переменным, когда вычисляется смешанная производная, может быть произвольным, если функция и ее производные являются *дифференцируемыми* функциями, и это понятие для функций нескольких переменных отличается от определения дифференцируемости функции одной переменной.

Определение 1. *Если полное приращение функции f*

$$\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x,y)$$

может быть представлено в виде

$$\Delta f(x,y) = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\Delta\rho),$$

где функции A и B не зависят от Δx и Δy, а $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, то функция $f(x,y)$ называется **дифференцируемой** *в точке (x,y), а главная линейная часть $A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y$ приращения $\Delta f(x,y)$, равная*

$$d\,f(x,y) = f'_x(x,y)d\,x + f'_y(x,y)d\,y$$

где $d\,x = \Delta x, \quad d\,y = \Delta y$, называется **дифференциалом** *функция $f(x,y)$ в точке (x,y).*

Дифференциал n-го порядка

$$d^n\, f(x,y) = \left(d\,x\frac{\partial}{\partial x} + d\,y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y).$$

Например, дифференциал функции $f(x,y)$ второго порядка имеет вид

$$d^2\, f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial\, x^2}d\,x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial\, x\,\partial\, y}d\,x\,d\,y + \frac{\partial^2 f}{\partial\, y^2}d\,y^2\,.$$

Следует различать понятие дифференцируемости функции и существование частных производных! Функция может иметь частные производные по всем переменным, но не быть дифференцируемой.

Пример 2. *Показать, что функция* $f(x, y,) = \sqrt{|\,x\,y\,|}$ *имеет в точке* $(0, 0)$ *обе частные производные* $f'_x(0, 0)$ *и* $f'_y(0, 0)$, *однако не является дифференцируемой в этой точке.*

Решение. Поскольку мы имеем дело с функцией, в записи которой имеются модули, то лучше вычислять частные производные, используя определение производной функции одной переменной с помощью асимптотического ($\Delta x \to 0$) функции $f(x)$: $\quad f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$.

Имеем:

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x,\ y) - f(x, y) \ = \ \sqrt{|\,(x + \Delta x)\,y\,|} \ - \ \sqrt{|\,x\,y\,|}\,.$$

Мы должны вычислить производную, когда $x = y = 0$. Однако приращение функции $\Delta f(x, y)$ при таких значениях x и y равно нулю, откуда следует, что $f'_x(0, 0) = 0$. Легко видеть, что и $f'_y(0, 0) = 0$.

Однако, если предположить, что f дифференцируема, то по определению дифференцируемости должно выполняться равенство

$$f(0 + \Delta x,\ 0 = \Delta y) - f(x, y) \ = \ \sqrt{|\,\Delta x\,\Delta y\,|} =$$

$$= f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y + o(\sqrt{|\,(\Delta x)^2\,(\Delta y)^2\,|}),$$

то есть должно быть $\sqrt{|\,\Delta x\,\Delta y\,|} = o(\sqrt{|\,(\Delta x)^2\,(\Delta y)^2\,|})$ при любом способе стремления Δx и Δy к нулю. Но если положить $\Delta x = \Delta y$, то получаем явное противоречие: $|\,\Delta x\,| = o(\Delta x)$.

Следовательно, функция $f(x, y,) = \sqrt{|\,x\,y\,|}$ имеет в точке $(0, 0)$ равные нулю частные производные, но не является дифференцируемой в этой точке функцией.

Дифференциал функции обычно используется при решении арифметических задач на приближенное вычисление. Мы решали такого рода задачи с помощью дифференциала функции одного переменного. Покажем на примере, как это делается с использованием дифференциала функции двух переменных.

Пример 3. *Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить* $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$.

Решение. Сначала выясним, о значении какой функции идет речь? Если положить $x = 1,02$ и $y = 1,97$, то, очевидно, $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$.

Теперь обратимся к выбору Δx и Δy. Значения приращений следует выбирать из условия простоты вычисления функции и ее производных, обращаясь к приближенной формуле

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \ \approx \ f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y. \qquad (1)$$

Легко видеть, что при $x_0+\Delta x = 1,02$ и $y_0+\Delta y = 1,97$), следует положить $x_0 = 1,\ \Delta x = 0,02$ и $y_0 = 2,\ \Delta y = -0.03$.

Теперь мы имеем все необходимое для вычисления $\sqrt{1,02^3+1,97^3}$. Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial e} = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}},$$

то

$$f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y) = \sqrt{(x_0+\Delta x)^3+(y_0+\Delta y)^3} \approx \sqrt{x_0^3+y_0^3}+$$

$$\frac{3x_0^2}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\Delta x + \frac{3y_0^2}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\Delta y\,.$$

Подставляя в эту формулу выбранные значения $x_0 = 1,\ \Delta x = 0,02$; $y_0 = 2,\ \Delta y = -0.03$ и производя необходимые арифметические действия, получаем, что $\sqrt{1,02^3+1,97^3} \approx 2,95$.

Введем еще одно, важное для функций нескольких переменных, понятие производной по выбранному направлению.

При вычислении частных производных мы брали приращения в направлении осей координат. Естественно, возникает вопрос, а нельзя ли взять приращения в произвольном направлении? Давайте решим этот вопрос, рассмотрев функцию большего, чем два, числа переменных.

Определение 2. *Производная функции $u = u(x,y,z)$ в направлении $l(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, которое определяется направляющими косинусами $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma,\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1\}$, задается формулой*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{2}$$

Пример 4. *Найти производную функции $u = xyz$ в точке $M\,(1,\,1,\,1)$ в направлении*

$$l\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Вычисляя соответствующие производные в формуле (2), получаем, что

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \left[(yz + xz + y)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right]_{x=1,\,y=1,\,z=1} = \sqrt{3}\,.$$

Скорость наибольшего роста функции в фиксированной точке (x, y, z) по величине и направлению определяется вектором, который называется **градиентом** функции $u(x, y, z)$:

$$\text{grad} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{\mathbf{k}}.$$

Длина этого вектора вычисляется по формуле

$$|\,\text{grad}\,| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

а его направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{\partial u/\partial x}{|\,\text{grad}\,|} \qquad \cos\beta = \frac{\partial u/\partial y}{|\,\text{grad}\,|} \qquad \cos\gamma = \frac{\partial u/\partial z}{|\,\text{grad}\,|}\,.$$

Задание 53

Решение следующих задач, взятых из задачника Демидовича, высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу. Некоторые из этих задач могут показаться достаточно сложными, особенно та, что отмечена звездочкой, но, зато, их решение оцениваются более высоким баллом.

3228. *Найти частные производные до второго порядка включительно от функции*

$$u = x^{y^z}.$$

3341. *Найти* $d\,u$ *и* d^2u *от функции*

$$u = \frac{z}{x^2 + y^2}.$$

3245.г. *Заменяя приращение дифференциалом, приближенно вычислить*

$$\sin 29^o \cdot \operatorname{tg} 46^o.$$

3252*. *Показать, что функция*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0 \ . \end{cases}$$

в окрестности точки $(0,0)$ *непрерывна и имеет ограниченные частные производные* f'_x *и* f'_y, *однако эта функция недифференцируема в точке* $(0,0)$.

3258. *Найти*

$$\frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3}\,(x^3 \sin y + y^3 \sin x).$$

3346. *Найти величину и направление градиента функции*

$$u = \frac{1}{r}\,, \quad \text{где} \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,$$

в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.