ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 11. № 3 (2019). С. 3-9.

УДК 517.983:517.986

ПЕРЕНОРМИРОВКИ ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

А.М. БИКЧЕНТАЕВ

Аннотация. Работа посвящена некоммутативным аналогам классических методов построения функциональных пространств. Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Пусть $\widetilde{\mathcal{M}}$ – $*$-алгебра τ-измеримых операторов, $|X| = \sqrt{X^*X}$ для $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Линеал $\mathcal{E}$ в $\widetilde{\mathcal{M}}$ называется идеальным пространством на $(\mathcal{M}, \tau)$, если 1) из $X \in \mathcal{E}$ следует, что $X^* \in \mathcal{E}$; 2) из $X \in \mathcal{E}$, $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $|Y| \leqslant |X|$ следует, что $Y \in \mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ – идеальные пространства на $(\mathcal{M}, \tau)$. Предложен метод построения отображения $\tilde{\rho}\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ с хорошими свойствами, используя заданное на положительном конусе $\mathcal{E}^+$ отображение ρ. При этом, если $\mathcal{E} = \mathcal{M}$ и $\rho = \tau$, то $\tilde{\rho}(X) = \tau(|X|)$ и, в случае конечности следа τ, $\tilde{\rho}(X) = \|X\|_1$, для всех $X \in \mathcal{M}$. Исследован случай, когда $\tilde{\rho}(X)$ эквивалентно исходному отображению $\rho(|X|)$. Используя отображения на $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, построено новое отображение с хорошими свойствами на сумме $\mathcal{E} + \mathcal{F}$. Приведены примеры таких отображений. Результаты являютя новыми и для $*$-алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, снабженной каноническим следом $\tau = \mathrm{tr}$.

Mathematics Subject Classification: 46L10; 47C15; 46L51

1. Введение

Работа посвящена некоммутативным аналогам классических методов построения функциональных пространств. Начало развития соответствующего аспекта теории некоммутативного интегрирования связана с именами И. Сигала и Ж. Диксмье, которые в начале 1950-х гг. создали теорию интегрирования относительно следа на полуконечной алгебре фон Неймана [1]. Результаты этих исследований нашли эффектные применения в теории двойственности для унимодулярных групп и стимулировали прогресс «некоммутативной теории вероятностей». Теория алгебр измеримых и локально измеримых операторов интенсивно развивается и имеет интересные приложения в различных областях функционального анализа, математической физики, статистической механики, квантовой теории поля.

До середины 1980-х гг. идеальные пространства измеримых операторов служили преимущественно объектом исследования (см. [2] и библиографию в ней). В последнее время появились публикации, в которых они выступают как инструмент (например, [3]). Вышесказанное демонстрирует актуальность поиска новых методов построения идеальных пространств и развития общей теории этих пространств. В [4], [5] были предложены новые методы построения идеальных пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана и исследованы геометрические и топологические свойства полученных пространств.

A.M. Bikchentaev, Renormalizations of measurable operator ideal spaces, affiliated to a semifinite von Neumann algebra.

Работа выполнена при поддержке субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

Поступила 22 августа 2018 г.

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ – идеальные пространства на $(\mathcal{M}, \tau)$. В разделе 3 предложен метод построения отображения $\tilde{\rho}\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ с хорошими свойствами, используя заданное на положительном конусе $\mathcal{E}^+$ отображение ρ. При этом, если $\mathcal{E} = \mathcal{M}$ и $\rho = \tau$, то $\tilde{\rho}(X) = \tau(|X|)$ и, в случае конечности следа τ, $\tilde{\rho}(X) = \|X\|_1$, для всех $X \in \mathcal{M}$. Исследован случай, когда $\tilde{\rho}(X)$ эквивалентно исходному отображению $\rho(|X|)$. В разделе 4, используя отображения на $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, построено новое отображение с хорошими свойствами на сумме $\mathcal{E}+\mathcal{F}$. Результаты являютя новыми и для $*$-алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, снабженной каноническим следом $\tau = \mathrm{tr}$.

2. Обозначения и определения

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ – решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathcal{M}$, I – единица $\mathcal{M}$, $P^{\perp} = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, $\mathcal{M}^+$ – конус положительных элементов из $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1 = \{X \in \mathcal{M} :\ \|X\| \leqslant 1\}$.

Отображение $\varphi : \mathcal{M}^+ \to [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След φ называется *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \neq 0$; *полуконечным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) :\ Y \in \mathcal{M}^+,\ Y \leq X,\ \varphi(Y) < +\infty\}$ для каждого $X \in \mathcal{M}^+$; *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ $(X_i, X \in \mathcal{M}^+) \Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$ (см. [6, гл. V, §2]).

Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Далее всюду τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(P^{\perp}) < \varepsilon$. Множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ всех τ-измеримых операторов является $*$-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [1], [7]. Для семейства $\mathcal{L} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^{\mathrm{sa}}$ его положительную и эрмитову части, соответственно. Частичный порядок в $\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$, порожденный собственным конусом $\widetilde{\mathcal{M}}^+$, будем обозначать через $\leqslant$. Если $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $X = U|X|$ – полярное разложение X, то $U \in \mathcal{M}_1$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$.

В $*$-алгебре $\widetilde{\mathcal{M}}$ вводится топология t_τ сходимости по мере [7], фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$U(\varepsilon, \delta) = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \exists\, P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}\ (\|XP\| \leq \varepsilon \ \text{ и } \ \tau(P^{\perp}) \leqslant \delta)\}, \quad \varepsilon > 0,\, \delta > 0.$$

Известно, что $(\widetilde{\mathcal{M}},\ t_\tau)$ является полной метризуемой топологической $*$-алгеброй, причем $\mathcal{M}$ плотно в $(\widetilde{\mathcal{M}},\ t_\tau)$.

Через $\mu_t(X)$ обозначим *перестановку* оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(X)\colon (0, \infty) \to [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu_t(X) = \inf\{\|XP\| :\ \ P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}, \quad \tau(P^{\perp}) \leqslant t\}, \quad t > 0.$$

Множество τ-компактных операторов $\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \lim\limits_{t\to\infty} \mu_t(X) = 0\}$ является t_τ-замкнутым идеалом в $\widetilde{\mathcal{M}}$ [8]. Пусть m – линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Ассоциированное с $(\mathcal{M}, \tau)$ некоммутативное L_p-пространство Лебега $(0 < p < \infty)$ может быть определено как $L_p(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} :\ \ \mu_t(X) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$ с F-нормой (нормой для $1 \leqslant p < \infty$) $\|X\|_p = \|\mu_t(X)\|_p$, $X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$.

Линеал $\mathcal{E}$ в $\widetilde{\mathcal{M}}$ называется *идеальным пространством на* $(\mathcal{M}, \tau)$ (см. [9], [3] и [2]), если 1) из $X \in \mathcal{E}$ следует, что $X^* \in \mathcal{E}$; 2) из $X \in \mathcal{E}$, $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $|Y| \leqslant |X|$ следует, что

$Y \in \mathcal{E}$. Таковы, например, алгебра $\mathcal{M}$, совокупность элементарных операторов $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, $\widetilde{\mathcal{M}}_0$, $(L_1+L_\infty)(\mathcal{M},\tau)$ и $L_p(\mathcal{M},\tau)$ при $0<p<+\infty$. Для каждого идеального пространства $\mathcal{E}$ на $(\mathcal{M},\tau)$ имеем $\mathcal{M}\mathcal{E}\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$ [2, лемма 5].

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$ и $\tau = \mathrm{tr}$ – канонический след, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ совпадают с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и с идеалом компактных операторов в $\mathcal{H}$ соответственно. Имеем $\mu_t(X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X)\chi_{[n-1,n)}(t)$, $t>0$, где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность s-чисел компактного оператора X [10, с. 46]; χ_A – индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$. Тогда пространство $L_p(\mathcal{M},\tau)$ есть идеал Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$, $0<p<\infty$.

Лемма 2.1. (см. [11], с. 261). *Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $X \leqslant Y$, то существует оператор $Z \in \mathcal{M}_1$ такой, что $\sqrt{X} = Z\sqrt{Y}$ и $X = ZYZ^*$.*

Лемма 2.2. (см. [12], с. 720). *Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$ и $Z \in \widetilde{\mathcal{M}}$, то из неравенства $X \leq Y$ следует, что $ZXZ^* \leq ZYZ^*$.*

3. Перенормировка идеальных пространств

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, $\mathcal{E}$ – идеальное пространство на $(\mathcal{M},\tau)$. Если $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $A^*A \in \mathcal{E}$, то $AA^* \in \mathcal{E}$ [2, лемма 5]. Для отображения $\rho\colon \mathcal{E}^+ \to [0,+\infty]$ введем условия:

(i) если $X, Y \in \mathcal{E}^+$ и $X \leqslant Y$, то $\rho(X) \leqslant \rho(Y)$;

(ii) $\rho(X^*X) = \rho(XX^*)$ для всех $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ с $X^*X \in \mathcal{E}$;

(iii) $\rho(X+Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$ для всех $X, Y \in \mathcal{E}^+$.

Для отображения $\rho\colon \mathcal{E} \to [0,+\infty]$ введем условия:

(iv) $\rho(X) = \rho(|X|) = \rho(X^*)$ для всех $X \in \mathcal{E}$;

(v) $\rho(X+Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$ для всех $X, Y \in \mathcal{E}$;

(vi) $\rho(\lambda X) = |\lambda|\rho(X)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $X, Y \in \mathcal{E}$ (при этом $0 \cdot +\infty = 0$).

Пример 3.1. *Пусть $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ – нормированное идеальное пространство на $(\mathcal{M},\tau)$* [9]. *Тогда ограничение нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ на $\mathcal{E}^+$ удовлетворяет условиям* (i)–(iii), *а $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ удовлетворяет условиям* (iv)–(vi). *Примеры: $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ и $(L_p(\mathcal{M},\tau), \|\cdot\|_p)$ для $p \geqslant 1$.*

Пример 3.2. *Пусть $\rho = \langle(\cdot)\xi,\xi\rangle$ ($\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| = 1$) – векторное состояние на алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Сужение $\rho|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})^+}$ удовлетворяет условиям* (i) *и* (iii). *Для $\rho_1 = |\rho|$ выполнены условия* (v) *и* (vi).

Пример 3.3. *Пусть $\mathcal{E}$ – идеальное пространство на $(\mathcal{M},\tau)$ и $Y \in \mathcal{E}^+$. Положим $\rho(X) = \inf\{\lambda > 0 : \ X \leqslant \lambda Y\}$ для всех $X \in \mathcal{E}^+$, считая* inf *по $\varnothing$ равным $+\infty$. Тогда ρ удовлетворяет условиям* (i) *и* (iii).

Предложение 3.1. *Пусть $\mathcal{E}$ – идеальное пространство на $(\mathcal{M},\tau)$ и отображение $\rho\colon \mathcal{E} \to [0,+\infty]$ удовлетворяет условиям* (iv)–(vi) (*или* (i), (iv) *и* (v)). *Тогда $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{E} : \ \rho(X) < +\infty\}$ является идеальным пространством на $(\mathcal{M},\tau)$.*

Предложение 3.2. *Пусть $\mathcal{E}$ – идеальное пространство на $(\mathcal{M},\tau)$ и отображение $\rho\colon \mathcal{E} \to [0,+\infty]$ удовлетворяет условиям* (i)–(iii). *Тогда $\rho(X) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \rho(Y_k X Y_k^*)$ для всех $X \in \mathcal{E}^+$ и $\{Y_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{M}$ с $\sum_{k=1}^{n} Y_k^* Y_k \geqslant I$.*

Доказательство. В силу леммы 2.2 имеем

$$X \leqslant \sqrt{X}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^* Y_k\right)\sqrt{X} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{X} Y_k^* Y_k \sqrt{X}.$$

Поэтому $\rho(X) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \rho(\sqrt{X}Y_k^*Y_k\sqrt{X}) = \sum_{k=1}^{n} \rho(Y_kXY_k^*)$ и предложение доказано. $\square$

Лемма 3.1. *Пусть $\mathcal{E}$ – идеальное пространство на $(\mathcal{M},\tau)$ и отображение $\rho\colon \mathcal{E} \to [0,+\infty]$ удовлетворяет условиям* (i), (iv). *Если $X, Y \in \mathcal{M}_1$, то $\rho(XZY) \leqslant \rho(Z)$ для всех $Z \in \mathcal{E}$.*

Доказательство. Если операторы $A, B \in \mathcal{M}$, то $AZB \in \mathcal{E}$ для всех $Z \in \mathcal{E}$. Для всех $X \in \mathcal{M}_1$ и $Z \in \mathcal{E}$ в силу операторной монотонности функции $\lambda \mapsto \sqrt{\lambda}$ на $\mathbb{R}^+$ и леммы 2.2 имеем

$$\rho(XZ) = \rho(|XZ|) = \rho(\sqrt{Z^*X^*XZ}) \leqslant \rho(\sqrt{Z^*Z}) = \rho(|Z|) = \rho(Z).$$

Если $Y \in \mathcal{M}_1$, то $Y^* \in \mathcal{M}_1$ и $\rho(ZY) = \rho((ZY)^*) = \rho(Y^*Z^*) \leqslant \rho(Z^*) = \rho(Z)$. Лемма доказана. $\square$

Предложение 3.3. *Пусть $\mathcal{E}$ – идеальное пространство на $(\mathcal{M},\tau)$ и отображение $\rho\colon \mathcal{E} \to [0,+\infty]$ удовлетворяет условиям* (i), (iv). *Тогда ρ удовлетворяет условию* (ii).

Доказательство. Пусть $X = U|X|$ – полярное разложение оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Тогда $U, U^* \in \mathcal{M}_1$ и $XX^* = UX^*XU^* \in \mathcal{E}$. В силу леммы 3.1 имеем $\rho(XX^*) = \rho(UX^*XU^*) \leqslant \rho(X^*X)$. Заменив X на X^*, получаем $\rho(X^*X) \leqslant \rho(XX^*)$ и (ii) доказано. $\square$

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{E}$ – идеальное пространство на $(\mathcal{M},\tau)$, и задано отображение $\rho\colon \mathcal{E}^+ \to [0,+\infty]$. Положим*

$$\tilde{\rho}(X) = \sup_{Z\in\mathcal{M}_1} \sup_{0\leqslant A\leqslant Z|X|Z^*} \rho(A) \quad \text{для всех} \quad X \in \mathcal{E}. \tag{1}$$

Тогда для $\tilde{\rho}$ выполнены условия (i), (ii), (iv) *и $\tilde{\rho}(X) \geqslant \rho(|X|)$ для всех $X \in \mathcal{E}$.*

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathcal{E}^+$ и $X \leqslant Y$. В силу леммы 2.1 найдется оператор $U \in \mathcal{M}_1$ такой, что $X = UYU^*$. Поэтому

$$\tilde{\rho}(X) = \sup_{Z\in\mathcal{M}_1} \sup_{0\leqslant A\leqslant ZXZ^*} \rho(A) = \sup_{Z\in\mathcal{M}_1} \sup_{0\leqslant A\leqslant ZUYU^*Z^*} \rho(A) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{Z\in\mathcal{M}_1} \sup_{0\leqslant A\leqslant ZYZ^*} \rho(A) = \tilde{\rho}(Y)$$

и (i) установлено.

Пусть $X = U|X|$ – полярное разложение оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Тогда $|X^*| = U|X|U^*$ и $|X^*|^2 = U|X|^2U^*$. Имеем

$$\tilde{\rho}(X^*) = \sup_{Z\in\mathcal{M}_1} \sup_{0\leqslant A\leqslant Z|X^*|Z^*} \rho(A) = \sup_{Z\in\mathcal{M}_1} \sup_{0\leqslant A\leqslant ZU|X|U^*Z^*} \rho(A) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{Z\in\mathcal{M}_1} \sup_{0\leqslant A\leqslant Z|X|Z^*} \rho(A) = \tilde{\rho}(X).$$

С учетом равенства $(X^*)^* = X$, (iv) установлено. Теперь (ii) следует из предложения 3.3. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{E}$ – идеальное пространство на $(\mathcal{M},\tau)$, и пусть отображение $\rho\colon \mathcal{E}^+ \to [0,+\infty]$ удовлетворяет условию* (iii). *Тогда отображение $\tilde{\rho}\colon \mathcal{E} \to [0,+\infty]$, определенное по формуле* (1), *удовлетворяет условию* (v).

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathcal{E}$ и $\alpha = \tilde{\rho}(X+Y)$. Тогда для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдутся операторы $Z_\varepsilon \in \mathcal{M}_1$ и $A_\varepsilon \in \mathcal{E}^+$ такие, что

$$A_\varepsilon \leqslant Z_\varepsilon|X+Y|Z_\varepsilon^*, \quad \alpha \geqslant \rho(A_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon.$$

Существуют такие частичные изометрии $V, W \in \mathcal{M}_1$, что $|X+Y| \leqslant V|X|V^* + W|Y|W^*$ ([13, теорема 2.2]; [14]). Поэтому (см. также лемму 2.2) для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдутся операторы $Z_\varepsilon \in \mathcal{M}_1$ и $A_\varepsilon \in \mathcal{E}^+$ такие, что

$$A_\varepsilon \leqslant Z_\varepsilon V|X|V^*Z_\varepsilon^* + Z_\varepsilon W|Y|W^*Z_\varepsilon^*, \quad \alpha \geqslant \rho(A_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon.$$

В силу леммы 1 имеем для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется оператор $U_\varepsilon \in \mathcal{M}_1$ такой, что

$$A_\varepsilon = U_\varepsilon Z_\varepsilon V|X|V^* Z_\varepsilon^* U_\varepsilon^* + U_\varepsilon Z_\varepsilon W|Y|W^* Z_\varepsilon^* U_\varepsilon^*.$$

Операторы $U_\varepsilon Z_\varepsilon V$, $U_\varepsilon Z_\varepsilon W$ лежат в $\mathcal{M}_1$ и

$$\rho(A_\varepsilon) \leqslant \rho(U_\varepsilon Z_\varepsilon V|X|V^* Z_\varepsilon^* U_\varepsilon^*) + \rho(U_\varepsilon Z_\varepsilon W|Y|W^* Z_\varepsilon^* U_\varepsilon^*) \leqslant \tilde{\rho}(X) + \tilde{\rho}(Y).$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем $\alpha \leqslant \tilde{\rho}(X) + \tilde{\rho}(Y)$ и теорема доказана. □

Замечание 3.1. *В условиях теоремы 3.1 если $\rho(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ $(A \in \mathcal{E}^+)$, то $\tilde{\rho}(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ $(X \in \mathcal{E})$; если $\rho(\lambda A) = \lambda\rho(A)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}^+$ и $A \in \mathcal{E}^+$, то $\tilde{\rho}$ удовлетворяет условию (iv). Если ρ удовлетворяет условию (i), то $\tilde{\rho}(I) = \rho(I)$ и*

$$\tilde{\rho}(X) = \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \rho(Z|X|Z^*) \text{ для всех } X \in \mathcal{E}.$$

Предложение 3.4. *Пусть $\mathcal{E}$ – идеальное пространство на $(\mathcal{M}, \tau)$, $\rho\colon \mathcal{E}^+ \to [0, +\infty]$, и пусть отображение $\tilde{\rho}\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ определено по формуле* (1). *Если для ρ выполнены условия* (i) *и* (ii), *то $\tilde{\rho}(X) = \rho(|X|)$ для всех $X \in \mathcal{E}$.*

Доказательство. Имеем $Z^*Z \leqslant I$ для всех $Z \in \mathcal{M}_1$ и $\sqrt{|X|}Z^*Z\sqrt{|X|} \leqslant |X|$ для $X \in \mathcal{E}$ в силу леммы 2.2. Тогда

$$\tilde{\rho}(X) = \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \sup_{0 \leqslant A \leqslant Z|X|Z^*} \rho(A) = \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \rho(Z|X|Z^*) = \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \rho(\sqrt{|X|}Z^*Z\sqrt{|X|}) = \rho(|X|).$$

Таким образом, ограничение $\tilde{\rho}|_{\mathcal{E}^+}$ совпадает с ρ. Утверждение доказано. □

Пример 3.4. *Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{M}$ и $\rho = \tau$. Тогда $\tilde{\rho}(X) = \tau(|X|)$ и, в случае конечности следа τ, $\tilde{\rho}(X) = \|X\|_1$, для всех $X \in \mathcal{M}$.*

Предложение 3.5. *Пусть $\mathcal{E}$ – идеальное пространство на $(\mathcal{M}, \tau)$, $\rho\colon \mathcal{E}^+ \to [0, +\infty]$, и пусть отображение $\tilde{\rho}\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ определено по формуле* (1). *Если выполнены условия*

(vii) *существует $C_1 > 0$ такое, что $\rho(X^*X) \leqslant C_1\rho(XX^*)$ для всех $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ с $X^*X \in \mathcal{E}$;*

(viii) *существует $C_2 > 0$ такое, что $\rho(X) \leqslant C_2\rho(Y)$ для всех $X, Y \in \mathcal{E}^+$ с $X \leqslant Y$,*

то $\rho(|X|) \leqslant \tilde{\rho}(X) \leqslant 2C_1C_2^2\rho(|X|)$ для всех $X \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{E}$, $Z \in \mathcal{M}_1$ и $0 \leqslant A \leqslant Z|X|Z^*$ такие, что $\tilde{\rho}(X) \leqslant 2\rho(A)$. Имеем $\sqrt{|X|}Z^*Z\sqrt{|X|} \leqslant |X|$ в силу леммы 2.2 и

$$\tilde{\rho}(X) \leqslant 2\rho(A) \leqslant 2C_2\rho(Z|X|Z^*) \leqslant 2C_1C_2\rho(\sqrt{|X|}Z^*Z\sqrt{|X|}) \leqslant 2C_1C_2^2\rho(|X|).$$

Таким образом, $\rho(|X|) \leqslant \tilde{\rho}(X) \leqslant 2C_1C_2^2\rho(|X|)$ для всех $X \in \mathcal{E}$. Утверждение доказано. □

Замечание 3.2. *Пусть $\mathcal{E}$ – идеальное пространство на $(\mathcal{M}, \tau)$, где $\mathcal{M}$ – конечная алгебра фон Неймана (т.е. из $U \in \mathcal{M}$ и $U^*U = I$ следует, что $UU^* = I$). Пусть отображение $\rho\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условию* (v). *Положим*

$$\rho_1(X) = \sup_{Z, T \in \mathcal{M}_1} \rho(ZXT) \text{ для всех } X \in \mathcal{E}.$$

В теореме 2 [15] *показано, что отображение $\rho_1\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ удовлетворяет условиям* (i), (iv) *и* (v). *Для отображения ρ со свойством* (vi) *отображение ρ_1 также удовлетворяет условию* (vi).

Предложение 3.6. *Положим $\rho_2 = \widetilde{\rho|_{\mathcal{E}^+}}$. Тогда $\rho_2(X) \leqslant \rho_1(X)$ для всех $X \in \mathcal{E}$.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{E}$ и $\alpha = \rho_2(X)$. Тогда для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдутся операторы $Z_\varepsilon \in \mathcal{M}_1$ и $A_\varepsilon \in \mathcal{E}^+$ такие, что

$$A_\varepsilon \leqslant Z_\varepsilon|X|Z_\varepsilon^*, \ \ \alpha \geqslant \rho(A_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon.$$

В силу леммы 2.1 для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется оператор $U_\varepsilon \in \mathcal{M}_1$ такой, что

$$A_\varepsilon = U_\varepsilon Z_\varepsilon|X|Z_\varepsilon^* U_\varepsilon^*.$$

Поэтому
$$\rho_1(X)=\rho_1(|X|)=\sup_{Z,T\in\mathcal{M}_1}\rho(Z|X|T)\geqslant\rho(A_\varepsilon)>\alpha-\varepsilon.$$
В силу произвольности числа $\varepsilon>0$ имеем $\rho_1(X)\geqslant\alpha$ и предложение доказано. □

Пример 3.5. *Пусть отображение* $\rho\colon\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}\to\mathbb{R}^+$ *монотонно и унитарно инвариантно. Тогда отображение* $\rho_s\colon\widetilde{\mathcal{M}}\to\mathbb{R}^+$, *определенное формулой* $\rho_s(A)=\rho(s(|A|))$, *где* $A\in\widetilde{\mathcal{M}}$ *и* $s(|A|)$ *– носитель оператора* $|A|$, *удовлетворяет условиям* (i), (ii) *и* (iv).

4. Нормировка суммы идеальных пространств

Если $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ – идеальные пространства на $(\mathcal{M},\tau)$, то множества $\mathcal{E}\cap\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}+\mathcal{F}=\{A+B:\ A\in\mathcal{E},B\in\mathcal{F}\}$ также являются идеальными пространствами на $(\mathcal{M},\tau)$ [2, теорема 2]. Структура идеальных пространств модулярна: если $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются идеальными пространствами на $(\mathcal{M},\tau)$ и $\mathcal{E}\subset\mathcal{G}$, то $(\mathcal{E}+\mathcal{F})\cap\mathcal{G}=\mathcal{E}+(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})$ [2, теорема 3]. В некоммутативной теории интегрирования важную роль играет пространство $(L_1+L_\infty)(\mathcal{M},\tau)=L_1(\mathcal{M},\tau)+\mathcal{M}$ [12].

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ *– идеальные пространства на* $(\mathcal{M},\tau)$ *и* $\mathcal{G}=\mathcal{E}+\mathcal{F}$. *Если отображения* $\rho_1\colon\mathcal{E}\to[0,+\infty]$ *и* $\rho_2\colon\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ *удовлетворяют условиям* (i), (iv), *то отображение* $\rho\colon\mathcal{G}\to[0,+\infty]$, *определенное формулой*
$$\rho(Z)=\inf\{\rho_1(X)+\rho_2(Y):\ X\in\mathcal{E},Y\in\mathcal{F}\ \text{ и }\ Z=X+Y\},\tag{2}$$
также удовлетворяет условиям (i), (iv).

Доказательство. Пусть $Z=U|Z|$ – полярное разложение оператора $Z\in\mathcal{G}$. Тогда $|Z|=U^*Z$. Для проверки (iv) заметим, что $\rho(Z^*)=\rho(Z)$. В силу леммы 3.1 имеем
$$\begin{aligned}\underline{\rho(|Z|)}&=\inf\{\rho_1(X)+\rho_2(Y):\ X\in\mathcal{E},Y\in\mathcal{F}\ \text{ и }\ |Z|=X+Y\}\geqslant\\&\geqslant\inf\{\rho_1(X)+\rho_2(Y):\ X\in\mathcal{E},Y\in\mathcal{F}\ \text{ и }\ U|Z|=UX+UY\}\geqslant\\&\geqslant\inf\{\rho_1(UX)+\rho_2(UY):\ X\in\mathcal{E},Y\in\mathcal{F}\ \text{ и }\ U|Z|=UX+UY\}\geqslant\\&\geqslant\underline{\rho(Z)}=\inf\{\rho_1(X)+\rho_2(Y):\ X\in\mathcal{E},Y\in\mathcal{F}\ \text{ и }\ Z=X+Y\}\geqslant\\&\geqslant\inf\{\rho_1(X)+\rho_2(Y):\ X\in\mathcal{E},Y\in\mathcal{F}\ \text{ и }\ |Z|=U^*Z=U^*X+U^*Y\}\geqslant\\&\geqslant\inf\{\rho_1(U^*X)+\rho_2(U^*Y):\ X\in\mathcal{E},Y\in\mathcal{F}\ \text{ и }\ |Z|=U^*X+U^*Y\}\geqslant\\&\geqslant\inf\{\rho_1(T)+\rho_2(S):\ T\in\mathcal{E},S\in\mathcal{F}\ \text{ и }\ |Z|=T+S\}=\underline{\rho(|Z|)}\end{aligned}$$
и (iv) установлено. Для проверки (i) выберем $A,B\in\mathcal{E}^+$, $A\leqslant B$. В силу леммы 2.1 имеем $A=VBV^*$ для некоторого $V\in\mathcal{M}_1$. Пусть $\alpha=\rho(B)$. Тогда для каждого числа $\varepsilon>0$ найдутся операторы $X_\varepsilon\in\mathcal{E}$ и $Y_\varepsilon\in\mathcal{F}$ такие, что
$$B=X_\varepsilon+Y_\varepsilon,\ \alpha\leqslant\rho_1(X_\varepsilon)+\rho_2(Y_\varepsilon)<\alpha+\varepsilon.$$
Тогда $A=V(X_\varepsilon+Y_\varepsilon)V^*$ и в силу леммы 3.1 имеем
$$\rho(A)\leqslant\rho_1(VX_\varepsilon V^*)+\rho_2(VY_\varepsilon V^*)\leqslant\rho_1(X_\varepsilon)+\rho_2(Y_\varepsilon).$$
В силу произвольности числа $\varepsilon>0$, теорема доказана. □

Предложение 4.1. *Пусть* $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ *– идеальные пространства на* $(\mathcal{M},\tau)$ *и* $\mathcal{G}=\mathcal{E}+\mathcal{F}$. *Если отображения* $\rho_1\colon\mathcal{E}\to[0,+\infty]$ *и* $\rho_2\colon\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ *удовлетворяют условию* (v) (*соответственно,* (vi)), *то отображение* $\rho\colon\mathcal{G}\to[0,+\infty]$, *определенное формулой* (2), *также удовлетворяет условию* (v) (*соответственно,* (vi)).

Пример 4.1. *Имеем* $\mathcal{E}+\mathcal{F}=\widetilde{\mathcal{M}}$ *для* $\mathcal{E}=\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{F}=\widetilde{\mathcal{M}}_0$ [16]. *Топология* t_τ *может быть задана и с помощью идеальной* F-*нормы* $\rho_\tau(X)=\inf\limits_{t>0}\max\{t,\mu_t(X)\}$, $X\in\widetilde{\mathcal{M}}$. *Для* $Z\in\widetilde{\mathcal{M}}$ *определим (см. формулу* (2))
$$\rho(Z)=\inf\{\|X\|+\rho_\tau(Y):\ X\in\mathcal{M},Y\in\widetilde{\mathcal{M}}_0\ \text{ и }\ Z=X+Y\}.$$

Тогда ρ *удовлетворяет условиям* (iv) *и* (v). *Для ограничения* $\rho|_{\widetilde{\mathcal{M}}^+}$ *выполнены условия* (i)–(iii). *Таким образом, отображение* $\rho\colon \widetilde{\mathcal{M}} \to \mathbb{R}^+$ *является идеальной* F*-нормой, мажорирующей* ρ_τ. *Так как* $\|X\| = \lim\limits_{t\to 0+} \mu_t(X) = \sup\limits_{t>0} \mu_t(X) \geqslant \rho_\tau(X)$ *для всех* $X \in \mathcal{M}$, *имеем* $\rho(Z) \leqslant 2\rho_\tau(Z)$ *для всех* $Z \in \widetilde{\mathcal{M}}$.

Замечание 4.1. *Пусть* $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ *– идеальные пространства на* $(\mathcal{M}, \tau)$ *и* $\mathcal{G} = \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$. *Если отображения* $\rho_1\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ *и* $\rho_2\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ *удовлетворяют одному из условиий* (i)–(vi), *то отображение* $\rho\colon \mathcal{G} \to [0, +\infty]$, *определенное формулой* $\rho(Z) = \max\{\rho_1(Z), \rho_2(Z)\}$ *для всех* $Z \in \mathcal{G}$, *также удовлетворяет этому условию.*

Автор признателен профессору В.И. Чилину за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I.E. Segal *A non-commutative extension of abstract integration // Ann. Math. 1953.* **57***:3. P. 401–457. Русск. перевод:* Математика (сб. переводов) *1962* **6***:1. C. 65–132.*
2. *Бикчентаев А.М. Идеальные пространства измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Сиб. матем. журн. 2018.* **59***:2. C. 309–320.*
3. *Бер А.Ф., Левитина Г.Б., Чилин В.И. Дифференцирования со значениями в квазинормируемых бимодулях локально измеримых операторов // Матем. тр. 2014.* **17***:1. C. 3–18.*
4. *Бикчентаев А.М. Неравенство треугольника для некоторых пространств измеримых операторов // Конструктивная теория функций и функциональный анализ. № 8. Казань: Изд–во КГУ, 1992. C. 23–32.*
5. *A.M. Bikchentaev On noncommutative function spaces // Selected Papers in K-theory. Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1992.* **154***. P. 179–187.*
6. *M. Takesaki itTheory of operator algebras. I. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 124. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5. Springer-Verlag, Berlin (2002).*
7. *E. Nelson Notes on non-commutative integration // J. Funct. Anal. 1974.* **15***:2. P. 103–116.*
8. *F.J. Yeadon Non-commutative* L^p*-spaces // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1975.* **77***:1. P. 91–102.*
9. *Бикчентаев А.М. Об одном свойстве* L_p*-пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана // Матем. заметки. 1998.* **64***:2. C. 185–190.*
10. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука. 1965.*
11. *F.J. Yeadon Convergence of measurable operators // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1973.* **74***:(2). P. 257–268.*
12. *P.G. Dodds, T.K.-Y. Dodds, B. de Pagter Noncommutative Köthe duality // Trans. Amer. Math. Soc. 1993.* **339***:2. P. 717–750.*
13. *C.A. Akemann, J. Anderson, G.K. Pedersen Triangle inequalities in operator algebras // Linear Multilinear Algebra.1982.* **11***:2. P. 167–178.*
14. *Чилин В.И. Неравенство треугольника в алгебрах локально измеримых операторов // Математический анализ и алгебра. Сбор. науч. тр. Ташкент. ун-та. Ташкент: Изд-во ТашГУ, 1986. C. 77–81.*
15. *Бикчентаев А.М. О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана // Матем. заметки. 2004.* **75***:3. C. 342–349.*
16. *A. Stroh, Grame P. West* τ*-compact operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 1993.* **93***:1. P. 73–86.*

Айрат Мидхатович Бикчентаев,
Казанский Федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: `Airat.Bikchentaev@kpfu.ru`