

УДК: 53.072 + 519.95

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

В. Ю. Белашов¹, О. А. Харшиладзе², Дж. Л. Рогава²¹Казанский федеральный университет, 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18

E-mail: vybelashov@yahoo.com

²Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили,

Грузия, 380043, г. Тбилиси, ул. Университетская, 2

E-mail: oleg.kharshiladze@gmail.com

Аннотация. Представлены результаты численных экспериментов, выполненных на основе модифицированного метода КД, по исследованию динамики взаимодействия вихревых структур для различных конфигураций их взаимного расположения, знаков завихренности и расстояний между границами вихревых областей. Показаны примеры результатов моделирования для реальных вихревых систем в атмосфере и плазме.

Ключевые слова: вихри; моделирование; атмосфера; плазма; метод КД; режимы взаимодействия; явление квазивозврата; фазовое перемешивание.

SIMULATION OF INTERACTION OF VORTEX STRUCTURES

V. Yu. Belashov, O. A. Kharshiladze, J. L. Rogava

Abstract. The results of numerical experiments, made on the basis of the modified CD method, on study of the dynamics of interaction of vortical structures for various configurations of their relative positioning, signs of vorticity and distances between borders of vortical regions are presented. The examples of modeling results for real vortex systems in atmosphere and plasma are given.

Keywords: vortices; modeling; atmosphere; plasma; CD method; regimes of interaction, quasi-recurrence phenomenon, phase intermixing.

Введение. Основные уравнения

В работе численно изучается взаимодействие вихревых структур типа вихревых областей конечной площади (ВОКП [1]) в сплошных средах, таких как атмосфера, гидросфера и плазма в двумерном (2D) приближении, когда для описания движения применимы уравнения эйлерового типа. Уравнение Эйлера для невязкой несжимаемой жидкости $d\mathbf{u}/dt = \mathbf{F} - (1/\rho)\text{grad } p$ в переменных «завихренность – функция тока» в случае плоского движения принимает вид системы, состоящей из уравнения переноса вихря и уравнения Пуассона для функции тока [2]:

$$\partial_t \zeta + u \partial_x \zeta + v \partial_y \zeta = 0, \quad \Delta \psi = -\zeta, \quad (1)$$

где $\zeta = [\nabla, \mathbf{v}]$ – завихренность, $\mathbf{v} = [\nabla, \psi]$, где ψ – функция тока (ψ положительна, когда линии тока направлены против часовой стрелки); $u = \partial \psi / \partial y$, $v = -\partial \psi / \partial x$. Заметим, что уравнение переноса вихря является нелинейным, поскольку u и v есть функции ζ . Последние два члена в нем описывают конвекцию, и это означает, что вихрь переносится потоком.

Приведем примеры реальных физических задач, когда такое описание является справедливым. Простая модель 2D замагниченной плазмы Тэйлора-Макнамара [3] – заряженные нити, ориентированные вдоль магнитного поля \mathbf{B} , которые перемещаются с центрально-направленной скоростью $\mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$, имеет вид:

$$e_i d x_i / dt = (1/B) (\partial H / \partial y_i), \quad e_i d y_i / dt = -\partial H / \partial x_i,$$

где e_i – заряд на единицу длины, $H = \sum -e_i e_j \ln(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ – энергия кулоновского взаимодействия. В непрерывном пределе такая 2D плазма удовлетворяет уравнениям:

$$\partial \rho / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \mathbf{v} = -(1/B) (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \psi), \quad \nabla^2 \psi = -\rho, \quad (2)$$

где ρ – плотность заряда, $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, ψ – потенциал электрического поля. Видно, что эти уравнения идентичны уравнениям 2D движения невязкой несжимаемой жидкости, когда ρ – z -компонента завихренности ζ , ψ – функция тока, и для дискретных вихрей $B = 1$. Уравнения движения облаков идеальной ионосферной плазмы имеют аналогичный вид. Другие 2D непрерывные модели включают дебаевский радиус экранирования $k^2\psi$ в уравнении Пуассона (2) [4]: $\nabla^2\psi - k^2\psi = -\rho$. В этих моделях гамильтониан H описывает экранированное взаимодействие между нитями.

Модель Хасегавы-Мимы [5] включает ионно-поляризованный ток через уравнение движения ионов: $d\mathbf{v}/dt = (e/M)(-\nabla\phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. В этом случае k^{-1} уже не длина Дебая, а ионный ларморовский радиус (электронная температура), и экранировка есть косвенный эффект ионно-поляризованного тока.

Модель гидродинамических жидкостей Черни [6], описывающая движение земной атмосферы, также формально соответствует экранированному взаимодействию. Атмосферные потоки в горизонтальной плоскости описываются уравнением: $d\mathbf{v}/dt = -g\nabla h + \mathbf{R}\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{z}}$, где h – «глубина» атмосферы, \mathbf{R} – сила Кориолиса, а роль длины экранирования здесь играет радиус Россби $\sqrt{gH_0}/R$.

Существует много и других примеров вихревых движений в плазме и вращающихся жидкостях (см., например, [2, 7–9]), когда также используется гидродинамическое описание и уравнения могут быть сведены к виду (1) или (2).

Итак, система уравнений, описывающих движение жидкости, газа или плазмы, в обобщенных переменных имеет вид:

$$\partial\rho/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho = 0, \quad \mathbf{v} = -(1/B)(\hat{\mathbf{z}} \times \nabla\psi), \quad \nabla^2\psi - f = -\rho. \quad (3)$$

В зависимости от рассматриваемой среды, функции и переменные здесь будут иметь разный физический смысл (табл. 1), а система будет иметь вид рассмотренных выше уравнений.

Таблица 1. Смысл функций и переменных в зависимости от типа среды

Функция	Жидкость, газ	Плазма
ρ	z -компонента завихренности	линейная плотность заряда
ψ	функция тока	потенциал электрического поля
B	$B = 1$	модуль вектора магнитной индукции
f	$f = 0$	$f = 0$ – плазма с кулоновским взаимодействием $f = k^2\psi$ – плазма с экранированным кулоновским взаимодействием

Система (3) для разных физических систем решалась нами численно с использованием модифицированного метода контурной динамики, развитого и подробно описанного в [10, 11].

Результаты моделирования и заключение

На первом этапе нами были изучены режимы 2-вихревого (парного) взаимодействия в зависимости от величины ряда критических параметров [2, 9]. Было установлено, что для вихрей одинаковой полярности результат эволюции зависит от величины параметра δ – расстояния между границами взаимодействующих вихревых областей:

- при достаточно больших δ (рис. 1а) вихри, наряду с вращением вокруг собственных осей, вращаются вокруг их общего центра, их взаимодействие слабое и сводится к малому циклическому изменению их формы – наблюдается явление “квази-возврата”, отмеченное впервые в [1];
- при достаточно малых δ (рис. 1с) вихри, наряду с таким же вращением, взаимодействуют, формируя общую вихревую область, которая состоит из вихрей более мелкого масштаба, при этом имеет место режим активного взаимодействия с “фазовым перемешиванием”. Кри-

тическое начальное расстояние между двумя взаимодействующими вихрями, разделяющее два типа взаимодействия $\delta_{cr} = 3d/4$, где d – диаметр вихря;

- при $\delta \sim \delta_{cr}$ реализуется промежуточный случай (рис. 1b).

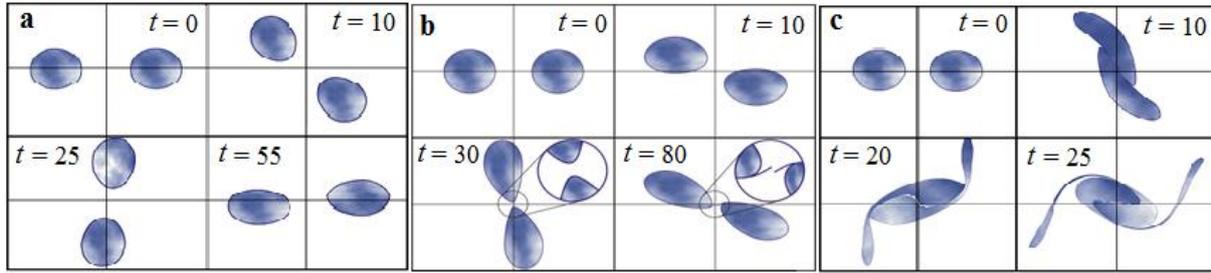


Рис. 1. Моды парного взаимодействия вихрей антициклонического типа.

Для двух вихрей противоположной полярности было установлено, что они практически не взаимодействуют, независимо от величины начального расстояния δ между их границами.

Задача для N -вихревых систем с $N = 3, 4$ рассматривалась в двух вариантах: для вихрей, расположенных в начальный момент линейно и для вихрей, расположенных в начальный момент в углах соответствующих равносторонних фигур. В численных экспериментах было установлено (см. рис. 2), что:

- при достаточно большом и равном расстоянии между вихрями эволюция приводит к формированию двух вихревых областей в результате более сильного взаимодействия каждого из “внешних” вихрей с ближайшим “внутренним” вихрем (рис. 2a). При этом, взаимодействие формирующихся пар подобно 2-вихревому случаю;
- при $\delta_i = \delta_{cr} = d/2$ ($i = 1, \dots, 4$) наблюдается формирование сложной вихревой структуры, состоящей из вихрей более мелких масштабов (рис. 2b). Дальнейшая эволюция приводит к формированию сложного турбулентного поля. Можно также видеть, что взаимодействие между внешними вихрями более сильное.

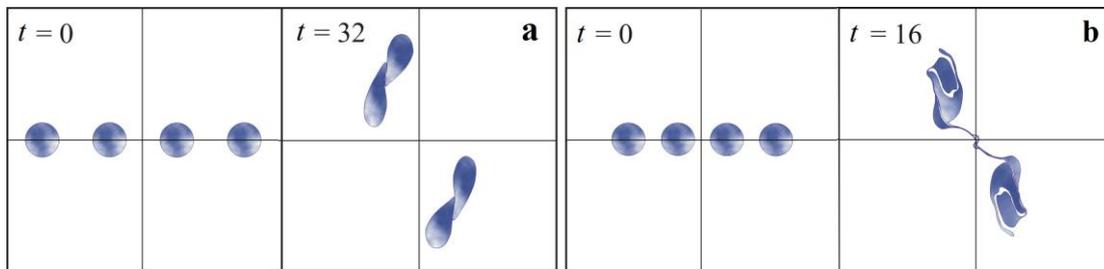


Рис. 2. 4-вихревое взаимодействие для линейной цепочки вихрей.

Далее нами были изучены 3D вихревые движения в плоско-стратифицированных сплошных средах, в частности, была промоделирована динамика взаимодействия 3D плоско вращающихся вихревых структур в «2D аппроксимации» в рамках многослойной модели среды. На рис. 3 показан результат моделирования взаимодействия двух вихревых трубок с экспоненциальным уменьшением их завихренности с ростом вертикальной координаты z . Видно, что вначале вступают во взаимодействие центральные области вихревых трубок и только потом вовлекаются во взаимодействие другие их области. Такое поведение объясняется более сильным взаимодействием центральных областей, которые расположены по отношению друг к другу на относительно малой дистанции, а их завихренности имеют относительно большие значения, так что отношение ζ/δ велико в сравнении с его значением для вершин и дна вихрей.

В качестве приложения к реальным средам нами было выполнено моделирование эволюции торнадо, при этом модельный вихрь (система ВОКП) ассоциировался путем преобразований подобия с реальным торнадо с видеозаписи. В экспериментах [2, 9], в частности, удалось показать, что малые поперечные возмущения оси торнадо приводят лишь к слабым ее колебаниям и, в целом, не влияют на структуру и устойчивость вихревой трубки. Другие изученные с

помощью представленного здесь подхода приложения – это формирование сложных вихревых структур и складок (folds) при поперечных возмущениях заряженных нитей в однородном поле \mathbf{B} с переходом потоков частиц в нестабильное состояние, что приводит к деформациям магнитного поля в зоне полярного каспа; и взаимодействие между “гидродинамическими” вихревыми структурами и пылевыми частицами в пылевой плазме (подробно об этом см. в [2, 9]).

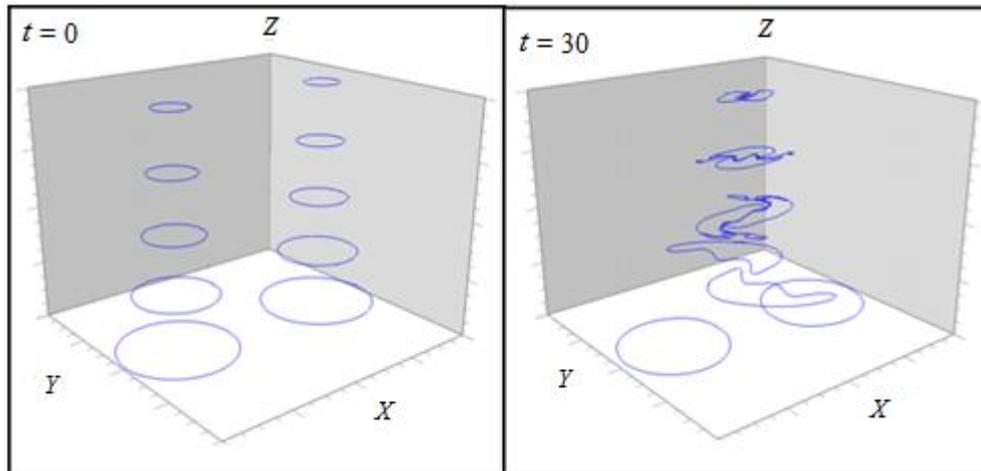


Рис. 3. Взаимодействие 3D плоско вращающихся вихревых трубок (многослойная модель среды).

Благодарности

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров. Работа была поддержана Национальным научным фондом Грузии им. Шота Руставели (SRNF) (грант № FR17 252).

Список литературы

1. Zabusky N.J, Hughes, M.N., Roberts K.V. Contour Dynamics for the Euler Equations in Two Dimensions // J. Comput. Phys. – 1979. – V. 135. – P. 220-226.
2. Belashov V.Yu. Interaction of N -vortex structures in a continuum, including atmosphere, hydrosphere and plasma // Advances in Space Research. – 2017. – V. 60. – P. 1878-1890.
3. Taylor J.B., McNamara B. Plasma diffusion in two dimensions // Phys. Fluids. – 1971. – V. 14. – P. 1492-1499.
4. Taylor J.B. Turbulence in two-dimensional plasmas and fluids // Plasma Phys. Control. Fusion. – 1977. – V. 39. – P. A1-A9.
5. Hasegawa A., Mima K. Pseudo-three-dimensional turbulence in magnetized nonuniform plasma // Phys. Fluids. – 1978. – V. 21. – P. 87-103.
6. Charney J.G. On the scale of atmospheric motions // Geophys. Public. Kosjones Nors. Videnshap-Acad. Oslo. – 1948. – V. 17. – P. 1-17.
7. Mikhailovskii A.B., Lakhin V.P., Mikhailovskaya L.F., Onishchenko O.G. On the theory of vortices in a plasma // Sov. Phys. JETP. – 1984. – V. 59. – P. 1198-1205.
8. Petviashvili V.I., Pokhotelov O.A. Solitary Waves in Plasmas and in the Atmosphere. Gordon and Breach Science Publishers, Reading-Philadelphia. – 1992.
9. Belashov V.Yu., Belashova E.S., Kharshiladze O.A. Nonlinear Wave Structures of the Soliton and Vortex Types in Complex Continuous Media: Theory, Simulation, Applications // Lecture Notes of TICMI. Vol. 18 / Ed. G. Jaiani. – Tbilisi: Tbilisi University Press, 2018. – 90 p.
10. Белашов В.Ю., Сингагулин Р.М. Алгоритм метода контурной динамики и моделирование вихревых структур. Казань: КГЭУ, 2003, 39 с. – Деп. ВИНТИ 11.02.2003 г., № 272-B2003.
11. Белашов В.Ю., Харшиладзе О.А. Модифицированный метод контурной динамики и моделирование вихревых структур // Ученые записки КГУ. – 2019. – № 1 (в печати).